

● SDE · 数学教学法系列

SDE 数学发生学教学法

数学对象与数学概念，是被“发现”的，还是被“发生”的？
—— 以小学数学为例

发现 → 发生

主讲：_____ | 教师研修专场

先看一个真实的缺!

**三年级“分数”那节课，当堂练习全班几乎全对。
一周后再问一句： $1/2$ 和 $1/3$ ，谁大？
近一半孩子答： $1/3$ 更大。**

他们不是没“学会”。是这个概念，从没在他们那里真正“发生”过。

**发现学，让孩子“认识”一个已经做好的数学对象；
发生学，让那个对象“在孩子这里重新长出来一次”。**

一句话之差，整节课的起点就不同。

两个词，一字之差

“发现”与“发生”，差在哪里

发现

去找一个本来就在那儿的东西。对象先在，你只是把它揭开、认出来。数、形，仿佛一直摆在那里等人看。

发生

在土壤里、经路径、造出显露，还要回写。对象不是现成的，是在真实需要中被生成、被稳定、被表达出来——而且反过来改写你已有的理解。

关键

发生 ≠ 产生。 产生是单行道，做出来就完了；发生是回环——最后那一笔“回写”，才是它真正住进孩子心里的证据。

六段路，从原理到明天的一节课

一 两种范式的地基

发现范式三块地基，发生范式三根支柱；一张总对照表。

二 数学对象的发生学原理

一个概念=一条 S·D·E 发生链的稳定结晶。

三 发生五步

用“缺口→框架→张力→实例→新缺口”替换“定义→性质→应用”。

四 七个小学案例

数·加法·位值·乘法·分数·等号·三角形，正反对照。

五 把一节课改成发生学

备课四问、五步模板、三条纪律、四个坑。

六 收束与留给你们的缺口

一句当堂自检，和一道明天的作业。

先约定一件事

今晚不否定发现学。
它在很多场合是对的，也最省力。

我们要辨的只是一处：它在哪一步，把孩子挡在了数学的门外。



两种范式的地基

发现学与发生学，不是两种技巧，是两种关于“数学对象从哪来”的根本假设。

发现学站在三块地基上

1 对象先在

数、形、运算，本来就在那儿，等着被找到。教学=把它揭示给孩子。

2 方法中立

讲授、发现、游戏只是路不同，终点那个“5”是同一个，怎么教不改变它。

3 知识累积

学完加法学乘法，一块块往上擦，像砌墙。

这三块地基，在数学课里长这样

对象先在

“5 就在那里，你去认它。” 黑板写个 5，数五个苹果，5 便被“认”出来了。

方法中立

“讲也行、玩也行，反正学到那个 5。” 于是教研只比“哪种方法效率高”，不问“它教出来的 5 一样吗”。

知识累积

“先学这个，再学那个，摞上去。” 课程像一条直线，缺了哪块补哪块，很少问“这块是怎么从上一块长出来的”。

发生学换成三根支柱（逐一替换）

1 条件共生成

对象不是先在的，是在真实土壤里被生成的。换掉“对象先在”。

2 路径生成

要经过一条差异路径才成形，怎么走，决定了长出什么。换掉“方法中立”。

3 生命周期

对象有原初→成熟→退化，不是永远现成。换掉“知识累积”。

一张表看全

发现学 vs 发生学：十个维度

维度	发现学数学教学法	发生学数学教学法
数学对象	先在，等待揭示	在土壤里被发生
教的起点	定义（成熟态）	缺口（真实问题）
学生角色	接收者、认领者	发生者、亲历者
“会了”的标志	能复述、能套用	看旧东西的眼光变了
迁移	常常迁移不动	回写过，自然迁移
错误	要纠正的偏差	路径的信息、发生的线索
等号 =	“得”、出结果的箭头	两边同一的关系（天平）
练习	巩固已给的形式	在新情境里再发生一次
评价	对不对、快不快	有没有真的发生与回写
典型失败	考完就掉、不迁移	热闹却无结算的假发生

最关键的一个词

发生 $\neq$ 产生。

产生是单行道：做出来，就完了。

发生是回环：要土壤、要路径、要显露——还要回写。

漏了回写，前面全白搭。

把“回写”说清楚

什么叫回写：概念反过来改写了旧底盘

回写=新概念发生后，倒回去改写孩子已有的理解。不是又记住一个新东西，而是旧东西在他眼里变了样。

例：学过分数之后，孩子看“整数”的眼光变了。他忽然明白：整数只是数轴上的一些点，中间还密密麻麻挤着别的数。——这一下，才叫分数发生了。

没有回写的“学过”，只是入库。 存进去了，却没和别的东西连上，考完就被清出内存。第 2 页那半数孩子，正是无回写。

两种“假发生”

热闹的课，也可能什么都没发生

假发生① 无底盘

- 没有真实缺口，概念悬空。
- 老师直接给出“今天学分数”，孩子并不觉得缺它。
- 挂不住：考完即掉，因为它从没挂在任何需要上。

假发生② 无回写

- 记住了形式，底盘没动。
- 会写 $1/2$ 、会做题，但对“整数”的看法丝毫未变。
- 被收编：新知识入了库，却没改写任何旧知识。不迁移。

老师最爱问的一个问题

数学对象，到底是“被发现”的，还是“被发生”的？

给一个够用的答案：对数学家，或许两说。

但对课堂上的孩子——凡是“没在他这里发生过”的对象，就等于不存在。

所以教学只认发生。

发现与发生，到底什么关系

发现，是发生的光滑化再显露

发现 = 发生 - 路径(D) - 土壤(E)，再端出来。

发生（原初态）

先有缺口(E)、走过路径(D)，最后才结晶出显露(S)。它粗糙、带着来路——看得见自己是怎么长出来的。

光滑化



磨掉 D 和 E

发现（光滑态）

把 D 和 E 磨平、抹去，只留下光滑的 S，再端出来——于是它“看起来本来就在那儿”。发现学的“对象先在”，正是这么来的。

教学要做的 把被磨掉的缺口(E)和路径(D)还原回来——给发现“去光滑化”，让对象在孩子这里重新发生一遍。这就是发生学。

第一段小结 · 并开一个缺口

范式一换，教学的起点就从“定义”挪到了“缺口”。

那么下一个问题来了——
一个数学概念，到底是由“什么”发生出来的？



数学对象与概念的发生学原理

一个数学概念，= 一条 $S \cdot D \cdot E$ 发生链的稳定结晶。它的语法是：在何种土壤里，经何种路径，成什么显露。

一句话定义

一个数学概念 = 一条发生链的稳定结晶。

它的语法是三句话：

在何种土壤（E）里 → 经何种路径（D）→ 成什么显露（S）。

倒过来问任何一个概念，都能拆出这三段。

S 维

S = 显露维（Show）：最后看得见的那个形

S 是概念最终“看得见、认得出”的稳定形。例：“5”“ $1/2$ ”“三角形”这些名字与符号，就是 S。

但要命的一点：S 是结果，不是起点。它是发生链跑完之后结晶出来的东西。

发现学的错，就是把 S 当起点。上来先给定义、先认符号——等于让孩子从终点倒着背。

D = 差异路径（Difference）：从缺口走到显露的那条路

D 是概念被走出来的路径，不是“不一样”那么简单。它有推进、承接、修正、收敛。

例：“一一对应”“平分”“重复相加”，都是路径。真正要教的是这条路，而不是路尽头那个名字。

缺 D = 凝滞不动。只给结论不给路径，孩子拿到的是一具没有来路的空壳。

E 维

E = 纠缠土壤（Entanglement）：概念得以发生的真实需要

E 是让概念不得不发生的真实情境与需要。它不是背景板，是发生的地基。

例：“两堆谁多”“三个饼分四人”“数太大数不过来”。正是这些真实的‘走不通’，逼出了新概念。

缺 E = 无根而散。没有土壤，概念对孩子就是天上掉下来的，抓不住也留不下。

三者的关系（点到为止

S、D、E 不是三段流水线，是非线性互生。

课堂上只需记一句：

先有土壤和路径，才结晶出显露；

显露一旦成形，又回过头改写土壤和路径。

这个“回过头”，就是回写。

数学对象的发生学原！

每个基本对象，都能问一句：

“它最初，是为了走通哪条走不通的路而发生的？”

数：为“比多少”而生 · 分数：为“整数不够分”而生

负数：为“不够减”而生 · 位值：为“数太大写不下”而生

一张“发生学原点”表

概念	发现学数学教学法	发生学数学教学法
数	先在的计数符号	为“比多少”而发生（一一对应）
加法	一种既定运算	为“合起来是多少”而发生（合并再数）
位值	个十百的规定	为“数太大写不下”而发生（捆成新单位）
乘法	口诀表	为“重复相加太慢”而发生（几个几打包）
分数	分子 / 分母的形式	为“整数不够分”而发生（平分要结算）
等号	“得”、出结果	为“同一个数有多条来路”而发生

发现学最容易犯的一件！

把“成熟态”当起点。

教科书顺序＝先定义 → 再性质 → 再应用。

可“定义”是整条发生链跑完之后的结晶。

把结晶当起点，等于让孩子从终点倒着背。

这个“结晶”，正是被光滑化、再显露出来的发生。

于是有了那个熟悉的现！

“大规模无回写学习”，就是这么来的。

从成熟态起步，孩子没有土壤和路径可走，只能把形式“入库”。
没有路径，就没有回写；没有回写，考完就掉。

第 2 页那半个班，根源在这里。

帮你判断“孩子的会是真会吗”

一个概念的三种“死法”

① 遗忘（E-death）

没人再用它，从共同体里消失。验法：还有没有人真的拿它解决问题？

② 变成常识（D-death）

熟到不假思索，“死于成功”。这是好事。验法：孩子会不会对它感到惊讶。

③ 过度自洽（S-death）

对一切追问都有现成答案，却不会用。危险的假会。验法：找一个反例，他慌不慌。

第二段小结 · 并开一个缺口

概念由 $E \rightarrow D \rightarrow S$ 发生，再回写。

既然如此——

一节课，到底该按什么顺序展开，才顺着发生走？



一节发生学的课，长什么样

用“缺口 → 框架 → 张力 → 实例 → 新缺口”，替换“定义 → 性质 → 应用”。

发生五步

五步一个环，不是一条线



第五步接回第一步——所以是环，不是线。每节课的结尾，是下一节课的开头。

第①②步：把缺口摆出来，把框架递过去

① 开缺口

制造一个真实的“走不通”。例：三个饼平分给四个人，每人多少？——孩子手里的整数，答不了。缺口就此打开。

② 立框架

递出解决它所需的新显露的雏形。“看来我们需要一个比 1 还小的数。”——不是给定义，是给方向。

第③④⑤步：亲跑、再发生、再开口

③ 走张力

让孩子在路径上真跑一遍。动手分饼、给结果命名、发现“两个 $\frac{1}{2}$ 拼成 1”。这一跑，概念才在他身上发生。

④ 落实例

换几个情境，让它再发生。分饼、量绳、切蛋糕——同一个 $\frac{1}{2}$ ，在不同土壤里再长一次。

⑤ 新缺口

用新问题开下一环。“那 $\frac{1}{2}$ 加 $\frac{1}{4}$ 呢？”——下一节课的门，这就推开了。

两种五步，正反对照

发现学五步 vs 发生学五步

环节	发现学数学教学法	发生学数学教学法
起点	先给定义	先制造缺口
主线	接收、记住形式	亲自跑一遍路径
例子的位置	应用，摆在最后	实例，是发生的一部分
结束	把题做完	开出一个新缺口
回写	几乎没有	收尾必验一次

一条纪律

每一节课，只对准“一道具体的缺口”。

贪多，缺口就模糊；缺口一模糊，什么都发生不了。
宁可一节课只让一个概念真正发生，也不要三个都停在入库。

四

七个案例：同一个概念，两种教法

数 · 加法 · 位值 · 乘法 · 分数 · 等号 · 三角形。每个案例，左手发现学、右手发生学，你自己判。

案例① 数是什么

黑板上写一个“5”，数五个苹果：“这就是 5。”

数，被当成一个既存的计数符号，先在那里。

孩子的任务，是把这个符号认下来、记住它。

诊断 5 是从终点递过来的。孩子认得符号，却不知道“数”这个东西是为了解决什么才存在的。

案例① 数是什么

E

缺口 · 土壤

“这两堆东西，哪堆多？”一眼看不出来，需要一个办法。

>

D

路径

一一对应：一个对一个地摆，看谁先摆完。对不清，才需要能“记住多少”的东西。

>

S

显露

“数”发生了。5 = 和五根手指能一一对应的那一类聚集。

>

回写

改写了旧看法

从此孩子看任何一堆，都会想“它能和几对上”。

在孩子那里发生了什么 数不再是黑板上的符号，而是他亲手用“对应”量出来的东西。它有了来路。

案例② 加法与交换律

$3 + 2 = 5$ ，背下来；加法表，背熟。

交换律：记住“ $a + b = b + a$ ”，照用。

加法被当成一套既定规则，规则先在，孩子记住它。

诊断 交换律是背来的一条规定。孩子不知道它为什么成立，只知道它“是这么规定的”。

案例② 加法与交换律

E

缺口 · 土壤

“这两堆合起来，一共多少？”真实的合并情境。

>

D

路径

把两堆并到一起，重新数一遍。
“+”就是这条“合并再数”的路径。

>

S

显露

“=”是这条路径的结算点。
 $3 + 2$ 结算出 5。

>

回写

改写了旧看法

孩子亲自试出“先合谁、后合谁，总数不变”——交换律不是背的，是他发现的。

在孩子那里发生了什么 交换律从“一条要记的规定”，变成“他自己撞见的一个事实”。这就是回写。

个位、十位、百位，是规定好的位置。

“满十进一”，照着做，做对就行。

位值制被当成一套先在的书写规则。

诊断 “满十进一”是口令。孩子会操作，却答不出“11 里的两个 1，为什么不一样大”。

案例③ 位值与十进制

E

缺口 · 土壤

数变大了，一个一个数太慢，符号也不够用。

>

D

路径

十根小棒捆成一捆。这个“捆”的动作，生出一个新单位。

>

S

显露

“十”作为一个新单位发生了。
位值=用有限符号表示很大的数。

>

回写

改写了旧看法

孩子懂了：11 里，左边的 1 是“一捆”，右边的 1 是“一根”，不一样大。

在孩子那里发生了什么 “满十进一”不再是口令，而是他亲手捆出来的结果——位置有了意义。

案例④ 乘法（倍）

九九口诀，背熟、背快。

乘法被当成一种新的运算规则，先在那里。

孩子的任务，是把口诀记牢、算得快。

诊断 口诀是发生链结晶之后的成熟态。直接从口诀起步，是把终点当起点。

案例④ 乘法（倍）

E

缺口 · 土壤

“5 个 3 相加”写起来烦、算起来慢。需要更省的写法。

>

D

路径

把“几个几”打包成一个整体。

>

S

显露

“3 的 5 倍 / 5×3 ”发生了。
乘法 = 重复相加的打包。

>

回写

改写了旧看法

孩子再看加法，会分辨“零散地加”和“成倍地加”是两种事。

在孩子那里发生了什么 口诀不再是要背的天书，而是他亲手打包出来的省力工具——先有意义，再背才牢。

案例⑤ 分数（最硬的一课）

分数 = 分子 / 分母的既定形式。先给定义“二分之一”。

再教通分、约分，一套一套的规则。

孩子一上来，就面对一个成熟的符号系统。

诊断 这正是第 2 页那节课：当堂全对，一周后 $1/3 > 1/2$ 。符号会写，意义没发生。

案例⑤ 分数

E

缺口 · 土壤

三个饼平分给四个人，每人多少？
整数，答不出来。

>

D

路径

真的去平分，给“每人分到的那份”命名。

>

S

显露

分数发生了，为让“平分”能结算。 $1/2$ 的同一性=两个它拼成 1。

>

回写

改写了旧看法

孩子看“整数”从此知道：它只是数的一段，中间还挤着无数个
数。

在孩子那里发生了什么 $1/3 > 1/2$ 的错误不会再犯——因为他亲手分过，知道分的份越多、每份越小。

案例⑥ 等号 = （一个大误解）

“=”读作“得”， $3 + 2 = ?$ 求那个答案。

等号被当成一个“出结果”的箭头，单向。

于是孩子不接受 $8 = 3 + 5$ ，更不接受 $3 + 5 = 2 + 6$ 。

诊断 把等号当箭头，是小学最普遍、最隐蔽的一处误解，会一路拖累到中学的方程。

E

缺口 · 土壤

同一个数 6，可以从很多条路走到：
2+4、1+5、3+3.....

**D**

路径

让孩子写出 $6 = 2+4 = 1+5 = 3+3$ ，两边都摆。

**S**

显露

“=”是“两边是同一个东西”的关系符——像天平，不是箭头。

**回写**

改写了旧看法

等号从“得”变成“平衡”。这正是 S/D/E：同一个 S，多条 D。

在孩子那里发生了什么 他开始接受 $3+5 = 2+6$ 。这一小步，替中学的方程扫清了一个大障碍。

案例⑦ 三角形内角和

直接告诉：“三角形内角和是 180° 。”

记住这个结论，套进题里去算。

结论先在，孩子的任务是记住并套用。

诊断 结论是天上掉下来的。孩子会用它算题，却答不出“凭什么是 180° ”。

案例⑦ 三角形内角和

E

缺口 · 土壤

各种三角形长得差那么多，三个角的和，会一样吗？

>

D

路径

把三个角撕下来，拼到一起；再量一量、多试几个。

>

S

显露

三个角拼成一条直线—— 180° 。结论被孩子亲手拼出来。

>

回写

改写了旧看法

结论有了来路。孩子知道数学结论是能“验”的，不是背的。

在孩子那里发生了什么 “ 180° ” 从一句要背的话，变成他撕纸拼角亲眼看见的事实。

七个案例，抽出同一个结

每一课，都是同一个动作。

先找到那条“走不通的旧路”（缺口 E），
让新对象作为“让它走通的工具”发生出来（ $D \rightarrow S$ ），
最后，验一次回写。

缺口 → 路径 → 显露 → 回写

概念	缺口 E	路径 D	显露 S	回写
数	两堆谁多	一一对应	“数”	看任何一堆都想“对上几”
加法	合起来多少	合并再数	“+”	自己撞见交换律
位值	数大写不下	十根捆一捆	“十”这个单位	两个 1 不一样大
乘法	重复相加太慢	几个几打包	“倍 / ×”	分清零散加与成倍加
分数	整数不够分	平分并命名	“1/2”	整数只是数的一段
等号	同数多来路	两边都摆	“=”是关系	等号从箭头变天平
三角形	各角和会一样吗	撕角拼一拼	“180°”	结论可验、非天降

一个重要提醒

发生学，不等于“活动多、课堂热闹”。

撕纸、摆小棒，若不对准缺口、不收回写，
照样是无回写的假发生。
热闹 $\neq$ 发生。

五

明天，把你的一节课改成发生学

四问备课、五步模板、三条纪律、四个坑。今晚之后，能上手。

改课之前，先问自己四句

1 定义从天而降吗

这个概念的定义，在孩子那儿是不是“突然就给出来”的？

2 孩子卡在哪

他们最常在哪一步卡住、犯同一个错？那里往往藏着缺口。

3 哪条规则是背的

这节课里，哪条规则孩子只会背、说不出来路？

4 它的缺口是什么

这个概念，当初是为解决哪条“走不通的路”而生的？

把五步填成你的教案



把每一格填上你自己的一句话，一份发生学教案就成形了。

三条纪律

守住这三条，就不会滑回发现学

纪律一

一节课，只对一道缺口。贪多则缺口模糊，什么都发生不了。

纪律二

先制造缺口，再给工具。顺序一旦反过来（先给定义），就又变回发现学了。

纪律三

下课前两分钟，验一次回写。问一个“倒过来”的问题——他看旧东西的眼光变了吗？

四个最常见的坑

看着像发生学，其实不是

① 伪缺口

其实不缺——孩子早会了，你还假装制造问题。

② 替孩子跑路径

工具给了，却是老师一路演示到底，孩子没亲自走。

③ 活动代替发生

热热闹闹撕了摆了，最后没有结算、没有命名。

④ 漏回写

讲完就下课，从不问“你对旧东西的看法变了吗”。

一句判据，当堂自判。

这节课结束时，有没有一个孩子
“看旧东西的眼光变了”？

有——概念发生了。

没有——只是又入了一次库。



收束

**发现学，教孩子“认识”一个已经做好的数学世界；
发生学，让这个世界在每个孩子那里，重新发生一次。**

数学对象不在课本里——
它在孩子走通的那条路的尽头。

● 留给你们的一道缺口（ ΔE ）

今晚不给结论，给一道缺口——
明天挑一个你最熟的概念，只做一件事：
找到它的“缺口”。

找到了，发生学就已经开始了。

主讲：_____ · 谢谢