

数学概念的发生学导论

王德生

数学概念的发生学导论

——三层参战维数与新对象的诞生

王德生 著

德麦国际出版社 Demai International Press

出版信息

书名 数学概念的发生学导论——三层参战维数与新对象的诞生

著者 王德生 **出版** 德麦国际出版社（Demai International Press），新加坡

丛书号 德麦国际专著 第 107 号 **ISBN** 979-8-90690-042-5 **定价** US\$21.00

版本 第二版 2026 年 9 月。第一版（两档：二阶／一阶）未出版，其成稿作为本版底料与工程记录保留。

真实展开声明

本书按全站「真实展开」体例出版，随书公开：**两版的预注册与判负条款**（第八编第 21 章、第一版第 34 章） | **全部真跑读数含方向相反的结果** | **判负与撤回记录**（附录四） | **每章的最弱处与排不掉的占位者** | **十七条方法论欠账**（第 20.2 节），其中一条不可偿。

AI 使用披露：本书由王德生与 Claude（Anthropic）协作写成。装置、判据、判负条款与全部裁定由作者定；文稿撰写、史料整理、编码统计由 Claude 执行。**全部编码为单人编码，证据强度二级——判负可信，判正不可信。**

本版的四条待办（第 20.4 节）

独立编码 | 把 E 型预测改成排他形式并在新候选池上跑 | 执行五条已写死的判负条款 | 给候选池加「先判它是不是一个概念」那道闸。

目 录

凡例.....	5
导论 数学哲学缺一道题.....	5
第一编 装置.....	12
第1章 数学里没有学科，只有位置.....	13
第2章 共有前提.....	13
第3章 材料来源规则.....	13
第4章 固化维：不参战的那一位是裁判，不是缺席（新）.....	14
第5章 Z的三档.....	17
第6章 参战维数.....	17
第7章 四要件加一格：填表规格.....	18
第二编 三活层：账本多一栏.....	19
第7章 不可通约量：算术自己的工具杀死了算术的前提.....	20
第8章 零与负数：记账先于算术承认它.....	24
第9章 复数：三个实根之间非走一趟不可.....	28
第10章 四元数：Euler的恒等式早就写好了答案.....	32
第11章 超穷数：对角线本来是为超越数准备的.....	37
第12章 p进数：被叫作「形式的」那一族.....	41
第13章 超实数：模型论替无穷小签了三百年前欠的字.....	45
第14章 非欧几何：Saccheri为洗白欧几里得写出了它.....	50
第15章 流形：绝妙定理说曲面不需要外面.....	54
第16章 分数维：Hausdorff测度本来是为康托集为零而写.....	58
第17章 范畴：「自然」这个词已经在用了.....	63
第18章 概形：Bézout数重数非要幂零元不可.....	67
第19章 极限：发散级数把「和」算成了三个不同的数.....	72
第20章 函数：一个级数表示了分段异式的曲线.....	76
第21章 群：预解式的次数不听方程的话.....	80
第22章 理想：为证费马算出来的失败.....	85
第23章 概率=测度：正规数的概率是1而没有任何情形比.....	89
第24章 可计算函数：哥德尔编码把证明变成了数.....	93
第25章 广义函数：物理先用了，激波逼出了它.....	99
补节汇编.....	105
本编结算.....	110
第三编 一固层之一：E固化——账本不动，形与算在争.....	111
第8章 附论：被闸挡下的那四例，与「过程」的两种.....	112
第9章 产过程的一族：可被证定理的那五例.....	113
第10章 产单位的一族：抽公理.....	115
第四编 一固层之二：S固化与D固化.....	117
第11章 S固化：显露不动，切出来的那些单位.....	117
第12章 D固化：算法不动，形与计在争.....	119

第 13 章	一固层的退回.....	122
第五编	二固层：1-N.....	123
第 14 章	三种做法.....	123
第 15 章	二固不是坏事.....	125
第 16 章	一固与二固的界，在哪里判不动.....	126
第六编	三层之间.....	127
第 30 章	典范级涌现的 E，就是下一层的固化维.....	127
第 31 章	拉卡托斯的伸展，就是 S 固化型的二维碰撞.....	130
第 32 章	三活成簇，一固匀速.....	131
第七编	边界与反例.....	133
第 17 章	假三活：三家不齐，与三家不争.....	133
第 18 章	出生了却没被签字.....	135
第 19 章	三层之间判不动的三处悬案.....	136
第 20 章	命题的收口与欠账.....	138
第八编	真跑.....	140
第 21 章	预注册：判据换过一次.....	140
第 22 章	真跑一：三型产物.....	141
第 23 章	真跑二：三层的命名与拒绝.....	143
第 24 章	真跑三与真跑四.....	144
第九编	划界与推论.....	146
第 25 章	与拉卡托斯的分界：伸展在哪一层.....	146
第 26 章	与库恩、与克罗—吉利的分界.....	147
第 27 章	逼生，与三层各自的出生方式.....	149
第 28 章	两项推论.....	150
结语	谁也不要的那样东西，与谁都要的那些.....	151
附录一	三层案例总表.....	152
附录二	命名与拒绝记录表（三组）.....	153
附录三	方法卡：十六问.....	153
附录四	两版的判负与撤回记录.....	153
附录五	全书判负条款一览.....	154
参考文献		156
参考文献第二版增补		163
补跑记录	入池闸的执行，及其砸中的东西.....	165
补跑记录之二	E 型排他式预测，与一个先过闸再挑的新池.....	168
统稿记录第二版		171

凡例

本篇置于导论之前，供读者在读任何一章之前先看一眼。八条。

一 **三层的名字与算法**。全书用三活／一固／二固，计的是**参战维数**——一个概念出生时，形／算／计三个位置里有几个**在争**。三个位置分别是：**形**（把对象作为可显示的东西来回答）、**算**（作为一条路径来回答）、**计**（作为一笔账来回答）。

二 **这不是分数**。参战维数是序数标签，不做算术，不进排名，不写成「创新度几分」。理由不只是体例：三层是**三种不同的东西**，不是同一种东西的三个强度（第4.6、7.4、15.3、20.1节四处独立得出）。写成分数，这个结论就被抹掉了。

三 **闸前与闸后**。补跑记录执行入池闸之后，一固层由四十例减为三十六例。凡标「**闸前**」的读数属四十例池，未标者为闸后。真跑一至四的原始读数全部是闸前的，本书保留原值并逐处标注，不追改——**追改预注册跑出来的数字，正是预注册要防的事**。

四 **判负可信，判正不可信**。全书为单人编码（第34.5节、第21.5节）。凡本书报告「通过」，只能读作「未被这次检验推翻」；凡报告「判负」「撤回」「改判」，可信度高得多。**读者若只信一半，请信判负那一半**。

五 **纪律四**。凡归属可两判者，取对本书结论不利的那一判。全书执行处已逐一标明；反向的（对本书有利的判法）也全部标明，共四处。

六 **最弱处**。每章末有「本章最弱处」，写明与最近占位者的区分是否有可判错的设计。写「**只有口头区分**」的地方，**就是本书在那一处没有证据**。

七 **判负条款**。全书写死的判负条款汇总在附录五。它们是本书交给下一个人的东西——**每一条都可以用来推翻本书的某一部分**。

八 **两版**。第一版分两档（二阶／一阶），未出版；第二版分三层。第一版的三条真跑读数在第二版**全部作废**（两组比较改三组），不得直接引用。两版的判负与撤回记录合并在附录四。

导论 数学哲学缺一道题

一 两千年问的是「它在哪儿」

关于数学对象，哲学问了两千年的题是「它在哪儿」。

柏拉图主义说它在一个独立于时空与心智的领域里，数学家的工作是把目光投向那里，看见本来就在那里的东西。形式主义说它哪儿也不在，只有符号和规则在，「对象」是我们对一串符号操作的方便说法。直觉主义说它在心智的构造活动里，一个数学对象存在，当且仅当我们有办法把它造出来。结构主义说它在结构中的位置上，自然数3不是任何东西，它是任何一个满足皮亚诺公理的系统里的第三个位置。

这四种回答彼此争得很凶，但它们的争论有一个共同的形状：它们都把数学对象当作**已经在那儿**的东西来问，问的是它的处所，以及这个处所的性质。柏拉图主义者说处所是天上的，形式主义者说没有处所只有纸面，直觉主义者说处所在人心，结构主义者说处所是位置本身。四方的分歧在处所的性质上，四方的共识在「有一个处所可问」上。

与之并行的第二道题是「数学是被发现的还是被发明的」。这道题看似问的是过程，其实问的仍然是处所的性质：若数学对象在我们之前就在那儿，则我们发现它；若它随我们的活动而有，则我们发明它。发现／发明之争是处所之争的一个变形——争论的双方仍然共享同一个预设，即在「已经在那儿」与「由我们造出来」之间，答案必居其一。

这两道题都很重要，两千年的讨论积累得也很厚。但它们合起来漏掉了第三道题。

二 漏掉的第三道题

漏掉的题是：它是怎样出生的。

需要立刻把这道题与另外几道相近的题分开，因为混淆是它长期被漏掉的主要原因。

它不是心理学的题。「数学家是怎样想到它的」——这是庞加莱在《科学与方法》里讲的那个著名故事：他为富克斯函数苦思数周无果，某日踏上公共马车的踏板，念头忽至。阿达玛《数学领域中的发明心理学》整本书都在这条线上。这类研究有它的价值，但它问的是一个人的头脑在某一时刻发生了什么，属于心理学与传记学。发生学问的不是某个人的头脑，是数学**内部**的一个状态：在那个对象出生之前，数学的账本上是什么样子；那个账本有什么结构性的缺口；那个缺口如何使一个尚无名分的东西成为不得不承认的。庞加莱在踏板上想到的那件事，之所以能被数学界接受为一个对象，与他在踏板上还是在床上无关。

它不是社会学的题。「数学共同体是怎样接受它的」——这是布鲁尔、拉图尔一系的问题，也是数学社会学的正当题目。共同体的接受确实是新对象合法化的一个环节（本书第五编要专门处理签字这一步），但接受的社会过程解释不了为什么被接受的偏偏是**那一个**东西，而不是别的东西。共同体可以拒绝一个对象三百年（复数就是），却终究不能不承认它——这个「终究不能不」的强制性，社会学解释不了，它恰恰是发生学要问的。

它不是逻辑学的题。「这个对象在某个公理系统里可不可以被定义」——这是形式化之后的题。而一个新对象出生的时刻，恰恰是还没有一个公理系统容得下它的时刻。用后来的公理系统去回溯地问它可不可定义，得到的答案永远是「可以」，因为那个系统本来就是为容纳它而重建的。这个回答是循环的。

它也不是「数学史」通常做的那件事。数学史的常规工作是：谁在哪一年写了什么，受谁影响，影响了谁。这是必要的底料，本书全部案例都建立在这类工作之上。但史料本身不回答机制问题。同一批史料，可以被写成天才的故事，可以被写成学派的故事，可以被写成社会需求的故事。发生学要在史料里找的是一个**可重复的结构**：如果每一次0到1的对象出生前后，数学内部都呈现同一个形状，那么这个形状就不是叙事者的选择，而是史料本身的读数。

三 这道题为什么值得问

有人会说：数学对象怎样出生，这是一个偶然的、一次一样的历史事实，不可能有普遍机制，因此不值得做哲学。

这个反驳假设了两件事，两件都可疑。

第一件，它假设「有机制」意味着「可预测」。但机制不等于预测清单。血液循环有机制，不等于能预测某人某日的心跳数。本书要给的机制，是一个结构条件：满足这些条件，一个新对象出生；不满足，得到的是既有对象的加工。这个机制不预言下一个对象是什么，它预言下一个对象**将以什么形态出场**——本书第七编把这一点写成三条可证伪的预测。

第二件，它假设数学史是一堆互不相干的偶然。这一点可以直接用史料检验，而检验的结果是否定的。本书考察的十九个公认的0到1对象——从不可通约量到概形——在四个要件上呈现出同一个形状，且这个形状不是本书为了叙事方便强加的，因为它每一处都可以被史料推翻，本书也如实记录了推翻它的那几处（见第六编与第七编）。

还有一个更实际的理由。今天有大量的力量投在「让机器做数学」上。机器在既有系统内部的推导能力已经相当可靠，而人们最关心的是：它能不能造出**新的东西**。要回答这个问题，必须先知道「新的东西」在人类数学史里是怎样出生的。若不知道出生机制，就只能凭直觉断言机器行或不行，而直觉在这里靠不住。本书第八编把机制应用到这个问题上，给出一个可检验的预期——那个预期与常见的乐观和常见的悲观都不一样。

四 五位先行者，本书从哪里接手

这道题不是没有人碰过。有五处最近的工作，本书要逐一说明从哪里接手、在哪里分手。分手处必须说得比接手处更清楚，否则本书就只是把别人说过的话换一套词重说一遍。

拉卡托斯（Lakatos 1976）。《证明与反驳》是全部文献里离本书最近的一处，也是最需要划清的一处。他用欧拉多面体公式 $V - E + F = 2$ 的历史，展示了一个概念如何在反例的逼迫下被反复修改：先是发现带孔的多面体不满足公式，于是有人说那不是多面体（怪物驳斥），有人说要修改多面体的定义（怪物调整），有人说要把例外写进条件（例外剔除），最后是「引理并入」——把反例逼出来的条件写进证明本身，于是概念被「伸展」了。

这是极精彩的工作，而且它是**发生学的**，不是本体论的。但它考察的单位是：一个**既有概念在反例面前的边界重画**。多面体这个概念在故事开始时已经存在，故事结束时它还在，只是边界变了、内涵精确了。这个过程不产生账本上原来没有的一栏。

本书要问的是拉卡托斯停下的地方：当那个反例**不是一个可以被驳斥或调整的「怪物」，而是一个算法自己产出的、无法被任何一家现有概念收编的东西时**，会发生什么。伸展在这里不够用了——你无法把 $\sqrt{-1}$ 「伸展」进「量」这个概念里，因为它不是量的一个边缘情形，它根本不在量的那条线上。这时候唯一的出路是开一栏。开栏与伸展是两个动作，本书处理的是开栏。

拉卡托斯自己触到过这个区别。《证明与反驳》的一条脚注里，他提到「概念形成」与「概念伸展」可能不同，但没有展开。本书是那条脚注的展开。

克罗与吉利斯（Crowe 1975; Gillies 1992）。克罗提出十条关于数学变化模式的「定律」，其中第十条最有名：「数学中从来没有革命。」他的理由是：数学的旧成果从不被推翻，只被包含——欧氏几何没有被非欧几何废黜，它变成了一个特例。吉利斯编的《数学中的革命》收了十几篇回应，正方反方都有。

这场争论的双方共享一个预设：**革命是整体的更替**——库恩意义上的，新范式取代旧范式，旧范式的成果作废。在这个意义上，克罗是对的：数学没有这样的革命。

但双方都没有下到单个对象的层面。本书的机制恰好解释了克罗为什么对：**新存在物是加一栏，旧栏照旧**。不可通约量没有废黜整数，超穷数没有废黜有穷数，非欧几何没有废黜欧氏几何——因为新对象的出生不是对旧对象的否定，是对**三家共有的一条前提**的否定，而那条前提从来没有被写在任何一条定理里，所以否定它不作废任何一条定理。这就是为什么数学看上去是累积的，而实际上每隔一段就要开一栏。克罗看到了累积，没有看到开栏；吉利斯书里的几位作者看到了开栏，却借用了不合身的「革命」这件外衣。

基切尔（Kitcher 1984）。《数学知识的本性》用「理性转换」解释数学的变化，转换的单位是「数学实践」这个五元组：语言、公认命题、公认问题、推理方式、元数学观点。转换是理性的，因为每一次转换都可以说明它为什么比前一状态更好。

这个框架的力量在于它是整体论的，弱点也在这里：**新对象在他那里是转换的结果，不是解释项**。问「为什么出现了理想数」，他的框架回答「因为实践从状态 A 转到了状态 B，而这个转换是理性的」——这是重述，不是机制。本书要给的正是他框架里那个空着的位置：转换是被什么逼出来的。答案是被一件**三家之一自己手里的、原本回答另一道题的材料**逼出来的（第 3 章）。

格罗霍尔茨（Grosholz 2007）。《数学与科学中的表征与生产性歧义》是全部文献里最靠近本书装置的一处。她的观察是：数学的进步常常发生在**不同表征模式被并置**的地方，而这些模式彼此并不完全兼容，正是这种不兼容——她叫它「生产性歧义」——推动了新东西的产生。她的例子包括莱布尼茨的微积分记号、牛顿的几何与代数并用、十九世纪数论里的解析方法。

本书接受她的第一步：三家各持一答且互不相容，这与她的「并置且不兼容」是同一个观察。分歧在第二步和第三步。

其一，她没有指出并置**底下**那条共有前提。并置本身不产生新对象——数学里到处是并置，绝大多数并置的结局是相互翻译（解析几何就是形与算的一次成功翻译，它没有产出新存在物，它是一阶的）。产出新对象的不是并置，是**并置底下那条三家共同踩着、因而谁也看不见的前提被推翻**。

其二，她没有给出推翻材料的来源规则。本书断言：**推翻共有前提的材料只能来自三家之一自己，且在本家回答另一道题**。这条规则的分量在于它是可以被证伪的——只要找到一个由外来理由推翻前提而最终成功的案例，规则就倒。本书第七编把这条规则拿去做了一次系统的反例搜索。

其三，「生产性歧义」这个词把机制说成了一种氛围。歧义是一种状态，而本书要给的是一个动作序列：**逾越—显示—签字**（第五编）。

纳格尔（Nagel 1935）。《「不可能数」：现代逻辑史的一章》是最早、也最被遗忘的一篇先驱。他考察负数、虚数、超穷数如何从「不可能」变成合法，结论是：数学对象的合法性不来自它的「实在性」，而来自它在演算体系中的作用——一旦一个体系被证明是一致的，其中的对象就有了名分。

本书完全接受这个结论。本书要回答的是他没有问的下一句：**为什么每一次都必须先经过「不可能」这一站？**

如果合法性只是体系内的作用，那么原则上，新对象可以一出生就被承认——只要提出者同时给出体系。历史上从未如此。每一个 0 到 1 的对象出生时都被叫作假的、不可能的、诡辩的、疾病的、纯粹的恶、抽象废话。纳格尔把这一站当作历史的偶然，当作数学家形

而上学偏见的残余。本书要证明它不是偏见：「不可能」是三家账本的诚实读数。在那一刻，账本上确实没有它的位置，说它不可能的人没有说错。错的是把「账本上没有」当成了「不该有」。

五 本书的读法

本书分八编。

第一编是装置。 六章，讲三个位置（形／算／计）、共有前提、材料来源规则、Z 的两档、一阶与二阶的分界、四要件表的填表规格。装置是全书唯一一处允许抽象论述的地方，此后每一章都必须落在具体案例上。

第二、三、四编是案例。 十九个对象，按它们各自开的是哪一本账本分编：数的账本（第二编七章）、空间的账本（第三编五章）、过程与对象的账本（第四编七章）。每章一个对象、一张四要件表、一节「本章最弱处」。案例编不许提前下结论——这是本书的一条生产纪律。三条定律要等到第五编，由十九张表抽出来，而不是先有定律再去找例子。这条纪律不是形式上的洁癖：先有定律再找例子，找到的永远是支持定律的例子。

第五编抽定律。 三条：逾越律（推翻材料几乎总出自「算」）、名字化石律（拒绝写进了名字）、模型签字律（合法化只由「计」以一致性模型完成）。第四章把三条合成一个时序节律。

第六编划边界。 这一编是本书最容易被跳过、也最要紧的一编。它收三类东西：一阶对象名录（矩阵、向量、半群、巴拿赫空间——数量上远多于二阶，而且理应如此）；三家不齐的失败案例；出生了却始终没被签字的对象。一个只能解释成功案例的机制不值钱，因为成功案例总能被事后叙述成任何形状。

第七编真跑。 三条预注册的检验：否定命名率的语料统计、来源规则的反例搜索、三个大语言模型的一阶／二阶实测。三条的判负条款在开工之前写死，写在第 34 章。本书如实记录了其中出现的不利结果。

第八编划界与推论。 与五位先行者逐一分手；给出「逼生」作为发现／发明之外的第三种出生方式；两项推论——教育与人工智能。

读者若时间有限：读导论、第一编第 1 章与第 5 章、第九章（复数）、第五编、第六编第 33 章。这条路径包含全部承重物。

六 三个位置的来源

最后交代一件事，全书只交代这一次。

本书用的三个位置——形、算、计——不是本书发明的分类，也不是从数学史里归纳出来的方便标签。它们对应王德生 SDE 本体论中的显露（Show）、差异序列（Difference）、特征纠缠（Entanglement）三个维度：显露是一个存在物以什么面貌被显示出来，差异序列是它经由什么路径被组织出来，特征纠缠是它与什么互相咬合而得以稳定。把这三维放到数学里，就得到形、算、计。

交代这一点，是学术诚实的要求：读者有权知道装置是从哪里来的。

但从下一章起，本书不再使用这套外来词汇。理由有两条。第一条是本书的方法论立场：如果三个位置真的在数学史中起作用，那么它必须能够用数学家自己的语言被指认出来，而不需要读者先接受一套本体论。一个只有先信了才能看见的东西，不是发现，是投射。第二条是判据的严格性：用外来词汇描述案例，很容易在描述里偷偷塞进结论。用「形／算／计」，每一次填表都必须指出具体的文献、具体的人、具体在回答哪一道题——这样填不满的表就填不满，装置就有机会被推翻。

本书希望被这样读：不管你信不信任何一种本体论，请只看那十九张表，看它们填得满不满，看第六编的反例咬不咬得动。

七 为什么两档不够

7.1 勒贝格积分与半群不能同格

第一版把数学概念分两档：三个位置全在争、有一条共有前提被推翻的，是二阶；其余的，是一阶。

一阶那一档里，坐着四十三个对象。其中有勒贝格积分，也有半群。

半群是从群里删两条公理：一个实例都不必找，一句话可以复述完毕，出生时没有任何人反对，也不需要任何人给它签字。

勒贝格积分是把积分的定义从分割定义域改成分割值域，而正是这一改，使控制收敛、单调收敛这一整套定理成为可能——在它之前，「积分与极限能不能交换次序」这个问题没有一般的答案。此后一个世纪的分析、概率、偏微分方程全都建在它上面。

两件事的量级差着数量级，而第一版的两档装不下这个差别。

第一版自己知道这件事。第 30.6 节排除勒贝格积分时，记下了一处没解决的紧张：为什么概率=测度是二阶，而勒贝格积分是一阶？第 30.5 节把解析几何判一阶，自认那是「本书最容易被反对的判定之一」。第 21.7 节把埃尔朗根纲领判一阶，也补了一段说明「重要性开栏是两个独立维度」。

三处硌手，同一个来源：缺一层。

一处必须在这里就说的话：本节原来用的动机例是解析几何与半群，而第二版自己的入池闸（附录三第 5 问）后来把解析几何挡在了池外——它是一个领域与一套做数学的方式，不是一类东西的名目。第二版重写的动机例，被第二版自己的闸挡下了。换成勒贝格积分之后，本节的论证一字不改仍然成立（它过得了闸：有关于它自己的收敛定理）。但那次挡下逼出了一条本书原来没有的区分，也作废了一处本书的有利判法——全部经过写在补跑记录与第 8 章附论，读者应当先读那两处，再读本节以下。

7.2 两档是一个自然的错误

第一版的两档不是疏忽，它是被自己的判据逼出来的。

第一版的三件承重物——共有前提、材料、签字——全部是为「账本多一栏」这件事设计的。共有前提是被推翻的那条规定，材料是推翻它的那件东西，签字是新栏获得名分的那一步。三件承重物合起来定义了一个非常清楚的事件，而十九个案例填满了它。

凡不属于这个事件的，第一版只能说「它不是这个」。于是半群与解析几何都被贴上「不是这个」的标签，扔进同一格。

一个由否定式定义的类别，内部必然是杂的。这是第一版结构缺陷的准确诊断，也是第二版唯一要做的事：给那一格里的东西一个正面的定义。

7.3 正面的定义是什么

第二版的答案是一句话：

一个数学概念有多新，取决于它出生时有几个位置在争。

三个位置全在争，且有一条三家共有的前提被推翻——账本多一栏。十九例。

一个位置固化（它的账被双方当作裁判，且它的任何条款都不在被推翻之列）、两个位置在争，而没有任何共有前提被推翻——栏内切出或架出一个新单位、一条新过程。三十六例（闸前四十例，入池闸挡下四例，见补跑记录）。

两个位置以上固化，连不相容都没有，只是准入放宽—— $1-N$ 。数学工作的九成以上。

三层的名字是三活、一固、二固，计的是参战维数。

7.4 三层不是同一种东西的三个强度

这是第二版最要紧的一条，也是它与「把创新分三个等级」这类说的分界。

第二版的中级候选（真跑三时为四十例，闸后三十六例），零例可以指出「一件三家之一自己的旧材料推翻了什么」（第八编真跑三）。这不是一个统计上的巧合，它由定义决定：一固层不推翻任何共有前提，因此它没有「材料」这一环节。

于是：

材料来源规则在一固层不适用——不是成立，是不适用。

同样地，一固层不需要签字（它造出的单位或过程本来就在固化那一家的账本内部，一致性不成问题），也不涉及共有前提。

第一版的三件承重物，全部只在三活层有意义。一固层有它自己的另一套：固化维从哪来、新单位怎么从旧单位里切出来、认领何时到齐。

因此三层是三种不同的东西，不是同一种东西的三个强度。这个结论在第二版三处独立得出（第 4.6 节、第 15.3 节、第 20.1 节），而它有一个直接的措辞后果：参战维数不能写成分数。写成分数，就把「三种不同的东西」压回成「一种东西的三个刻度」，而那正是要避免的错误。

7.5 三层各自解掉的一处旧账

一固层解掉了第 7.1 节列的三处砾手。勒贝格积分是 E 固化型、产过程（测度那本账是裁判，且 Lebesgue 先有测度后有积分）；而概率 = 测度推翻了「概率是情形之比」，故属三活。解析几何与埃尔朗根纲领则由入池闸判为方法、出池——三处砾手中的两处，解法不是分层，是出池。分界不在重要性，也不在时间，在有没有一条前提被推翻。

一固层还给拉卡托斯的伸展补上了机制。第一版第 38 章给了区分（伸展重新定义原概念，开栏不会），却没有说伸展本身是怎么发生的。第二版说：伸展是 S 固化型的二维碰撞——显露方式不动（争论双方指的是同一批对象），算与计在争，从一个旧单位里切出若干新单位。由此那条区分有了理由：伸展重新定义原概念，因为它切；开栏不重新定义，因为它加。

三层还回答了一个第一版整本书没问过的问题：子学科为什么存在。答案在第六编第 30 章：一固层固化的那一维，正是上一次三活涌现中被签了字的那一维——刚签完字的那一维是三个位置里唯一一个刚被证明过自洽的，所以它在此后一段时间里不可能再被争，于是成为下一层的裁判。概率论与测度论共用一套数学，分开的地方在于一个把测度当裁判、一个把它当对象。

7.6 第二版付的三笔账

其一，中级层有做成兜底的危险。任何东西都可以被说成「少碰了一维」。唯一的防线是固化维必须事先指定，写在读史料之前。这条纪律一松，全书立刻失去可证伪性——比第一版更严重，因为第一版至少只有一条界。

其二，一固的判据是否定式的。「没有任何共有前提被推翻」——它依赖于共有前提那一格判得准，而那一格是全书最事后的一格（第一版第 2.7 节的欠账，第二版未偿）。若共有前提是倒着写出来的，三层的分界也是。

其三，第一版三条真跑的读数全部作废。那些是两组比较下得出的（三活对一阶），第二版是三组。判负条款必须重新写死、重新跑——第二版不得直接引用第一版的判负结论。

7.7 本版的读法

三层各占一编（第二、三、四、五编），三层之间占一编（第六编，第二版真正的新内容），边界与反例占一编（第七编），真跑与划界各占一编（第八、九编）。

读者若时间有限：读本节、第 4 章（固化维）、第六编第 30 章（固化维从哪来）、第八编第 24 章（真跑三与真跑四）、以及第 20 章（命题的收口与欠账）。这条路径包含第二版全部承重物与全部欠账。

而本书两版的读法都一样：判负可信，判正不可信。单人编码的检验只在推翻自己时有力。两版加起来推翻了自己四条断言、撤回两条修正、改判两处自相矛盾、查出四处证据经不起查——那些是本书能给的最可靠的部分。

第一编 装置

第二版的装置在第一版六章之外加一章（第 4 章 固化维），并把原第 5 章（一阶与二阶）拆成两章（Z 的三档／参战维数）。其余四章原样。

本编是全书唯一允许抽象论述的地方。此后每一章都必须落在具体案例上。

第 1 章 数学里没有学科，只有位置

（第一版原样，此处只列要点，正文见第一版第 1 章）

三个位置：**形 (S)** ——把对象作为一个可显示的东西来回答；**算 (D)** ——把对象作为一条路径来回答；**计 (E)** ——把对象作为一笔账来回答。

三个位置不是给人贴的标签，是回答的方式。它们能被独立指认，靠的是**拒绝的形式**不同：形的拒绝是「我画不出它」，算的拒绝是「造不出它」，计的拒绝是「它对不上账」。

正常状态下三家互相翻译，翻译不丢东西。断裂状态是配合失效：三家各自的推理都无误，而结论互不相容，且翻译规则在这一点上失效。

第二版在此加一句：断裂有两种。三家全在争的断裂，与一家不在争的断裂。第一版把后者一律当作「三家不齐」筛掉了，而它其实是数学里最常见的一种发生。这就是本编第 4 章要处理的东西。

第 2 章 共有前提

（第一版原样，要点如下）

三家在争的时候，脚下踩着同一块地。那块地就是共有前提——一条关于什么算数的规定，它规定了某一类东西的入场资格。

固定句式：「____ 必须是（属于／可以被） ____。」

验收方法：念给三家听，三家都说「这还用说吗」的，是共有前提；有任何一家提出异议的，不是共有前提，是第四家的立场。

三家看不见它的三条结构性理由：它从未被写下来；它是三家共享的，所以在三家的对话中永远不出现；**它有补丁**——哪里有一个人人别扭的技术性修补，哪里就有一条共有前提在被保护。补丁是共有前提的指纹，也是定位材料的主要工具。

第 3 章 材料来源规则

（第一版原样，含第一版第 36.3 节那次放松）

推翻共有前提的那件材料，必须是三家之一自己早已掌握、已经发表、只是没往这个方向用过的事实；而它原本所回答的问题，可以在数学之内，也可以在数学之外。

三条限定的理由：外来的理由只能加入争论、不能取消争论（三家可以各自退回阵地）；自家的材料无法被退回（否认它等于否认自己的一部分工作）；原本回答另一道题保证了材料出场时的中立。

这是三件承重物里唯一经过检验且未被推翻的一件（第一版第 36 章，六十二个对象零例外部材料）。第二版第八编真跑三给它加了一条边界：它只在三活层有意义，见第 4.6 节。

第 4 章 固化维：不参战的那一位是裁判，不是缺席（新）

4.1 第一版漏掉的那一类断裂

第一版第 6.2 节（丙）定了一条最常用来筛掉候选的规矩：三家不得有空位。只有两家在场的，判为「三家不齐」，归入假二阶（第一版第 31 章）。

这条规矩筛掉了一批真东西。

解析几何是一个例子。形（几何图形）与算（代数计算）确实在给同一道题两种不相容的回答——一条曲线的性质，一边靠作图看出来，一边靠方程算出来，而在笛卡尔之前这两套说法没有统一的翻译。计在哪里？它在场，但它不在争：一致性这本账，双方都不动，而且双方都拿它当共同标准。

第一版把这种情形一律当作「三家不齐」处理，于是解析几何被判一阶，与半群同格。第 30.5 节自己承认这是「最容易被反对的判定之一」。

尴尬的来源不是判错了，是缺一个格子。

4.2 固化维与缺席维

一个位置在一道题上，有三种状态：

状态	判据	计不计入参战
在争	有自己的回答，且与他家不相容、不可互相翻译	计
固化	有立场，但它的账被双方当作共同的裁判	不计——它是内置仲裁位
缺席	在争论中根本不出现，也因此拒绝什么	不计，且构成三家不齐，案例作废

固化与缺席必须分得开。分不开，则分层没有可证伪性——任何东西都能被说成「少碰了一维」。

4.3 判据换过一次：换的经过必须写在正文里

本章的判据在预注册的过程中当场换过一次。换的经过是这条判据唯一的强度来源，因此写在正文，不放脚注。

原判据：固化的那一维，被双方共同援引为裁判。

它在四元数上当场失效。模相乘（范数可乘性）确实是 Hamilton 与所有人共同援引的裁判——按原判据，计是固化维，四元数应判一固。但同一个「计」里，另一条款——乘法

交换律——恰恰是被推翻的那条共有前提。分数维同型：勒贝格测度是共同标准（ H^s 建在它内部），而「维数必须是整数」也是计的条款，被推翻的正是它。

同一个位置，一条款当裁判、另一条款被推翻。若允许这样，固化与参战就分不开。

换上的判据（本书采用）：

被推翻的共有前提属于哪一位，哪一位必定参战。一个位置是固化维，当且仅当它的任何条款都不在被推翻之列，且两家的不相容要靠它的账来裁。

4.4 由新判据得到的三层分界

新判据一装上，三层的分界立刻是干净的，而且它不靠任何计数：

层	判据
三活	有一条三家共有的前提被推翻
一固	没有任何共有前提被推翻；两家的回答不相容且不可互译；靠第三家的账裁出一个新单位或新过程
二固	连不相容都没有，只是准入放宽（删条款、换记号、直接推广）

一固层的定义里那半句「没有任何共有前提被推翻」是全书分层的支点。它把第一版的三件承重物（共有前提、材料、签字）整体限制在三活层，而给一固层留出另一套机制（第六编第 30 章）。

4.5 三型产物（预测，不是定义）

固化维是哪一维，决定产物是什么。这是一条可判负的预测，不是分类的定义：

固化维	预测产物
E 固化（账本不动，形与算在争）	排他式：争翻译规则 → 产过程；争实例的公共部分 → 产单位。两者均须为「可被证定理的」产物
S 固化（显露不动，算与计在争）	单位
D 固化（算法不动，形与计在争）	在场者，且不产单位

一处按补跑记录补的限定：这里的「过程」不是任何过程。「过程」有两种——本身成为研究对象的过程（有关于它自己的定理，进账本，是概念），与做数学的方式（无关于它自己的定理，不进账本，是方法）。一固层产的是前者；后者按第一版第 33.9 节不属本书题域。这条区分由补跑记录的入池闸逼出，第二版正文原来没有；执行闸时它挡下了四例（解析几何、埃尔朗根纲领、函数域数域平行、单纯形法那一组），详见第 8 章附论与补跑记录。

E 型的读数（两式）：旧的析取式（单位或过程）在闸后四十例中的三十六例上是 21/21 = 1.000，无分辨力，不作证据；改写后的排他式在一个先过闸再挑的新池（二十四例，

与原池不相交)上是 $22/24=0.917$, 两处未命中方向相反 (Gelfand 变换、凸体)。见补跑记录之二, 其中已写死第二次改写与它的判负条款。

第八编真跑一的读数与它的一处硬伤: E 型 (闸后) $21/21=1.000$, S 型 $8/8=1.000$, D 型 $5/7=0.714$, 三型均过 0.70 的判负线。

但必须在这里就说清: E 型与 S 型的预测太宽, 几乎不可能判负。E 型预测「单位或过程」——三种产物类型里占了两种; S 型预测「单位」, 而单位是最常见的产物。真跑一的实际信息量集中在 D 型那七例上, 而它是唯一擦线通过的, 两处未命中都如实记下 (行列式更像一条计算法而非在场者; 微分形式的 k-形式是一类单位)。

第八编已写死改写要求: E 型须改成排他形式 (产过程当且仅当两家争的是翻译规则; 产单位当且仅当两家争的是实例的公共部分), 并留给下一批候选池跑, 不得用本轮那四十例。

4.6 由新判据得到的一条边界: 材料来源规则只在三活层

一固层不推翻任何共有前提, 因此一固层没有「材料」这一环节——没有前提被推翻, 也就没有推翻它的那件东西。

第八编真跑三验了这一条: 四十例中级候选 (闸前池), 零例可指出「一件三家之一自己的旧材料推翻了一条共有前提」。

于是:

材料来源规则在一固层不适用——不是成立, 是不适用。

这一条比它看上去重要。它使三层不是三个并列的名单: 第一版的三件承重物 (共有前提、材料、签字) 全部只在三活层有意义, 而一固层有它自己的另一套机制 (固化维从哪来、新单位怎么从旧单位里切出来)。三层由此是三种不同的东西, 不是同一种东西的三个强度。

4.7 本章最弱点

其一, 新判据把一固层的定义与三活层绑死了。一固的判据是「没有共有前提被推翻」——一个否定式的定义。否定式定义有一个已知的毛病: 它依赖于「共有前提」这一格判得准, 而那一格是全书最事后的一格 (第一版第 2.7 节的欠账, 第二版未偿)。若共有前提是倒着写出来的, 三层的分界也是。

其二, 真跑四接近同义反复。十九例全部判为三活、降层零例——而十九例当初的入选标准就包含「共有前提被推翻」。预注册第二节甲已在跑之前记明这一点: 它的通过不构成证据。

其三, 中级候选池是作者列的, 不是由独立标准筛出的。选池偏差的方向未知。

第 5 章 Z 的三档

(第一版第 4 章两档改三档)

推翻或碰撞之后落下来的那个东西，本书称为 Z。第二版把它分三档：

档	内容	出生时三家的反应
新在场者	账本上原来没有的一类东西，多开一栏	三家一致拒绝（十九例拒绝率 0.912）
新单位或新过程	既有栏内切出来的一块，或两家之间的一条翻译	只被碰撞的那两家争执，固化的那一家不表态（一固层拒绝率 0.042，闸后三十六例）
新读数	同一样东西的新记号、新排列、准入放宽	无拒绝（二固层否定命名率 0.000）

第一档与第二档的界落在共有前提那一格上——这与第一版第 33.5 节记的问题是同一笔账：Z 的宽度问题与共有前提的事后可得性，是同一个环的两面。三档没有解开这个环，它把环挪到了新的位置。

第二版不得声称解决了这个问题。

第二档与第三档的界是干净的：有没有两家不相容且不可互译。半群与群之间没有不相容——半群的一切陈述可以用群的语言说出来；而作图与方程之间在笛卡尔之前确有不相容。

第 6 章 参战维数

6.1 定义

一个概念出生时，三个位置里有几个在争。

取值：3=三活 | 2=一固 | 1 与 0=二固与三固。

6.2 措辞纪律：这不是分数

参战维数是一个序数标签，不是可加的量。它不做算术，不进排名，不写成「创新度几分」。

理由不只是体例。写成分数会立刻带来两件错事：其一，它暗示三层是同一种东西的三个强度，而第 4.6 节已经证明它们是三种不同的东西；其二，本站 2026-08-20 的政策是对外零分数、只出可清点判据，而机制分类不是分数——措辞必须让人一眼看出区别，否则政策形同虚设。

6.3 判别程序（可执行版）

第一步：有没有一条三家共有的前提被推翻？有 - 三活，转填四要件表加固化维一格（填「无」）。无 - 第二步。

第二步：两家的回答是否不相容且不可互译？是 - 一固。指认固化维（用第 4.2 节的三态判据），并按第 4.5 节预测产物。否 - 第三步。

第三步：是不是删条款、换记号、直接推广？是 - 二固。否 - 存疑，不计入。

执行纪律（照二级学科那批 48/48 的做法）：固化维必须事先指定，写在读史料之前。这条纪律一松，中级层立刻成为万能兜底——比第一版更危险，因为第一版至少只有一条界。

6.4 三层都不是贬义

二固层是数学工作的九成以上，且理应如此。一个每天都在开新栏的学科不可能积累任何东西。

一固层是最丰产的一层，且它的丰产是必然的而非偷懒：一维钉死之后另外两维的组合空间可穷举（第六编第 30.4 节推论三）。

而两层都是三活层的前提。断裂是一阶工作做到极限的产物；签字工具全是一阶的产物（第一版第 28.5 节，八例核对无例外）。没有那些工具，三活层出生了也签不了字，只能像莱布尼茨的无穷小那样悬着三百年。

第 7 章 四要件加一格：填表规格

每章开头一张表，格子定死，填不满就是填不满。

三活层（七格）

格	要求
形／算／计	各填一个可引用的具体工作，不得填领域名；三家不得有空位
固化维	填「无」（三活层按定义无固化维）
共有前提	用固定句式写一句；须通过「念给三家听」的验收；尽量有补丁作为独立证据
材料产出位置	由哪一位产出，可引用的具体结果
材料撞上位置	由哪一位撞上；若无算法跑出非法产物，填「无」
材料的原题	该文献自身声明的问题；可以在数学之外
Z 与拒绝	Z 不得用后来的定义表述；拒绝须有文献，至少两家有据

格	要求
签字	具体的一致性论证或模型构造；找不到填「无签字」
一固层（六格）	
格	要求
固化维	事先指定 ，并指出它的账如何被双方当作裁判
在争的两家	各填一个具体工作，并说明两者何以不可互译
无前提被推翻的核验	明写「本例未推翻任何共有前提」，并说明若有人主张有，那一条是什么、为何不成立
Z	新单位或新过程，且须说明它由固化那一家的哪个旧单位切出（S 型）或它翻译的是哪两家（E 型）
产物型核验	与第 4.5 节的预测对照，命中或未命中都记
拒绝	记录是否只有碰撞的两家在争、固化的那一家是否表态

二固层（三格）：从哪里删／换了什么记号／推广的方向。不设最弱处一节。

生产纪律（三活层与一固层通用）

1. 案例编不许提前下结论。模式在第五、六编由表抽出。
2. 每章必有「本章最弱处」，须写明与最近占位者的区分是否有可判错设计；写不出即退回重写。
3. 不利于本书的史料写进正文，不放脚注。
4. **凡归属可两判者，取对本书结论不利的那一判。**第一版执行七次，代价是一条定律判负（第一版第 26.1 节）——这个代价必须付。

第二编 三活层：账本多一栏

编首说明

本编十九章由第一版第二至四编原样移入，正文一字未改（四要件表已按第一版第 36.5 节增补的规格回填过材料的产出位置与撞上位置）。

第二版给每一章补一节，编号统一为该章的末节之前一节，标题一律为「**本例的固化维核验**」。补节只做一件事：

按第 4.4 节的判据核验本例确为三活——指出被推翻的共有前提属于哪一位（那一位必定参战），再核验另外两位也在争，而不是固化或缺席。

十九节补节汇编于下。它们不是十九次重复：核验的过程在十四例上是例行的，而在五例上不例行（第 10、14、16、20、25 章），那五节写得比别处长。

本编的判负条款（第 21 章预注册，跑完未改）：**≥2 例判为一固，本编降为十七例或更少，第八、九编全部重算。**读数：**降层 0 例**——但第 24.2 节已在跑之前记明，这个通过接近同义反复，不构成证据。

甲 数的账本多开的那几栏

第 7 章 不可通约量：算术自己的工具杀死了算术的前提

（约前 450 年）

四要件表

格	内容
形	欧几里得式的几何作图传统：线段、正方形、其上的对角线。回答方式是「把量画出来，指着它说就是这个」
算	辗转相减求公度（ἀνθυφαίρεσις）。给定两个量，反复以小减大，直到得到一个共同的度量单位。回答方式是「照这样做下去就得到它们的比」
计	「万物皆数」的比例账本：任意两个量之比是整数比 $m:n$ 。回答方式是「它是多少分之多少」
共有前提	一切量必须是可通约的（任意两个量都有公度）
材料产出位置	计（算术）：奇偶论证是整数性质的标准工具，与量的通约性无关
材料撞上位置	算：辗转相减求公度的程序在对角线与边上永不终止，是这条程序把奇偶论证推到了这道题上
Z	不是数的量——一类可以被画出来、可以被比较大小、却不对应任何整数比的存在物
拒绝	放逐型为主：不宣称它不存在，而是把它划出算术，交给几何，并规定几何只谈比的大小不谈比的值。否定型的记录只有希帕索斯溺亡的传说（Iamblichus，晚出八百年，不可作为主证据）

格	内容
签字	欧多克索斯比例论（《原本》第五卷）。 严格说这不是签字而是隔离——见 7.6

7.1 「万物皆数」是一个数学纲领

后世常把毕达哥拉斯学派的「万物皆数」当作神秘主义的口号。就本书的目的而言，更有用的读法是把它当作一个**精确的数学纲领**：

任意两个同类量之比，等于某两个整数之比。因此，一切关于量的问题，原则上可以化归为关于整数的问题。

这是一个还原纲领，与后世的算术化、集合论化在结构上是同一类东西。它的力量在于它给出了一条统一的路：几何量（长度、面积）看上去是连续的、不可数的，但只要一切量可通约，几何就可以完全建立在整数之上。

三个位置在这个纲领下配合得极好：

- 形画出两条线段。
- 算给出辗转相减的程序，跑到底得到公度。
- 计把公度的份数数出来，得到 $m:n$ 。

三家互相翻译，翻译不丢东西。这是第 14 节所说的正常状态的一个完美标本。

7.2 工具与它的转向

奇偶论证是希腊算术里最基础的工具之一。它的内容平凡到不值一提：一个整数要么是偶数要么是奇数，不可能两者都是。这条被用来处理各种整数问题——毕达哥拉斯学派本身就对奇偶有大量研究（他们把奇偶当作宇宙论的原理之一，「奇」对应有限，「偶」对应无限）。

现在把它转向正方形的对角线与边。设两者可通约，即对角线：边 = $m:n$ ，且 m 、 n 互素。由勾股关系得 $m^2 = 2n^2$ 。于是 m 是偶数，写 $m = 2k$ ，代入得 $2k^2 = n^2$ ，于是 n 也是偶数。但 m 、 n 互素，不能都是偶数。矛盾。

这个论证的四个要件在这里全部齐备，值得逐条看：

材料出自三家之一自己。 奇偶论证是算术（计）自己的工具，不是从几何搬来的，更不是从哲学搬来的。

材料早已掌握。 它不是为了这个证明才做出来的，它是算术的日常工具。

材料原本回答另一道题。 它回答的是整数的性质，从来没有人拿它去问「一切量是否可通约」。

它使三家无法退回。 毕达哥拉斯派不能拒绝奇偶论证——那是他们自己的算术，而且是他们赋予宇宙论意义的那一部分算术。他们也不能拒绝勾股关系——那是他们的定理。他们更不能拒绝正方形有对角线这件事——形就画在那里。三条路全部堵死。

7.3 共有前提在这里的形状

需要小心地把共有前提与被推翻的命题分开。

被推翻的命题是：**正方形的对角线与边可通约**。这是一个具体命题。

共有前提是：**一切量可通约**。这是一条资格规定——它规定了什么东西有资格被称为量：凡是量，必与其他同类量有公度。

区别在哪里？若只是前一个命题被推翻，处理办法是把它列为例外：这一对量特殊。而事实上希腊人很快发现 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{17}$ 都是同样的情形（泰阿泰德），例外多到不能称为例外。这时被击中的是后一条——**资格规定本身**。

而资格规定从未被写下来过。它不出现在任何一条公设里。翻遍《原本》，找不到「一切量可通约」这条公设——因为在它被推翻之前，没有人想到要把它写下来；在它被推翻之后，写下来就是错的。这正是第 2.5 节所说的：共有前提是那些不必写下来的东西。

7.4 补丁在哪里

本案例的补丁不在推翻之前，而在推翻之后——这与其他案例不同，值得单记。

推翻之前，三家配合无间，没有需要修补的地方。这与复数、理想、超穷数的情形不一样：那些案例里，冲突先以别扭的形式出现（用而不认），补丁先打上，前提在补丁下面撑了很久。而不可通约量是**一次性的**：一个短短几行的论证，一击致命。

这一点使本案例成为四要件表能填满、但「补丁定位法」（第 3.5 节）用不上的一例。本书的十九例中，这样的有五例。它们的共同特征是：材料是一个**判决性的证明**，而不是一批积累的反常。第 34 章的真跑设计里，这一类被单独编码。

7.5 三家的拒绝

计的拒绝最直接：承认它，账本平不了。「万物皆数」不再成立，而以它为基础的整个还原纲领作废。

算的拒绝表现为程序的失效：辗转相减用在对角线与边上，永不终止。这是一个操作上的事实，希腊人观察到了（它其实是连分数展开的周期性，后世才被理解为一个正面的性质）。在当时，「程序不终止」意味着这条路走不通，而不意味着走到了一个新东西。

形的态度是本案例里最微妙的一处。形不拒绝——对角线画在那里，谁也不能说它不存在。**形是三家里唯一站在新对象一边的**。这是本案例的特殊之处：不是三家一致拒绝，而是两家拒绝、一家不得不承认。

按第 6.2 节（丙）的验收标准，这似乎构成一个问题：三家不齐？

本书的处理是：**形的「不拒绝」本身就是它的立场，而这个立场与另外两家不相容**。形说「这个量在这里」，计说「它不是量」，算说「我到不了它」。三家仍然各持一咎且互不相容，符合断裂的定义。区别只在于，本案例里那个新东西是**可以被显示的**——而这恰恰解释了它的结局：它被放逐到几何里去了。因为形是唯一容得下它的位置。

这个观察在后面会反复用到：新对象被放逐到哪里，取决于三家里哪一家容得下它。不可通约量被放逐到几何（形容得下），理想数在 Kronecker 那里被留在算法里（算容得下）， δ 在物理学里被容忍了二十年（用途，即广义的计，容得下）。

7.6 欧多克索斯：一个隔离装置，不是签字

《原本》第五卷的比例论，通常被誉为对不可通约量的解决。就数学成就而言，它确实极其伟大——它可以处理任意两个量的比，不要求可通约，其定义（比 $a:b$ 与 $c:d$ 相等，当且仅当对任意整数 m 、 n ， ma 与 nb 的大小关系同于 mc 与 nd ）与戴德金分割在形式上高度相似，相隔两千二百年。

但按本书第 6.6 节的规格，它不是签字。

签字的定义是：给出一个模型或一致性论证，使那个对象获得与已被承认的对象同等的名分。欧多克索斯做的恰恰相反：他给出了一套绕开对象的技术。比例论从头到尾不问「 $a:b$ 是多少」，只问「 $a:b$ 与 $c:d$ 是否相等、谁大谁小」。它把新对象的关系全部处理干净了，而把新对象本身留在括号外。

这是第 4.4 节所说的放逐型拒绝的最高级形态：不是把它赶出去，而是造一套装置，使得没有它也能把事情做完。

放逐的代价维持了两千年：数与量在西方数学中分裂为两个体系，算术管数，几何管量，两者不能互相化归。这个分裂直到十九世纪的算术化运动（戴德金、康托尔）才被取消——而取消它用的工具（戴德金分割），在形式上是欧多克索斯定义的一个改写，只是这一次，那个被绕开的东西被正面地定义为一个对象了。

两千二百年的差距落在哪里？落在开栏与绕开的区别上。欧多克索斯有全部的技术，缺的是给那个东西一个名分的意愿——而在他的账本上，那个名分开不出来，因为「数」的资格规定还在。

7.7 这一案例在全书中的位置

不可通约量是本书十九例中最早的一个，也是最干净的一个：材料判决性、来源清楚、拒绝有据、结局明确。它同时确立了后面反复出现的三个形状：

其一，材料是自家最基础的工具。越基础、越常识、越不引人注目，杀伤力越大（第 3.4 节）。

其二，被推翻的是资格规定，不是具体命题。具体命题被推翻只产生例外，资格规定被推翻才开栏（第 2.6 节甲类）。

其三，出生与签字可以相隔极远。出生在前 450 年前后，签字在 1872 年戴德金——两千三百年。这是全书最长的一次悬置，第 29 章的时长表以它为上端。

7.8 本章最弱处

其一，史料的可靠性是全书十九章里最差的。关于毕达哥拉斯学派发现不可通约量的记载，全部来自晚出数百年的转述（亚里士多德是最早的可靠证人，但他只用一句话提及奇偶论证；希帕索斯的故事出自公元四世纪的 Iamblichus）。谁在哪一年用什么方法发现的，都不确定。Knorr (1975) 与 Fowler (1987) 对整个标准叙事提出了系统的怀疑，Fowler

甚至主张希腊人的「比」概念根本不是我们理解的那种，因而「不可通约的发现」这个说法本身就是时代错置。

本书的处理：即使 Fowler 是对的，本章的四要件表仍然可以填——只是「计」那一格的内容要改为 Fowler 重构的辗转相减比论，而「材料」那一格改为「辗转相减程序在对角线与边上不终止」（出自算，原本回答的是求公度）。两种重构下，机制不变，材料的位置从计移到算。本书采用标准叙事，因为它文献更常见，但读者若采纳 Fowler，本章的结论只需换一格，而在第 26 章的计数上会从「计」移到「算」，即更支持逾越律。这一处本书特意选了对自己不利的那个版本。

其二，与最近占位者的区分只有口头区分。最近的占位者是 Knorr (1975) 关于「不可通约性发现的逻辑结构」的分析，以及 Wilder (1968) 把它当作「文化压力下的概念变化」的处理。本书与 Knorr 的区分在于：他分析的是那个证明的逻辑，本书分析的是三家的位置结构；与 Wilder 的区分在于：他诉诸文化压力，本书诉诸自家材料的强制性。这两个区分都是口头的——本书想不出一个能把三者分开的可判错设计。如实记。

第 8 章 零与负数：记账先于算术承认它

（约 7 世纪—17 世纪）

四要件表

格	内容
形	位值记号系统（印度—阿拉伯数码、算筹布位、后来的代数记号）。回答方式是「把它写出来，指着那个位置说就是这个」
算	方程求解程序：花拉子米的还原与对消、中国的天元术、后来的卡尔当—韦达代数。回答方式是「照这个程序做下去」
计	计数与量度的账本：数是对物的计数，或对量的度量。回答方式是「有多少个／有多长」
共有前提	数必须是对某物的计数或度量
材料产出位置	计（记账）：欠债项是可加减、可与资产相消的量，印中账法已成熟运行数百年，原题是「怎样把往来账目算平」
材料撞上位置	算：解方程的程序在中间步骤与最终结果上自动产出负值与零，原题是「怎样把方程化到 $x = \text{某值}$ 」
Z	数 = 运算中的位置——一个不对应任何被计数之物、只由它在运算系统中的角色定义的存在物

格	内容
拒绝	否定型：Cardano 称负根为「虚构的」(ficta)，Descartes 称为「假的根」(racines fausses)，Vieta 完全不用负数，Pascal 认为「零减四等于零」是显然的胡话。放逐型：许多代数教本把带负系数的方程分列为若干「情形」以避免负数出现（花拉子米六型、卡尔当十三型）
签字	分两次：Hankel 1867 提出形式主义的「原理的持存」；Peano 1889 与后来的公理化把整数环构造为自然数对的等价类（Weber、Landau）。这是本书十九例中签字最晚、最零碎的一例

8.1 这个案例为什么难写

零与负数是十九例中时间跨度最长、地域最分散、文献最不齐的一个。它横跨印度、中国、伊斯兰世界与欧洲，跨越一千年，且三家的争论从未在同一时间同一地点集中发生过。

这带来一个方法上的困难：三家的断裂是否真的存在，还是本书把不同时代不同地方的三种态度拼在了一起？

这个困难是真实的，本书不掩饰。本章采取的处理是：把考察范围收窄到十六至十七世纪的欧洲，因为只有在那里，三个位置同时在场、彼此可见、且留下了争论的文献。印度与中国的部分作为「材料早已存在」的证据引用，不作为三家断裂的现场。

这个收窄有代价：它使本章看上去像一个欧洲中心的叙述。这个代价必须明说。真实的情形更可能是：这一栏在印度与中国被部分地开过，而在欧洲被重新经历了一遍。本书没有能力处理跨文明的开栏问题（第 4.9 节的选择偏差在这里最严重）。

8.2 共有前提：数是对某物的计数

在欧洲十六世纪的账本上，「数」这个词的含义是清楚的：数是多个单位的集合（欧几里得《原本》第七卷定义二：数是由单位组成的多）。这条定义有三个直接后果：

- 1 不是数，是单位（十六世纪仍有人坚持这一点）。
- 分数严格说不是数，是比。
- 小于单位的、以及小于「没有」的，不是数。

三家都站在这条定义上：

- 计：数是计数的结果，你不可能数出负三个苹果。
- 形：数被显示为一段长度或一系列位置，长度不能是负的。
- 算：解方程的目的是求出那个未知的量，量当然是正的。

请注意第三家。算并不是新对象的辩护者——它同样站在共有前提上，而这正是它打补丁的原因。

8.3 补丁：把方程分成十三种情形

补丁在这个案例里极为醒目，且延续了八百年。

花拉子米（约 820）把二次方程分成六种情形： $x^2 = bx$ 、 $x^2 = c$ 、 $bx = c$ 、 $x^2 + bx = c$ 、 $x^2 + c = bx$ 、 $bx + c = x^2$ 。为什么要分？因为他要让每一个系数都是正的。若允许负系数，六种情形只是一种。

卡尔当（1545）处理三次方程时，同样的做法使情形数升到十三。他必须为每一种情形分别给出一条公式，分别给出一个几何论证。整本《大术》的组织结构，就是这个补丁。

这是第 2.5 节所说的补丁的教科书标本：一个人人都在用、人人都觉得麻烦、但没有人去动前提的技术性修补。而它精确地指出了共有前提的位置：如果数可以是负的，十三种情形立刻塌成一种。三百年里，所有人都宁可写十三条公式，也不肯动那条没写下来的规定。

补丁同时指出了材料在哪一家：打补丁的是算。算在解方程时反复撞上负值，撞了八百年，每次都用分情形绕开。

8.4 两件材料

本案例的材料有两件，分属两家，这在十九例中是少见的（大多数案例只有一件）。

材料一（出自计）：记账中的欠债。

印度的婆罗摩笈多（628）在《婆罗摩历算书》里给出了完整的正负数运算规则，包括零的运算，并明确用「财产」与「债务」来解释。中国的《九章算术》方程章早在此前已有正负术，用红黑算筹表示。这些不是数学家的哲学推想，是记账实践的形式化——它们回答的是「怎样把往来账目算平」。

这件材料的关键性质：它是「计」这一家自己的。计是三家中最坚决否认负数的一家（数是计数），而记账恰恰属于计的领域。也就是说，计这一家内部，有一块地方八百年来一直在合法地使用负量，而这块地方从未被认为对「数是什么」有任何发言权。

这正是第 3.4 节所说的形状：材料在本家的地位越稳固、越日常、越不引人注目，杀伤力越大。没有人会说记账是错的——账天天要算。

材料二（出自算）：程序自动产出负根。

解方程的程序，一旦按统一的规则执行（而不是分情形），就会自动产出负值。这不是数学家想要的，是程序跑出来的。卡尔当在处理某些情形时会得到负根，他称之为「虚构的」并弃置，但他记录了它们——他知道那些值代入原方程是对的。

这两件材料合起来，形成了一个夹击：计自家的一块地方在用它，算自家的程序在产出它，而三家的共有前提说它不该存在。

8.5 为什么这一栏开得这么慢

不可通约量是一击致命，零与负数用了八百年。差别在哪里？

本书的读法是：因为这个案例的材料不是判决性的，是积累性的。

奇偶论证是一个证明——它一次性地关闭了「可通约」这条路。而记账中的欠债与方程中的负根，都不是证明，它们是**惯例**。惯例可以被长期地当作「实用的方便」而不被赋予本体地位。卡尔当可以一边算出负根一边说它是虚构的，这中间没有逻辑矛盾——他只是拒绝给一个计算中间物发身份证。

这个区分在后面还会用到（第 19 章极限、第 25 章广义函数都属于积累型）。本书在第 29 章的时长表里把十九例分成判决型与积累型两组，两组的从出生到签字的时长中位数相差一个数量级。

8.6 Z：数=运算中的位置

这个案例的 Z 特别值得注意，因为它是本书十九例中**最抽象、也最难被当时的人听懂的一个**。

新对象不是「负数」这个东西——负数只是一批具体的新数。新对象是一个关于**数是什么的新答案**：数不是对物的计数，数是一个系统中的位置，由它与其他位置的运算关系定义。 -3 之所以是一个数，不是因为它数了什么，而是因为它是那个满足 $3 + x = 0$ 的东西。

这个答案的完整形态要等到十九世纪。Hankel 1867 年的「原理的持存」

（Permanenzprinzip）第一次明确地把它说出来：扩充数系时，要求原有的运算律继续成立，而扩充出来的新元素的意义就由这些运算律给定，不需要另外的解释。

Hankel 的这句话，是本书全部十九例中最接近「把机制说出来」的一次。他实际上在说：**新对象的名分不来自它指称什么，来自它在系统中的位置**。这是纳格尔 1935 年那篇文章的先声。

8.7 签字的零碎

本案例的签字栏最难填，因为它不是一次事件。

- Hankel 1867：原理的持存——这是一个方法论宣言，不是一致性证明。
- Weber、Peano、Landau 一系（1889—1930）：把整数构造为自然数有序对的等价类 $(a,b) \sim (c,d) \iff a+d = b+c$ 。这才是模型：负数被显示为一对自然数，而自然数是已被承认的。
- 更彻底的签字在集合论完成之后：整数环是集合论中的一个构造，它的一致性归约到集合论的一致性。

三步走完，用了六十多年，而且是在负数已经被普遍使用了两百年之后。**签字远远晚于接受**。这一点与复数不同（复数是签字之后才被普遍接受的），本书在第 28 章会把两种时序都记录下来，并说明签字律的准确形式是「合法化由计以模型完成」，而不是「接受由签字触发」。

8.8 本章最弱点

其一，三家断裂的现场是被收窄出来的。见 8.1。真实的历史更可能是多中心的、部分重叠的，而本书为了让四要件表可填，选取了十六至十七世纪欧洲这一个切面。这是本书方法在跨文明案例上的一次明显失灵。

其二，「数是对某物的计数」这条前提在文献中曾被讨论过。按第 6.3 节（乙）的验收标准，共有前提不应出现在明文定义里——而欧几里得第七卷定义二恰恰是明文的。这构成一个对本章的直接质疑：既然它被写下来了，它就不是共有前提，而是一条可争的定义。

本书的辩护是：被写下来的是「数是由单位组成的多」，而这条定义被写下来时，它是在回答「数是什么」；把它当作资格规定来用（凡不计数之物不是数），是使用而非陈述，且这个使用从未被明文写出。这个辩护是有区分度的，但它比其他章的相应处要弱。如实记。

其三，与最近占位者的区分。最近的占位者有三处：Nagel（1935）对「不可能数」合法化的分析、Hankel 的持存原理本身、以及 Menninger（1958）关于数字与记账的文化史。与 Nagel 的区分是本书的一贯区分（他答合法化，本书答为什么先经过不可能）；与 Hankel 的区分是：他给的是一条规范（扩充时应当保持运算律），本书给的是一个机制（三家被自家材料逼到无路可走）——规范说的是应该怎么做，机制说的是实际上是什么逼成的。与 Menninger 的区分：他做的是记账实践的文化史，没有把记账当作推翻数学共有前提的材料。三处区分中，只有与 Hankel 的那一处有可判错的设计（若发现有数系扩充是在明确违反持存原理的情况下完成的，则规范说失效而机制说不受影响——四元数正是这样一个案例，见第 10 章），另外两处是口头区分。

第 9 章 复数：三个实根之间非走一趟不可

（1545—1831）

四要件表

格	内容
形	数轴与几何量的显示传统；1545 年时无法显示 $\sqrt{-1}$ ，形以「画不出来」为由拒绝。1797—1806 由 Wessel、Argand、Buée 给出平面显示，形的立场因此翻转
算	三次方程的卡尔当解法（1545）及其在不可约情形上的运行（Bombelli 1572）。回答方式是「这条路必须经过这里」
计	数即量的账本：量可多可少，量的平方非负。回答方式是「路上那个东西不是量，因而不存在」
共有前提	数必须是一个量
材料产出位置	算：卡尔当解法在不可约情形上的运行

格	内容
材料撞上位置	(Bombelli 1572)，原题是「怎样解三次方程」 算（同位）：正是求解程序自己把 $\sqrt{-1}$ 顶到了台面上，Bombelli 证明三实根非经此步不可到达
z	有方向的数——一个不是量、不能比大小、却参与四则运算并在运算中占据确定位置的存在物
拒绝	否定型，且持续三个世纪：Cardano 称 $\sqrt{-1}$ 的运算「精妙而无用」；Descartes 1637 造「虚的」(imaginaire) 一词；Newton 认为它表示问题无解；Euler 1770 在《代数学导论》中一边系统使用一边称其为「不可能的数」；Gauss 1799 已用平面表示而不发表，直到 1831
签字	Hamilton 1837：复数 = 实数的有序对 (a,b)，乘法定义为 (a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)。一致性归约到实数的一致性

9.1 不可约情形：一条绕不开的路

卡尔当 1545 年《大术》给出的三次方程解法，对 $x^3 = px + q$ ，根是

$$x = \sqrt[3]{(q/2 + \sqrt{(q^2/4 - p^3/27))}} + \sqrt[3]{(q/2 - \sqrt{(q^2/4 - p^3/27))}}$$

当 $q^2/4 - p^3/27 < 0$ 时，根号下是负数。而线性代数上一个初等的事实是：恰恰在这种情形下，方程有三个相异的实根。

这是一个几乎荒谬的局面：三个完完全全的实数，只有经过一个「不存在的东西」才能被公式算出来。卡尔当本人称这种情形为「不可约的」，并且回避它——他在别处处理其他情形时，对负数平方根有过一段著名的计算（把 10 分成两部分使其积为 40，得 $5 \pm \sqrt{-15}$ ），他做完计算，验证了乘积确实是 40，然后写道：这在算术上是精妙而无用的。

Bombelli 1572 年《代数》做的事，是把回避改成了正视。他系统地建立了一套「+ 号乘 + 号的负平方根」的运算规则（相当于 i 的乘法表），然后用它算出了 $x^3 = 15x + 4$ 的根 $x = 4$ ——一个明明白白的整数。计算的中间物是 $2 \pm \sqrt{-121}$ ，两个立方根相加，虚部消掉，得 4。

Bombelli 的意义在于他证明了：这不是一个可以绕开的技术麻烦。三次方程的三实根情形，非经这条路不可到达。后来 1890 年代由 Hölder 严格证明：不可约情形下，三个实根无法用实的根式表示。这条定理是本案例材料强制性的最终确认，虽然它晚了三百年。

9.2 三家的位置

算说：这条路必须走。而且——这一点极重要——算并不因此声称 $\sqrt{-1}$ 存在。算的职责是给出路径，不是给东西发身份证。Bombelli 建立了完整的运算规则，用它算出了正确的

实数答案，然后就停在那里。他没有说「所以负数有平方根」，他说的是「按这套规则操作，能得到正确的结果」。

计说：路上那个东西不是量，因而不存在。这个判断在当时的账本上百分之百正确。数是量，量可多可少，量的平方非负，因此没有一个量的平方是 -1 。计的推理无懈可击。

形不出声，而这个不出声是一种拒绝。按第 6.2 节的规格：形对这道题有立场——数应当能被显示为长度或数轴上的位置，而这个东西不能，因此形不承认。这是「本可以显示而显示不出来」的沉默，算占位。

9.3 补丁：用而不认

本案例的补丁是全书最清晰的一个，而且它的形式极为纯粹：**大规模地使用，同时明文否认。**

Euler 是这个补丁的极致。他是十八世纪最大规模使用复数的人： $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 是他的 (1748)，复对数的多值性是他理清的，复变函数的许多基本性质出自他手。同一个 Euler，在 1770 年的《代数学导论》里写道： $\sqrt{-1}$ 这类量既不大于零也不小于零也不等于零，因此它们不在可能的数之中，它们是不可能的数 (unmöglich)。

按第 3.5 节的方法：**补丁在这里，打补丁的是算，材料就在算这一家。**这条定位方法在本案例上得到最干净的验证。

值得再说一句 Euler 那句话的结构。他的论证是：一个数必须与零可比大小（大于、小于、等于三者必居其一）；这个东西与零不可比；所以它不是数。**这个论证把共有前提用得明白白：数是量，量必可比大小。**这是十九例中，共有前提离被明说最近的一次——Euler 几乎说出来了，但他是把它当作理由用，不是当作可疑的假设提出来。

9.4 形出场：三百年的关键一步

1797 年，挪威测量员 Wessel 向丹麦皇家科学院提交了一篇论文，把复数表示为平面上的有向线段，并给出乘法的几何意义（模相乘、辐角相加）。1806 年，巴黎的书商 Argand 独立做了同样的事。1831 年，Gauss 公开发表了他早已私下使用的平面表示，并且——这一点常被忽略——**同时给「虚数」这个名字辩护，说这个称呼本身造成了偏见。**

形的出场改变了什么？

它没有增加任何计算能力。Euler 用复数算出的一切，在没有复平面时就已经算出来了。Wessel 与 Argand 没有解决任何 Euler 解决不了的问题。

它改变的是**可显示性**。而可显示性是签字的前置条件。这是第 28 章那条定律的核心：**计只能对形签字，不能对算签字。**

理由不难看出。计的签字方式是一致性——它要检查这个东西与已承认的东西合起来会不会矛盾。而要做这个检查，必须有一个**可以被检查的对象**。算给出的是一条路径，路径的中间物没有独立的身份，你无法对一个中间物做一致性检查——它只在那条路上存在。形把它变成一个可以指着看的東西（平面上的一个点），计才有东西可查。

复数从 1572 年到 1837 年的两百六十五年，几乎全部消耗在等形出场上。这是本书对「为什么复数用了这么久」这个问题的回答，它与常见的回答（数学家的形而上学偏见、缺乏严格性的时代风气）不同：不是人们不够开明，是签字的前置条件不具备。

9.5 签字：Hamilton 的有序对

1837 年，Hamilton 在《共轭函数论，或代数偶》里做了签字工作：

把复数定义为实数的有序对 (a, b) 。加法逐分量，乘法定义为 $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ 。验证这套定义满足全部域公理。于是 $(0, 1)^2 = (-1, 0)$ 。

签字的性质在这里看得很清楚：

其一，它把新对象归约到已承认的对象。有序对是集合论式的构造（虽然当时还没有集合论），实数是已被承认的。所以复数的一致性归约到实数的一致性——不多要一分信任。

其二，它取消了「这个东西是什么」这个问题。Hamilton 没有回答 $\sqrt{-1}$ 是什么，他构造了一个东西，它满足我们要求 $\sqrt{-1}$ 满足的一切，而它是由已有材料造的。至于它「真的是不是」 $\sqrt{-1}$ ，这个问题被取消了。这正是纳格尔 1935 年的论点。

其三，签字者不是提出者。提出复数的是 Bombelli 与 Euler，显示它的是 Wessel、Argand、Gauss，签字的是 Hamilton。三批人，跨两百六十五年。这符合第 28 章的一般形状。

其四，签字所用的工具是一阶的。有序对不是一个新对象，它是把两个已有对象放在一起的一种记号。第 5.6 节说过：一阶工作是签字工具。这里是最直接的证据。

9.6 $\mathbb{Z}$ 是什么：不能比大小的数

复数的 $\mathbb{Z}$ 常被说成「引入了 i 」。这个说法不准确，因为它把 $\mathbb{Z}$ 说成了一个具体的数。

$\mathbb{Z}$ 是一个新的存在物类型：一个不是量的数。它的特征性质是 Euler 用来否认它的那一条——与零不可比大小。承认它，就是承认「数」这个范畴里可以有不能排成一条线的成员。

这个承认的后果是深远的，而且在当时无人预见。它打开的不是复数一栏，而是「数系可以有多种」这个可能性。四元数（第 10 章）、 p 进数（第 12 章）、超实数（第 13 章）都是在这栏开了之后才可能的——不是逻辑上可能，是账本上留出了位置。

这一点在第 29 章会作为一个一般现象记录：开一栏往往不止开一栏，它松动的是一整条资格规定，于是后续的开栏变快。复数用了两百六十五年，四元数用了不到十年（从 Hamilton 开始想到 1843 年）， p 进数出生即被容忍（虽然长期不被重视）。

9.7 被排除的替代解释

本案例有三个替代解释流传较广，本书须逐一处理，否则四要件表的说服力不足。

替代一：复数被接受是因为它有用。反驳：它在被接受之前的两百年里就极其有用（Euler 的全部工作），而且当时的人明确知道它有用。有用没有带来接受。有用带来的是补丁（用而不认）。

替代二：复数被接受是因为严格性标准提高了。 反驳：时序相反。严格性运动（柯西、魏尔斯特拉斯）是十九世纪二十年代之后的事，而 Wessel 是 1797 年，Argand 是 1806 年。更重要的是，严格性提高本身不会产出一个新对象——它只会更严厉地把不合格的东西赶出去。

替代三：Gauss 的权威使它被接受。 部分成立，但不解释机制。Gauss 1831 年的表态确实加速了接受，但他表态的内容正是形的显示（平面表示）与随后的签字工作。权威加速了传播，没有创造条件。

9.8 本章最弱点

其一，「形不出声」这一格的填法带有构造性。说 1572 年的形「以画不出来为由拒绝」，这在文献上没有直接证据——没有人在 1572 年写过「我画不出 $\sqrt{-1}$ 所以我不承认」。本书是从「当时的数学论证极度依赖几何可显示性」这一背景推断出来的。这是十九章里对第 6.2 节（丙）验收标准最勉强的一次执行之一。

其二，与最近占位者的区分。最近的占位者是 Nagel (1935)、Kline (1972, 第十三章)、以及 Nahin (1998) 关于 $\sqrt{-1}$ 的通史。与 Nagel 的区分同前。与 Kline 的区分：他讲的是同一段史料，结论是「数学的发展不是逻辑的而是实践驱动的」——这与本书不冲突，但它不给机制。与 Nahin 的区分是体裁的。

真正有威胁的占位者不在数学史，在数学哲学：Wilson (2006) 《游荡的意义》关于概念如何在应用压力下「漂移」的分析，与本书对复数的处理在结构上接近。区分在于：他的漂移是渐进的、无判决点的，本书主张有一个判决点（材料对共有前提的推翻）。这个区分有可判错设计：若复数的接受过程在文献上表现为均匀渐进、无任何可指认的转折，则漂移说胜；若表现为长期停滞随后形的出场而急转，则本书胜。史料支持后者（1572—1797 二百二十五年几乎无进展，1797—1837 四十年内完成显示与签字），但这个读数依赖于「无进展」的判定，而 Euler 的大量工作显然是进展——只是不是朝这个方向的进展。这一处需要更细的编码，本书未做。

第 10 章 四元数：Euler 的恒等式早就写好了答案

(1748—1843)

四要件表

格	内容
形	复平面：复数作为平面上的点，乘法作为旋转与伸缩。回答方式是「数被显示为平面上的位置，那么三维的数应被显示为空间中的位置」
算	三维旋转与空间几何的计算需求；Hamilton 十年间反复尝试的三元组乘法构造程序
计	除法代数的账本：模相乘（范数可乘

格	内容
共有前提	性)。若 z 、 w 各有模，则 zw 的模等于两模之积——这是复数最有用的性质，任何推广都必须保住它
材料产出位置	乘法必须是交换的 计（数论）：Euler 四平方和恒等式（1748），原题是费马—Euler 传统下的平方和表示问题
材料撞上位置	无：算跑了十年而什么也没产出（见 31.2）。材料在本案例中起的是追认强制性的作用，不是被撞出来的
Z	不交换的数 ——一个满足除法代数全部要求、却使 $ab \neq ba$ 的存在物
拒绝	否定型：Kelvin 称四元数「虽然对 Hamilton 而言是美的，但对以任何方式接触过它们的人来说是纯粹的恶」；Heaviside 与 Gibbs 系统地把它拆成标量积与向量积，理由是四元数「不自然」。放逐型：二十世纪的物理教学几乎完全排除四元数，直到计算机图形学重新启用
签字	本案例的签字最迅速：Hamilton 当天即验证了乘法保范数，1878 年 Frobenius 定理给出终局签字——实数上的有限维结合除法代数只有三个： $\mathbb{R}$ 、 $\mathbb{C}$ 、 $\mathbb{H}$ 。这条定理把 Z 的位置在账本上钉死

10.1 十年的三元组

1830 年代，Hamilton 已经完成了复数的有序对签字（第 9 章）。下一步是显然的：既然实数对应直线上的点、复数对应平面上的点，那么应当有一种「三元数」对应空间中的点。

他为此工作了十年。他儿子的回忆是著名的：每天早晨下楼吃早饭，孩子们会问「爸爸，你能把三元组相乘了吗」，他只能摇头说还不能。

失败的原因在当时不清楚。Hamilton 要求他的三元数满足：- 是 $a + bi + cj$ 的形式（三个分量）；- 有乘法，且乘法与加法分配；- 有除法（非零元可逆）；- **模相乘**，即 $|zw| = |z||w|$ 。

最后一条是「计」的要求，也是他不肯放弃的一条——因为它是复数最有用的性质，也是把数系推广到几何上唯一有意义的方式。

这四条要求合起来，无解。而且这件事，在当时的账本上，早已有答案，只是没有人这样读它。

10.2 材料：1748 年的一条数论恒等式

Euler 1748 年在与哥德巴赫的通信中给出了四平方和恒等式：

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2$$

其中 c_i 是 a_i 、 b_j 的显式双线性表达式。这条恒等式在数论里回答的是：**四平方和表示的乘性问题**——它是 Lagrange 1770 年证明「每个自然数都是四个平方数之和」的关键工具（有了乘性，只需对素数证明）。

这条恒等式还有一个更早的两平方版本（Diophantus—Brahmagupta—Fibonacci 恒等式），它对应的正是复数的模相乘。

关键的读法转换是：这些恒等式说的是「n 个分量的组可以有保范数的乘法」，而 n 只能取某些值。两平方有（复数），四平方有（四元数），八平方有（Cayley 1845 的八元数，Degen 1818 已给出恒等式），三平方没有——这是一条初等的、当时可验证的事实。

也就是说：Hamilton 十年间要找的那个三元组乘法，**数论早在一百年前就写下了它不存在的理由**，而没有人把那条恒等式读成一条关于「数可以有几个分量」的陈述。

这是第 3.4 节所说形状的最纯粹标本：材料在本家地位稳固（Lagrange 四平方定理的基石）、日常、不引人注目，而把它转过来，它是判决性的。

10.3 1843 年 10 月 16 日

Hamilton 在布鲁姆桥上想到的那一步，是**放弃交换律**。

四元数 $a + bi + cj + dk$ ，规则是 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ 。由此得 $ij = k$ 而 $ji = -k$ 。乘法不交换。

而放弃交换律之后，模相乘成立——因为四元数乘法的模相乘展开来，**恰恰就是 Euler 1748 年的那条恒等式**。

这个对应不是巧合，也不是 Hamilton 事后才发现的：他当天就验证了保范数。但据现有文献，他并不是从 Euler 恒等式出发想到四元数的——他是从几何直觉与反复的构造尝试出发的。**材料在他背后，不在他手上。**

这一点必须如实记，因为它触及本书装置的一个边界：材料来源规则说的是「推翻共有前提的材料出自三家之一自己」，它没有要求**发现者本人是通过那件材料而想到的**。规则是关于强制性的（三家无法退回），不是关于心理路径的（第 5.5 节的区分）。Euler 恒等式的作用是：一旦四元数被提出，三家中没有任何一家能说它是随意的、人为的——因为保范数这件事，是数论自家一百年前就写下的。

10.4 共有前提：乘法交换

「乘法必须是交换的」这条前提，在 1843 年之前从未被任何人写下来作为一条假设。它属于第 2.6 节的（丁）结构类。

三家都站在它上面：

- **计**：数的运算律是数的一部分；一个不交换的乘法根本不是乘法。
- **形**：平面上的乘法（旋转伸缩）是交换的，空间中的自然推广也应当是。

- 算：全部代数操作的化简规则都默认可交换，放弃它意味着整套算法重写。

Hamilton 自己的记述表明，他放弃交换律时清楚地知道这是一件多么大的事——他在日记与信件里反复为此辩解，说这不是任意的，是被迫的。

10.5 拒绝：这一案例的拒绝形态最完整

四元数受到的拒绝，是十九例中形态最完整、记录最丰富的一个。

Kelvin (1892 年信件)：四元数「虽然对 Hamilton 而言是美的，但对以任何方式接触过它们的人来说是纯粹的恶」。

Heaviside 与 Gibbs (1880 年代—1890 年代)：系统地把四元数拆开，只保留三个虚部作为「向量」，把乘法拆成标量积（点乘）与向量积（叉乘）。他们的论证是实用主义的：物理学需要的只是这两个运算，不需要那个把标量与向量混在一起的四元数积。

这场「四元数—向量论战」在 1890 年代的《自然》与《电工》杂志上持续多年，是十九世纪末数学界最激烈的公开争论之一。

第 30 章会正式处理向量这个案例，此处先给结论：**Gibbs—Heaviside 的向量是一阶的**。它的每一个内容都可以从四元数里读出来（把实部去掉、把乘法拆成两半），复述完毕不丢东西。它极其有用，它统治了此后一百年的物理教学，它不是新对象。

这构成本书的一个反直觉读数，需要说清楚：**一阶产物在实用上压倒二阶产物，是常见的，甚至是常态**。向量比四元数好用，正如十三种情形的公式在卡尔当那里比引入负数「安全」。实用上的胜利与开栏与否是两个维度（第 4.6 节）。

有意思的是，一百年后，计算机图形学与航天姿态控制重新启用了四元数——因为在插值与避免万向节死锁的问题上，那个被 Gibbs 扔掉的部分恰恰是关键。

10.6 签字：Frobenius 定理

本案例的签字有两层。

第一层（即时）：Hamilton 当天验证了保范数，即四元数是一个除法代数。这一层是构造性的——他造出了它，它就在那儿。

第二层（终局）：Frobenius 1878 年证明：**实数上有限维的结合除法代数，只有 $\mathbb{R}$ 、 $\mathbb{C}$ 、 $\mathbb{H}$ 三个**。这条定理的意义在本书的框架里非常特殊：它不是给四元数一个模型（四元数本来就有模型），它是**给这一栏画了边界**——账本上这一类东西一共只有三个，不多不少。

这是「计」这一家最彻底的签字形式：**不但承认它，而且把它连同它的全部同类一起数清了**。类似的形式在其他案例里也出现：Ostrowski 1916 数清了 $\mathbb{Q}$ 上的绝对值（第 12 章），Frobenius 数清了除法代数，Wantzel 与 Gauss 数清了尺规可作图的正多边形。第 28 章会把这类「数清了」的签字单列一型，称为终局签字，并指出它是签字的最强形态。

10.7 本章对本书是不利的：材料出自计，不出自算

本章必须记录一处对本书不利的读数。

第 26 章的逾越律说：推翻共有前提的材料几乎总出自「算」——因为算是唯一自动前进的位置，它跑出了形与计都不承认的产物。

本案例是**反例**。材料（Euler 四平方恒等式）出自「计」（数论），而不是出自算。算在本案例里做的事是十年的失败尝试，它没有产出任何非法产物——它什么也没产出。

按第 6.8 节纪律三，这一处不修改定律去迁就，也不淡化。第 26 章的计数里，本案例记入「计」那一列，且在该章正文中被点名讨论。

这里可以先给一个观察，供第 26 章使用：**本案例的材料之所以出自计，是因为共有前提本身是一条计的规定（乘法交换律是运算律，属于账本）**。十九例中，共有前提属于结构类（丁）的有五例，其中材料出自计的有两例。这提示逾越律可能有一个更精确的形式：**材料来自哪一家，与共有前提属于哪一类有关**。这个更精确的形式在第 26 章会被提出，但本书没有足够的样本去检验它（第 6.9 节的样本量问题）。

10.8 本章最弱点

其一，**Hamilton 是否「用了」那条材料，文献上是否定的**。本章 10.3 已如实说明：他不是从 Euler 恒等式出发的。这使本案例的材料来源规则的执行方式与其他章不同——材料在这里起的是**追认强制性的**作用，不是引发推翻的作用。这个区别是否使本案例不合格，本书判为合格（因为规则是关于强制性的），但读者可以合理地判为不合格。若判为不合格，十九例减为十八例，且第 26 章计数中「计」那一列减一——这个方向对本书的定律有利。**本书选择了对自己不利的判法**。

其二，**「乘法必须交换」是否真的是共有前提**。一个可能的反驳：在 1843 年之前，已经有过不交换的运算（矩阵乘法虽在 1858 年才有记号，但线性代换的复合早就在用，且复合不交换；置换的复合也不交换）。若不交换的运算已经在用，那么「乘法必须交换」就不是共有前提。

本书的辩护：那些不交换的东西当时**不被称为数的乘法**。置换的复合是「操作的接续」，线性代换的复合是「代换的接续」，它们与「两个数相乘」在当时的账本上是两类东西。共有前提的准确表述应是「**数的乘法必须交换**」。这个辩护成立，但它使共有前提变窄了一些，因而也弱了一些。

其三，**与最近占位者的区分**。最近的占位者是 van der Waerden (1976) 关于四元数发现的史学分析、Crowe (1967) 《向量分析史》、以及 Pycior (1976) 关于英国代数学派「符号代数」传统的研究。Pycior 最有威胁：她主张 Hamilton 的突破应放在 Peacock 的「符号代数」传统里理解——该传统已经允许符号脱离量的解释而由运算律定义，因此放弃交换律不是一次断裂，是那个传统的自然延伸。

这个占位者本书排不掉。若 Pycior 是对的，本案例就不是二阶碰撞，而是一个已有传统内部的一阶推进。本书能给的区分只有一条：符号代数传统本身要求保持全部运算律（这正是 Peacock 的持存原理，也是 Hankel 1867 年的持存原理，见第 8.6 节），而 Hamilton 放弃了其中一条——这恰恰是那个传统禁止的动作。这一条区分是实质性的、可核查的（Peacock 与 Hankel 的原则都写在文献里），但它只对「传统的自然延伸」这个说法构成反驳，不构成对全部占位主张的反驳。如实记为本章第一弱处之外的第二处未闭合。

第 11 章 超穷数：对角线本来是为超越数准备的

(1874—1883)

四要件表

格	内容
形	连续统：直线上的点的全体。回答方式是「无穷被显示为一条线，线上的点是一个接一个的」
算	三角级数唯一性集的研究（Cantor 1870—1872）：一个函数的三角级数表示在什么条件下唯一，例外点集可以有多复杂。回答方式是「照导集的程序反复取下去，看它什么时候停」
计	无穷的账本：无穷不是一个可数的量，它是一个「永远可以再加一」的过程。回答方式是「不能问它有多少，只能问它有没有尽头」
共有前提	无穷只有一种，且它是潜在的（一个永远未完成的过程，不是一个完成了的对象）
材料产出位置	计：一一对应作为比较集合大小的手段（本章 11.4 按不利判法定为计）
材料撞上位置	算：对角线（或 1874 年的区间套）是一条程序——给定任何排列实数的企图，它造出一个不在其中的数
Z	大小不同的无穷——一类完成了的、可以彼此比较大小、可以做算术的无穷存在物
拒绝	否定型且极激烈：Kronecker 阻挠发表并称 Cantor 为「青年的败坏者」；Poincaré 被传称集合论为「一种疾病，人们终将痊愈」；Weyl 称 Cantor 的等级是「雾上之雾」。放逐型：直觉主义（Brouwer）拒绝

格	内容
签字	实无穷，此立场至今存在 Zermelo 1908 的公理化，以及此后 ZF/ZFC 体系；相对一致性由 Gödel 1938 (L 模型) 与 Cohen 1963 (力迫法) 完成。签字者非提出者，且晚于出生二十五年以上

11.1 那篇论文回答的不是无穷的问题

1874 年，Cantor 在《克雷尔杂志》发表了一篇题为《论全体实代数数的一个性质》的论文。文章不长，做了两件事：证明全体代数数可以排成一个序列；证明任何实数区间中的实数不能排成这样的序列。由此得出一个推论：任何区间中都存在非代数数（超越数）。

这篇论文回答的题是超越数的存在。

这道题当时的地位是这样的：Liouville 1844 年已经构造出超越数（Liouville 数），因此「超越数存在吗」这道题在 1874 年被认为已经解决了。Cantor 的贡献是给出了一个**完全不同的证明**——不构造任何一个具体的超越数，而是通过计数来证明它们必然存在，而且「大多数」实数都是超越数。

这个证明的形式在当时是新奇的：它是一个纯粹的存在性证明，不给出任何构造。Kronecker 的敌意从一开始就与这一点有关——他后来的立场（数学对象必须能被有限步构造出来）恰恰针对这类证明。

而这篇论文的副产品是：无穷有大小之分。代数数与自然数「一样多」，实数比它们「多」。

11.2 副产品变主产品用了十年

这是本案例最值得记录的一处：Cantor 自己用了将近十年，才把副产品当作主产品。

1874 年的论文标题里没有「无穷」二字，正文里也没有把这个副产品提升为一般理论。1878 年的论文开始讨论「幂」（Mächtigkeit，后来的基数）的概念，并证明了 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 等势（他在给戴德金的信里写了那句著名的「我看见了它，但我不相信它」）。真正把超穷数作为**对象**提出来，配上超穷序数、超穷算术、良序集理论的，是 1883 年的《一般集合论基础》。

九年。而且这九年里 Cantor 反复在信件中表达犹豫，反复讨论「实无穷」在哲学与神学上是否可容许（他与几位天主教神学家有长期通信，讨论实无穷是否僭越了上帝的属性）。

按第 4.5 节的规格，**提出者本人的犹豫是最强的拒绝证据**——它排除了「拒绝出于对新人的偏见」这个替代解释。Cantor 不是不懂自己的定理，他是在自己的账本上找不到那个东西的位置。

11.3 共有前提：潜无穷

「无穷只有一种，且是潜在的」这条前提，从亚里士多德起统治了两千二百年。

亚里士多德的区分是：潜无穷（δυνάμει ἄπειρον）是一个永远可以继续的过程——数列可以一直数下去，线段可以一直分下去；实无穷（ἐνεργείᾳ ἄπειρον）是一个完成了的无穷整体，而他认为这是不可能的。

这条区分被中世纪经院哲学继承，被近代数学继承。高斯 1831 年给舒马赫的信里说得极清楚：他反对把无穷当作一个完成了的量来使用，无穷只是一种说话方式（façon de parler），指的是极限。

三家都站在这条前提上：

- **计**：无穷不能被数，所以不能问它有多少，只能问它有没有尽头。「多少」这个问题对无穷不适用。
- **形**：连续统被显示为一条线，线上的点是一个接一个地取的——取的过程无尽，但从未完成。
- **算**：一切涉及无穷的程序（求极限、取导集、级数求和）都是过程，程序的意义在于它的每一步，不在于它的「终点」。

注意第三家。算在这个案例里是共有前提的坚定支持者——这与复数、理想那些案例不同（那里算是逾越者）。这一点在 11.4 会带来一个麻烦。

11.4 材料出自哪一家：本章最难的一格

四要件表里最难填的是「材料」那一格的归属。

对角线论证（或 1874 年的区间套版本）是一个什么位置的东西？

说它出自计：它做的是计数——比较两个集合的大小，用的是一一对应这个纯粹的计的手段。而结论是一条关于「有多少」的陈述。

说它出自算：它是一个程序——给定任何一个排列实数的企图，程序造出一个不在其中的数。构造性极强（事实上对角线论证是构造性的，直觉主义者接受它，只是不接受由它得出的结论的解释）。

本书的判定是：**出自计**。理由是它的**结论形式**是计的形式（两个集合能否一一对应），而它所推翻的共有前提也是计的规定（无穷不能被问「多少」）。程序在这里是手段，不是产物——它没有产出一个新东西，它产出的是一个不可能性。

这个判定是可以被挑战的，而且挑战的方向会影响第 26 章的计数。本书如实标注：**若判为出自算，则逾越律的计数从 13 升到 14（更支持本书）；本书选择了不利的判法。**这与第 7.8 节、第 10.7 节的做法一致：凡归属可两判的，取对本书定律不利的那一判。

11.5 为什么这件材料无法被退回

材料的强制性在本案例中极强，理由有三层。

第一层：它是自家的定理，且是当时最受赞赏的一个。1874 年的论文被广泛接受为超越数存在的一个漂亮新证明。Weierstrass 支持发表，Dedekind 与 Cantor 通信讨论细节。**接受这个定理的人，同时就接受了那个副产品——只是他们没有意识到。**

第二层：它不依赖任何可疑的手段。一一对应数学里最基本的概念，比「无穷」本身更基本。若拒绝用一一对应比较无穷集合的大小，就要说明为什么这个在有限情形下天经地义的手段在无穷情形下不合法——而这个说明，没有人给得出来（直觉主义的路径是拒绝实无穷集合本身，那是另一条路，见第 32 章）。

第三层：结论是不对称的。若代数数与实数一样多，什么也不发生。而它们不一样多，这个「不一样」必须被说成什么。说它是「两个都是无穷但不能一一对应」，这句话本身已经在使用「不同的无穷」这个概念了——**你无法在不承认新对象的情况下陈述这个定理。**

第三层是最要命的。它是本书全部案例中，材料强制性最纯粹的一次：**材料的陈述本身就要求那个新对象。**

11.6 拒绝的形态

Kronecker 的拒绝是算的拒绝（第 1.3 节）：造不出来的东西不存在。他的立场是彻底的、内部一贯的——他也拒绝 Dedekind 的理想、拒绝 Weierstrass 的一般实数理论、拒绝一切非构造的存在性证明。他不是保守，他是站在算这一位置上把标准贯彻到底。本书在第 26 章会指出：**构造主义者最常是新对象的拒绝者，同时最常是材料的供给者——**Kronecker 本人在代数数论上的工作，为后来的对象提供了大量材料。

Poincaré 的态度更复杂。那句「疾病」的话流传极广，但出处不可靠（常见的引文来自二手转述）。可靠的是他在 1906 年前后对集合论悖论与非直谓定义的批评，其立场接近潜无穷。

Weyl, Brouwer 的拒绝延续到二十世纪，且从未完全消失。这是本书十九例中唯一一个**拒绝至今仍是一个活立场**的案例：构造性数学、直觉主义数学作为一个研究纲领仍然存在，它们不承认全部超穷等级。

这一点对本书的框架有一个含义：**签字不一定是全体一致的。**第 28 章会处理这个问题，结论是：签字的含义是「主流账本上开了栏」，不是「无人反对」。

11.7 签字与它的两重性

Zermelo 1908 年的公理化，是对超穷数的签字，但这次签字有一个特殊的形状：**它是在悖论的压力下做的。**

1897—1903 年间，Burali-Forti 悖论、Cantor 悖论、Russell 悖论相继出现。它们表明，朴素地把「一切集合」当作对象会导致矛盾。于是签字工作同时要做两件事：给超穷数一个模型，并且防止那个模型自毁。

ZF 公理系统的核心手段（分离公理代替概括公理、正则公理排除自属）就是为了做这第二件事。

相对一致性的证明更晚：Gödel 1938 构造 L 证明 AC 与 CH 与 ZF 相容，Cohen 1963 用力迫法证明它们的否定也相容。这两项工作合起来说明：**超穷数的这一栏不但开了，而且这一栏内部的某些问题（连续统假设）在现有账本上判不了。**

这是本书十九例中唯一一个**开栏之后账本被证明不完全**的案例。它的哲学后果远超本书的范围，此处只记一句：签字并不保证栏目内部的一切问题可判。

11.8 本章最弱处

其一，材料归属可两判（11.4）。已标。

其二，「无穷只有一种」这条前提是否被明文写过。按第 6.3 节（乙）的验收标准，共有前提不应出现在明文定义里。而亚里士多德的潜／实无穷区分是明文的，高斯 1831 年的信也是明文的。这构成对本章的直接质疑，与第 8.8 节（其二）同型。

本书的辩护：被明文写下来的是「实无穷不可能」这个哲学立场，而作为资格规定被使用的是「不能问一个无穷集合有多少」——后者从未被写下来，且它在数学实践中的作用与哲学立场是分开的（十八、十九世纪的数学家大量使用无穷级数与无穷过程，从不援引亚里士多德）。这个辩护与第 8 章的辩护同型，也同样比其他章弱。

其三，与最近占位者的区分是全书最紧的一处。最近的占位者是 Dauben（1979）的 Cantor 传记与思想史。Dauben 的叙事已经包含了本章几乎全部史实，包括「1874 年论文回答的是超越数」这一点、包括九年的犹豫、包括神学通信。

本书与 Dauben 的区分只有一条：他把这些史实组织成一个人的思想历程，本书把它们组织成一个三位置的结构。这条区分是真实的（组织方式不同，可检验的推论也不同：本书预言其他案例上会出现同样的形状，Dauben 的叙事不预言任何别的案例），但在本章内部，它没有可判错的设计——就本章而言，本书说的每一件事 Dauben 都说过。

本章的独立价值只有在第五编（三条定律由十九章共同抽出）才兑现。这是「案例编不许提前下结论」这条纪律（第 6.8 节）的代价：单章看，本书常常只是把已知史料重新排列。如实记。

第 12 章 p 进数：被叫作「形式的」那一族

（1897—1916）

四要件表

格	内容
形	代数函数论中的幂级数展开：一个函数在一点附近被显示为 $\sum a_n(x-a)^n$ ，这个显示使「在一点附近的行为」成为可以指着看的东西
算	同余算术：对模 p 、 p^2 、 p^3 、... 逐级求解，一级一级往上提。回答方式是「照这个逐级提升的程序做下去」
计	数域与绝对值的账本： $\mathbb{Q}$ 的完备化是 $\mathbb{R}$ ，这是唯一的一次完备化；「接近」由通常的绝对值度量
共有前提	「接近」只有一种意思（两数之差的通常绝对值小）

格	内容
材料产出位置	算（数论的同余计算）：亨泽尔引理的雏形与逐级提升程序，原题是「同余方程有没有解、解怎么求」
材料撞上位置	算（同位）：逐级提升跑出一列在通常意义下不收敛、而「应该」收敛到某物的东西
Z	另一种完备化下的数——一个不是实数、也不是复数，却同样由 $\mathbb{Q}$ 完备化而来的存在物
拒绝	否定型偏弱、放逐型为主：长期被称为「形式的」（formal）、「符号的」，被视为一种记号上的方便而非真正的数；Hensel 本人早期的论证有错误（他曾错误地用 p 进方法「证明」 e 是超越数），使整个理论一度被视为不可靠。二十世纪二十年代前极少被引用
签字	Ostrowski 1916: $\mathbb{Q}$ 上的绝对值，在等价意义下只有三类——通常绝对值、 p 进绝对值（每个素数 p 一个）、平凡绝对值。这是终局签字（第 10.6 节的类型）：不但承认了 p 进数，而且把「 $\mathbb{Q}$ 的完备化」这一栏的全部成员数清了

12.1 一条类比引出的东西

Hensel 1897 年的出发点是一个类比。

在代数函数论里，一个函数 $f(x)$ 在点 a 附近可以展开成幂级数 $\sum a_n(x-a)^n$ 。这个展开有一套成熟的理论（Weierstrass、Dedekind-Weber），而 Dedekind 与 Weber 1882 年那篇著名的论文已经系统地把代数函数域与代数数域平行地处理：函数域的「点」对应数域的「素理想」，函数在一点的阶对应数被素数整除的次数。

Hensel 把类比推到底：既然函数可以在一点展开成幂级数，那么数应该可以在一个素数处展开成「 p 的幂级数」：

$$a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3 + \dots \quad (0 \leq a_i < p)$$

注意这个级数在通常的意义下是发散的——各项越来越大。但在 p 进的意义下（一个数被 p 整除的次数越高就越「小」），它是收敛的。

这就是共有前提被撞上的那一刻：这个级数是收敛的还是发散的？

12.2 共有前提：「接近」只有一种意思

十九世纪末，「接近」这个概念已经被彻底形式化了—— ε - δ 语言（Cauchy-Weierstrass）把「 x 接近 a 」翻译成「 $|x - a| < \varepsilon$ 」。这套语言的力量在于它取消了直观，代之以一个精确的量词结构。

但它有一个从未被讨论过的组成部分：那个绝对值 $|\cdot|$ 。

ε - δ 定义的量词结构是：对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，使得.....这个结构里， $|\cdot|$ 是一个**外包**的部件——定义不说 $|\cdot|$ 是什么，它只要求有一个这样的东西。而所有人默认它就是通常的绝对值。

这条默认从未被写下来。翻遍十九世纪的分析教本，找不到一条公设说「绝对值必须是通常的那一个」——因为没有第二个候选。

三家都站在这条默认上：

- **计**： $\mathbb{Q}$ 的完备化是 $\mathbb{R}$ ，这是分析的基石；完备化是一次性的、唯一的操作。
- **形**：数被显示在数轴上，接近就是数轴上靠得近。
- **算**：一切求极限、求收敛的程序，都以通常绝对值为判据。

12.3 材料：同余逐级提升

材料出自算这一家最古老的一块地方：同余计算。

给定一个多项式方程 $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ ，若它有一个单根 x_0 ，则可以把这个根「提升」到模 p^2 、模 p^3 、...、模 p^n ，且提升是唯一的。这是一个标准的程序（本质上是牛顿法在同余下的版本），高斯《算术研究》里已有雏形，十九世纪的数论教本里是常规内容。

它在本家回答的是：同余方程有没有解，解怎么求。与「什么叫接近」毫无关系。

而把它转过来读，它说的是：存在一列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ ，每一项与前一项的差被 p 的越来越高的幂整除，而这列东西「应该」收敛到某个东西。

那个「某个东西」在 $\mathbb{Q}$ 里通常不存在。于是要么承认这列东西不收敛（那么这个逐级提升程序就是一个没有极限的过程，白跑），要么承认有另一种收敛。

这是第 3.4 节形状的又一次出现：材料在本家极其稳固（同余是数论最基础的工具），极其日常，且原本回答的完全是另一道题。

12.4 为什么这一栏开得比复数容易

复数用了两百六十五年， p 进数从提出到终局签字用了十九年。差别在哪里？

本书的读法是：因为复数已经开过栏了。

第 9.6 节说过：开一栏往往松动一整条资格规定，于是后续的开栏变快。复数开的那一栏，松动的是「数必须是量」；到 1897 年，「数系可以有多种」已经是账本上的常识——实数、复数、四元数、代数数域、有限域，都在。Hensel 提出 p 进数时，没有人需要争论「这算不算数」，争论的是「这个东西可不可靠」。

这是本书对「开栏速度」的一般解释，第 29 章会把它做成一张时长表。要点是：时长缩短不是因为后人更开明，是因为账本上留出了位置，且签字工具（一致性、模型构造）本身已经是被签过字的成熟对象。

12.5 拒绝的形态：不可靠，而不是不存在

本案例的拒绝形态与前几章不同，值得单记。

没有人说 p 进数不存在。说的是它「形式的」「符号的」——意思是：这套记号可以照着算，但它不指称什么，它是一种方便的簿记。

这个说法与卡尔当对 $\sqrt{-1}$ 的「精妙而无用」在形式上相似，但内容不同：卡尔当说的是「不存在」，Hensel 的批评者说的是「不可靠」。

不可靠的判断有一个具体的来源：**Hensel 本人的一次错误**。他曾用 p 进方法给出一个 e 的超越性「证明」，而这个证明是错的（错误在于把 p 进收敛与实收敛混用）。这个错误在当时被广泛注意到，其后果是整个 p 进理论被当作一个可疑的东西。

按第 4.4 节的分类，这属于放逐型拒绝：不否认，但不接待。而放逐的理由不是本体论上的（它不该存在），是可靠性上的（它靠不住）。

本书须承认：这使本案例的「一致拒绝」证据比其他章弱。按第 6.5 节（丙）的验收标准，至少两家的拒绝必须有据；本案例只有一家（计，即分析学传统）的拒绝有明确文献，形与算的态度只能从「几乎无人使用」推断。因此本案例不参与第五编的定律统计（第 6.5 节丙的规定）。

12.6 签字：Ostrowski 把这一栏数清了

1916 年，Ostrowski 证明： $\mathbb{Q}$ 上的每一个绝对值（满足非负、乘性、三角不等式的函数），在等价意义下必是以下三者之一：

- 通常绝对值 $|\cdot|_\infty$ ；
- 某个素数 p 的 p 进绝对值 $|\cdot|_p$ ；
- 平凡绝对值（非零元的值都是 1）。

这条定理的分量，在本书框架里比它在数论中的分量还要大。理由是：

其一，它是对共有前提的正式判决。「接近只有一种意思」这条前提，被换成了一句精确的陈述：接近一共有可数无穷多种意思，其中一种是通常的，一种是平凡的，其余每个素数一种。

其二，它是终局签字。与 Frobenius 定理（第 10.6 节）同型：不但承认新对象，而且把这一栏的全部成员数清了。第 28 章会说明，终局签字是签字的最强形态，因为它取消了「还有没有别的」这个问题。

其三，它使 ε - δ 定义的结构被看清了。 ε - δ 从来没有定义「接近」——它只立了量词交替这一条法，而「接近」是一个外包给绝对值的参数。这一点在 p 进分析里可以逐字验证： p 进的极限、连续、导数定义与实分析逐字相同，只换一个绝对值。

这最后一点是本章送给第 19 章（极限）的一根接力棒：极限这个概念的实际内容，比它看上去的少。

12.7 本章最弱点

其一，拒绝证据只有一家（12.5）。已标，本案例不参与第五编统计。

其二，「接近只有一种意思」是否构成一条共有前提，还是仅仅是「没有人想到有第二种」。这个质疑很实：共有前提的定义是三家共同踩着、且在被推翻前不被提及的规定；而「没有想到有第二种」听起来更像是一个知识空白，不是一条规定。

本书的辩护：区别在于它被当作理由用过。分析学传统在论证 $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的完备化时，用的措辞是「那个完备化」——定冠词的使用是一条规定在起作用的证据。而在 Hensel 之后、Ostrowski 之前的二十年里，批评者说 p 进数「不是真的收敛」，这句话只有在「收敛只有一种意思」这条规定下才成立。这个辩护成立，但它比第 9 章（Euler 明说「与零不可比大小者不是数」）弱得多——那里共有前提差点被明说出来，这里只能靠措辞推断。

其三，与最近占位者的区分。最近的占位者有两处：Ullrich（1998）关于 Hensel 与 p 进数早期史的研究、以及 Corry（2004）关于结构主义代数兴起的分析。Corry 的框架（数学从「对象的科学」转向「结构的科学」）可以解释 p 进数的出现，而且解释得相当自然：一旦人们习惯于研究满足某些公理的结构，「另一种绝对值」就是一个自然的问题。

这个占位者本书排不掉。本书能给的区分是：Corry 的框架预言这类新对象会在结构主义成熟之后大量涌现，而事实上 p 进数早于结构主义的成熟（Hensel 1897 早于 Steinitz 1910、早于 Noether 学派）；本书的框架预言它出现在材料与共有前提相撞之处，而这个相撞的时间由材料的位置决定，与结构主义无关。这个区分有可判错的成分（时序可查），但只是一个弱证据，因为「成熟」的时间界定有余地。

第 13 章 超实数：模型论替无穷小签了三百年前欠的字

（1670 年代—1961 年）

四要件表

格	内容
形	数轴：实数被显示为一条没有空隙的直线。回答方式是「一个数就是线上的一个位置，而线上没有位置留给一个比一切正数都小的正数」
算	微积分的运算程序（莱布尼茨—欧拉传统）：把 dx 当作一个非零的量来运算，最后把它舍去。回答方式是「照这个程序做下去，结果对」
计	实数的完备有序域账本：阿基米德性质——对任意正数 ε 与任意正数 M ，存在自然

格	内容
	数 n 使 $n\varepsilon > M$ 。承认无穷小就要放弃阿基米德性质，而阿基米德性质是十九世纪实数理论的核心
共有前提	数学对象的合法性，必须由构造它的方式来担保 （一个对象若不能被从已承认的材料造出来，它就没有名分）
材料产出位置	计 （逻辑与模型论）：一阶逻辑的紧致性定理，原题是「一个形式理论何时会有模型」
材料撞上位置	无 ：没有任何算法跑出超实数——它由模型存在性定理产出（见 26.3 的五例之一）
Z	由一致性而非由构造获得名分的对象—— 一族超实数 ${}^*\mathbb{R}$ ，它包含全部实数、包含无穷小与无穷大，且与 $\mathbb{R}$ 满足完全相同的一阶语句
拒绝	出生前的拒绝（对无穷小）：Berkeley 1734《分析学家》称之为「已逝之量的鬼魂」；Cauchy-Weierstrass 传统以 ε - δ 取代之，十九世纪后期无穷小在教科书中被系统清除。出生后的拒绝（对超实数）：被视为「逻辑的把戏」、「没有产出任何新定理」，Bishop 1977 的书评是最激烈的一次
签字	与出生同时：Robinson 1961 给出的既是对象也是模型。这是本书十九例中 出生即签字 的两例之一（另一例是第 25 章分布）

13.1 三百年的欠账

无穷小是一件奇特的东西：它在 1670 年代就被大规模使用，在 1734 年被 Berkeley 精确地攻击，在十九世纪被系统地清除，然后在 1961 年被承认。

Berkeley 的攻击值得引一句大意，因为它极准确。他指出：在求导的过程中，先假设增量非零（否则不能作除法），后又令它为零（否则得不到结果）——同一个量在同一个论证里既是零又不是零。他称这些消失的增量为「已逝之量的鬼魂」。

这个攻击当时无法回答。莱布尼茨的回答是哲学的（连续律、「理性的虚构」），欧拉的回答是实用的（结果对），两者都不能让「计」这一家签字。

为什么不能？ 这是本章的核心问题，而答案指向一条与前几章都不同的共有前提。

13.2 共有前提：名分由构造担保

前几章的共有前提都是关于某一类对象的资格规定：数必须是量、乘法必须交换、无穷只有一种。本案例的共有前提层级更高：它是关于**名分本身**的规定。

一个数学对象要有名分，必须能被从已承认的材料造出来。

这条规定在十九世纪的算术化运动中达到顶点。Weierstrass、Dedekind、Cantor 做的事，就是把分析的全部对象从自然数造出来：整数从自然数对造，有理数从整数对造，实数从有理数的分割或基本列造。每一步都是构造。

这条规定为什么会使无穷小无法签字？因为**无穷小造不出来**。你无法用有理数的分割造出一个比一切正有理数都小的正数——分割的定义本身排除了这一点。戴德金分割给出的是 $\mathbb{R}$ ，而 $\mathbb{R}$ 是阿基米德的。

三家都站在这条规定上：

- **计**：一致性由构造保证，构造是唯一的担保方式。
- **形**：造出来的东西可以被显示（分割显示为数轴上的一个切口），造不出来的没有位置。
- **算**：一个对象的运算规则由它的构造给出；没有构造就没有规则，只有约定。

这条规定极为成功——十九世纪的严格化几乎全部建立在它上面。所以它更加不可能被质疑。

13.3 材料：紧致性定理

1930 年，Gödel 证明了一阶逻辑的完全性定理。它的一个推论是紧致性定理：**若一个一阶理论的每一个有限子集都有模型，则该理论整体有模型。**

这条定理在本家回答的是：**形式理论与模型的关系**——具体说，是「可证性」与「有效性」是否重合。它是逻辑学的基本定理，与无穷小、与分析、与数系毫无关系。

现在把它转过来。取实数的一阶理论 $\text{Th}(\mathbb{R})$ （全部在 $\mathbb{R}$ 中为真的一阶语句），再加上一个新常元 c 以及无穷多条语句：

$$c > 0, c < 1, c < 1/2, c < 1/3, \dots, c < 1/n, \dots$$

这个理论的**每一个有限子集**都有模型——因为任何有限多条 $c < 1/n$ 只需要取 c 为一个足够小的实数即可满足。由紧致性定理，整个理论有模型。而在那个模型里， c 是一个正数且小于一切 $1/n$ —— **c 是一个无穷小**。

这个论证只有几行。而它做的事，是三百年里没有人做成的：给无穷小一个名分。

13.4 它推翻了什么

关键在于：**这个论证没有构造出任何东西**。

紧致性定理的证明（无论是 Gödel 的原证明还是后来 Henkin 的方法）不给出模型的显式构造——它证明模型存在。而超实数域 ${}^*\mathbb{R}$ 的具体样子（用超滤子对 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 取超幂）依赖于一个不可构造的选择（非主超滤子的存在需要选择公理，且这样的超滤子无法被显式写出）。

于是本案例的 z 不是「无穷小」这个东西，而是一个更根本的东西：

由一致性而非由构造获得名分的对象。

这正是第 4.2 节所说的第二档：账本上原来没有这一栏。十九世纪的账本上，名分与构造是绑死的；紧致性定理把它们拆开了。

值得注意的是，这一栏一旦开了，它回过头来改变了对整个数学史的读法。**纳格尔 1935 年的论点（第 8.6 节、第 9.5 节）——对象的合法性来自它在体系中的作用而非它的实在性——正是这一栏的哲学表述**，而它比 Robinson 早了二十六年。纳格尔说出了原则，Robinson 给出了案例。

13.5 出生即签字

本案例是十九例中的两个特例之一：**对象与它的模型同时出现**。

理由是结构性的：这个对象**就是**由模型存在性定理产出的。你无法先有超实数、后有它的模型——它的全部内容就是「有这样一个模型」。

这个特例对第 28 章的签字律有一个含义。签字律说：合法化由「计」以一致性模型完成，且签字者通常不是提出者。本案例中，签字者就是提出者，而且签字与出生同时。

本书的处理是：**签字律的准确形式不是关于时序与人物的，是关于位置的**。签字必须由「计」这一位置完成——而 Robinson 在做这件事时，站的正是计的位置（他是模型论学家，用的是模型论的定理）。时序与人物的分离是常态但不是定律的内容。第 28 章会把这一点写清楚，并把本案例与第 18 章（概形）一起作为「提出即签字」的两例。

13.6 出生后的拒绝：没有新定理

超实数被承认之后，受到的批评与被承认之前对无穷小的批评完全不同。

新的批评是：**它没有产出任何新定理**。用非标准分析证明的每一条定理，都可以用标准方法证明；事实上有一条「转移原理」保证了这一点（任何在 ${}^*\mathbb{R}$ 中为真的一阶语句，在 $\mathbb{R}$ 中也为真，反之亦然）。于是非标准分析被说成是一套「翻译」，一种风格上的偏好。

Bishop 1977 年在《美国数学月刊》上对 Keisler 的非标准分析教材的书评是这场批评的顶点，措辞极严厉（他的立场是构造主义的，与 Kronecker、Brouwer 一脉相承——第 26 章会指出这条谱系）。

这个批评在本书的框架里怎么看？

它是一个正确的观察，但它衡量的是错误的东西。**新对象的价值不由它产出多少新定理衡量**（第 4.6 节：重要性与开栏是两个独立维度）。超实数开的那一栏——名分与构造分离——的后果不在分析里，在别处：模型论此后成为一个独立的、有巨大力量的领域（Ax-Kochen 定理、 $\mathfrak{o}$ -极小性、Hrushovski 对 Mordell-Lang 的证明），而这些工作的共同特征正是「由一致性得到对象，而非由构造」。

不过必须诚实地说：**这个辩护是本书事后给的，而且它依赖于把「那一栏」定得比较宽**。若把 Z 定得窄一些（就是「无穷小」），那么 Bishop 的批评是有力的。第 33 章会把「 Z 该定多宽」列为本书未解决的问题之一。

13.7 与第 12 章的对照

p 进数与超实数是两个有启发性的对照。

相同处：两者都是对 $\mathbb{R}$ 的一种「旁支」；两者的材料都出自一个与本题无关的成熟理论（同余程序／紧致性定理）；两者的签字都是终局性的（Ostrowski 数清了绝对值／转移原理钉死了 $^*\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}$ 的关系）。

不同处： p 进数是构造出来的（超幂或形式级数，都可以显式写出），超实数不是； p 进数推翻的是一条关于对象的资格规定（接近只有一种），超实数推翻的是一条关于名分的规定（名分由构造担保）。

这个不同处提示了一个分层：**共有前提本身有层级**。关于某类对象的资格规定是低层的，关于名分怎样获得的规定是高层的。十九例中属于高层的只有两例（本章与第 24 章可计算函数——后者推翻的是「什么算有效由数学家判定」）。

本书没有能力系统处理这个分层（样本太少）。但值得记一句观察：**高层的共有前提被推翻时，后果不局限于一个领域，而是改变了此后一切开栏的方式**。超实数之后，「由一致性得到对象」成为一种常规手段；可计算函数之后，「把元数学问题变成数学对象」成为常规手段。

13.8 本章最弱处

其一，三家在 1961 年是否真的在争。这是本章最实的一处质疑。1961 年时，无穷小已经被清除了七十年，没有人在为它辩护，也没有人在攻击它——它不是一个活的争论。若三家不在争，本案例就不符合第 6.2 节（甲）的验收标准。

本书的处理：**把断裂的现场定在十九世纪末（算术化运动完成时），而不是 1961 年**。那时三家确实在争：无穷小在教学与直观中仍被使用（尤其在物理与工程中， dx 从未消失），而严格化传统要清除它。1961 年发生的不是断裂，是清算一笔早已挂账的欠账。

这个处理是合理的，但它意味着本案例的断裂与推翻相隔七十年，是十九例中断裂与推翻分离最远的一个。本书如实标注：**若读者要求断裂与推翻必须在同一时段，本案例应当被排除**。

其二，共有前提的表述可能过宽。「名分由构造担保」这条规定，若成立，则十九世纪的一切非构造性存在证明（Cantor 1874 的超越数证明就是一个，Hilbert 1888 的基定理是更著名的一个）都应当被拒绝。而事实上它们只被一部分人（Kronecker、Gordan）拒绝，主流接受了。

这构成一个反例：若主流已经接受非构造存在证明，那么「名分由构造担保」就不是三家共有的。

本书的辩护：接受非构造的**存在证明**与接受一个非构造的**对象**是两件事。Hilbert 基定理证明的是「某个有限基存在」，而那个基是一个已被承认的类型的对象（多项式的有限集）；超实数不是——它是一个新类型，而它的名分只有一致性。这个区分是实质性的，但它需要更细的编码来支持，本书未做。

其三，与最近占位者的区分。最近的占位者有三处：Robinson 自己的哲学论述（他是形式主义者，明确用 Hilbert 的立场为非标准分析辩护）、Dauben（1995）的 Robinson 传记、以及 Kanovei-Reeken 等人关于非标准分析基础的工作。

真正有威胁的是 **Robinson 自己**。他在《非标准分析》一书末尾的哲学章节里，已经说了本章的大部分内容：无穷小的合法性问题不在于它能否被构造，而在于包含它的理论是否一致；Leibniz 的直觉在形式主义框架下得到了辩护。

本书与他的区分只有一条，与第 11.8 节（其三）同型：他为这一个对象辩护，本书主张这是一个反复出现的机制。单章看，本书说的话 Robinson 说过。独立价值在第五编兑现。

乙 空间的账本多开的那几栏

第 14 章 非欧几何：Saccheri 为洗白欧几里得写出了它

(1733—1868)

四要件表

格	内容
形	欧氏图形传统：几何对象被显示为图，图上的关系就是几何的内容。回答方式是「画出来看，两条直线要么相交要么不相交」
算	平行公设的归谬程序：假设公设不成立，逐条推演，期待推出矛盾。这条程序自 Proclus 起延续一千五百年，Saccheri 1733 把它执行到最彻底
计	测量的账本：三角形内角和等于两直角，这是可以被测量核对的；大地测量与天文视差是当时最精密的量度手段
共有前提	几何描述的是唯一的那个空间（几何命题的真假由空间本身决定）
材料产出位置	算（几何自家的归谬程序）：Saccheri 1733 的锐角假设推演，原题是「平行公设能否由其余公设推出」
材料撞上位置	算（同位）：归谬程序自己跑出了一整套融贯而驳不倒的定理——推演跑到底，矛盾没有出现
Z	几何本身成为对象——不再是唯一空间的描述，而是一族可以彼此比较的公理系统，每一个描述一种空间
拒绝	否定型：Ostrogradsky 对 Lobachevsky 提交彼得堡科学院的论文作否定评审并加以嘲讽；1834 年《祖国之子》上的匿名讽刺文；Gauss 明言不发表是怕「维奥蒂亚人的

格	内容
	叫嚷」(指抱残守缺者)。放逐型: 康德哲学传统把欧氏空间当作先天直观形式, 非欧几何在此框架下不是错的而是不可思议的
签字	Beltrami 1868: 伪球面(常负曲率曲面)上的测地线给出双曲几何的一个模型; 随后 Klein 1871 的射影模型、Poincaré 1882 的圆盘模型。签字的内容是 相对一致性 : 若欧氏几何一致, 则非欧几何一致

14.1 一千五百年的归谬程序

平行公设从一开始就被认为可疑。它比其余四条复杂得多, 陈述冗长, 而且它断言的是一件无法在有限范围内检验的事(两条直线延长下去是否相交)。

从 Proclus (五世纪) 到 Saccheri (1733) 到 Legendre (十九世纪初), 无数人试图证明它可以由其余公设推出。最常用的方法是归谬: 假设它不成立, 推出矛盾。

Saccheri 1733 年的《欧几里得无懈可击》(Euclides ab omni naevo vindicatus) 是这条程序的顶峰, 也是本章的材料。他考察等腰双直角四边形(今称萨凯里四边形)顶角的三种可能: 直角、钝角、锐角。

- 钝角假设: 他推出了矛盾。(这个推导是对的, 钝角假设与直线可无限延长不相容。)
- 锐角假设: 他推演了极长的篇幅——推出了一整套关于「渐近直线」「公垂线」的定理, 彼此融贯, 无一矛盾。

最后, Saccheri 宣布锐角假设不成立, 理由是它导致的结论「违背直线的本性」(两条直线在无穷远处有一条公垂线, 这在他看来是荒谬的)。

这个结尾是全书最著名的一次功亏一篑。他手里已经有了双曲几何的一大堆定理, 而他把它们当作归谬的材料, 不是当作一个新对象的内容。

14.2 材料的四条要件在此格外清楚

出自三家之一自己: 归谬程序是几何自家的方法, Saccheri 是耶稣会的数学家兼逻辑学家, 他用的是几何与逻辑的标准工具。

早已掌握: 1733 年, 比 Lobachevsky (1829) 早九十六年, 比 Bolyai (1832) 早九十九年。而且它不是被遗忘的——Lambert 1766 年读过并推进, Legendre 反复处理同一批问题。

原本回答另一道题: Saccheri 的题是「证明平行公设可由其余公设推出」, 目的是**洗白欧几里得**——书名就是这个意思。这是十九例中「原题与结论方向相反」最极端的一次: 材料是为了证明唯一性而做的, 结果证明了多样性。

使三家无法退回: 三家不能否认那些定理——它们是用标准推理从明确的假设推出来的, 每一步都可核查。要否认它们, 只能否认推理规则本身。

14.3 共有前提不是平行公设

这一点必须写清楚，因为它是本章最容易被误读的地方，也是第 6.3 节（乙）验收标准的一个典型应用。

平行公设是被明文写下来的。它是《原本》第五公设，两千年里被反复讨论、质疑、试图证明。按验收标准，它**不是**共有前提——它是一条可争的公设，而争论它是常规工作。

共有前提是另一条，从未被写下来的：**几何描述的是唯一的那个空间。**

这条规定的作用是：它规定了「证明平行公设」这件事的意义。若几何描述唯一的空间，那么平行公设要么是那个空间的真理（可由其他真理推出，或是独立的公理），要么是假的。它不可能「在某些空间中真、在另一些空间中假」——因为只有一个空间。

正是这条规定，使 Saccheri 在推出一整套融贯的锐角几何之后，仍然只能把它读作「尚未找到矛盾」，而不是「这是另一种几何」。在他的账本上，没有「另一种几何」这一栏。

念给三家听的验收：- 计说：当然，我测量的就是这个空间。- 形说：当然，我画的就是这个空间里的图。- 算说：当然，我推的是关于这个空间的定理。

三家一致，且一致的方式是觉得这句话不值得说。

14.4 补丁在哪里

本案例的补丁形态特殊：**补丁就是那一千五百年的证明尝试本身。**

回想第 2.5 节：补丁是三家为了保护共有前提而做的技术性修补。平行公设与其余公设的不协调（它太复杂、太不自明），是共有前提受到压力的表现——若几何描述唯一空间，那么关于这个空间的真理应当都是自明的，而这一条不是。

解决办法有两个：承认它是独立的公理（那就要问「为什么这个空间恰好满足它」，这个问题在唯一空间的框架下无法回答），或者证明它可推（那就没问题了）。一千五百年里，**所有人选了第二个。**这个选择本身就是补丁——它保护的是「几何描述唯一空间」这条前提。

按第 3.5 节的定位方法：**打补丁的是算**（证明尝试是推演程序），**材料就在算这一家。**核对无误。

14.5 为什么高斯不发表

高斯至迟在 1816 年已经确信非欧几何是可能的（书信为证），但他终身不发表。1829 年给 Bessel 的信里说，他怕「维奥蒂亚人的叫嚷」。

这个不发表在本书框架里不是懦弱，是一个准确的判断：**在没有模型的情况下，非欧几何无法签字。**

高斯掌握的是一批定理——由锐角假设推出的、彼此融贯的定理。这批定理证明的是「至今未发现矛盾」，而不是「不会有矛盾」。三家中的「计」不可能凭这个签字：计要的是**一致性**，而「至今未发现矛盾」不是一致性。

Lobachevsky 与 Bolyai 发表了，代价正是高斯预见到的：Ostrogradsky 的否定评审、匿名讽刺、长期无人问津。Lobachevsky 至死没有被承认（他 1856 年去世，Beltrami 1868 年给出模型）。

这是第 28 章签字律的一个纯粹标本：对象出生于 1829—1832，签字于 1868，中间的三十六年里它是「有内容但无名分」的状态。

14.6 Beltrami 的签字与它的形式

1868 年，Beltrami 指出：常负曲率曲面（伪球面）上的测地线满足双曲几何的全部公理。于是双曲几何的每一条定理，都可以翻译成欧氏空间中一个曲面上的一条命题。

签字的逻辑形式是**相对一致性**：若双曲几何有矛盾，则那个矛盾可以翻译成欧氏几何中的矛盾；所以若欧氏几何一致，双曲几何也一致。

这个形式在本书里极重要，因为它是此后一切签字的模板：

- Klein 1871 的射影模型、Poincaré 1882 的圆盘模型：同一形式的改进版。
- Hilbert 1899 《几何基础》：把几何的一致性归约到实数算术的一致性。
- Hilbert 纲领：把实数算术的一致性归约到有穷方法——**这一步失败了**（第 24 章）。

相对一致性签字有一个哲学后果，Hilbert 与 Frege 关于此有过著名的通信争论：Frege 认为公理必须是关于某种东西的真理，Hilbert 认为公理系统只要一致，它就定义了它自己的对象。**Hilbert 的立场正是本书所说的签字**，而它是从 Beltrami 这一步长出来的。

14.7 被排除的替代解释：物理测量

第 3.6 节点名过这个危险案例，此处正面处理。

流传的说法是：高斯做过大三角测量（Hohenhagen–Brocken–Inselsberg），以检验空间是否欧氏。若非欧几何的动力来自物理测量，那么材料出自三家之外（自然科学），本案例即是材料来源规则的反例。

这个说法在史学上站不住，三条理由。

其一，那次三角测量的目的是大地测量（汉诺威王国的测绘），高斯本人的记述里没有把它说成对几何的检验。这个「检验」说法出自后世的转述。

其二，即使他做过这样的检验，结果是否定的：测量在误差范围内符合欧氏几何。一个否定的结果不能充当推翻共有前提的材料。

其三，最要紧的一条：**物理测量在原则上不可能推翻「几何描述唯一空间」这条前提**。测量只能告诉你这个空间是什么样的，它无法告诉你「几何可以描述多种空间」。要得到后者，需要的是一个关于公理系统的结果——而那只能来自算或计。

这条排除同时给出一个更一般的观察：**共有前提是关于「什么算数」的规定，而经验材料只能报告「是什么」**。因此在数学里，外部经验材料在原则上不能充当推翻共有前提的材料。这是第 3.2 节那条规则在数学中格外硬的深层理由，第 36 章会用它来预测反例搜索的结果。

14.8 本章最弱处

其一，「计」这一家是否真的在争。测量传统对平行公设的争论没有直接参与——测量学家不讨论公设。本书把计填为「测量的账本」，理由是三角形内角和是可测量的量，因而计对这道题有立场。但这个立场在文献上是隐含的，不像形与算那样有大量文本。

按第 6.2 节（丙），这接近于「三家不齐」。本书判为齐（因为计有立场：它认为几何命题可由测量核对，这本身就预设了唯一空间），但这个判定比第 9 章、第 11 章的相应判定弱。

其二，Saccheri 的材料是否「早已掌握」。1733 年到 1829 年之间，Saccheri 的书一度罕见（它在十九世纪初被 Beltrami 重新发现并指出其重要性）。Lambert 1766 年独立做了类似的工作，而 Lambert 的手稿 1786 年才发表。因此「材料早已掌握且众所周知」这一条，在本案例上只是部分成立——它被掌握过，然后部分地失传了。

本书的处理：材料来源规则要求的是材料出自三家之一自己且早于推翻，不要求它连续地被记住。但这削弱了「三家无法退回」这一条的力度——若材料一度失传，三家在那段时间里是可以退回的。如实记。

其三，与最近占位者的区分。最近的占位者是 Gray（1989, 2007）关于非欧几何史的系列工作，以及 Torretti（1978）。Gray 的框架是：非欧几何的出现要放在「几何作为一门经验科学还是先天科学」的争论中理解。

区分：Gray 解释的是接受过程（为什么当时的哲学环境使它难以被接受），本书解释的是出生机制（Saccheri 的材料如何逼出它）。两者不冲突，可以并存。本书在本章没有能给出一个可判错的区分设计。

第 15 章 流形：绝妙定理说曲面不需要外面

（1827—1854）

四要件表

格	内容
形	嵌入曲面传统：一个曲面被显示为三维空间中的一张面，它的性质由它在空间中的位置决定
算	多值函数的处理程序：复函数如 $\sqrt{z}$ 、 $\log z$ 有多个值，为了让它们单值，必须做割线、拼接分支——Riemann 1851 的黎曼面就是这条程序的产物
计	位势论与 Dirichlet 原理的账本：一个区域上的调和函数由边界值决定，能量泛函取极小。回答方式是「这个量在这个区域上算得出来，且算出来的值与怎么放置这个

格	内容
共有前提	区域无关」 空间必须是某个外围空间的子集（一个几何对象要存在，必须存在于某个更大的空间里）
材料产出位置	形（微分几何）：高斯绝妙定理（1827），原题是大地测量与地图投影中哪些量在弯曲时不变
材料撞上位置	无：没有一条程序跑出「没有外面的空间」——它由一条关于不依赖性的定理直接读出（见 26.3 的五例之一）
Z	没有外面的空间——一个由自身的度量与坐标图册定义、不预设任何外围空间的几何对象
拒绝	沉默型为主：Riemann 1854 年的就职演讲《论作为几何学基础的假设》，据 Dedekind 记述，除高斯外几乎无人听懂；讲稿直到 1868 年 Riemann 去世后才发表。否定型证据薄弱：Helmholtz、Klein 后来的批评是技术性的，非本体论的
签字	分两次：Beltrami 1868（把 Riemann 的度量与非欧几何模型连起来）、以及更彻底的 Weyl 1913《黎曼面的概念》——第一次给出流形的现代定义（坐标图册加相容性）。签字工具是拓扑与集合论，均已被签过字

15.1 绝妙定理为什么绝妙

高斯 1827 年的《关于曲面的一般研究》，出自一件极实际的工作：汉诺威王国的大地测量。他要处理的是地球表面的测量与地图投影问题——把一个弯曲的面画到平的纸上，什么会变、什么不变。

绝妙定理的内容是：曲面的高斯曲率 K （两个主曲率之积），可以完全由曲面上的第一基本形式（度量 $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ ）算出来。

这句话的意思是：一个生活在曲面上的二维生物，不能离开曲面、不能看见曲面在空间中的样子，但它可以通过在曲面上量长度和角度，算出这个曲面的曲率。

高斯自己给它起名「绝妙」，说明他知道这件事不寻常。但他把它当作大地测量的定理：它回答的是，做地图投影时哪些量必然改变（因为平面的 $K = 0$ ，而球面的 $K > 0$ ，所以球面到平面的等距投影不存在——这是绝妙定理最直接的实用推论，正是投影理论的核心）。

它在本家回答的是这道题。与「空间需不需要外面」无关。

15.2 共有前提：空间必须有外面

在 1854 年之前，几何对象的存在方式是：它在空间中。

- 一条曲线在平面或空间中。
- 一个曲面在三维空间中。
- 三维空间本身在.....这个问题不问，因为三维空间就是那个容器本身。

这条规定从未被写下来，因为它太基本了。你甚至难以想象它的否定是什么意思——一个曲面「不在任何空间里」，这句话在 1830 年是不知所云的。

三家：

- **形**：曲面被显示为空间中的一张面；离开空间，无法显示。
- **算**：曲面的方程 $z = f(x,y)$ 或 $F(x,y,z) = 0$ ，本身就是用外围坐标写的。
- **计**：曲面的面积、体积、曲率，都是用外围空间的度量算的（第二基本形式明显依赖法向量，而法向量是外围的概念）。

15.3 Riemann 的一步

1854 年 6 月 10 日，Riemann 在哥廷根做就职演讲，题目是三个候选中高斯挑的那一个：《论作为几何学基础的假设》。

他做的事，用今天的话说是：定义了 n 维流形，在其上定义了黎曼度量，定义了截面曲率，并指出**空间的几何性质（曲率）是可以逐点变化的、需要由经验确定的物理量**。

这一步的关键在于：**他不预设外围空间**。一个 n 维流形是「 n 重延展量」，它的几何由其上的度量给出，度量是一个逐点定义的二次型。整个构造是内蕴的。

而使这一步成为可能的，正是绝妙定理：**如果曲率可以由内部度量算出来，那么就不需要外面**。Riemann 明确地把高斯的结果推广到 n 维（他给出的截面曲率公式是绝妙定理的高维版本）。

材料的四条要件：出自形（微分几何）自己；早二十七年；原本回答大地测量与投影；三家无法退回（绝妙定理是高斯的定理，是当时微分几何最重要的结果，无人能否认）。

15.4 为什么无人听懂

Dedekind 记述，除高斯外几乎无人理解那次演讲。讲稿一直到 1868 年（Riemann 死后两年）才由 Dedekind 整理发表。

这个「无人听懂」在本书框架里是拒绝的沉默型形态（第 4.4 节丙）。而它的原因可以诊断得很具体：

Riemann 的演讲几乎没有公式。出于就职演讲的体例（听众包括非数学的教授），他用的是散文式的表述。而他要表达的东西——一个不在任何空间里的空间——在当时的账本上没有对应物，散文表述无法把它显示出来。

按第 28 章的签字律：**计只能对形签字，不能对散文签字**。形在这里缺席（没有公式、没有构造、没有模型），所以听众无从判断这是深刻还是空洞。

这个诊断有一个可核查的推论：**Riemann 的思想被接受，应当发生在它被形式化之后。**事实符合：Beltrami 1868 把度量与非欧几何模型连起来（形出场），Christoffel 与 Lipschitz 1869—1870 给出张量计算的工具（算出场），Ricci 与 Levi-Civita 1900 完成绝对微分学，Weyl 1913 给出流形的现代定义（图册+相容性）。整整六十年。

15.5 Weyl 1913：流形定义的最后一块

《黎曼面的概念》做的事，是给出一个不预设外围空间的**定义**：

一个流形是一个拓扑空间，配上一族坐标图（每个图把一个开集同胚地映到 $\mathbb{R}^n$ 的开集），任意两个图在重叠区域上的转移映射是光滑的。

这个定义的每一个零件——拓扑空间（Hausdorff 1914，几乎同时）、同胚、开集——都是一阶抽象的产物（第 5.2 节丙）。第 5.6 节说过：一阶工作是签字工具。这里是又一个直接证据。

值得注意的是**顺序**：流形这个对象出生在 1854，它的定义完成于 1913，中间五十九年里，数学家在使用一个没有定义的对象。这在本书十九例中不是例外，是常态。第 29 章的时长表会显示：**从出生到定义完成的中位数是四十年左右。**

15.6 这一栏的后果

流形这一栏开了之后的后果，比多数案例大。

其一，几何与空间脱钩。此后「空间」这个词在数学里指的是任何一个带某种结构的集合——拓扑空间、度量空间、向量空间、概率空间。这个用法今天如此自然，以至于难以看出它曾经是一次开栏。

其二，物理学的容器被取消。广义相对论（1915）的基本设定是：时空是一个四维流形，其度量由物质分布决定。**没有外围空间**——这正是 Riemann 那一步的直接后果，而 Einstein 明确说过他需要的数学是 Riemann 与 Ricci 的。

其三，「局部—整体」成为一个可问的问题。只有当对象不预设外围空间时，「局部性质如何决定整体性质」才成为一个真问题（在有外围空间时，整体性质可以从外面看出来）。此后的整个微分拓扑与整体微分几何建立在这个问题上。

15.7 与第 14 章的关系

非欧几何与流形常被放在一起讲，但按本书的框架，它们是**两次不同的开栏**，须分开。

- 非欧几何推翻的是「几何描述唯一的空间」——它开的是「多个空间」这一栏。
- 流形推翻的是「空间必须有外面」——它开的是「内蕴对象」这一栏。

两者的关系是：非欧几何在前（1829—1832），流形在后（1854）；而 Beltrami 1868 的模型同时给两者签了字——这不是巧合，因为伪球面正好是一个常负曲率的**曲面**，它用内蕴度量实现了双曲几何。

一次签字给两个对象，这在十九例中只此一次。它提示两栏之间有依赖关系：**若空间必须有外面，则「多个空间」这一栏难以稳固**（因为你会问：这些空间都在哪个更大的空间里？）。Riemann 的这一步取消了这个问题。

15.8 本章最弱点

其一，拒绝的证据是全书第二弱的（仅强于第 16 章）。「无人听懂」只有 Dedekind 一处记述，且它记的是听众的困惑，不是拒绝。按第 6.5 节（丙），本案例只有一家的拒绝可以说有据（形与算的沉默是从「六十年无人推进」推断的）。

本书判定：本案例参与第五编统计，但在第 27 章（名字化石律）中标为「无命名证据」。流形从未被叫作虚构的、不可能的——它只是被忽略了。这一点与第 16 章（分数维）一起，构成对名字化石律最不利的两个案例。

其二，「空间必须有外面」是否真的是共有前提。一个质疑：Gauss 自己在绝妙定理里已经做了内蕴的工作，Riemann 之前的微分几何（Monge、Dupin）也在处理曲面上的内蕴量。若内蕴的观点已经在用，前提就不成立。

本书的辩护：内蕴的计算与内蕴的存在是两件事。高斯计算了内蕴的曲率，但他的曲面仍然是三维空间中的曲面——他从未提出一个不在空间中的曲面。区分在于：做内蕴计算是承认某些量与嵌入无关；开这一栏是承认对象本身可以无嵌入。这个区分是实质的（可以查文献：高斯从未讨论过无嵌入的曲面），但它要求读者接受「计算与存在」这个区分，而这个区分在数学实践中并不总是清楚的。

其三，与最近占位者的区分。最近的占位者是 Scholz（1980）关于流形概念史的专著、Laugwitz（1999）的 Riemann 传记、以及 Ferreirós（2007）关于集合论与结构概念兴起的工作。Scholz 的书几乎穷尽了本章的史实。

本书与 Scholz 的区分：他追踪的是「流形」这个概念的语义演变（从 Riemann 的 Mannigfaltigkeit 到 Weyl 的定义），本书追踪的是它被逼出来的机制。这个区分与第 11.8 节（其三）、第 13.8 节（其三）同型：单章看，本书是史料的重新组织；独立价值在第五编。

本书在这里再记一次这个模式，因为它已经出现了三次，说明它不是偶然：案例编的每一章都有一个已存在的、更详尽的史学专著。本书不与它们竞争史实，本书竞争的是组织方式，而组织方式的检验在十九章之外。

第 16 章 分数维：Hausdorff 测度本来是为康托集为零而写

（1918—1975）

四要件表

格	内容
形	病态集合的图像传统：康托三分集、Koch 雪花、Weierstrass 处处不可导函数的图。这些在十九世纪末被称为「病态」的对象，形已经把它们画出来了
算	迭代与自相似的构造程序：取一段、去中间、对剩下的重复；每次操作产生下一

格	内容
计	级。回答方式是「照这个程序做下去，得到的就是它」 测度与维数的账本：Lebesgue 1902 的测度、Brouwer 1911 的维数不变性定理 ($\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$ 不同胚若 $n \neq m$)。维数是一个整数，它数的是独立方向的个数
共有前提	维数必须是整数
材料产出位置	计（测度论）：Hausdorff 1918 的 s 维外测度构造，原题是「怎样区分零测集的大小」
材料撞上位置	算（同篇）：临界值 s_0 是这个构造自动跑出来的产物，不是被寻找的东西。 产出与撞上在同一篇论文里 （见 16.5、25.7）
Z	非整数的维数 ——一个不数独立方向个数、而由测度的临界指数定义的量，它可以取任何非负实数值
拒绝	沉默型，且只有沉默型 。没有任何人称它不可能、虚构、荒谬。Hausdorff 的论文发表在《数学年刊》上，被引用，被 Besicovitch 学派在 1920—1930 年代持续使用（几何测度论由此而来）。但它在此后五十年里不被视为一个 概念 ，只被视为一个技术工具
签字	无独立签字事件。Hausdorff 的构造本身就在勒贝格测度论内部，一致性不成问题。真正的「承认」是 Mandelbrot 1967—1975 的命名 (fractal) 与推广，而那是命名，不是签字

16.1 这一章对本书是不利的

按第 6.8 节纪律三，不利于本书的读数写进正文。本章整章是一处不利读数，须在开头说明。

第 27 章的名字化石律说：0 到 1 的对象出生时必得否定性名字或蔑称，而这是二阶碰撞的可检索签名。

分数维没有得到任何否定性名字。它没有被叫作不可能的维数、虚构的维数、荒谬的维数。它就是「Hausdorff 维数」，一个中性的、以人名命名的术语。

而按本书的其余判据，它是二阶的：四要件表填得满，材料出自计自家且原本回答另一道题，Z 是新存在物（一个非整数的维数在 1918 年的账本上确实没有位置）。

于是本章构成对名字化石律的一个反例。本书不修改定律去迁就它，也不淡化。第 27 章会把它与第 15 章（流形，无命名证据）一起，作为该定律的两个例外一并统计，并讨论一个可能的修正形式（16.6）。

16.2 病态集合的压力

十九世纪末，数学里出现了一批被称为「病态」的对象：

- Weierstrass 1872：处处连续处处不可导的函数。
- Cantor 1883：三分集，闭、无处稠密、不可数、勒贝格测度为零。
- Peano 1890、Hilbert 1891：填满正方形的连续曲线。
- Koch 1904：处处不可导的连续闭曲线，围成有限面积而周长无限。

这些对象的存在，对「维数」这个概念造成了持续的压力。Peano 曲线特别尖锐：它是一条曲线（一维对象的像），却填满了一个正方形（二维）。这直接威胁到「维数」的意义。

回应这个威胁的工作，构成了本案例的背景。Brouwer 1911 年证明了维数不变性（ $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$ 在 $n \neq m$ 时不同胚），Menger 与 Urysohn 在 1920 年代建立了拓扑维数理论——这些工作全部是**保卫整数维**的：它们说明，虽然有 Peano 曲线这样的连续满射，但同胚意义下维数仍然是一个整数不变量。

这批工作是补丁（第 2.5 节）。它们保护的共有前提是：维数必须是整数。

16.3 材料：为区分零测集而造的工具

Hausdorff 1918 年的题是这样的：

勒贝格测度把康托集的测度算成零。但零测集之间显然有区别——一个可数集是零测的，康托集也是零测的，而康托集是不可数的，「明显更大」。怎样区分零测集的大小？

他的构造是：把勒贝格测度定义中的「区间长度」换成「区间长度的 s 次幂」，用覆盖取下确界，令覆盖的直径趋于零。这样对每个 $s \geq 0$ 得到一个外测度 H^s 。

然后是关键的观察：对任意集合 E ，存在唯一的 s_0 ，使得 $s < s_0$ 时 $H^s(E) = \infty$ ， $s > s_0$ 时 $H^s(E) = 0$ 。

这个 s_0 就是分数维。而它是这个构造的一个自动产物——不是被寻找的东西，是构造跑出来的东西。

对康托集， $s_0 = \log 2 / \log 3 \approx 0.631$ 。

材料的四条要件：出自计（测度论）自己；材料与推翻同时（这一点特殊，见 16.5）；原本回答的是零测集的区分；三家无法退回（ H^s 的构造在勒贝格测度论内部，完全合法）。

16.4 为什么没有拒绝

这是本章要回答的核心问题：为什么这一栏开了，而没有人反对？

本书给出三条理由，三条都指向同一个诊断：这一栏开得太顺，以至于没有人注意到它是一栏。

其一，它没有要求任何人放弃什么。整数维仍然是整数维（对光滑流形，Hausdorff 维数等于通常维数）。分数维只在那些「病态」的对象上取非整数值，而那些对象本来就被认为是例外。新对象被安置在既有账本的边缘，没有触动中心。

其二，它的构造完全在既有框架内。 H^s 的定义只用了勒贝格测度论的标准手段。没有新公理，没有新原始概念。一个东西若能用既有材料造出来，「计」这一家没有任何理由拒绝（回想第 13 章：拒绝的根据正是造不出来）。

其三，它没有被当作一个概念，只被当作一个数。五十年里，Hausdorff 维数在几何测度论中作为一个技术参数被使用（Besicovitch 学派用它研究可求长集与不可求长集），而没有人问「一个 0.631 维的东西是什么」。没有人问，就没有人拒绝。

第三条最要紧，因为它诊断了名字化石律失效的原因：否定性命名产生于「三家必须表态」的时刻。而分数维从未逼三家表态——它是一个可以不表态而使用的东西。

16.5 材料与推翻同时：本案例的第二处异常

其他案例中，材料早于推翻数十年至数百年：奇偶论证早于不可通约量（不确定但显然更早）、Euler 恒等式早九十五年、Saccheri 早九十六年、绝妙定理早二十七年、紧致性定理早三十一年。

本案例中，材料与推翻在同一篇论文里。Hausdorff 造 H^s 的同时就得到了 s_0 。

按第 6.4 节（乙）的验收标准，材料必须早于推翻事件——本案例不合格。

本书的处理：保留该案例，但标注这一处不合格，且该案例在第 26 章（逾越律）的计数中不计入。

保留的理由是：材料来源规则的核心是「材料出自三家之一自己且原本回答另一道题」，这两条本案例都满足（ H^s 是为区分零测集造的）。「早已掌握」这一条的功能是保证材料的中立性（第 3.4 节：它出场时是既成事实，不带立场），而本案例中 H^s 的中立性由另一个方式保证：它是为另一道题造的工具，而那道题被成功回答了（ H^s 确实区分了零测集）。

这个处理是一个让步，须记账。

16.6 对名字化石律的一个可能修正

由 16.4 的诊断，可以提出一个修正形式，留给第 27 章检验：

修正形式：0 到 1 的对象得到否定性名字，当且仅当它逼迫三家表态。

而「逼迫表态」的条件是：新对象出现在既有账本的**中心**，即承认它就要修改已经在大量使用的东西。复数逼三家表态（承认它就要改「数是什么」），超穷数逼（要改「无穷怎么谈」），四元数逼（要改运算律）。分数维不逼——整数维原封不动。

这个修正若成立，名字化石律就从一条无条件的定律变成一条**有条件的**定律，其条件是「中心性」。而中心性可以独立地判定（看承认它是否要求修改既有的大量工作）。

但本书对这个修正持保留态度，因为：它是为了消化一个反例而提出的，而事后为了消化反例而加条件，是标准的临时补救（ad hoc）。第 27 章会把这个修正明确标为「事后提出、未经独立检验」，并在第 35 章（真跑一）的编码设计中把「中心性」作为一个独立变量，看它是否真的预测否定命名率。若真跑一显示中心性不预测命名，则这个修正撤回，名字化石律降为倾向性描述。

16.7 Mandelbrot 是命名，不是签字

1967 年 Mandelbrot 的《英国的海岸线有多长》与 1975 年的 fractal 一词，常被当作分数维的诞生。

按本书的规格，那不是诞生，也不是签字，是命名与推广。

- 不是诞生：对象在 1918 年已经在那里，且被持续使用（Besicovitch 学派五十年的工作）。
- 不是签字：签字的规格是给出一致性模型（第 6.6 节），而 Hausdorff 维数的一致性从来不是问题。

Mandelbrot 做的是第三件事：指出这一栏不是边缘的，而是普遍的。海岸线、云、山脉、血管、股价——这些不是病态的例外，它们是常态。这个工作改变了这一栏在账本上的位置（从边缘移到中心），而没有改变这一栏的内容。

这个观察给出本书的一个附带判断：开栏与栏目的位置是两件事。一栏可以开在边缘、几十年后才移到中心。若第 16.6 的修正成立，那么可以预言：移到中心之后，会出现追溯性的争论——事实上确实出现了（1980—1990 年代关于分形几何是否是「真数学」的争论，Krantz 1989 在《数学信使》上的批评文章及其引发的论战，措辞的激烈程度与十九世纪对超穷数的批评可比）。

这个追溯性争论对第 16.6 的修正是一个支持性证据，但它是事后找到的，不构成独立检验。

16.8 本章最弱点

其一，整章是名字化石律的反例（16.1）。已标。

其二，材料与推翻同时（16.5）。已标，不计入第 26 章计数。

其三，三家是否真的在争。这是本章最实的质疑。1918 年，形（病态集合的图像）、算（迭代构造）、计（测度与维数）三家之间，有没有一个不可调解的断裂？

本书的填法是：断裂在 Peano 曲线上——形说这是一条曲线（一维），计说它填满了正方形（二维），算说这个构造是合法的。三家各持一答。但这个断裂在 1911 年已经被 Brouwer 的维数不变性定理部分调解了（同胚意义下维数不变，Peano 曲线不是同胚）。

若断裂已被调解，则 1918 年不存在断裂状态，本案例不符合第 6.2 节（乙）。

本书的辩护：Brouwer 的定理调解的是「维数是不是拓扑不变量」这个问题，没有调解「康托集这样的对象该有几维」这个问题——拓扑维数给康托集的答案是 0，而它显然比一个点「大」。断裂在这里仍然存在。

这个辩护成立，但它把断裂缩小到了一个相当技术性的角落，远不如复数、超穷数那样是数学的中心问题。这与 16.4 的诊断一致（这一栏开在边缘），但它使本案例作为「二阶碰撞」的典型性大打折扣。

综合判定：本案例是十九例中最弱的一个。本书保留它，因为排除它会使名字化石律的反例消失——而排除一个对自己不利的案例，是本书最不该做的事。

第 17 章 范畴：「自然」这个词已经在用了

(1942—1945)

四要件表

格	内容
形	代数结构传统：群、环、模、拓扑空间——每一个都被显示为「一个集合加上结构」。回答方式是「这个对象是由哪些元素、满足哪些关系构成的」
算	同调与上同调的计算程序：给定一个空间，造链复形，取商，得同调群。Eilenberg 与 Mac Lane 面对的具体问题是：不同的同调论（Čech、奇异、Vietoris）给出的群何时「相同」
计	集合论的账本：一切数学对象是集合；两个对象相同即它们之间有一个保结构的双射。回答方式是「它们能不能一一对应上」
共有前提	数学对象是带结构的集合 （对象在先，对象之间的映射是导出的）
材料产出位置	形 （线性代数与代数拓扑的日常实践）：「自然」一词的既有用法，原题是「哪些同构是好的、可以放心使用的」
材料撞上位置	无 ：没有算法跑出「态射先于对象」——它由一个已在用而未被定义的区别逼出（见 26.3 的五例之一）
Z	态射先于对象 ——一个由箭头及其复合定义的东西，其中对象只是箭头的端点，可以完全由箭头刻画
拒绝	否定型（蔑称）：「抽象废话」（general abstract nonsense）——这个词组由 Steenrod 半开玩笑地创造，此后成为标准称谓，用了数十年。放逐型：1950—1960 年代许多代数学家与拓扑学家系统地避免

格	内容
签字	范畴语言；Mac Lane 记述过投稿被要求删去范畴论内容 困难且不完整。范畴不能直接作为集合（「一切集合的范畴」不是集合）。签字手段有三：Grothendieck 宇宙（1963，需要一条新的公理即不可达基数存在）、NBG 类理论、或把范畴论限制在小范畴上。 没有一个是无代价的 ——这是十九例中签字最不干净的一例

17.1 「自然」这个词的历史

在 1945 年之前，数学家已经使用「自然」这个词几十年了，用法相当一致：

- 有限维向量空间 V 与它的对偶 V^* 是同构的，但这个同构要选一组基。「不自然」。
- V 与它的双对偶 V^{**} 也是同构的，而且这个同构 ($v \mapsto$ 在 f 上取值 $f(v)$) 不需要选基。「自然」。
- 群的换位子商群、拓扑空间的基本群——这些构造被称为「自然的」，意思是它们不依赖任意的选择，并且与映射相容。

这个区分是**实际起作用的**：它决定了数学家愿不愿意用某个同构，决定了一个定理是被看作深刻还是看作巧合。它写在教科书里，用在讲课里。

而它**从未被定义**。「自然」是一个数学家彼此心照不宣的形容词，像「优美」「深刻」一样。

这正是第 3.4 节所说的形状的极致：材料在本家极其稳固（每天都在用）、极其日常（写在教科书里）、极其不引人注目（它只是一个形容词）。

17.2 断裂：什么叫「同一个同调论」

Eilenberg 与 Mac Lane 面对的具体问题不是哲学问题，是一个技术问题。

1930—1940 年代，同调论有好几种造法：Čech 同调、奇异同调、Vietoris 同调、Alexander-Spanier 上同调。对于「好的」空间，它们给出同构的群。问题是：**这个「同构」是什么意思？**

- **算说**：给定一个空间，按这套程序算，得到一组群。不同程序给出不同的群，但它们「本质上一样」。
- **计说**：一样就是有一个同构。而这几种同调论之间确实有同构。
- **形说**：光有同构不够。因为**每个空间都有一堆同构**，问题是这些同构彼此之间要相容——当空间之间有一个映射时，两边的同构要与那个映射交换。

第三家的要求是关键的，而它在集合论的语言里说不出来。集合论的语言只能说「这两个群同构」，说不了「这一族同构是彼此相容的」。

17.3 1945 年的论文

《自然等价的一般理论》（Eilenberg–Mac Lane 1945）做的事，按作者自己的说法，是为了定义「自然变换」。而为了定义自然变换，必须先定义函子；为了定义函子，必须先定义范畴。

顺序值得注意：范畴是为了别的东西才被定义的。论文的标题是「自然等价」，不是「范畴」。Mac Lane 后来多次强调这一点：范畴这个概念在最初是一个技术上的必需品，不是目标。

定义的内容：一个范畴由对象和态射组成，态射可以复合，复合结合，每个对象有恒等态射。一个函子把一个范畴映到另一个，保持复合。一个自然变换是函子之间的一族态射，使得所有相关的方块交换。

现在「自然」有了定义： $V \cong V$ 是自然的，因为那一族同构使方块交换； $V \cong V^*$ 不自然，因为它不构成自然变换。*

17.4 共有前提被推翻的确切内容

推翻发生在一个不显眼的地方。

按「对象是带结构的集合」这条前提，映射是从对象导出的：先有集合 A 和 B，然后考虑 A 到 B 的函数。**对象在先，映射在后。**

范畴的定义把这个顺序颠倒了。在范畴的公理里，**对象几乎不起作用**——它们只是态射的端点。事实上，可以完全不提对象来定义范畴（只用态射和部分定义的复合运算，恒等态射代替对象）。这是一个标准的观察，Mac Lane 的教材里就有。

于是 Z 是：**态射先于对象**——一个由箭头及其复合关系定义的东西。

这个 Z 的激进程度，当时并未被充分认识（包括作者本人）。它的后果要到 Grothendieck（1957 年的 Tôhoku 论文、1960 年代的 SGA/EGA）与 Lawvere（1963 年的博士论文，用范畴论重建集合论）才充分展开。Lawvere 的 ETCS（集合范畴的初等理论）是这个后果的极致：**集合论本身被重写成一个范畴论的理论，其中集合由它们之间的函数刻画，元素被定义为从终对象出发的箭头。**

17.5 「抽象废话」

蔑称的出现值得单记，因为它是名字化石律最好的现代标本。

「general abstract nonsense」这个说法由 Steenrod 创造。有意思的是，Steenrod 本人是范畴语言的重要使用者（Eilenberg–Steenrod 的同调论公理化 1952 年是范畴方法的一次胜利），这个说法在他那里带有自嘲的成分。

但它迅速被广泛使用，且不总是玩笑。1950—1960 年代，范畴论在许多地方被视为空洞的形式主义：它不证明任何定理，只是把已知的东西用箭头重写一遍。

这个批评与 Bishop 对非标准分析的批评（第 13.6 节）在形式上完全相同：没有产出新定理，只是一套翻译。而两者的回应也相同：新对象的价值不由它产出多少新定理衡量。

范畴论的辩护在这里比非标准分析强，因为后来的历史给出了答案：层论、导出范畴、拓扑斯、同伦类型论——这些都是范畴这一栏开了之后才可能的东西，而它们产出了大量新定理。但这个辩护是事后的，1955 年时无法给出。

17.6 签字的困难：这一栏开在集合论外面

本案例的签字是十九例中最不干净的一个。

问题是：**范畴本身不能是集合**。「一切集合的范畴」若是集合，则由 Russell 悖论式的论证得矛盾。而 Set、Grp、Top 这些范畴恰恰是范畴论最基本的例子。

签字手段有三条，每条都有代价：

(甲) Grothendieck 宇宙。假设存在一个足够大的集合 U ，它对集合论的一切操作封闭 (1963, 用于 SGA)。这等价于假设存在不可达基数——**一条新的公理**，独立于 ZFC。代价：一致性强度提高，签字不再是相对于 ZFC 的。

(乙) NBG 或 MK 类理论。区分集合与类，范畴是类。代价：只能处理「大范畴」的一层，而范畴的范畴又超出了这一层。

(丙) 限制在小范畴。只谈集合大小的范畴。代价：Set 本身被排除，最基本的例子不在理论内。

三条路都是妥协。第 28 章会把本案例作为签字律的一个特殊形态记录：**签字未能完成，而对象被接受了**。

这一点对本书的签字律是不利的读数，须记：**若签字是合法化的必要条件，那么范畴至今未被完全合法化，而这与它在数学中的实际地位不符**。

本书的处理是把签字律的表述精确化：**签字律说的是「合法化由计以一致性论证完成」，而不是「合法化必须完成」**。范畴的情形是：计给出了三条部分的一致性方案，每一条都足以让相当一部分工作合法进行，而没有一条覆盖全部。这是一个**部分签字**。第 28 章会把它与第 11 章（超穷数，签字后发现栏内有不可判问题）一起，作为签字并非一劳永逸的两个证据。

17.7 Z 定得多宽的问题

第 13.6 节提出过「Z 该定多宽」的问题，本案例是它最尖锐的一次。

Z 可以定得窄：**范畴、函子、自然变换这三个概念**。这样它是一个技术工具，Steenrod 的批评有道理。

Z 可以定得宽：**态射先于对象**——即数学对象可以完全由它与其他对象的关系刻画，而不由它的内部构成刻画。这样它是一次本体论的开栏，其后果包括结构主义数学哲学、拓扑斯、同伦类型论。

本书采用宽的定义，理由是：**窄的定义下，四要件表填不满**——因为「定义三个概念」不构成对共有前提的推翻，而共有前提（对象是带结构的集合）确实被推翻了，推翻它的正是宽的那个内容。

但必须承认：采用宽定义是本书为了让表填满而做的选择，而它有事后择宽的嫌疑（选一个足够宽的 Z ，使它显得像开栏）。第 33 章会把「 Z 的宽窄由什么决定」列为本书未解决的问题，与第 13 章的相应问题合并。

17.8 本章最弱点

其一，签字不完整 (17.6)。已标，作为对签字律的不利读数。

其二， Z 的宽窄是选择的 (17.7)。已标。

其三，材料的位置可两判。「自然」一词的既有用法，出自形（结构的日常实践）还是出自算（同调计算的实践）？本书判为形，理由是这个用法首先出现在线性代数 (V 与 V^*) 这个纯结构的语境里。但它在 1940 年代最活跃的使用场所是代数拓扑，那是算的地盘。

按第 7.8、10.7、11.4 节的一贯做法（凡两判取对本书定律不利的那一判）：**判为形**——因为判为算会增加逾越律的计数。已按不利判法填表。

其四，与最近占位者的区分。最近的占位者有三处：Mac Lane 自己的历史回顾 (1988 及《范畴论基础》各版序言)、Marquis (2009)《从几何学观点看》、以及 Krömer (2007) 关于范畴论早期史的专著。

Marquis 最有威胁。他主张范畴论的兴起应放在「数学从研究对象转向研究对象之间的映射」这一长期趋势中理解，这个趋势可以上溯到 Klein 的埃尔朗根纲领（用变换群刻画几何）、Noether 学派的结构主义、以及同态定理的中心地位。

这个占位者本书排不掉。若 Marquis 是对的，范畴论是一个长期趋势的自然顶点，不是一次碰撞。

本书能给的区分：那个长期趋势中的每一步（埃尔朗根、同态定理、结构主义），都仍然把**对象放在先**——变换群是作用在一个空间上的，同态是两个已给定的群之间的。而范畴的定义取消了这个先后。这一条区分是实质性的，且可核查（查那些文献里对象与映射的定义顺序）。

但它有一个弱点：**Marquis 可以回应说，取消先后正是那个趋势的极限。**而「极限」与「断裂」的区别，在本书里是靠共有前提被推翻这一条来判的——于是辩护又回到了「对象在先是有一条共有前提」这个问题上，而这个问题的证据（前提从未被写下来）在本案例中不如别的案例强：**Bourbaki 的《集合论》(1954) 确实明文把数学对象定义为带结构的集合。**这构成与第 8.8、11.8 节同型的质疑，且本案例中它最有力，因为 Bourbaki 的明文表述与范畴论的兴起几乎同时。

如实记为本章最重的一处未闭合。

第 18 章 概形：Bézout 数重数非要幂零元不可

(1949—1960)

四要件表

格	内容
形	代数簇传统：一个簇被显示为仿射或射影空间中多项式方程组的零点集，即一堆点。回答方式是「它是这些点」
算	算术几何的计算需求：把几何方法用到数论上——Diophantus 方程、模 p 约化、算术曲面。Weil 1949 猜想把有限域上方程的解数与拓扑不变量联系起来，需要一种能同时处理特征 0 与特征 p 的几何
计	交换代数的账本：交点重数、Hilbert 多项式、Bézout 定理（两条 m 次与 n 次平面曲线交于 mn 个点，须计重数）。回答方式是「数一数，账要平」
共有前提	空间先有点（几何对象由它的点的集合给出，函数是点上的函数）
材料产出位置	计（交换代数与交点理论）：Bézout 重数，原题是「相交数怎么算才与连续变形相容」
材料撞上位置	算：重数的局部环长度计算跑出了幂零元 $k[x]/(x^2)$ ——一个在唯一的点上取值为零而非零的函数
Z	带幂零函数的空间——一个几何对象，其上的「函数」可以非零而幂为零；点被素理想代替，空间由环给出而非环由空间给出
拒绝	否定型：Weil 与经典代数几何学派长期抵触；「一个函数在每一点都取值零而它不是零函数」在几何直观上被视为荒谬。放逐型：1960—1970 年代不少代数几何教程绕开概形，只讲簇；意大利学派传统与概形语言之间长期无法通话
签字	提出即签字（本书两例之一，另一例是第 13 章超实数）。Grothendieck 的 EGA（1960 起）同时给出对象与其构造：概形被定义为局部同构于 $\text{Spec}(A)$ 的局部环空间，而 $\text{Spec}(A)$ 是由交换环 A 直接造出来的。一致性归约到交换代数与集合论

18.1 账平不了

Bézout 定理是代数几何最古老的计数定理之一：平面上一条 m 次曲线与一条 n 次曲线交于 mn 个点。

但这个定理只有在「计重数」的意义下才对：

- 若两条曲线横截相交，交点是 mn 个不同的点，没问题。
- 若它们相切，交点少了一——但为了让定理成立，必须把切点计作两个。
- 若一条曲线是另一条的重复（如 $x^2 = 0$ 是一条「二重直线」），情况更复杂。

「计重数」是一个补丁。它保护的共有前提是：几何对象由它的点给出。因为若几何对象只由点给出，那么两条相切曲线的交集就是一个点，而不是两个——重数是外加的一个记账数字，不对应任何几何事物。

这个补丁用了两百年，而且用得很不安。整个十九世纪与二十世纪上半叶的交点理论（Chasles、Schubert 的计数几何、Severi 的等价理论、Weil 的《代数几何基础》1946），大部分工作是在给重数找一个可靠的定义。Hilbert 第十五问题就是要求给 Schubert 的计数演算一个严格基础——这个问题存在本身，就是补丁不安的证据。

按第 3.5 节的定位法：补丁在计，材料在计。

18.2 材料：重数在环里的样子

材料是一个具体的代数事实：交点重数可以由局部环的长度算出。

考虑 $y = x^2$ 与 $y = 0$ 在原点相切。交点的坐标环是 $k[x,y]/(y - x^2, y) \cong k[x]/(x^2)$ 。

这个环有一个非零元 x ，满足 $x^2 = 0$ ——一个幂零元。而这个环作为 k -向量空间的维数是 2，正好是重数。

这个计算在交换代数里是标准的，回答的是「相交数怎样算才与连续变形相容」（当两条曲线连续地从横截变到相切，交点数不能跳变——这是交点理论的基本要求）。

而它的含义是：那个「点」不是一个普通的点。它带着一个 $k[x]/(x^2)$ ，也就是带着一个「方向上的无穷小延展」。

这正是三家撞上的地方：

- 计说：账要平，重数必须是 2。而它在环里表现为一个幂零元。
- 形说：我看见的是一个点。一个点上的函数环应当是 k ，没有幂零元。
- 算说：我需要一种几何，它在模 p 约化下仍然有意义（模 p 约化天然产生幂零元——比如 $\text{Spec}(\mathbb{Z}/p^2)$ ）。

18.3 共有前提：空间先有点

这条前提的表述要小心。

它不是说「空间是点的集合」这么简单——那是明文的定义，可以争。它是一条更基本的规定：几何对象的存在方式是点在先，函数在后。你先有一堆点，然后考虑这些点上的函数；函数由它在每个点的取值决定；两个函数相等当且仅当它们在每点取值相同。

三家都站在这条规定上：

- 形：显示一个几何对象就是显示它的点。
- 计：数一个几何对象就是数它的点（或它的维数、次数——都由点导出）。

- 算：在一个对象上计算就是在它的点上计算。

而幂零元直接违反最后一句： $k[x]/(x^2)$ 中， x 在唯一的点上取值为 0，但 $x \neq 0$ 。一个处处为零的非零函数。这在「函数由取值决定」的账本上不可能。

18.4 Grothendieck 的翻转

概形的定义把顺序颠倒了：

先有环，点是导出的。 给一个交换环 A ，它的谱 $\text{Spec}(A)$ 是 A 的素理想的集合，配上 Zariski 拓扑与一个结构层。一个概形是局部长得像 $\text{Spec}(A)$ 的局部环空间。

于是：

- 点=素理想。经典的点（极大理想）只是其中一部分；还有「一般点」（generic point，对应零理想），它的闭包是整个不可约分支。
- 函数不由取值决定。结构层给出「函数」，而函数在一点的「值」是它在剩余域中的像——两个不同的函数可以在所有点有相同的值。
- 幂零元合法： $\text{Spec}(k[x]/(x^2))$ 是一个只有一个点的概形，但它不是 $\text{Spec}(k)$ ——它「胖一点」。

这一步做完，Bézout 的重数不再是外加的记账数字：它就是那个交概形的长度，是一个几何量。补丁被取消了。

18.5 这一栏解决的不止一件事

概形这一栏开了之后，一批原本互不相干的困难同时消失。这一点在十九例中是最显著的，值得单列。

其一，重数几何化（18.4）。

其二，算术与几何统一。 $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ 是一个概形，它的点是素数（加一个一般点）。于是数论问题成为几何问题：一个整系数方程定义 $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ 上的一个概形，模 p 约化就是取纤维。Weil 猜想需要的正是这个（Deligne 1974 用概形语言下的 étale 上调证完）。

其三，形变理论有了对象。「无穷小形变」在经典语言里只能靠形式幂级数与形式的话来说；在概形语言里，用 $\text{Spec}(k[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$ 参数化的族就是一阶形变。幂零元从障碍变成工具。

其四，「一般点」不再是一个说法。经典代数几何里，「一般点」是意大利学派用了几十年的一个不严格的说法（「取曲线上一个足够一般的点」），Weil 1946 花大力气用「泛点」（generic point over a universal domain）来严格化。在概形里它就是一个点。

这四件事同时被解决，是本书第 29 章要用的一个观察：开一栏往往同时消掉一批不相干的补丁。这个现象可以作为共有前提确实存在的一个间接证据——若那些困难各自独立，它们不会同时消失。

18.6 提出即签字，且签字者是提出者

本案例与第 13 章（超实数）一样，是「提出即签字」的一例，但形态不同。

超实数的情形：对象由模型存在性定理产出，所以对象与模型同时。概形的情形：对象由一个**构造**给出（Spec 是从环显式造出来的），一致性归约到交换代数。

第 6.6 节的签字规格要求指出「一个具体的一致性论证或模型构造」。EGA 提供的是后者，而且是最强的形态：**概形不是被假设存在的，它是被造出来的**。

这构成对第 28 章签字律的一个不利读数：签字律说签字者通常不是提出者，而本案例中是同一人（Grothendieck）。第 28 章会把它与第 13 章一起统计为例外，并说明定律的准确形式是关于**位置**（签字必须由计完成）而非人物。

在本案例中，这个辩护是有力的：Grothendieck 做 Spec 构造时，站的正是计的位置——他用的全部是交换代数（Serre 1955 的 FAC 是直接前身）。而他做几何直觉的部分（把 Spec 想象成一个空间）站的是形的位置。一个人可以先后站在两个位置上（第 1.3 节），这不违反定律。

18.7 拒绝的形态：直觉的丧失

对概形的拒绝，措辞与前几章不同。很少有人说它「不存在」——它是造出来的，存在性不成问题。批评集中在两点：

其一，它取消了几何直观。一个由素理想构成的空间，一个带幂零元的点，一个不由取值决定的函数——这些无法被画出来。经典代数几何的力量在于图像（意大利学派几乎完全靠几何直觉工作），而概形语言把这个力量拿走了。

其二，它的技术门槛极高。EGA 有一千多页，SGA 更多，而它们在讲到具体几何问题之前要铺极长的基础。这引发了一个持续的批评：为了解决一个具体问题需要建这么大的机器，是不是不成比例。

这两个批评在本书框架里是形这一位置的拒绝（第 1.3 节：形的拒绝是「我画不出它」）。而它的结局与其他案例一致：形最终找到了新的显示方式（概形的图示传统——Mumford《红书》里那张著名的 $\text{Spec}(\mathbb{Z}[x])$ 的图，把算术曲面画出来，是形重新出场的标志）。

Mumford 那张图的意义，与 Wessel-Argand 的复平面（第 9.4 节）是同一件事：**给一个已被算与计承认的对象一个显示**。而它出现在概形定义之后十几年，晚于签字——这与复数相反（复数是先有显示后有签字）。第 28 章会把两种顺序都记录下来。

18.8 本章最弱处

其一，提出即签字，签字者即提出者（18.6）。已标为签字律的例外。

其二，「空间先有点」在文献中的证据是间接的。与前几章一样，这条前提从未被写下来。本书的证据是补丁（重数的两百年）与拒绝的措辞（「处处为零的非零函数是荒谬的」）。但与第 9 章（Euler 明说「与零不可比者不是数」）相比，本案例没有一处接近明说的文本。

其三，材料是否「早已掌握」有争议。重数的局部环长度公式，是二十世纪四五十年代交换代数发展（Krull、Zariski、Samuel、Serre）的产物，与概形的提出只差十年左右，且是同一批人的工作。这比 Saccheri 早九十六年、Euler 早九十五年要近得多。

本书的处理：仍判为合格，因为重数计算本身（不用局部环语言）可以追到 Bézout（1779）与十九世纪的交点理论，而那时它已经是一个既成的记账事实。但「材料出自哪一层」在这里不干净：Bézout 层的材料是一个记账要求（重数必须计），交换代数层的材料才是它的环论表现（幂零元）。前者早、后者晚，而推翻共有前提要靠后者。

如实记：本案例的材料时间差被本书用了较宽的算法。

其四，与最近占位者的区分。最近的占位者是 McLarty（2007）关于 Grothendieck 与范畴论基础的工作、Dieudonné（1985）的代数几何史、以及 Schappacher 关于算术几何统一进程的研究。

Dieudonné 的叙事（他是 EGA 的合著者）是：概形是「几何与算术统一」这个长期纲领的自然完成，从 Kronecker 到 Dedekind-Weber 到 Weil 到 Serre，方向一以贯之。

这个占位者与第 17.8 节的 Marquis 同型，而且更强，因为 Dieudonné 是当事人。本书能给的区分同样是：那个纲领的每一步都保持「空间先有点」（Weil 的泛点理论是为了在保持点的前提下得到一般点），而概形取消了它。这条区分可核查，但同样面对「取消是不是那个纲领的极限」这个反驳。

两章遇到同一形态的占位者，说明这是本书在二十世纪案例上的系统弱点：二十世纪的数学有清晰的纲领意识，而纲领叙事与碰撞叙事在同一批史料上都能自圆。第 33 章会把这一点记为本书对二十世纪案例的解释力弱于十九世纪案例。

丙 过程与对象的账本多开的那几栏

第 19 章 极限：发散级数把「和」算成了三个不同的数

(1734—1821)

四要件表

格	内容
形	切线与面积的几何传统：导数被显示为切线的斜率，积分被显示为曲线下的面积。回答方式是「画出来，那条线就在那里」
算	无穷过程的运算程序：级数逐项相加、逐项求导、逐项积分；无穷小量参与运算后被舍去。回答方式是「照这套规则算，结果对」
计	「和」的账本：一个和是把若干个量加起来得到的那个量；无穷个量的和，是这个过程所到达的那个量
共有前提	一个无穷过程有值，当且仅当它到达一个量
材料产出位置	算：发散级数的求和算法（配对、挪位、

格	内容
材料撞上位置	代入)，原题是「怎样对级数求和、怎样用级数计算函数值」
Z	算（同位）：同一个级数，三条合法算法各跑出一个值（0、1、1/2）——是算自己制造了这次相撞
拒绝	不被到达的值——一个不是过程终点、而是由「任意接近」的量词结构定义的东西 否定型：Berkeley 1734《分析学家》——已逝之量的鬼魂；Nieuwentijt、Rolle 的早期批评；Lagrange 1797 试图取消极限（用形式幂级数的代数方法重建分析），这是一次完整的替代方案，也是一次拒绝
签字	Cauchy 1821《分析教程》给出极限的语言，Weierstrass 学派 1860 年代完成 ε - δ 的形式；实数系的构造（Dedekind、Cantor 1872）给出最终的一致性依托。签字晚于出生近一个世纪

19.1 三个答案的那道题

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

算法一（配对）： $(1-1) + (1-1) + \dots = 0$ 。算法二（挪一位）： $1 - (1-1) - (1-1) - \dots = 1$ 。算法三（代入）： $1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ ，令 $x = 1$ ，得 $1/2$ 。

三个算法都是当时公认的合法操作。三个答案都不同。

这个例子（Grandi 级数）在十八世纪被反复讨论。Leibniz 给出了一个支持 $1/2$ 的论证：部分和在 0 和 1 之间交替，「平均」是 $1/2$ ，而这在概率上是合理的。Euler 系统地发展了发散级数的求和方法，并明确主张：级数的「和」应当定义为产生这个级数的那个表达式的值——这正是算法三的一般化。

Euler 用这套方法算出了许多正确的、后来被证实的结果（如 $\zeta(-1) = -1/12$ 这类，在现代解析延拓的意义下是对的）。他不是胡来，他是在用一套自洽的、极有成效的方法。

19.2 这是「算」的逾越

本案例是逾越律（第 26 章）最纯粹的标本，值得把机制写清楚。

算法自己跑到底了，跑出了一个「计」无法接受的东西。

计的账本上，一个和是把量加起来得到的那个量。这个定义有一个内建的要求：和是唯一的（加法是确定的运算，同一批数加起来只能得一个结果）。

而算跑出来的是：同一个级数，三个和。

计的选择只有两个：要么宣布这些算法非法（但它们各自都是合法运算的组合），要么宣布这个级数没有和（Euler 会问：那为什么用它算出的结果是对的？）。

十八世纪的实际处置是补丁：**区分「收敛」与「发散」，只对收敛级数谈和，发散级数的「和」是形式的、方便的。**而这个补丁保护的正是共有前提——和必须是被到达的那个量。

打补丁的是算（它划出了自己产物中的一部分为「形式的」）。材料在算。核对无误。

19.3 共有前提的确切内容

前提不是「和必须唯一」——那是可以争的，而且它在被推翻之后仍然成立（收敛级数的和是唯一的）。

前提是：一个无穷过程有值，当且仅当它到达一个量。

「到达」这个词是关键。在十八世纪的账本上，一个无穷级数的和是这样理解的：部分和一个接一个，越来越接近某个量，最后**到达**它。这个「最后到达」是一个过程性的图景，它把和理解作为过程的终点。

三家：

- **计**：和是加起来得到的那个量——「得到」就是到达。
- **形**：曲线下的面积是那些矩形累加**得到的**；切线是割线**转到的**那个位置。
- **算**：级数求和是一个逐步逼近的程序，程序的意义在于它逼近的那个终点。

而 Berkeley 攻击的正是这个「到达」（第 13.1 节）：在求导时，增量先要非零（才能作除法），后要为零（才能得结果）——如果它「到达」了零，前一步就非法；如果没到达，后一步就不精确。

Berkeley 的攻击在共有前提之内是无法回答的。这是本案例的关键：批评者与被批评者站在同一块地上，所以争论一百年没有结果。

19.4 柯西那一步做了什么

Cauchy 1821 年的《分析教程》给出的定义（现代改写）是：级数收敛于 S ，若对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 N ，使 $n > N$ 时 $|S_n - S| < \varepsilon$ 。

这个定义做的事是：**取消「到达」。**

在这个定义里，没有任何一步说部分和到达了 S 。定义只说：任意给定一个精度，从某项起都在这个精度内。 **S 是一个不被到达的值。**

Berkeley 的攻击对这个定义失效，因为定义里没有「先非零后为零」这个动作——增量始终非零，而结论是关于一个量词结构的陈述。

Z 是：不被到达的值。这是一个新存在物，因为在旧账本上，「值」是过程产出的结果，而这个东西不由任何过程产出——它由一个量词结构刻画。

19.5 它比看上去的少： ε - δ 没有定义「接近」

第 12.6 节的接力棒在这里接上。

ε - δ 定义的结构是： $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N: |S_n - S| < \varepsilon$ 。

这个结构中， $|\cdot|$ 是一个外包的部件。定义没有说 $|\cdot|$ 是什么，它只要求有一个这样的东西。

Ostrowski 1916 的定理（第 12.6 节）数清了 $\mathbb{Q}$ 上的绝对值：通常的、 p 进的（每个素数一个）、平凡的。于是「极限」在 $\mathbb{Q}$ 上一共只有可数无穷多种立法，其中一种平凡。

这个读数对本章的意义是：**柯西那一步立的法，比它看上去的少。** 它没有回答「什么叫接近」这个问题——它把这个问题外包了，然后规定了量词的交替顺序。而量词的交替顺序才是它真正的内容。

这一点有一个可核查的证据： p 进分析的极限、连续、导数定义与实分析逐字相同，只换绝对值。若 ε - δ 定义了「接近」，这种逐字相同不可能。

19.6 Lagrange 的替代方案与它的失败

1797 年，Lagrange 出版《解析函数论》，副标题明确说明目的：摆脱无穷小、消失量、极限与流数的一切考虑。

他的方案是：把每个函数展开成幂级数 $f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + \dots$ ，然后定义 $f'(x) := p$ 。整个微积分建立在代数的形式操作上，不用极限。

这是一次完整的替代方案，也是一次拒绝——他认为极限概念不够清楚，应当被消除。

方案失败了，失败的原因在当时不明显：不是所有函数都能展成幂级数。Cauchy 后来给出的反例 e^{-1/x^2} （在 0 处所有导数为零，但函数非零）直接击垮了这个纲领。

这次失败在本书框架里有一个作用：它证明了「算」这一位置无法独自解决这道题。Lagrange 的方案是纯粹算的方案（形式幂级数的代数操作），而它需要一个事实（一切函数可展）——这个事实是假的。第 5.8 节说过，「逐家试推」这一步只有在文献中确有人在那一家的位置上尝试过并失败时才算得到支持。本案例有这个支持，而且极清楚。

19.7 签字：实数的构造

Cauchy 1821 年的定义有一个漏洞：它假设了 S 存在。若不知道 S 是什么，「 $|S_n - S| < \varepsilon$ 」就无从谈起。

补救是柯西准则（对任意 ε ，存在 N ，使 $m, n > N$ 时 $|S_n - S_m| < \varepsilon$ ），它不提 S 。但要从柯西准则推出 S 存在，需要实数系的完备性——而在 1821 年，实数系没有定义。

这个漏洞在 1872 年被补上：Dedekind 用分割、Cantor 用基本列，各自构造了实数系。

Cantor 的构造尤其值得注意：他把实数定义为有理数基本列的等价类——即，实数就是那些不被到达的值。

签字完成。而它的形式是标准的相对一致性：实数的一致性归约到有理数（从而到自然数、到集合论）。

时序值得记：出生（Cauchy 1821）到签字（1872）五十一年，而从断裂（Berkeley 1734）到签字一百三十八年。

19.8 本章最弱点

其一，与拉卡托斯的重叠是全书最大的一处。《证明与反驳》的主要案例之一正是柯西关于「连续函数的收敛级数连续」这条错误定理，以及 Seidel 1847 与 Stokes 用「一致收敛」来修补它。拉卡托斯的论点：概念（一致收敛）是被证明产生的，不是先有概念后有证明。

本书与他的区分（第 38 章会正面处理）：他处理的是柯西之后的修补（一致收敛是对已有极限概念的细分，是伸展），本书处理的是柯西那一步本身（取消「到达」，是开栏）。

这个区分是实质的，但在本章内部，本书没有给出可判错的设计。若读者认为「取消到达」也只是概念伸展的一种，本书无法用本章的材料反驳。

其二，Grabiner-Lakatos 之争本书未取立场。Grabiner (1981) 主张柯西的严格化是由代数分析传统内部的需要驱动的；Lakatos（遗稿）主张柯西的原始概念更接近非标准分析，「错误定理」在他的框架里其实是对的。

这场争论直接关系到本章的读法（若 Lakatos 是对的，柯西并未取消「到达」，他用的是无穷小），而本书未取立场，只在此记录。取任一立场都会改变本章共有前提那一格的填法，这是本章最不干净的地方。

其三，材料的时间跨度过长。Grandi 1703、Leibniz、Euler 1740 年代——发散的级数的矛盾值不是一件材料，是一个持续了一个世纪的现象。这与第 8 章（零与负数）同型，属于本书所说的积累型案例（第 8.5 节）。积累型案例的材料来源规则执行得比判决型案例松，这一点在第 34 章的编码设计里会被单独处理。

第 20 章 函数：一个级数表示了分段异式的曲线

(1747—1837)

四要件表

格	内容
形	曲线传统：一个函数被显示为一条曲线，而曲线是「一笔画出来」的、由一个统一的规律生成的线。达朗贝尔在弦振动之争中的立场：初始形状必须由一个解析式给出，否则波动方程无意义
算	三角级数的展开程序：给定一个任意的初始形状，按 Fourier 的公式算出系数 $a_n = (2/L) \int f(x) \sin(n\pi x/L) dx$ ，级数就收敛到

格	内容
计	它。回答方式是「照这个积分算，系数就有了」 解析式的账本：一个函数就是一个由变量、常量与运算符号组成的表达式（Euler 1748 的定义）。两个函数相等当且仅当它们的表达式可以互相化归
共有前提	函数是一个表达式 （对应关系由一个统一的解析式给出）
材料产出位置	算：Fourier 的三角级数与系数积分，原题是 热在固体中如何传导 （原题在数学之外，见 25.6、36.3）
材料撞上位置	算（同位）：系数积分对任何可积的 f 都能算，于是级数自己跑出了一条分段异式的曲线
Z	任意对应 ——一个不由任何统一表达式给出、只由「对每个 x 指定一个 y 」这件事本身定义的存在物
拒绝	否定型：Lagrange 在法国科学院的评审中反对 Fourier 的论文（1807 年的论文因此未获发表，1811 年获奖但仍被批评缺乏严格性）；Poisson 长期争论；「任意函数」在十八世纪被认为是矛盾修辞
签字	Dirichlet 1829（给出三角级数收敛的充分条件）与 1837（给出「任意对应」的函数定义，并给出狄利克雷函数作为例证）。更彻底的签字在集合论之后：函数 = 一个满足单值条件的有序对集合

20.1 一场关于弦的争论

十八世纪中叶的弦振动之争，是本案例断裂的现场。

问题是：一根两端固定的弦，给定初始形状，此后如何运动？波动方程 $\partial^2 y / \partial t^2 = c^2 \partial^2 y / \partial x^2$ 由达朗贝尔 1747 年给出，通解是 $y = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$ 。

争论在于：**初始形状可以是什么？**

- **达朗贝尔**：必须由一个解析式给出，而且要足够光滑（否则二阶导数无意义）。一根被手指拨起的弦（初始形状是折线）不满足这个条件，因此波动方程对它不适用。
- **Euler**：物理上，弦当然可以被拨成折线，而且它当然会振动。所以初始形状可以是「任意画出来的曲线」（他称之为 *fonctions discontinues*，指的是不由单一解析式给出的曲线，与今天的「不连续」不同义）。
- **Daniel Bernoulli**：一切初始形状都可以写成正弦级数的叠加（基于物理的叠加原理）。

三家的位置在这里清楚可见：达朗贝尔站在计（解析式的账本），Euler 站在形（曲线可以画出来），Bernoulli 站在算（级数展开的程序）。

Euler 与 Bernoulli 的立场看起来是同一边的，其实不是。Euler 认为任意画出的曲线不能写成一个解析式（包括不能写成正弦级数），所以他反对 Bernoulli：若一切曲线都能写成正弦级数，那么一切曲线都由一个解析式给出，这与他的立场矛盾。

这场争论在共有前提之内无解，因为三家都同意「函数是表达式」，只是对「哪些表达式算数」有分歧。

20.2 材料：热传导带来的东西

Fourier 的题不是函数论的题，是物理的题：**热在固体中怎样传导。**

他的方法是：把初始温度分布展成三角级数，然后逐项求解（每个正弦模式的衰减是指数的），再叠加。为此他给出了系数公式 $a_n = (2/L) \int f(x) \sin(n\pi x/L) dx$ 。

关键在于：**这个积分对任何可积的 f 都能算。**不需要 f 有解析式，只需要它有积分。而算出来的级数，收敛到 f 。

Fourier 明确地展示了这一点：他给出方波的展开，一个单一的三角级数，在不同区间上等于不同的常数。

这就是三家撞上的地方：一个级数（一个表达式）表示了一条分段异式的曲线。

对 Euler 的立场，这是致命的：他认为「机械画出的曲线」不能由一个解析式给出，而 Fourier 给出了。对达朗贝尔的立场，这也是致命的：他认为不光滑的初始形状没有意义，而 Fourier 的方法对它给出了答案。

材料的四条要件：出自算（级数展开程序）自己；早于 Dirichlet 二十余年；原本回答热传导；三家无法退回（系数公式是一个积分，谁也不能说它算不出来）。

20.3 共有前提被推翻的确切内容

前提是「函数是一个表达式」。Fourier 的结果并没有直接说它错——恰恰相反，它说的是**更多的东西有表达式**（连方波都有）。

那么它怎么推翻了前提？

因为它取消了「有表达式」这条判据的**区分力**。若几乎一切曲线都有三角级数表达式，那么「是不是函数」就不再由「有没有表达式」来判定——这条判据不再筛掉任何东西。

这是本书十九例中，共有前提被推翻的方式最特别的一次：**不是被证明为假，而是被证明为无内容。**

一旦这条判据失去区分力，就必须找一条新的判据来说「什么是函数」。Dirichlet 1837 给出的答案是：**不需要判据**。函数就是对每个 x 指定一个 y 这件事本身，不管这个指定是怎么做出来的。

他同时给出了那个著名的例证：在有理点取 1、无理点取 0 的函数。**这个函数没有任何解析式，而且它不是任何三角级数的和**——它是为了说明「任意对应」这个定义的范围而造的。

20.4 Z 是什么：一个定义的取消

本案例的 Z 有一个特殊性质：**它是通过取消一个要求而得到的。**

复数是加了一个东西（一类新的数），超穷数是加了一个东西（完成的无穷），而任意对应是**减掉**了一个要求（不再要求有表达式）。

这是否仍然是「开一栏」？

本书判为是，理由是：减掉要求之后，账本上出现了一类此前不存在的东西——狄利克雷函数这样的对象，在 1837 年之前不是任何东西。它不是一条曲线（画不出来），不是一个表达式（没有），在旧账本上它根本没有位置。**减掉要求使得一批新对象获得了名分**，这与加一个东西的效果相同。

这个判定值得记，因为它说明「开栏」的动作可以有两种方向：**加入一类新对象，或取消一条准入条件**。第 5.2 节说过删公理是一阶的，那里的删公理是在一个已定义的结构里去掉一条公理（群-半群），而本案例取消的是**对象本身的资格规定**。两者的区别在于：删公理不改变哪些东西存在，只改变哪些东西被归为一类；取消资格规定使原来不存在的东西存在。

这个区别在实际操作中需要小心，第 30 章会用它来处理几个边缘案例。

20.5 拒绝与它的形态

Lagrange 的反对是本案例最有据的拒绝。1807 年 Fourier 提交给法国科学院的论文，因为 Lagrange 等人的批评而未获发表。1811 年的修改版获得大奖，但评语中仍然指出其严格性不足。

Lagrange 的立场是一贯的（第 19.6 节）：他认为分析必须建立在幂级数的代数操作上。三角级数表示不连续的曲线，在他的框架里是不可接受的——他自己在 1759 年的一篇论文里几乎得到了 Fourier 的系数公式，但他没有接受它能表示任意曲线。

Lagrange 差一步而没有走出去，这与 Saccheri（第 14 章）、Lagrange 自己在预解式上（第 21 章）构成同一形状。本书在第 26 章会指出：**同一个人可以在两个不同案例中都是「差一步」的那个人**，而这不是巧合——那些站在算的位置上把程序推到极限的人，最常撞上共有前提，也最常拒绝自己撞出来的东西。

20.6 这一栏的后果

其一，**分析的对象改变了**。此后分析研究的不再是「有解析式的东西」，而是各种函数类（连续、可微、可积、可测），每一类由性质定义而非由表达式定义。

其二，**病态例子成为一个方法**。狄利克雷函数是第一个「为了说明定义的范围而造的反例」。此后 Weierstrass 的处处不可导函数（1872）、Peano 曲线（1890）都是同一种做法。**造反例这件事，本身是这一栏开了之后才有意义的**——若函数必须有表达式，造一个没有表达式的例子是没有意义的。

其三，它为集合论准备了土壤。「任意对应」这个概念，逻辑上要求把一个对应看作一个完成了的整体（所有 $(x, f(x))$ 的全体）。这与潜无穷的立场紧张。Cantor 的工作（第 11 章）正是从三角级数唯一性问题出发的——而那个问题是 Fourier 级数留下的。

第三条给出一条谱系：Fourier（1822）－函数概念的扩张（1837）－三角级数唯一性集（1870）－超穷数（1874—1883）。两次开栏之间有直接的传承。第 29 章会记录这类传承。

20.7 本章最弱处

其一，三家的时序不齐。弦振动之争在 1747—1780 年代，Fourier 在 1807—1822，Dirichlet 在 1829—1837。断裂、材料、推翻分布在九十年里，中间三家的人员完全换过。这与第 8 章、第 19 章同型（积累型案例）。

其二，Euler 的立场难以归位。本书把 Euler 填在形（曲线可以画出来），但 Euler 同时是十八世纪最大的解析式操作者，他的《无穷分析引论》正是「函数即表达式」这条定义的经典表述。同一个人在同一道题上占两个位置。

本书的处理是按他在这场具体争论中的立场归位（他在弦振动之争中主张任意画出的曲线是合法的初始形状，这是形的立场）。但这暴露了第 1.3 节那条说明的执行困难：位置说的是回答方式而不是人的身份，而同一个人在同一道题上可以有两种回答方式。

其三，共有前提的推翻方式是「失去区分力」而非「被证伪」（20.3）。这是十九例中唯一的一次，其他案例都是前提被直接证伪。这使本案例在第 26 章的机制归类中是一个单独的类型，而单一样本无法支持任何一般化。

其四，与最近占位者的区分。最近的占位者是 Lützen（1982）关于函数概念史的研究、Bottazzini（1986）《高等微积分》、以及 Youschkevitch（1976）的经典论文《函数概念的发展》。三者都详细地记述了本章全部史实。

区分同第 11.8、15.8 节：组织方式不同。本章无独立的可判错设计。

第 21 章 群：预解式的次数不听方程的话

（1770—1832）

四要件表

格	内容
形	置换的排列传统：Cauchy 1815 起系统研究置换（他称之为 substitutions），把它们写成记号并研究其复合。回答方式是「把这些排列写出来，它们就是这些」
算	根式求解的程序：把方程降次、构造辅助方程（预解式）、逐层开方。回答方式是「照这套程序走，能不能走到根」

格	内容
计	数论中的分圆方程账本：Gauss《算术研究》第七节，用周期与循环结构解 $x^p - 1 = 0$ ，并由此判定正多边形可否尺规作图。回答方式是「这些根之间有多少种对称关系，数得清」
共有前提	可解性是方程的属性 （由它的系数与次数决定）
材料产出位置	算（方程论）：Lagrange 1770—71 的预解式分析，原题是「已有解法为什么有效、五次预解式为何升到六次」
材料撞上位置	算（同位）：预解式的次数由保持该函数不变的置换个数决定——是求解程序自己跑出了这个与方程次数无关的数
Z	对称本身是对象 ——一组置换构成的封闭系统，它有自己的结构（子群、正规子群、商），而方程的可解性是它的性质，方程只是它的一个影子
拒绝	否定型／不接待型：Cauchy 弄丢了 Galois 1829 年提交的手稿；Fourier 收到 1830 年的手稿后去世，手稿散失；Poisson 与 Lacroix 1831 年的评审意见是 无法理解 （“nous n'avons pas été en état d'en donner une idée”）。Galois 1832 年死后，手稿由 Liouville 于 1846 年才发表
签字	Jordan 1870《置换与代数方程论》：第一部系统的群论著作，把 Galois 的内容重建为一门理论。更彻底的签字是抽象群的公理定义（Cayley 1854 已给出但被忽略，Weber 1893、Burnside 1897 使之通行），把群从「置换的集合」抽象为满足公理的结构

21.1 拉格朗日看见了那件事

1770—1771 年，Lagrange 写了一部长篇论文，考察已知的三次与四次方程解法（Cardano、Ferrari、Tschirnhaus、Euler、Bézout 的各种方法），要回答的是：**这些方法为什么有效，它们背后是不是同一件事。**

他的分析工具是**预解式**。对一个 n 次方程，取根的某个函数（如三次方程的 $x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$ ），考察它在根的全部 $n!$ 个置换下取多少个不同的值。这些值满足一个方程——预解式——而预解式的次数就是那个不同值的个数。

他的发现：

- 三次方程，那个函数在 6 个置换下只取 **2** 个值 $\Rightarrow$ 预解式是二次的 $\Rightarrow$ 降次成功。

- 四次方程，某个函数取 **3** 个值 $\Rightarrow$ 预解式是三次的 $\Rightarrow$ 降次成功。
- 五次方程，同类的构造给出 **6** 个值 $\Rightarrow$ 预解式是六次的 $\Rightarrow$ 升次。

而他明确指出了那个数由什么决定：由保持该函数不变的置换的个数。（今天的语言：值的个数 = $n! / |\text{稳定子}|$ ，即轨道—稳定子定理。）

这是本案例的材料。它在本家回答的是「已有解法为什么有效」，回答得极成功——Lagrange 的论文是十八世纪代数最深刻的工作，它统一了所有已知解法。

21.2 他没有走出的那一步

Lagrange 看见了置换的个数决定一切，但他仍然把可解性当作方程的属性。

他的结论是：五次方程用这种方法解不了（预解式次数更高）。他没有说五次方程不可解——他说的是这条路走不通，可能需要别的方法。（Ruffini 1799 与 Abel 1824 才证明根式解不存在。）

更重要的是，他没有把「保持某函数不变的那些置换」当作一个东西。在他的论文里，那是一个计数——有多少个置换保持它。**计数不是对象**。

第 5.5 节的区分在这里得到最好的例证：**想到不等于承认**。Lagrange 写下了那个观察，写得清清楚楚，而那一步没有迈出去，不是因为想象力，是因为在他的账本上，一组置换不是一个可以有性质的东西。

21.3 共有前提：可解性属于方程

这条前提属于第 2.6 节的（丙）归属类：某个性质属于哪个东西。

在 1832 年之前，「可解性」当然是方程的属性——就像次数、系数、判别式一样。你问一个方程可不可解，就像问它是几次的。

三家：

- **算**：解方程的程序作用在方程上，可解性是这个程序能否成功的问题。
- **计**：分圆方程的可解性由 $p-1$ 的因子分解决定（Gauss），这是方程系数的算术性质。
- **形**：置换是被排列出来的对象（Cauchy 研究它们的记号与复合），但置换是**根的**置换，根是方程的根——置换依附于方程。

第三家的位置值得注意。Cauchy 1815 年起已经在系统地研究置换本身，他证明了关于置换的一些定理（如后来称为柯西定理的一个特例）。**形已经把置换当作对象在研究了**。但它研究的是「一个置换」，不是「一组置换构成的系统」。

21.4 伽罗瓦的翻转

Galois 做的事，可以精确地描述为一次归属的改判：

把「保持某函数不变的置换的集合」从一个计数，变成一个对象；再把可解性从方程的属性，改判为这个对象的属性。

具体地：给定方程，考察它的 Galois 群（保持根之间全部代数关系的置换构成的群）。方程可用根式解，当且仅当这个群是可解群（有一个正规子群链，商都是交换的）。

于是：

- 方程的可解性 = 群的可解性。
- 五次一般方程不可解，因为 S_5 不是可解群（ A_5 是单群）。

方程消失了。它只是那个群的一个来源，而全部内容在群里。

Z 是：对称本身是对象。这是一个新存在物——一组置换的封闭系统，有自己的结构（子群、正规性、商群），这些结构的性质决定原来那个问题的答案。

21.5 拒绝：「无法理解」

本案例的拒绝记录是十九例中最戏剧性的，也最容易被浪漫化。须小心处理。

事实是：

- 1829 年，Galois 通过 Cauchy 提交论文。Cauchy 建议他修改重投（近年的研究表明 Cauchy 并非简单地弄丢，他实际上鼓励过 Galois），但手稿此后未见。
- 1830 年，向科学院大奖提交的手稿由 Fourier 收管，Fourier 不久去世，手稿散失。
- 1831 年，Poisson 与 Lacroix 的评审意见：我们无法对它形成一个概念。他们要求作者把论证写得更清楚。
- 1832 年 5 月 31 日，Galois 死于决斗，年二十。
- 1846 年，Liouville 在《纯粹与应用数学杂志》上发表遗稿。
- 1870 年，Jordan 的书使它成为一门理论。

浪漫化的读法是：天才被平庸的评审埋没。本书的读法不同：Poisson 的评语是准确的。

Galois 的手稿在技术上确实晦涩（他自己在决斗前夜的信里写了「我没有时间」）。但更重要的是：他要求读者接受一个当时不存在的东西——一组置换构成的系统是一个对象，它有子对象，子对象之间有一种叫「正规」的关系。在 1831 年的账本上，这些词没有指称。Poisson 说他无法形成一个概念，字面上是对的。

这与第 15.4 节（Riemann 的演讲无人听懂）是同一形状：新对象在被显示之前，无法被理解。而这两个案例都用了三十六到四十年才被显示出来（Beltrami 1868；Jordan 1870，两者相隔两年，都在同一段时期——这不是巧合，第 29 章会讨论 1870 年前后的显示工具成熟）。

21.6 签字的两层

第一层（Jordan 1870）：把 Galois 的内容重建为一门系统的理论，给出定义、定理、证明的完整链条。这一层是形的工作——它把那个对象显示出来了，使人能指着它说「就是这个」。

第二层（Cayley 1854；Weber 1893）：抽象群的公理定义——群是一个集合加一个满足结合律、有单位元、有逆元的运算。这一层取消了「置换」这个具体载体。

第二层的时序值得注意：Cayley 1854 年就给出了抽象定义，而它被忽略了近四十年。原因不难看出：1854 年时，除了置换群，没有别的例子——抽象定义没有内容。到 1890 年代，矩阵群、变换群、Klein 的埃尔朗根纲领（1872）都在了，抽象定义才有了多个实例，才有意义。

这给出一条一般观察：抽象化（一阶工作）需要多个实例才有内容，而多个实例常常要等下一次开栏。第 30 章会用这条观察处理巴拿赫空间等案例。

21.7 与埃尔朗根纲领的关系

Klein 1872 年的埃尔朗根纲领：每一种几何由一个变换群决定，几何的内容是那个群的不变量。

这与本案例是同一个动作的第二次施行：把「什么算相同」这件事交给一个群。在 Galois 那里，「哪些根的重排不改变代数关系」；在 Klein 那里，「哪些变换不改变几何性质」。

两者相隔四十年，而 Klein 明确地援引了 Galois 理论作为范式。

本书的判读：埃尔朗根纲领是一阶的。它把群这个已开的栏应用到几何上，这是极重要的应用，但它不开新栏——它的每一个内容都可以用「群作用在集合上」这个已有语言复述完毕。

这个判读会被一些读者反对（埃尔朗根纲领常被列为数学史上最重要的纲领之一）。本书重申第 5.6 节与第 4.6 节：重要性开栏是两个独立维度。埃尔朗根纲领极重要且是一阶的，这两句话不矛盾。

21.8 本章最弱点

其一，Lagrange 的材料与推翻相隔六十年，中间的传承链不完整。Galois 读过 Lagrange（他的手稿里提到），但 Abel（1824）与 Ruffini（1799）也读过，而他们走的是不同的路（证明不可解，而非改判归属）。材料的强制性在这段时间里没有把三家逼到无路可走——Abel 的定理证明了五次不可解，而这在旧账本里完全说得通（那就是那个方程的属性）。

这构成对材料强制性的一个质疑：若材料真的强制，为什么 Abel 没有被逼出群？

本书的回答：Abel 的定理回答的是「能不能」，而材料指向的是「凭什么」。Abel 的结论在旧账本上可以安放（这个方程不可解，如同这个数不是素数），所以它不逼迫开栏。逼迫来自另一处：同一批置换在不同方程上给出同样的答案——这一点要到 Galois 把可解性与群结构一一对应起来才显现。

这个回答成立，但它意味着材料的强制性不是自动生效的，需要有人把它转向。而「有人转向」这件事，本书的机制不解释（第 2.2 节说过机制不预测何时发生）。如实记。

其二，形这一家的归位可疑。本书把 Cauchy 的置换研究填在形。但 Cauchy 研究置换的复合与分解，这更像是算（程序）。

按一贯的做法（凡两判取对本书不利的一判）：判为形。若判为算，则算这一家在本案例中同时占了两个位置（预解式程序与置换研究），三家不齐，本案例应被排除。本书采用

的判法保住了案例，这一次是对本书有利的判法——与第 7.8、10.7、11.4、17.8 节的做法相反。

理由是：排除本案例会使十九例减为十八例，而群是本书最强的案例之一，排除它需要更强的理由。但这个理由是权衡性的，不是原则性的。**本处是全书唯一一次为了保住案例而采用有利判法，特此标明。**

其三，与最近占位者的区分。最近的占位者是 Wussing (1969) 《抽象群概念的起源》、Kiernan (1971) 关于 Galois 理论从 Lagrange 到 Artin 的发展、以及 Ehrhardt (2012) 关于 Galois 理论接受史的研究。

Wussing 的框架与本书最接近：他追踪的正是「隐含的群概念」如何变成显式的对象，且他明确指出 Lagrange 那里群已经隐含存在。

区分：Wussing 解释的是概念如何逐步显化（一个渐进的、多线索的过程：置换论、数论、几何三条线汇合），本书解释的是一次归属改判如何被材料逼出。两者可以并存——事实上 Wussing 的三条线（置换论=形、数论=计、方程论=算）与本书的三家高度吻合，这对本书是一个支持性证据，而不是竞争。

本书与他的实质分歧只有一处：他把三条线的汇合看作一个渐进过程，本书主张有一个判决点（Lagrange 的预解式观察）。这个分歧有可判错的成分：若三条线的汇合在文献上表现为均匀渐进，Wussing 胜；若表现为一个可指认的转折，本书胜。史料在此处是混合的——置换论与数论的发展确实渐进，而可解性的归属改判确实是一步到位的。本书未能给出干净的判决。

第 22 章 理想：为证费马算出来的失败

(1844—1871)

四要件表

格	内容
形	分圆整数环 $\mathbb{Z}[\zeta_n]$ 中的「数」：形如 $a_0 + a_1\zeta + \dots + a_{n-1}\zeta^{n-1}$ 的表达式，被显示为一类可以写出来的、可以相乘相加的东西
算	费马大定理的分解路线：把 $x^n + y^n$ 在 $\mathbb{Z}[\zeta_n]$ 中分解为 $\Pi(x + \zeta^i y)$ ，再用互素与唯一分解推出矛盾。回答方式是「照这条路走下去」
计	唯一分解的账本：每个数唯一地分解为素因子之积（算术基本定理）。这是数论一切计数论证的基础
共有前提	分解是分解成数 （因子必须是这个环里的元素）

格	内容
材料产出位置	计（唯一分解的账本）： $\mathbb{Z}[\zeta_{23}]$ 唯一分解失效（本章 22.7 按不利判法定为计）
材料撞上位置	算：撞上它的是费马证明路线上的验算——分解程序跑到 $n = 23$ 时跑出了这个失败
Z	不是数的因子 ——一个参与分解、但本身不是环中元素的存在物（Kummer 的「理想数」；Dedekind 改写为环的子集，即理想）
拒绝	Kummer 的「理想数」被广泛接受（它是算法性的），而 Dedekind 1871 的 对象版 受到 Kronecker 的持久拒绝：他坚持用「形式」（form）与除子的算法处理，反对把一个无穷子集当作一个已完成的对象。这是本书拒绝落点最精确的一例——拒绝恰好落在「算法」与「对象」的分界上
签字	Dedekind 1871（《狄利克雷数论讲义》第二版附录十）：理想被定义为环的一个子集（对加法封闭、对环元素乘法吸收），素理想的唯一分解定理被证明。签字工具是集合——这是集合语言在数学中最早的重大使用之一

22.1 一次为了证明而做的验算

1840 年代，Kummer 研究的是分圆域的算术（与高次互反律有关），同时代人普遍希望用分圆整数处理费马大定理。

路线是： $x^p + y^p = \prod_{i=0}^{p-1} (x + \zeta^i y)$ 。若 $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ 中有唯一分解，且左边是 p 次幂，则各因子（在互素的情形下）各自是 p 次幂，由此可以下降、得矛盾。

这条路的全部重量压在**唯一分解**上。

而 Kummer 算出来： $p = 23$ 时，唯一分解失效。

（史学上有一个流传甚广的错误说法：Lamé 1847 年在巴黎科学院宣布证明了费马大定理，Liouville 当场指出唯一分解未经证明，而 Kummer 早已知道它失效。这个故事的细节多有出入，但核心是对的：Kummer 在 1844 年前后已经处理了这个失效。）

材料的性质：**它是一个失败的记录**。它不回答任何正面问题，它说的是「这条路走不通」。

22.2 把失败改成对象

Kummer 的处置是本书全部十九例中最漂亮的一次动作。

他没有说：唯一分解失效，所以这条路废了。

他说的是：唯一分解看上去失效，是因为账本上缺了一些因子。若把那些缺失的因子补进来，唯一分解就恢复了。那些因子不是 $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ 中的元素——他称之为「理想数」（ideale Zahlen，借自 Gauss 用「理想」形容虚构对象的用法）。

一个类比可以说明这个动作：在 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 中， $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$ ，两种分解，四个因子都不可再分。Kummer 的读法是：2、3、 $1 \pm \sqrt{-5}$ 都不是真正的素元，它们各自是两个「理想素因子」之积，而那四个理想素因子在这个环里写不出来。补上它们，两种分解就是同一种的重排。

这个动作的形状值得单记：把「账平不了」改判为「账本缺了栏目」。第 18 章（概形）的动作在形式上完全相同——Bézout 的账平不了，改判为点缺了幂零元。第 26 章会指出，这个形状在十九例中出现了五次。

22.3 Kummer 的理想数是什么

Kummer 没有说理想数是什么东西，他给的是一个**判据**：一个理想数由「它整除哪些实际的数」来刻画。也就是说，他定义的不是对象，是一个**关于整除性的算法**：给定一个数，可以判定某个理想素因子是否整除它，以及整除多少次。

这是一个纯粹算的处置：**理想数只作为计算规则存在。**

Kronecker 一生赞成这个处置，反对下一步。

22.4 Dedekind 的下一步

1871 年，Dedekind 把 Kummer 的理想数改写为：**环的一个子集。**

理想 $I \subseteq \mathbb{Z}[\zeta]$ ，满足：对加法封闭；对任意 $r \in \mathbb{Z}[\zeta]$ 、 $a \in I$ ，有 $ra \in I$ 。主理想 $(a) = \{ra\}$ 对应实际的数 a ；而那些不是主理想的理想，对应 Kummer 的理想数。

素理想的唯一分解定理成立：每个非零理想唯一地分解为素理想之积。

这一步做的事，是把一个算法变成一个对象。而对象是一个无穷集合。

Dedekind 自己清楚这一步的分量。他在多处解释为什么要这样做：因为用集合作为对象，可以避免依赖具体的表示形式（Kummer 的判据依赖于选定的生成元与计算方式），而得到一个内在的定义。

22.5 Kronecker 的拒绝落在哪里

Kronecker 的拒绝是本书最精确的一处拒绝，值得逐层分析。

他不反对 Kummer。事实上他推进了 Kummer 的方法，发展了「除子」（divisor）理论与「形式」（Formen）的语言，用多项式的算法处理同一批内容。

他反对的是把无穷集合当作一个已完成的对象。这与他反对 Cantor（第 11.6 节）、反对 Weierstrass 的一般实数、反对非构造存在证明，是同一个立场的不同施行。

按第 1.3 节的分类：**这是算的拒绝——「造不出它」。**一个理想是无穷多个元素构成的集合，你无法把它写完；能写的只有生成元，而生成元的选择是任意的。

而这个拒绝恰好落在本案例 Z 的位置上。Z 是「不是数的因子」，而它有两个版本：作为算法的版本（Kummer）与作为对象的版本（Dedekind）。Kronecker 接受前者，拒绝后者。

这给出本书对拒绝形态的一个精细读数：拒绝可以精确地落在「同一个内容的算法版本与对象版本之间」。十九例中，这个形态出现了三次（本案例、第 11 章超穷数、第 13 章超实数），而三次的拒绝者都属于同一条谱系（Kronecker—Brouwer—Bishop）。第 26 章会把这条谱系与逾越律联系起来：构造主义者站在算的位置上，他们最常供给材料，也最常拒绝由材料逼出的对象。

22.6 签字：集合作为工具

Dedekind 的定义同时是签字：理想被造出来了（作为子集），一致性归约到已承认的东西。

值得注意的是签字工具：集合。1871 年，集合还不是一个理论（Cantor 的工作刚开始，公理化要等到 1908）。Dedekind 用的是朴素的、直观的集合概念。

这构成一个有意思的时序：理想（1871）的签字用了集合，而集合本身要到 1908 年才被签字。换言之，签字工具本身当时是未签字的。

本书的处理：签字的要求是把新对象归约到已被承认的东西，而不是已被公理化的东西（第 6.6 节）。1871 年，集合作为一种朴素的思考方式已被广泛接受（虽然悖论要到 1897 年后才出现）。所以签字有效。

但这一处说明签字律有一个层次问题：签字工具的合法性本身可以在后来被动摇（悖论出现后，Dedekind 的构造需要在 ZF 中重新安置）。第 28 章会记录这一点，并指出它与第 17 章（范畴的部分签字）、第 11 章（超穷数签字后栏内不完全）一起，说明签字不是一劳永逸的。

22.7 本章最弱点

其一，材料的位置归属可两判。Kummer 的失效计算，是计（唯一分解的账）还是算（费马证明路线的验算）？

本书的填法是「计与算的交界」，这是一个含糊的填法，违反了第 6.4 节的规格（材料必须指明出自哪一家）。

按一贯的不利判法（第 7.8、10.7、11.4、17.8 节）：判为计——因为判为算会增加逾越律的计数。本处按此填入第 26 章计数。

但须承认这个判法在本案例上不自然：那个计算是在执行一条证明路线（算）时撞上的，而撞上的东西是账本的失效（计）。材料的「出自」与「撞上」是两件事，本书的规格没有区分它们。这是四要件表规格的一处不足，第 33 章记账。

其二，Z 有两个版本，而拒绝只针对其中一个（22.5）。这使「三家一致拒绝」这条判据（第 4.3 节）在本案例上要打折扣：Kummer 版本被三家接受了，只有 Dedekind 版本被算拒绝。

本书的处理：以 Dedekind 版本为 Z（因为算法版本可以被复述为「一套整除判据」，按第 5.3 节签名一，属一阶）。这个处理是一贯的，但它意味着本案例的「出生」时间是 1871 而非 1844，而材料（1844）与出生（1871）之间的二十七年里，那个内容以算法形态存在。

这个形态——内容先以算法存在、后被改判为对象——在十九例中出现了四次（本案例、第 11 章、第 13 章、第 24 章）。第 26 章会把它列为逾越律的一个子型。

其三，与最近占位者的区分。最近的占位者是 Edwards（1977, 1980）关于 Kummer 与理想数的研究、Haubrich 关于 Dedekind 理想论起源的工作、以及 Avigad（2006）关于 Dedekind 方法论转向的分析。

Avigad 最有威胁：他的论点是，Dedekind 的转向是一次方法论的选择——用集合与公理代替算法，理由是它使证明更简洁、更少依赖任意选择。这是一个关于数学方法优劣的解释，不需要「共有前提被推翻」这个机制。

区分：Avigad 解释的是 Dedekind 为什么选择这条路，本书解释的是这条路上出现的东西为什么是一个新对象而不是一个新记号。两者可以并存，但本书须承认：若接受 Avigad 的解释，本案例可以被读作一次一阶的方法论改进（把算法改写为集合语言），而它不是开栏就取决于「不是数的因子」是否真的是新存在物。

本书的判据是三家一致拒绝（第 4.3 节），而本案例的拒绝只来自算一家。因此本案例的二阶身份，比复数、超穷数弱。如实记。

第 23 章 概率=测度：正规数的概率是 1 而没有任何情形比

(1909—1933)

四要件表

格	内容
形	勒贝格测度论：一个集合被显示为「可测的」，配一个数（它的测度）。回答方式是「这个集合有多大」
算	统计物理与遍历理论的计算程序：时间平均与空间平均，大数定律的各种证明。回答方式是「照这个极限过程算下去」
计	古典概率的账本：概率=有利情形数／全部情形数（Laplace）。回答方式是「数一数，比一比」
共有前提	概率是情形之比（概率必须由对一个可数或有限的情形集合的计数得到）
材料产出位置	计（测度论）：Borel 1909 的正规数定理，原题是「实数十进制展开的统计性质」
材料撞上位置	无：没有算法跑出「事件=可测集」——

格	内容
	它由一条关于测度 1 而无情形比的定理逼出（见 26.3 的五例之一）
Z	事件=可测集 ——概率不是对情形的计数，而是一个满足可列可加性的测度；随机变量是可测函数，独立性是一个测度论的条件
拒绝	否定型：von Mises 学派坚持概率必须定义为频率极限（他的 Kollektiv 理论），认为测度论的定义是形式的、脱离概率的实际含义；这场争论持续到 1940 年代。放逐型：许多概率论工作者长期不使用测度论语言
签字	Kolmogorov 1933 《概率论基础》：概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ， $\mathcal{F}$ 是 σ -代数， P 是其上的测度且 $P(\Omega) = 1$ 。一致性归约到测度论

23.1 古典定义的裂缝

Laplace 的定义——概率是有利情形与全部情形之比——在整个十九世纪是标准的。它对骰子、纸牌、抽签完全够用。

它的裂缝在两处：

其一，「等可能」的循环。定义要求各情形等可能，而「等可能」只能用概率来说明。这个循环被反复批评（Bertrand 悖论 1889 是最著名的展示：同一个「随机取一条弦」的问题，三种自然的取法给出三个不同的答案）。

其二，连续情形无从计数。在 $[0,1]$ 上随机取一个数，「全部情形」有不可数多个，比不出来。十九世纪的处置是用长度代替计数——但这是一个未经论证的类比，它已经悄悄地不是「情形之比」了。

第二处是补丁：用长度代替计数，而不说明为什么可以。按第 3.5 节，补丁在计（几何概率），材料应在计——核对无误（Borel 的正规数定理出自测度论）。

23.2 Borel 1909 的定理

Borel 考察的是实数的十进制展开的统计性质：在 $[0,1]$ 中随机取一个数，它的展开中数字 7 出现的频率是不是 $1/10$ ？

他证明：**几乎所有实数是正规的**——每个有限数字串以它应有的频率出现。「几乎所有」的意思是：例外集的勒贝格测度为零。

这条定理在本家回答的是一个分析问题（实数展开的性质），与概率的定义无关。

而它的形式是这样的：一个陈述对「**概率为 1**」的实数成立，而这个「**概率 1**」不是任何情形之比。

正规数的集合与非正规数的集合，都是不可数的，都是稠密的。你无法数它们，无法说「有利情形有多少个」。唯一能说的是：一个的测度是 1，另一个是 0。

23.3 共有前提被推翻的方式

Borel 的定理说的不是「古典定义错了」。它说的是：存在一类完全合理的概率陈述，而它们不能用情形之比来表述。

这与第 20 章（函数）的方式相似而不同：那里前提失去区分力，这里前提失去覆盖范围——它管不了一大类陈述。

而管得了的是测度。于是问题变成：测度是概率的一个工具，还是概率就是测度？

前一个答案保住共有前提（概率仍是情形之比，测度只是连续情形的技术手段），后一个答案取消它。

1909 年到 1933 年之间，两个答案都有人持。Borel 自己倾向于前者（他一生对概率的哲学基础有复杂的看法）。Kolmogorov 1933 给出的是后者。

23.4 Kolmogorov 的公理化做了什么

《概率论基础》的公理系统极简：一个测度空间，总测度为 1。事件是可测集，随机变量是可测函数，期望是积分，独立性是 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 。

它做的事，可以精确地描述为一次归属改判（与第 21 章群同型）：

- 旧账本：概率属于情形（一个事件的概率由构成它的情形决定）。
- 新账本：概率属于集合（一个事件就是一个可测集，它的概率就是它的测度）。

而「情形」这个概念被完全取消了。 Ω 中的点不需要有任何含义，它们不是「基本情形」——事实上在许多重要的构造中（如 Wiener 测度）， Ω 的点是抽象的，没有直观解释。

Z 是：事件 = 可测集。这是一个新存在物吗？

本书判为是，理由是：在旧账本上，一个「事件」是一组情形，而情形是有含义的（骰子的一面、一张牌）。新账本上的事件是一个可测集，它不需要由任何有含义的东西构成。

「一个没有情形的事件」在 1900 年是不知所云的，正如「一个没有值的函数」（第 25 章）、「一个没有外面的空间」（第 15 章）。

23.5 von Mises 的拒绝

von Mises 的立场（1919 起）是：概率是一个经验概念，它的意义是频率的极限。他的 Kollektiv 是一个无穷序列，满足两个条件：频率收敛；对任何「位置选择」子序列频率不变（随机性）。

他对测度论定义的批评：它是形式的，它没有说概率是什么。一个满足公理的测度可以是任何东西，公理不告诉你为什么这个数与现实世界的频率有关。

这个批评在本书框架里的位置：它与 Bishop 对非标准分析、Steenrod 对范畴的批评是同一形态（第 13.6、17.5 节）——都是「这只是形式，没有内容」。

而回应也是同一形态：形式化开的那一栏，后果不在原来的问题里。测度论概率论的后果是随机过程理论（Wiener 过程、Markov 过程、鞅论、随机微分方程），而这些在频率解释下无法建立——一个随机过程的样本空间是函数空间，它的点是整条轨道，而「一条轨道出现的频率」没有意义。

值得注意的是：von Mises 的路线并未消亡。Kolmogorov 本人 1960 年代发展的算法随机性理论（与 Martin-Löf、Chaitin），正是把 von Mises 的随机性要求用可计算性理论严格化。**两条路线最终并存**，而这在十九例中是少见的（多数案例中被拒绝的一方消失了）。

23.6 为什么这一栏开得比较快

Borel 1909 到 Kolmogorov 1933，二十四年。相比复数的两百六十五年、非欧几何的三十六年（出生到签字），这是快的。

三条理由，与第 12.4 节的分析一致：

其一，**工具现成**。勒贝格测度论 1902 年已建立，且已被承认。开这一栏不需要造新工具。

其二，**账本上有位置**。到 1933 年，「一个对象由公理定义、由模型担保」这个做法已经是常规（Hilbert 1899 之后）。Kolmogorov 的公理化不需要为「公理化是否合法」辩护。

其三，**压力大**。1920—1930 年代，统计物理、遍历理论、随机过程（Markov 链、布朗运动）都在快速发展，而它们都需要一个能处理连续情形的基础。**多个方向同时施压**。

第三条在十九例中不常见，值得记：**多方向的同时压力加速开栏**。第 29 章会把它作为时长的一个解释变量。

23.7 本章最弱点

其一，**Borel 的定理是不是「材料」有疑问**。正规数定理是一个漂亮的结果，但它是否逼迫了共有前提的推翻？

一个反驳：几何概率（用长度、面积代替计数）在十九世纪已经普遍使用，Bertrand 悖论 1889 已经暴露了古典定义的问题。这些比 Borel 早，而且更直接。若前提早已被侵蚀，Borel 的定理只是又一个例子，不是判决点。

本书的辩护：几何概率是补丁（用长度代替计数而不说明理由），Bertrand 悖论暴露的是「等可能」的循环（第一处裂缝），两者都没有产生一个**无法用情形表述的正确陈述**。Borel 的定理是第一个这样的陈述——它不是关于随机装置的，是关于实数集合的，而它的「概率 1」除了测度没有别的读法。

这个辩护成立，但它依赖于把「材料」定义得比较严（必须是一个正面的、无法用旧框架表述的结果），而这个严格标准在别的章里并未一致地执行。**规格执行的不一致，是本书四要件表的一处系统问题**，第 33 章记账。

其二，**共有前提可能过窄**。「概率是情形之比」在 1909 年是否还是三家共有的？几何概率的使用者显然不这样认为。

本书的处理：共有前提的准确表述应是「概率必须由某种**度量情形多少**的东西给出」——长度、面积是情形的度量的推广，仍然在这条规定内。而测度论的定义取消的是「情形」

本身。这个表述更宽，但也更难核查（它更接近一条哲学原则而非一条可查的规定）。如实记为本章共有前提填得最不干净。

其三，与最近占位者的区分。最近的占位者是 von Plato（1994）《二十世纪概率论的创立》、Hochkirchen（1999）关于测度论概率论起源的专著、Shafer-Vovk（2006）关于 Kolmogorov 之路的分析。von Plato 的书涵盖本章全部史实，且他明确讨论了 von Mises 与 Kolmogorov 两条路线的竞争。

区分同前几章：组织方式不同，无独立的可判错设计。

本书在此第五次记录这个模式（第 11、15、20、22 章之后）。五次之后，这已经不是各章的最弱处，而是本书的结构性状况：案例编的每一章都有更详尽的史学专著在先，本书的全部独立价值集中在第五编。第 33 章会正面处理这个状况，包括一个尖锐的自问：若三条定律在第七编真跑中判负，本书还剩下什么？

第 24 章 可计算函数：哥德尔编码把证明变成了数

（1928—1936）

本章与第 25 章按第 36.5 节增补的规格填表：材料一栏分填产出位置与撞上位置。前二十三章的表按同一规格回填的工作，列在第 33 章的待办。

四要件表

格	内容
形	希尔伯特形式主义传统：数学被显示为一串形式符号，证明是按规则从公理串出的符号串。回答方式是「把它写成串，规则在那里，照着核对」
算	人手计算的实践：一个人拿纸笔、按规矩、不用灵感地把一件事算出来。这是「机械程序」的原始含义，也是判定问题（Entscheidungsproblem）里「判定」二字的含义
计	可定义性的账本：一个函数「算得出来」，意思是它落在某个已被承认的函数类里——原始递归函数（Skolem 1923、Hilbert-Ackermann）、 λ -可定义函数（Church 1932—1933）、一般递归函数（Herbrand-Gödel 1934）。回答方式是「它在不在这个类里」
共有前提	「有效计算」不是一个数学对象，而是由数学家判定的一件事（哪些程序算「机械

格	内容
材料产出位置	的」，靠共同体的判断，不靠定义) 形 ：哥德尔 1931 年的编码。把公式与证明各配一个自然数，于是「x 是 y 的证明」成为一个算术谓词
材料撞上位置	算 ：把这个编码用到自己身上——一个形式系统关于自身可证性的陈述，需要一个能对编码做算术的 程序 才能表述，而那个程序必须是「有效的」，否则整个论证不成立
材料的原题	希尔伯特纲领第二问：一个形式系统能否证明自己的一致性
Z	机器成为数学对象 ——「有效可计算」不再是共同体的判断，而是一个可以被定义、被证明有性质、被对角化的东西
拒绝	否定性名字：无（「可计算函数」「递归函数」「机器」全是中性词）。拒绝形态是提出者与权威本人的不接受：哥德尔在见到图灵的论文之前不承认 Church 论题，他明确表示 Church 的定义只是一个「工作假设」而非对「有效」的分析；希尔伯特纲领的支持者长期视这类结果为技术性的边界问题而非纲领的失败
签字	与出生几乎同时且是 多路会合式 的：图灵机、 λ -可定义、一般递归、Post 系统、组合子——五套完全不同的定义被证明外延相等（1936—1937, Kleene、Turing、Post）。这是本书十九例中唯一一次由「多个独立构造收敛到同一个类」构成的签字

24.1 被漏掉的那道题

一九二八年，希尔伯特与阿克曼在《理论逻辑基础》里提出判定问题：**是否存在一个机械程序，输入一个一阶公式，输出它是否普遍有效。**

这道题的形状值得停一下。前半句「是否存在」是一个数学问题；后半句「机械程序」不是——在一九二八年，它没有定义。

希尔伯特并不认为这是缺陷。在他的框架里，「机械程序」是元数学的操作层面的东西：你把一个程序摆出来，大家看一眼就知道它是不是机械的（每一步只依赖当前符号、不需要洞察、不需要选择）。**判定这件事由数学家来做，不由定义来做。**

这就是本案例的共有前提，而它属于第 13.7 节所说的高层前提：它不是关于某一类对象的资格规定，是关于**什么东西可以成为数学对象**的规定。

三家都站在它上面：

- **形**：形式系统的公理与规则可以写成串；而「按规则操作」这件事本身是在系统外面做的，它不在串里。
- **算**：一个人拿纸笔按规矩算，算得出来就是算得出来。这件事是**做出来的**，不是被定义的。
- **计**：已有若干函数类（原始递归、 λ -可定义、一般递归），每一个都定义得很清楚。但「这个类是不是恰好装下全部有效可计算的函数」这个问题，不在任何一个类的定义里——它是一个关于定义与直观是否吻合的问题，由判断回答。

24.2 材料：编码，以及它被用到哪儿去了

哥德尔一九三一年那篇论文回答的是希尔伯特纲领的第二问。他的手段——本书视为材料的那件东西——是编码。

把每个符号配一个数，每个公式（符号的序列）配一个数，每个证明（公式的序列）配一个数。于是关于公式与证明的陈述，变成关于自然数的陈述。「**y** 编码的是一个从公理出发、以 **x** 编码的公式结尾的证明」，这句元数学的话，成了一个算术谓词 $\text{Prf}(y, x)$ 。

产出位置是形。这一点值得说明，因为它与直觉相反。编码看上去是一套计算，像是算的事。但编码这个动作做的事是：**把一个过程显示为一个对象**——把「证明」这件在时间中展开的活动，变成一个数，一个可以指着看的東西。这正是形的职责（第 1.2 节：形给出的东西可以被指着看）。

（这一处的归属，第 1.8 节已经预先记过一次弱点：编码之后的算术运算属于计，而编码动作本身属于形，这个划分是本书为了让表填满而做的，有循环嫌疑。本章仍按此填，并在最弱处重申。）

撞上位置是算。哥德尔的论证要成立，那个谓词 Prf 必须是**可以被算出来的**——否则「这个句子说自己不可证」这句话就没有算术内容。哥德尔的处理是把它构造成原始递归的，逐条验证。也就是说：**他必须依赖一个关于「有效」的判断，而他正在做的事，恰恰把「有效」变成了算术里的一个问题。**

这个自指的位置，就是共有前提被撞上的地方。

24.3 共有前提怎样被推翻

推翻分两步，跨了五年。

第一步（1931—1934）：可定义性变成一个竞争。

编码之后，「哪些函数是有效可计算的」这道题有了数学内容，因为函数可以被编码，函数类可以被谈论。于是几套定义被提出来：Church 的 λ -可定义（1932—1933）、Herbrand-Gödel 的一般递归（1934）。Church 一九三六年提出论题：**有效可计算 = λ -可定义**。

哥德尔不接受。他给 Church 的回应是：这个等同不能被证明，它只是一个工作假设；要让它成为对「有效」的分析，需要先弄清「有效」本身是什么。

这是本书十九例中「提出者与权威本人拒绝」最清楚的一次（第 4.5 节把这一形态列为最强的拒绝证据，因为它排除了「拒绝出于对新人的偏见」）。哥德尔拒绝的不是 Church 的技术，是把一个定义当作对「有效」的刻画这件事——而这正是共有前提在起作用：有效由判定，不由定义。

第二步（1936）：图灵把「人在算」显示出来。

图灵做的事，与前面所有人都不同。他不给出一个函数类，他给出一个**对人的分析**：一个人在纸上做机械计算，他能做的是什​​么？纸是格子的；一次只能看有限个格子；心智状态有限；每一步只依赖当前所见与当前状态；改一格、移一格、换状态。

由这套分析，他造出机器，并证明它与 λ -可定义外延相等。

关键在于：图灵不是给出了又一个定义，他是给出了一个论证——为什么一切能被人机械地算出来的东西，都能被这机器算出来。

哥德尔见到这篇论文之后，立刻改变了立场。他后来多次说：图灵的分析给出了「有效可计算性」的一个绝对的、不依赖于所选形式系统的概念，而这是第一次。

共有前提在这里被推翻：有效计算不再由数学家判定，它成了一个被定义、被分析、被证明有性质的对象。

24.4 Z：机器成为数学对象

新对象是什么？

不是「图灵机」这个装置——装置只是一个显示方式。也不是「可计算函数类」——那是一个函数类，早已有几个。

Z 是：机器成为数学对象。更准确地说是：一个过程，可以被当作一个对象来谈论、来数、来对角化。

这一栏一开，一批此前不可问的问题立刻成为可问的：

- 有多少个可计算函数？（可数多个，因为机器可以编码。）
- 有没有不可计算的函数？（有，对角化立得。）
- 停机问题可判定吗？（不可判定。）
- 一个机器可以模拟一切机器吗？（可以，通用机。）

这四问在一九三〇年之前**无法陈述**——不是没人想到，是「一个机械程序」不是一个可以被数、被对角化的东西。

第 13.7 节说过，高层的共有前提被推翻时，后果不局限于一个领域，而是改变此后一切开栏的方式。本案例是那一节的两个例子之一：**把元数学的问题变成数学对象**，此后成为常规手段（不可判定性、复杂性、随机性、逻辑强度，都是这条路上的）。

24.5 签字：五套定义会合

本案例的签字形态在十九例中是独一份。

它不是「给出一个模型使新对象归约到已承认的东西」（复数的有序对、非欧的伪球面、理想的子集）。它是：**五套互不相干的构造，被证明定义了同一个类。**

λ -可定义（Church）、一般递归（Herbrand-Gödel）、图灵机（Turing）、Post 系统（Post，几乎与图灵同时且独立）、组合子（Schönfinkel-Curry）——出发点完全不同，等价性由一批交叉证明建立（Kleene、Turing 1937）。

为什么这构成签字？

按第 6.6 节的规格，签字要给出一个一致性论证或模型构造。多路会合不是模型构造，但它起的是同一个作用：**它取消了「这个定义会不会选偏了」这个问题。**若只有一套定义，人们有理由怀疑它捕捉的只是那一套形式手段的产物；五套毫不相干的手段落到同一个类上，这个怀疑就没有落脚处。

哥德尔用「绝对的」（absolute）一词形容这个状况，指的正是这一点：这个概念不依赖于所选的形式框架。

这个签字形态与第 10.6 节、第 12.6 节的**终局签字**（Frobenius 数清了除法代数、Ostrowski 数清了绝对值）是同一族的东西：三者都不是给一个对象找一个落脚处，而是**把这一栏的边界钉死**。第 28 章会把它们合为一型。

24.6 名字这一格：中性，且这一格现在不作依据

本案例的名字全部中性：可计算函数、递归函数、机器、通用机。没有任何一个 0 到 1 的对象在这里得到否定性名字。

按第 35 章的判负结果，名字化石律已降为倾向性描述，因此本格不再承担论证责任，只作记录。

但有一处仍值得记，因为它对第 27 章的改写有用：**本案例的拒绝极强（权威本人不接受，持续五年），而命名完全中性。**这是「拒绝」与「命名」两个变量分离的又一个标本，与四元数、超穷数、群构成同一族。四例合起来说明：**否定性命名不是拒绝的一般形态，它只是拒绝的一种形态，且不是最常见的那一种。**

24.7 与第 13 章（超实数）的对照

两章的共有前提都属高层，值得并看。

	超实数	可计算函数
共有前提	名分由构造担保	有效由数学家判定
材料	紧致性定理（计）	编码（形产出，算撞上）
推翻的方式	一致性可以代替构造	判断可以被定义代替
签字	提出即签字	多路会合
后果	「由一致性得到对象」成为常规	「把元数学问题变成对象」成为常规

两者的方向相反而互补：超实数把名分从构造那里解绑，可计算函数把一个原本靠判断的东西绑到定义上。一个松绑，一个上锁，而两次都是把某样原本由人来裁的事，改判给一个对象。

这个共同点值得记，因为它可能是高层前提被推翻时的一般形态：**被推翻的总是「某件事由人裁」，而新对象接管了那次裁定**。十九例中高层的只有两例，无法一般化，但它与第 21 章（可解性由方程改判给群）、第 23 章（概率由情形改判给可测集）的归属改判形态相似。四例的相似性留给第 29 章处理。

24.8 本章最弱点

其一，**材料的产出位置归属有循环嫌疑**。第 1.8 节已预先记过：把编码动作判给形、把编码之后的算术判给计，这个划分是为了让表填满而做的。本章按此填，而没有独立的理由。

若把编码判给算（它毕竟是一套逐条的构造），则第 36.6 节的逾越律计数会从「算 6」变成「算 7」，占比由 0.353 升到 0.412——**仍然不足以救那条已判负的定律**，但方向对本书有利。按第 7.8、10.7、11.4、17.8、22.7 各节一贯的纪律（可两判者取不利判），本章判为形。

其二，**「有效由数学家判定」不是一条共有前提，而不是一个知识空白**。这是本章最实的质疑，与第 12.8 节（接近只有一种意思）同型：说三家共同持有一条规定，还是说没人想到「有效」可以被定义？

本书的辩护是它**被当作理由用过**：哥德尔对 Church 的回应正是这条规定的明文使用——他说等同不能被证明，因为「有效」不是一个数学概念。这句话是这条前提最接近被明说的一次，而且它出自最有资格的那个人。这一处辩护比第 12 章强，与第 9 章（Euler 明说与零不可比者不是数）相当。

其三，**图灵那一步是不是「材料逼出来的」**。图灵的分析不是从哥德尔编码出发的——他的出发点是判定问题，他的手段是对人的计算行为的现象学分析。若他的路径与材料无关，那么本案例中材料的作用是什么？

本书的处理与第 10.3 节（Hamilton 不是从 Euler 恒等式出发的）一致：**材料来源规则是关于强制性的，不是关于心理路径的**。编码的作用是使「有效可计算」成为一个可以被算术地谈论的问题；没有这一步，图灵的分析将只是一段哲学，无法与任何数学结果对上。事实上图灵论文的主体正是用编码与对角化证明判定问题不可解——**他用的是哥德尔的手段**。

这个辩护成立。但须承认，本案例中材料与推翻只隔五年，属于第 18.8 节记过的那类「材料时间差过短」的情形。

其四，**与最近占位者的区分**。最近的占位者有三处：Sieg（1994, 2009）关于图灵分析的逻辑重构、Davis（1982, 2000）的可计算性史、以及 Gandy（1988）《丘奇论题与计算原理》。

Sieg 最有威胁。他的论点是：图灵贡献在于把「有效可计算」从一个未分析的概念，通过对**有界性与局部性**两条约束的公理化，还原为一个可证明的等价——他称之为「计算的公理化」。这个解释完全不需要「三家碰撞」这个机制。

本书能给的区分：Sieg 解释的是图灵那一步的**逻辑结构**（他做了什么、为什么有效），本书解释的是那一步**为什么在那时被逼出来、以及为什么之前的几套定义无人（包括哥德尔）承认**。两者不冲突。但本书须承认：Sieg 的解释更精确，而本书的解释只在「为什么 Church 的定义不被接受而图灵的被接受」这一处有独立的话说——而那一处的答案（图灵把「人在算」显示出来了，形出场了），与第 9.4 节复数等形出场、第 15.4 节流形等形出场是同一条读数。

这条读数是本书在本章唯一的独立产出，它属于第 28 章（签字律，计只能对形签字），而不属于本章。

第 25 章 广义函数：物理先用了，激波逼出了它

(1927—1950)

四要件表

格	内容
形	泛函分析的对偶传统：一个空间被显示为它上面连续线性泛函的全体（Riesz 1909 的表示定理、Banach 1932 的对偶理论）。回答方式是「把它显示为一个空间上的作用」
算	偏微分方程的求解程序：为了让解存在，把方程从逐点满足放松为积分意义下满足（Wiener 1926、Leray 1934 的湍流工作、Sobolev 1936 的双曲方程工作、Friedrichs 的正则化）
计	函数的账本：一个函数由它在每一点的值给定；两个函数相等当且仅当处处取值相同；导数是差商的极限，逐点定义
共有前提	函数在每一点上有值，而函数由这些值决定
材料产出位置	算：弱解。激波与间断解满足守恒律的积分形式，却在间断处没有导数；Leray 1934 为 Navier–Stokes 造的「湍流解」、Sobolev 1936 的广义解，都是这一类
材料撞上位置	算（同位）。本案例的产出与撞上在同一位置，这在十九例中与第 16 章（分数维）并列，是仅有的两例
材料的原题	Navier–Stokes 方程有没有解；双曲方程的柯西问题在什么条件下适定。两道题的源头在流体力学与波动物理，而材料本身是数学结果（真跑二编码为外部性 0.5，见

格	内容
Z	25.6) 没有值的对象 ——一个只通过它对检验函数的作用而被定义的东西，它的定义里不含「值」
拒绝	否定性名字：Dirac 自称 improper function（不正当的函数），本书编码为 0.5。否定型拒绝：von Neumann 1932 在《量子力学的数学基础》里称 δ 是虚构，并系统地把它从形式体系里清除，代之以谱理论
签字	Schwartz 1945—1950：分布 = 检验函数空间上的连续线性泛函，即 $\mathcal{D}'$ 的元素。一致性归约到泛函分析与拓扑向量空间。签字与理论的完整形态同时给出（本书第二例「提出即签字」之外的一种：对象与其模型是同一件东西）

25.1 三家撞上的那件事

一九二七年，Dirac 在量子力学的形式体系里用了一个东西： $\delta(x)$ 处处为零、在原点为无穷、积分为一，且 $\int f(x)\delta(x)dx = f(0)$ 。

任何一个数学家都能立刻指出这不是函数：一个处处为零（除一点外）的函数，勒贝格积分为零，不可能为一。

三家的位置：

- **计说**：不存在。函数由它的值决定，而这些值给出的积分是零。
- **形说**：显示不出来。von Neumann 1932 年的处理是把整套形式体系重建在希尔伯特空间的谱理论上，用投影值测度代替 δ ——**这是一次极成功的重建，而它的成功恰恰是形这一家拒绝的方式：我给你一个能显示的替代品，你那个虚构的东西不需要了。**
- **算说**：不管你们怎么说，我照着算，结果对。物理学家用 δ 做傅里叶变换、做格林函数、做本征展开，从未出错。

这是第 1.5 节所说的断裂：三家各自的推理都无误，而结论互不相容。而它的外部标记也在（第 1.5 节末）：**一个所有人都在用、而数学家都说它不存在的东西**，持续了近二十年。

25.2 为什么 δ 不是材料

第 3.6 节把本案例点名为「危险案例一」，理由是：若说物理学的使用推翻了「函数在点上有值」这条前提，那材料就出自数学三家之外，材料来源规则即被推翻。

本书的处理是：**物理学的使用没有推翻任何东西。**

证据是时序与效果： δ 从 1927 年被使用到 1945 年，将近二十年，数学界的账本一动没动。von Neumann 不但不接受，而且花了大力气造一套不需要它的东西，并且造成功了。一个被成功绕开的东西，不构成对任何前提的推翻。

这与第 7.6 节（欧多克索斯的比例论）是同一形状：**绕开是拒绝的最高级形态**——不否认，只是造一套装置使得没有它也能把事情做完。von Neumann 的谱理论之于 δ ，正如欧多克索斯的比例论之于不可通约量。

物理学的使用起的作用是**提示方向**：它告诉人们，有一个东西在那里起作用。但提示不是材料，因为它对三家中的任何一家都不构成非承认不可的理由（第 3.7 节：影响不能充当材料，因为影响没有强制性）。

25.3 材料：弱解

真正推翻前提的，是偏微分方程自家的工作。

守恒律 $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ 的解会在有限时间内出现间断——激波。在间断处， u 没有导数，方程逐点无意义。而物理上这个间断完全实在（超音速飞行、爆炸波、水跃）。

处理办法是把方程乘上一个光滑的检验函数 φ 、在全空间积分、分部积分把导数转到 φ 上：

$$\iint (u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi) dx dt = 0$$

这个式子对 u 只要求可积，不要求可导。满足它的 u 叫**弱解**。

同样的动作在别处独立出现：Leray 1934 年为 Navier–Stokes 造的「湍流解」（他明确说这种解可能不是逐点满足方程的）、Sobolev 1936 年为双曲方程的柯西问题引入的广义解与后来以他命名的空间、Friedrichs 的磨光算子。

材料的性质：这是一个数学结果，由算这一位置产出——它是一套构造，一个把方程重写成积分形式的程序。它在本家回答的是「这个方程有没有解」。

25.4 共有前提怎样被撞上

弱解本身还不是新对象——它是一个函数（可积的），只是它满足方程的方式变了。

被撞上的是下面这一步：

若 u 只通过 $\iint (u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi)$ 这样的式子起作用，那么**决定 u 的不是它的值，是它对检验函数的作用**。两个几乎处处相等的 u 给出同样的作用（这已经是勒贝格理论里的常识）；而反过来，一个“作用”未必来自任何一个 u 。

δ 正是这样一个作用： $\varphi \mapsto \varphi(0)$ 。它是 $\mathcal{D}$ 上一个完全正当的连续线性泛函，只是没有哪个可积函数能通过积分给出它。

于是共有前提被击中：**函数由它的值决定**这一条，在弱解的框架里已经被架空了——框架只用作用，不用值。而一旦只用作用，就有一批作用不来自任何函数，它们照样是正当的对象。

这个推翻方式与第 20 章（函数）的方式属同一族：那里是共有前提失去区分力（几乎一切曲线都有三角级数表达式，于是“有表达式”筛不掉东西），这里是共有前提失去必要性（框架不需要值，于是“有值”不再是入场条件）。两例都不是前提被证伪，是前提被架空。

十九例中这一族有两例，两例都在第四编（过程与对象那一本账本上）。这个分布留给第 29 章。

25.5 Z：一个定义里没有「值」的函数

Schwartz 1945—1950 年的分布理论把这一步做完：

分布是检验函数空间（紧支光滑函数，配一个恰当的拓扑）上的连续线性泛函。可积函数 f 对应分布 $\varphi \mapsto \int f\varphi$ ； δ 对应 $\varphi \mapsto \varphi(0)$ ；导数由 $\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$ 定义——于是一切分布无穷可微，包括那些来自处处不可导函数的分布。

Z 是：没有值的对象。这是数学史上第一次有一个「函数」概念，它的定义里不含「值」。

这一栏的后果与第 15、18 章一样，是解决了一批原本互不相干的困难：

- 一切分布可微，于是微分方程可以先在分布意义下求解、再问解是否光滑（正则性理论由此成为一门学问）。
- δ 与它的导数合法，格林函数、基本解成为定义清楚的对象。
- 傅里叶变换扩展到缓增分布，于是 δ 的变换是常数、常数的变换是 δ ，物理学里用了二十年的那套形式运算全部合法。
- Sobolev 空间获得内在定义（分布导数在 L^p 中）。

第 18.5 节说过，开一栏往往同时消掉一批不相干的补丁，这可以作为共有前提确实存在的间接证据。本案例是这个现象最密集的一次。

25.6 真跑二把本章编码为外部性 0.5

第 36 章的编码里，本案例与第 20 章（函数）一起被编为外部性 0.5：材料是数学事实，但它原本回答的那道题在数学之外。

Navier-Stokes 有没有解——这是流体力学的问题。双曲方程的柯西问题——这是波动物理的问题。激波——这是气体动力学的现象。

按第 36.3 节修补后的规则表述：

材料必须是一个数学事实，即由形／算／计三个位置之一产出、并在数学内部被承认的结果；而它原本所回答的问题，可以在数学之内，也可以在数学之外。

本案例合格：弱解是一个数学结果（一套构造、一批定理），由算产出，在数学内部被承认（Leray 1934 与 Sobolev 1936 都是公认的重要工作）。

但必须记明：这条修补是被本章与第 20 章两例逼出来的，而修补的方向是放松（第 36.4 节已记账）。本章是那次放松的两个来源之一。

还须记一处更细的东西。第 25.2 节说 δ 不是材料，因为物理学的使用没有强制力。而弱解是材料，尽管它的原题也在物理。两者的区别在于：

- δ 是一个记号上的用法——物理学家用它算，但它没有在数学内部产出任何被承认的结果。
- 弱解是一个**数学结果**——它是关于方程解的存在性的定理，它在数学内部被引用、被推进。

这个区别是实质的，但它把规则的判据推到了「什么算数学内部被承认的结果」这个问题上，而这个问题本书没有给判据。**这是四要件表规格的又一处不足**，与第 22.7 节（产出与撞上未分）、第 36.5 节（已增补）同类，一并记入第 33 章。

25.7 产出与撞上同位：本章的一处异常

按第 36.5 节增补的规格，材料一栏分填产出位置与撞上位置。十九例中，两者不同的居多（材料属计的账本，而撞上它的是算在跑）。

本案例两者同位，都是算：弱解由算产出，而撞上共有前提的也是算（是求解程序自己把“值”这个东西从框架里挤了出去）。

十九例中同位的只有两例：本案例与第 16 章（分数维，Hausdorff 造外测度、又由同一个构造跑出 so）。

而这两例恰好也是**材料与推翻时间差最短**的两例（分数维同篇，本案例九年）。这个巧合有一个可能的解释：**产出与撞上同位时，中间没有跨位置传递的过程，所以时间短**。两个样本不足以支持这个解释，记在此处供后续检验。

25.8 命名这一格

Dirac 自己称 δ 为 improper function（不正当的函数）——本书编码为 0.5，理由是：它是一个否定性的限定词（improper），但它出自使用者本人、且带着“我知道这不严格”的自嘲，不是拒绝者给的名字。

这与第 13 章（超实数，non-standard 由 Robinson 自取）是同一形态：**否定性的名字由提出者自己取，作为一种预先的免责**。两例合起来提示，第 27 章改写时应当区分**拒绝者命名与提出者自命名**——本书原来的定律没有做这个区分，而两者的含义完全不同：前者是三家的判决，后者是提出者对三家判决的预期。

这个区分是事后提出的（编码时才浮现），按第 35 章的处置原则，它只作记录，不用于任何确认。

至于真正的拒绝，本案例是否定型且有据：von Neumann 1932 年称 δ 是虚构，并造了一整套替代品。这一条编码为拒绝率 1。

25.9 本章最弱处

其一，「用途」这一位置的归属问题，第 1.8 节预告要在本章正面对。

第 1.8 节说：三个位置的穷尽性没有证明，最可能的第四个位置候选是「用途」——一个对象也可以由「它被用来做什么」来回答，而 δ 最初正是这样被接受的。本书当时的处理是把用途归入计（因为用途在数学内部起作用的方式，最终总是“它使某本账对上了”）。

正面面对的结果是：**这个处理在本案例上不成立**。

δ 在 1927—1945 年间的地位，不是“它使某本账对上了”——恰恰相反，它使账**对不上**（积分为零的函数积分为一）。它的地位是“用它算，物理结果对”。而“物理结果对”不是数学三家中任何一家的判据：计不认它（账不平），形不认它（显示不出），算……算也不认它，因为算的判据是程序合法，而 δ 不是任何合法程序的产物，它是一个被硬塞进去的记号。

因此，1927—1945 年间的 δ ，在本书的三位置装置里没有位置。它是一个在数学之外被使用、在数学之内无家可归的东西。

这不构成对装置的推翻（装置说的是数学问题有三种回答方式，而“物理结果对”不是对数学问题的回答）。但它说明：**装置无法描述“数学之外的使用”这件事，而这件事在数学史上确实起作用。**第 33 章须记：本书的装置只覆盖数学内部，凡涉及数学与其应用领域的交界，本书说不了话。

其二，Schwartz 之外的独立路线。分布理论并非只有一条路。Sobolev 1936 已经有了本质相同的东西（他定义了广义解与广义导数），Bochner 1932、Carleman、Gel'fand 学派、以及 Mikusiński 的算子演算都是独立或半独立的路线。日本的佐藤干夫 1959 年的超函数（hyperfunction）走的是完全不同的路（边界值与层上同调）。

这对本案例的意义是：“出生”这个时刻在本案例里不是一个点。若把 Sobolev 1936 算作出生，则出生与签字相隔九年；若把 Schwartz 1945 算作出生，则出生即签字。本书采用后者（因为 Sobolev 给的是广义解这个工具，Schwartz 给的是一类对象），但这是一个选择，不是一个判据的输出。

第 37.6 节记过“十九这个数不是封闭的”，本案例补充一条：**十九个案例的出生日期，有几个也不是封闭的。**

其三，与最近占位者的区分。最近的占位者有三处：Lützen (1982) 《分布理论的前史》、Schwartz 自己的回忆录 (1997)、以及 Paumier 关于 Schwartz 与 Bourbaki 的研究。

Lützen 的书是本章全部史实的来源，而且他的组织方式与本书接近：他追踪的正是“广义函数”的多条独立前史如何汇合。

区分与第 11.8、15.8、20.7、23.7 各节同型（第六次记录同一模式）：**他组织的是前史的汇合，本书组织的是共有前提被自家材料架空。**本章无独立的可判错设计。

其四，本章与第 20 章的自撞。两章的共有前提相邻（「函数是一个表达式」与「函数在每一点上有值」），而后者在时间上晚一百年。若前者已被推翻（任意对应不要求表达式），为什么后者还立得住？

回答：Dirichlet 的任意对应仍然**要求有值**——它取消的是“值必须由统一公式给出”，没有取消“每一点有一个值”。事实上狄利克雷函数的定义方式恰恰是逐点指定值。**两条前提是嵌套的，外层被推翻不影响内层。**

这个回答成立，且它给出一个一般观察：**共有前提有层次，推翻外层不自动推翻内层，于是同一个概念可以被开栏两次。**函数这个概念在本书里被开了两次栏（第 20 章与本章），是十九例中唯一被开两次的概念。这一点留给第 29 章。

十九例填齐后的一处结算

至此十九个案例全部写出。按第 6.7 节的入选标准与第 5.7 节的五步判别程序，本书的案例编完成。三处须在第 33 章一并结算：

1. **十九不是封闭的**（第 37.6 节）：希尔伯特空间、层、椭圆函数双周期三处判不干净，其中希尔伯特空间是自相矛盾（第 5.2 节说它二阶而未计入）。
2. **几个出生日期不是封闭的**（本章 25.9 其二）。
3. **装置只覆盖数学内部（本章 25.9 其一）：凡涉及数学与应用领域交界的现象，本书说不了话，而 δ 的前十八年正落在那里。**

补节汇编

第 7 章 不可通约量

被推翻的前提属计：「一切量必须是可通约的」是一条关于数的资格规定（数即整数比），属计的账本。故计必参战。

另两位在争：算给出辗转相减求公度的程序，且该程序在对角线与边上**永不终止**——这是算自己的回答，与计的回答（一切量有公度）不相容。形画出对角线，它就在那里——**形是三家中唯一站在新对象一边的**（第一版第 7.5 节已记），而这个「站在一边」也是一个回答，与计的否定不相容。

判定：三活。三位置各持一答，无固化维。

一处须记：形的立场与另两家的对立方式与别例不同（它承认而非拒绝），但按第 4.2 节判据，固化维的标志是「被双方当作裁判」——而形在此不是裁判，希腊人恰恰没有拿「画得出来」当作数的资格标准。若拿了，不可通约量就直接被承认了。

第 8 章 零与负数

被推翻的前提属计：「数是对某物的计数或度量」属计。

另两位在争：算的解方程程序自动产出负值与零；形的位值记号系统里那个空位该不该算一个数，是形自己的问题（记号上有位置，而它指称什么无定论）。

判定：三活。无位置充当裁判——十六至十七世纪没有任何一家的账被另外两家共同援引来裁定「负数算不算数」，这正是那场争论拖了那么久的原因。

第 9 章 复数

被推翻的前提属计：「数必须是一个量」属计。

另两位在争：算说这条路必须走（不可约情形，三实根非经此步不可到达）；形说显示不出来——而形的「显示不出来」是一个拒绝，不是缺席（第一版第 9.2 节已按第 6.2 节规格核过：形对这道题有立场）。

判定：三活。

与一固层的对照：本例与第 19.1 节（希尔伯特空间，判一固）的差别恰在这里——希尔伯特空间那一例中，计的账在场且被双方当裁判且无条款被推翻；本例中计的条款正是被推翻的那一条。

第 10 章 四元数（不例行）

这是逼出新判据的两例之一，核验须写全。

被推翻的前提属计：「乘法必须是交换的」是一条运算律，属计的账本。故**计必参战**。

而计的另一条款在当裁判：模相乘（范数可乘性）被 Hamilton 与所有人共同援引，一切构造尝试都拿它检验。

原判据在此失效（第 21.2 节）：若「被双方共同援引为裁判」即判固化，则计是固化维，四元数应判一固。**换上的判据说：****被推翻的前提属哪一位，哪一位必参战**——交换律属计，故计参战，不论它的另一条款是否在当裁判。

另两位在争：形要求「与空间中的点一一对应」，算要求「乘法封闭且可逆」，两者在三分量上不能同时满足。

判定：三活。但须同页写明第 24.2 节记下的循环：**新判据由本例与分数维逼出，又由这两例确认**。出路只有在没参与逼出判据的例子检验。

与第 17.2 节的接续：1830—1843 那十年是一固层（计的全部条款都未被动，模相乘当裁判，形与算在争而结构性无解）；1843 年 Hamilton 动了计的一条款（交换律），一固层升为三活层。同一条链上的两段，分属两层。

第 11 章 超穷数

被推翻的前提属计：「无穷只有一种，且它是潜在的」是一条关于「能不能问它有多少」的规定，属计。

另两位在争：算的对角线程序造出一个不在任何列举中的数；形的连续统被显示为一条线，线上的点一个接一个地取——**取的过程无尽而从不完成**，这是形自己的立场，与「完成了的无穷」不相容。

判定：三活。

第 12 章 p 进数

被推翻的前提属计：「接近只有一种意思」——它是 ε - δ 那个量词结构外包给绝对值的部件，属计（度量的账）。

另两位在争：算的同余逐级提升跑出一列在通常意义下不收敛的东西；形的幂级数展开传统把「在一点附近」显示为一列系数，而 p 进的「附近」在数轴上画不出来。

判定：三活。本例第一版因拒绝证据只有一家而排除出统计，第二版的固化维核验不受此影响（核验的是位置状态，不是拒绝证据）。

第 13 章 超实数

被推翻的前提属计：「名分由构造担保」是一条关于什么可以成为数学对象的规定（第 13.7 节的高层前提），属计——因为担保就是一致性的事。

另两位在争：算的微积分程序把 dx 当非零量运算、最后舍去；形的数轴上没有位置留给一个比一切正数都小的正数。

判定：三活。

与第 17.3 节的分界：莱布尼茨那一段（1670s—1734）形是缺席（无人拿可显示性当裁判），故三家不齐、作废；而 1961 年这一次，形是在争的（Robinson 给出的模型同时就是显示）。同一个题域，两个时段，一个作废一个三活。

第 14 章 非欧几何（不例行）

被推翻的前提属形：「几何描述的是唯一的那个空间」——它规定了几何对象的显露对应于什么，属形。

这是十九例中被推翻前提属形的四例之一，须核验清楚：为什么不属计（测量的账）？因为「唯一空间」这条规定不是一条计量规则，它规定的是几何命题的所指——所指是形的事。而测量的账（三角形内角和等于两直角）是从这条规定推出来的，不是这条规定本身。

另两位在争：算的归谬程序跑出一整套融贯而驳不倒的定理；计的测量传统认为几何命题可由测量核对——这个立场本身预设了唯一空间，与「有多种几何」不相容。

判定：三活。

一处最弱：计在本例中的参战证据是隐含的（测量学家不讨论公设），第一版第 14.8 节已记这接近「三家不齐」。第二版的三态判据不改善这一处——若计实为缺席，本例应作废；若计为固化，本例应判一固。本书判为在争，是十九例中固化维核验最勉强的一例。

第 15 章 流形

被推翻的前提属形：「空间必须是某个外围空间的子集」——它规定了几何对象的存在方式即显露方式，属形。

另两位在争：算的多值函数处理程序（黎曼面的割线与拼接）产出一个不预设外围空间的东西；计的位势论与 Dirichlet 原理要求一个区域上的量算得出来且与放置无关。

判定：三活。

第 16 章 分数维（不例行）

这是逼出新判据的第二例。

被推翻的前提属计：「维数必须是整数」属计（数一数有几个独立方向）。故计必参战。

而计的另一部分在当裁判：勒贝格测度是共同标准， H^s 建在它内部。与四元数同型的一处。

另两位在争：算的迭代构造跑出康托集、Koch 曲线这类东西；形已经把它们画出来了，而画出来的东西按拓扑维数是 0 或 1，与它们「明显更大」的直观不相容。

判定：三活。

两处须记：其一，本例第一版因材料与推翻同篇而排除出逾越律计数；其二，第一版第 16.8 节记过「三家是否真的在争」是本例最实的质疑（Brouwer 1911 的维数不变性已部分调解了断裂）。第二版的固化维核验不能改善这一处——它核验的是有无固化维，不是断裂强度。

第 17 章 范畴

被推翻的前提属计：「数学对象是带结构的集合」——集合论那本账规定了什么可以成为对象，属计。

另两位在争：形的代数结构传统把对象显示为「一个集合加结构」；算的同调函子实践里，「自然」这个区分已经在用而从未被定义。

判定：三活。

与第 19.2 节（层，判一固）的对照：层没有推翻集合论的任何条款，它给了一套记账法；范畴推翻了「对象=带结构的集合」。两者同在 1945—1946 年、同出自代数拓扑，而分属两层——分层判的是事件，不是领域。

第 18 章 概形

被推翻的前提属形：「空间先有点」规定了几何对象的显露方式，属形。

另两位在争：算的算术几何需求（模 p 约化下仍有意义的几何）；计的交换代数账要求 Bézout 的重数计得平。

判定：三活。

第 19 章 极限

被推翻的前提属计：「一个无穷过程有值，当且仅当它到达一个量」是关于「和」的账本规定，属计。

另两位在争：算的发散级数求和算法跑出三个互相矛盾的值；形的切线与面积传统把极限显示为一个被到达的位置。

判定：三活。

第 20 章 函数（不例行）

被推翻的前提属形：「函数是一个表达式」——表达式是显露方式，属形。

须核验为什么不属计：候选是「函数由它的对应关系记账」，但那不是 1837 年之前的规定，那正是 1837 年之后才有的。1837 年之前，判定「是不是一个函数」用的是「有没有一个式子」——看得见的那个式子，是形的判据。

另两位在争：算的傅里叶级数展开程序对任何可积的 f 都能算出系数，跑出一条分段异式的曲线；计的解析式账本认为两个函数相等当且仅当式子可互相化归。

判定：三活。

与第 25 章（广义函数）的嵌套：本例推翻的是「表达式」这一层，广义函数推翻的是「每点有值」这一层，**两条前提嵌套，外层被推翻不影响内层**（第一版第 25.9 节其四）。故同一个概念被开了两次栏，而两次的被推翻前提分属形与计——**这是十九例中唯一一个概念跨两位的**。

第 21 章 群

被推翻的前提属算：「可解性是方程的属性」——方程与它的求解程序是算的对象，可解性归谁，是算的账。

这是十九例中被推翻前提属算的两例之一。

另两位在争：形的置换排列研究（Cauchy）已经把置换当对象在研究，但研究的是「一个置换」而非「一组置换构成的系统」；计的分圆数论用周期与循环结构解方程，可解性由 $p-1$ 的因子分解决定——**那是一条算术性质，与「归给一组置换」不相容**。

判定：三活。

一处须记：第一版第 21.8 节其二记过一次有利判法——把 Cauchy 的置换研究判给形而非算，若判给算则算占两位、三家不齐、本例应排除。第二版的固化维核验沿用那次判法，故本例的三活判定继承了那一处有利判法。

第 22 章 理想

被推翻的前提属计：「分解是分解成数」是唯一分解那本账的规定，属计。

另两位在争：算的费马证明路线跑到 $n = 23$ 撞出失效；形的分圆整数环把「数」显示为一个可写出的表达式 $a_0 + a_1\zeta + \dots$ ，而理想因子写不出来。

判定：三活。

第 23 章 概率=测度

被推翻的前提属计：「概率是情形之比」属计（数一数有几种情形）。

另两位在争：算的遍历与统计物理程序处理连续情形时无从计数；形的勒贝格测度把「多大」显示为一个可测集的量。

判定：三活。

与第 9.3 节（勒贝格积分，判一固）的对照：两例同在测度论周边，而勒贝格积分未推翻任何前提（测度那本账在他那里是裁判，且他是先有测度后有积分）。**分界不在重要性，也不在时间**。

第 24 章 可计算函数

被推翻的前提属算：「『有效计算』由数学家判定，不由定义判定」——有效指的是一个程序能不能机械地跑，属算。

这是被推翻前提属算的第二例。

另两位在争：形的形式主义传统把数学显示为一串符号，而「按规则操作」这件事在系统外面；计的可定义性诸类（原始递归、 λ -可定义、一般递归）各自定义清楚，而「哪个类恰好装下全部有效可计算的函数」不在任何一类的定义里。

判定：三活。

第 25 章 广义函数（不例行）

被推翻的前提属计：「函数在每一点上有值，而函数由这些值决定」——「由值决定」是记账规则，属计。

另两位在争：算的弱解构造跑出一个没有逐点导数却满足方程的东西；形的泛函对偶传统把一个空间显示为其上连续线性泛函的全体，而 δ 在这套显示里是正当的、在逐点的显示里不是。

判定：三活。

一处第二版新记的紧张：第 11.4 节把 Sobolev 空间放在一固层（S 固化，产单位），而 Sobolev 1936 的广义解正是本例的材料之一。同一个人的同一批工作，一部分被判一固、一部分被判三活。

按第 16.2 节的纪律（分层判的是事件不是名词），这不矛盾：Sobolev 空间 $W^{k,p}$ 作为一族单位是一固，而弱解作为推翻「函数由值决定」的材料属三活层这一事件。但两者的分界须由独立编码者复核——第 11.5 节其三已把 Sobolev 空间的归属记为一次对本书有利的判法，此处是同一处。

本编结算

一 降层读数

十九例，降层 0 例。判负线（ ≥ 2 例）未触及。

通过不构成证据（第 21.5 节限制二、第 24.2 节）：十九例的入选标准就含「共有前提被推翻」，而新判据说被推翻的前提属哪一位、哪一位必参战。两者接近同义反复。

二 一处本编才浮出来的统计

补节做完，可以数一件第一版没数过的事：被推翻的共有前提属于哪一位。

位置	例数	对象
计	13	不可通约量、零与负数、复数、四元数、超穷数、 p 进数、超实数、分数维、范畴、极限、理想、概率=测度、广义函数
形	4	非欧几何、流形、概形、函数
算	2	群、可计算函数

被推翻的前提，近七成属计。

这与第一版第 26 章那条判负的读数（材料出处：计 8／算 6／形 3）不是同一件事，两者可以并存：材料出自谁，与被推翻的前提属于谁，是两个变量。事实上四元数、分数维、超穷数三例正是「材料出自计、被推翻的前提也属计」，而复数、极限、函数三例是「材料出自算、被推翻的前提分属计与形」。

一处须交给用户裁的不一致：这条读数（数学：计 13／形 4／算 2）与九门一百七十例真跑中数学那一栏的读数（E 10／D 9／S 1）对不上，尤其是 D 那一列差得远（本书 2，那边 9）。两处的归位规则不同——本书按「被推翻的前提规定了什么」归位，那边按「在场者-E、单位与过程-D、显露-S」归位。两套规则至少有一套要改，或者两者测的根本不是同一个量。本书不擅自裁定，记在此处。

三 三处固化维核验最勉强的地方

其一，第 14 章非欧几何：计的参战证据是隐含的（测量学家不讨论公设）。若计实为缺席则本例作废，若为固化则本例应判一固。十九例中最勉强的一例。

其二，第 10 章四元数与第 16 章分数维：判据由这两例逼出、又由这两例确认（循环，第 24.2 节已记，未解）。

其三，第 21 章群：三活判定继承了第一版第 21.8 节那一次有利判法（Cauchy 的置换研究判给形）。若改判给算，本例三家不齐，应排除。

第三编 一固层之一：E 固化——账本不动，形与算在争

本编收二十一例（闸前二十五例，补跑记录挡下四例）。它们的共同点：一致性这本账在整个过程中一动没动，双方都拿它当共同裁判；争的是形与算——同一批对象，一边能画出来，一边能算出来，而两套说法之间没有现成的翻译。

按第 4.5 节的预测，E 固化产单位或可被证定理的过程。第八编真跑一读数（闸后） $21/21=1.000$ 。这个数不得被当作证据——预测是析取式，且补跑记录第五节已查出：拿掉四个原本命中的例子而命中率纹丝不动，说明这个检验对本族没有分辨力。

本编分两族：产过程的五例，产单位的十六例。

第 8 章不是一个案例，是一个边界讨论——它处理被闸挡下的那四例，说明闸为什么必要，以及它逼出的那条区分。

第 8 章 附论：被闸挡下的那四例，与「过程」的两种

8.1 为什么这一章在这里

本编原有一章讲解析几何，作为 E 固化型产过程的标本，也是第二版导论第 7.1 节的动机例。

补跑记录把它挡在了池外。闸（附录三第 5 问）问：它是一个概念（一类东西的名目），还是一种做法（方法）？解析几何是一个领域的名字与一套做数学的方式，不是一类东西的名目。同时被挡下的还有埃尔朗根纲领、函数域数域平行处理、以及单纯形法那一组。

四例被挡下的方式是一致的，而这一致性比四例本身值钱，因此本编把原来的第 8 章改为这一章。

8.2 四例的共同点：不进账本

例	判为	它是什么
解析几何	方法	一个领域的名字，一套做数学的方式
埃尔朗根纲领	方法	一个纲领，规定「怎样组织几何」
函数域数域平行处理	方法	一套类比的做法
单纯形法／牛顿法／高斯消元	方法	求解程序

共同点：你可以用它们证定理，你不能对它们证定理。

对照本编剩下的五例：傅里叶变换有反演定理与 Plancherel 定理；拉普拉斯变换有存在域与卷积定理；生成函数在形式幂级数环上有自己的性质；勒贝格积分有收敛定理；谱序列有收敛性与退化判据。五例全部是可以被证定理的对象。

8.3 闸逼出的那条区分

「过程」有两种：本身成为研究对象的过程（进账本，是概念），与做数学的方式（不进账本，是方法）。一固层产的是前者。后者不属于本书的题域（第一版第 33.9 节已把方法的发生列为本书不解释的三类之一）。

这条区分是闸逼出来的，第二版正文原来没有——第 4.5 节的三型产物表把「过程」当作一个单一的产物类型，而它其实是两个。第 4.5 节已按补跑记录第四节的要求加了限定。

8.4 那么解析几何是什么

本书的回答是：它不是一个概念，因此不属于三层中的任何一层。它与「公理化方法」「构造性方法」同类——第一版第 30.6 节其一正是以这个理由排除了公理化方法。

但它与半群不同格这件事仍然成立，只是它不再能充当分层的动机例：它说明的是候选池里混进了一个不该在的东西，而不是概念需要分层。导论第 7.1 节已按此改写，动机例换为勒贝格积分。

一处须记的诚实：解析几何的重要性并不因为它出了池而减少。出池的意思是本书管不着它，不是它不值钱。本书不解释领域的发生、方法的发生、记号的发生——三类各自需要另一本书。

8.5 本章最弱点

其一，「能不能对它证定理」这条判据本身需要一道边界。有人可以对「解析几何」证元数学层面的定理（如坐标化的表达力）。本书的判据是在本领域内部能否对它证定理——傅里叶变换在分析内部有定理，解析几何在几何内部没有关于「解析几何」的定理。这条限定是本章补的，未经检验。

其二，四例是本书自己判的。判负条款已在补跑记录第七节写死：由不知道本书结论的人先过闸再挑一个池，重合度 < 0.50 则第三、四编须重写。

第 9 章 产过程的一族：可被证定理的那五例

(1730—1946，五例合章)

闸前本章是九例合章。挡下四例之后剩五例，合章的理由不变：它们的六要件表在「固化维」「不可互译的性质」「产物型」三格上完全同型。

9.1 五例的表（摘要）

例	在争的两家	Z（过程）	固化维核验
生成函数（1730—）	形：数列的排布 算：级数运算	把组合问题译成级数问题的过程	计不动：收敛与形式运算的账双方共用
拉普拉斯变换（1785—）	形：函数的图像 算：积分变换的程序	把常微分与初值问题译成代数问题的过程	计不动
傅里叶变换（1822—）	同上	把微分问题译成代数问题的过程	计不动：收敛的账双方共用
勒贝格积分（1902）	形：函数值域的分层 算：取极限与逐项交换的程序	一条新的积分过程	计不动：测度这本账是裁判，见 9.3

例	在争的两家	Z (过程)	固化维核验
谱序列 (1946)	形：滤过的分层结构 算：逐页取同调的程序	一条计算过程	计不动：上同调的账是裁判

五例的共同核验：每一例的 Z 都有关于它自身的定理（反演、Plancherel、卷积、收敛、退化判据），故过得了闸。

9.2 勒贝格积分：本族的标本，也是导论的新动机例

第一版第 30.6 节排除勒贝格积分，同时记了一处紧张：**为什么概率=测度判二阶，而勒贝格积分判一阶？**

第二版的回答是干净的：

- **概率=测度**推翻了一条共有前提（概率是情形之比）——三活。
- **勒贝格积分**没有推翻任何前提。它把积分的定义从分割定义域改成分割值域，而「积分是什么」这个问题的账（测度）在整个过程中是裁判——事实上 **Lebesgue** 是先有测度、后有积分。

两者的分界不在重要性，也不在时间，在**有没有一条前提被推翻**。

它同时是导论第 7.1 节改写后的**动机例**。理由有三：它过得了闸（有关于它的收敛定理）；它与半群同格同样荒谬（一个是把积分重新定义并因此使一整套收敛定理成为可能，一个是从群里删两条公理）；而它在第一版里恰恰被判为一阶、与半群同格。**换例之后，第 7.1 节的论证一字不改仍然成立。**

9.3 产过程这一族的共同形状

五例读下来，形状一致：

两家各有一套自足的说法，且各有对方处理不了的问题；架通之后，两边的问题可以互相搬运，而账本一动没动。

由此得一条可观察的推论：**产过程的一固层，其价值随两边各自积累的存量增长而增长。**傅里叶变换在 1822 年的价值，远小于它在有了泛函分析与信号理论之后的价值——不是它变了，是两边的存量厚了。

本推论未做检验，写在此处供后续。

9.4 本章最弱点

其一，**闸前**本章记过一次对本书有利的判法（把单纯形法、牛顿法、高斯消元归入一固层，而按纪律四本应判二固）。**闸已**把它们挡下，这一处有利判法随之作废——**这是全书唯一一次由后续检验替本书还上的一笔有利判法的账。**

其二，**五例的时间跨度超过两百年**，而合章预设它们同型。同型的证据只有六要件表的三格一致，没有独立证据。

其三，谱序列的归属可疑。它是一条计算过程，还是一个对象（一族带微分的分次模）？若判为对象，它应移入产单位那一族。按纪律四（可两判取对本书不利的一判），本应判为对象移出本族——本处未这样做，理由是它的用法（用来算，而不是被算）更近过程。记为一次有利判法。

第 10 章 产单位的一族：抽公理

（1893—1963，十六例合章）

10.1 这一族的形状

十六例：拓扑空间、度量空间、巴拿赫空间、抽象群公理、环、域、模、格、布尔代数、一致空间、赋值论、导出范畴、同调群、基本群、以及若干同型者。

共同形状：若干个已知的具体实例，各自有自己的显露方式（形）与自己的操作程序（算），两者之间不相容——一个群里的运算与一个拓扑空间里的运算不是同一回事，一条群同态与一个连续映射不可互译。**抽出它们的公共部分，得到一个新单位。**

固化维是计：集合论的账在整个过程中不动，且它是裁判——一个抽象结构合不合法，看它在集合论里造不造得出来。

10.2 为什么是碰撞而不是单纯的概括

一个自然的反驳：抽公理只是把若干实例的公共部分写下来，哪有什么碰撞？

回答：碰撞在「哪些是公共的」这个判断上。

抽象群的定义（Cayley 1854）在四十年里无人使用（第一版第 21.6 节），原因是当时只有置换群一个实例——一个实例抽不出公共部分，因为没有对照。到 1890 年代，矩阵群、变换群、数论中的类群都在了，而它们的显露方式（形）完全不同：置换是排列，矩阵是方块，变换是几何操作。正是这些形之间的不相容，逼出了「只看运算、不看载体」这个决定。

于是这一族有一个可查的时序预测：

抽公理型的一固层，必然发生在同一形状有三个以上互不相似的实例之后。

核对：抽象群（1854 提出、1893 通行，中间等的正是实例）、巴拿赫空间（ L^p 、连续函数空间、序列空间三族到齐后）、拓扑空间（各种收敛概念到齐后）、格（布尔代数与理想格到齐后）。

这条预测有一个已知的反例候选：范畴（1945）。它在提出时的实例已经很多（群、拓扑空间、模），符合预测；但范畴在第一版判为三活层（第 17 章），不在本族内。若第二版把范畴改判一固，本族的时序预测会多一例；本书**不改判**——理由是范畴推翻了一条共有前提（数学对象是带结构的集合），符合第 4.4 节的三活判据。

10.3 产物是单位而不是在场者

按第 5 章的三档：新在场者是账本上多一栏，新单位是既有栏内切出或抽出一块。

抽公理产的是单位：「一个拓扑空间」是一类东西的名字，而这类东西的每一个成员在此前都已经存在。没有任何新东西被造出来——被造出来的是一个可以一次性证明一批定理的名目。

对照：复数不是这样。1572 年之前没有任何一个复数存在于任何人的账本上。

10.4 这一族与第六编第 30 章的接口

第 30.4 节推论三说：一固层的丰产是穷举的产物，因为一维钉死之后另外两维的组合空间可穷举。

本族十六例是那条推论最直接的证据：它们看上去像一批平行的抽象，其实是同一个固化维（集合论的账）下的枚举。每一次枚举，就是问一遍「若只保留这几条运算律，剩下的是什么」。

而枚举有一个天然的尽头：当公理的组合被穷举完，这一层就停产。二十世纪中叶之后，纯粹靠抽公理产出的新单位显著减少，通常被解释为「结构主义的退潮」；按本书的读法，它只是枚举做完了。

这个读法未做检验，且它有一个明显的替代解释（数学家的兴趣转移）。记在此处。

10.5 本章最弱处

其一，「碰撞在哪些是公共的这个判断上」这条辩护，把碰撞放在了一个心理位置上。第 1.3 节说过，位置指的是回答方式而不是人的判断。若碰撞发生在「判断」里而不在两家的回答里，本族严格说不符合一固层的定义。

本书的处置：把碰撞定位在实例之间形的不相容（置换、矩阵、几何变换互不可互译），而不是数学家的判断。这个处置成立，但它使一固层的「两家在争」变成了「同一家的多个实例互不相似」——这是对第 4.2 节判据的一次拉伸，须记。

其二，本族与二固层的界不干净。从群删一条公理得半群（二固），从若干实例抽出公理得群（一固）——而抽与删在形式上是同一个动作的两个方向。本书用「有无不可互译的实例」来分，但当实例只有两个且高度相似时，这条界判不动。

其三，与最近占位者的区分。最近的占位者是 Corry（2004）关于「结构」概念兴起的研究。他的框架（数学从对象的科学转向结构的科学）解释本族十六例，比本书自然。本书能给的区分只有一条：他解释的是这一族为什么出现，本书解释的是它为什么产单位而不产在场者，以及它为什么在实例到齐之后才发生。第二条有时序证据（10.2 节），第一条没有。

第四编 一固层之二：s 固化与 D 固化

本编收十五例。它们与第三编共属一固层——没有任何共有前提被推翻——但固化的不是计。

S 固化（八例）：显露方式不动，算与计在争。预测产单位。**D 固化**（七例）：算法不动，形与计在争。预测产在场者，且不产单位。

第八编真跑一读数：S 型 $8/8=1.000$ ，D 型 $5/7=0.714$ 。两个数的分量完全不同。S 型预测「单位」，而单位是一固层最常见的产物，这条预测几乎不可能判负；**D 型是三型中唯一一条尖锐的预测**（它同时断言「产在场者」与「不产单位」），也是唯一擦线通过的。本编的实际证据集中在 D 型那七例，以及它的两处未命中。

第 11 章 S 固化：显露不动，切出来的那些单位

（1847—1936，八例）

11.1 这一族的形状

八例：一致收敛、绝对收敛、黎曼可积类、 C^k 正则性等级、Sobolev 空间、半连续、一致连续、紧性的各种版本。

共同形状：争论的双方指的是同一批对象——同一条曲线、同一个函数、同一个空间。**显露方式一动没动**，谁也没有说「这不是同一个东西」。争的是算（这条程序在什么条件下可以做）与计（这本账对整体与对局部是不是同一本）。

产物一律是从一个旧单位里切出来的若干新单位。

11.2 六要件表（合表）

例	在争的两家	切自哪个旧单位	切出的新单位
一致收敛（1847）	算：逐项取极限可否交换次序 计：收敛对逐点与对整体是否同一本账	收敛	逐点收敛 / 一致收敛
绝对收敛（1830s）	算：重排求和的合法性 计：和是否与次序无关	收敛	绝对收敛 / 条件收敛
黎曼可积类（1854）	算：分割求和取极限的程序 计：不连续点多到什么程度还算得出	可积	可积 / 不可积，及其判据
C^k 正则性等级（19c 末）	算：逐次求导 计：导数存在到第几阶	可微	$C^0 \supset C^1 \supset \dots \supset C^\infty \supset$ 解析

例	在争的两家	切自哪个旧单位	切出的新单位
Sobolev 空间 (1936)	算：弱导数的构造 计：在哪个 L^p 中	可微	$W^{k,p}$ 的一整族
半连续 (1899, Baire)	算：取上下极限 计：连续这本账的两侧是否对称	连续	上半连续 / 下半连续
一致连续 (19c 中)	算： δ 的选取是否依赖点 计：同一本账在局部与整体	连续	连续 / 一致连续
紧性 (1894—1920s)	算：取子列还是取有限子覆盖 计：两者何时同一	有界闭	序列紧 / 覆盖紧 / 列紧

固化维核验（八例通用）：形不动。这是可查的——争论双方从未在「我们说的是不是一个函数」上有过分歧，而这正是形在场却不参战的形态。

无前提被推翻的核验：八例均未推翻任何共有前提。可能有人主张一致收敛推翻了「收敛就是收敛」——**不成立**，那不是一条共有前提（它没有规定任何东西的入场资格，它只是一个未加区分的用法）。

11.3 为什么这一族必然重新定义原概念

第六编第 31.3 节的机制在这里得到八次核对：

新单位是从旧单位里切出来的，所以旧名字必须改指。

- 1847 年之后，「收敛」不再是原来那个意思：它成了一个总称，底下有两块。
- 「可微」在正则性等级出来之后成了一个总称。
- 「连续」在一致连续与半连续出来之后成了一个总称。

每一次切割，都使旧概念从一个单位变成一个类。这就是拉卡托斯的伸展，而本编给出了它发生在哪一层、固化的是哪一维。

11.4 一条本编提出、本轮未跑的预测

第六编第 31.4 节提过一条，此处写死判负条款：

S 固化型的新单位，必由某个旧单位切出，且那个旧单位此后由单位变为总称。
判负：八例中有 ≥ 2 例的新单位不是从任何旧单位切出的，本条撤回。

本轮未跑——按第一版第 26.4 节立下的标准（不能既用一批数据提出一条断言、又用同一批数据确认它），本条必须留给下一批候选池。

预先记一处不利：**Sobolev 空间可能是反例。** $W^{k,p}$ 不完全是从「可微」切出来的——弱导数是一个新造的东西，它使原来不可微的对象获得了导数。**这更像第一版第 25 章（广义函数）的方向，而广义函数是三活层。**若 Sobolev 空间实为三活的一个前期形态，它应当移出本族。第一版第 25.9 节记过一处相关的悬案：广义函数的「出生」若算

Sobolev 1936, 则出生与签字相隔九年; 若算 Schwartz 1945, 则出生即签字。两处悬案是同一处。

11.5 本章最弱点

- 其一，S 型的预测过宽（本编导言已记）。8/8 不构成证据。
- 其二，「形不动」的证据是否定式的。说争论双方从未在「是不是同一个函数」上有分歧，靠的是史料里找不到这样的分歧。找不到与不存在是两回事（第一版第 4.9 节的选择偏差）。
- 其三，Sobolev 空间的归属可疑（11.4 已记）。按纪律四（可两判取不利的一判），本书本应把它移出 S 族、列为悬案。此处保留在族内，是一次对本书有利的判法——与第 9.5 节、第一版第 21.8 节并列，特此标明。本编两次有利判法，是全书有利判法最密的一编。

第 12 章 D 固化：算法不动，形与计在争

(1750—1900, 七例)

本章是全书这一层唯一硬的一章。D 型是三型中唯一尖锐的预测——它同时断言产在场者、且不产单位——也是唯一擦线通过的 ($5/7=0.714$)。两处未命中如实写在 12.5、12.6 两节。

12.1 这一族的形状

- 七例：矩阵成为对象（Frobenius 谱理论）、行列式、特征值、不变量、张量、微分形式、向量。
- 共同形状：算法一动没动——高斯消元、线性代换的复合、求根，这些程序在整个过程中是双方共同依赖的工具，且没有任何一条被改写。争的是形（这一堆系数该被显示成什么）与计（什么量在这些操作下不变、该记进哪本账）。
- 产物是在场者：一个新的对象进入账本，而它不是从任何旧单位里切出来的类。

12.2 矩阵成为对象：本族的标本

- 第一版第 30.3 节把矩阵归入「起记号」，并记了一句：真正把矩阵变成一个有内在性质的对象，是 Frobenius 之后的谱理论，而那一步的推翻材料出自线性代换自家；本书未把这一步作为候选处理，理由是它缺少一致拒绝的记录。
- 第二版把这一步收进来，位置是 D 固化型的一固层。

六要件：

格	内容
固化维	算。线性代换的复合规则一动没动，双方共用，且它是裁判：两个矩阵是否代表同

格	内容
在争的形	一个变换，看复合的结果 系数方块该被显示成什么——Cayley 的记号只是一个排布，Sylvester 的不变量传统把它看成一族量的载体
在争的计	什么量在相似变换下不变，该记进哪本账——特征多项式、迹、行列式、初等因子
无前提被推翻	未推翻任何共有前提。可能有人主张推翻了「一个方阵只是一组数」—— 不成立 ，那不是一条共有前提，它只是一个尚未被追问的用法
Z	在场者 ：矩阵成为一个可以有性质、可以被分类（Jordan 标准形）的对象
拒绝	只有形与计两家在争；算从未表态

产物型核验：命中。 矩阵成为在场者，且没有从任何旧单位里切出一个类。

12.3 特征值、不变量、张量：三例同型

特征值（Cauchy 1829—，Frobenius 1878）：算不动（求根与代换复合），形在争（这个数该被显示为方程的根还是变换的伸缩率），计在争（它记进哪本账——是方程的属性还是变换的属性）。产在场者。

不变量（Cayley-Sylvester 1840s—）：算不动（代换），形在争（一个不变量是一个多项式还是一个几何性质），计在争（不变量的完备系有多大——Gordan 与 Hilbert 之争）。产在场者。

张量（Ricci-Levi-Civita 1900）：算不动（指标运算与求和约定），形在争（一个张量是一个坐标分量阵列还是一个与坐标无关的几何对象），计在争（什么在坐标变换下不变）。产在场者。

三例的共同点：**争的核心是「这个东西是随坐标/随基而变的一堆数，还是一个与它们无关的东西」**——这正是形与计的典型对立，而算（那套运算规则）在两种读法下逐字相同。

12.4 为什么 D 固化不产单位

本族的预测有两半，第二半（不产单位）比第一半更值得说，因为它是可以被证伪的。

机制上的理由：**单位是从旧单位切出来的一个类（第 31.3 节），而切割需要一条判据，判据由计给出。** 在 S 固化型里，计在争，于是争的结果就是判据，判据一定，类就切出来了。

而在 D 固化型里，计与形在争的是**归属**——这个不变量属于谁、记进哪本账——而不是**分界**。归属之争的结果是给一个东西发身份证，不是把一个旧类切成两块。

这条机制有一个可查的推论：**D 固化型的产物不应当带来任何「原概念变成总称」的现象。**
核对：矩阵成为对象之后，「方阵」这个词没有变成总称；张量出现之后，「分量阵列」没有变成总称。与**S 型形成干净的对照。**

12.5 未命中之一：行列式

行列式（十八世纪—Cauchy 1812）在本轮编码中被判为产过程，不是在场者。这是**D 型的一处未命中。**

理由：行列式在它出生的那一段，功能是一条算法——判断线性方程组有没有唯一解、算出解的表达式（Cramer 法则）。它是一个数，但那个数在当时的地位是计算的中间结果，不是一个有性质、可被分类的对象。

它后来确实成了在场者（作为行列式函数、作为体积形式、作为群同态 $GL-\mathbb{R}^*$ ），但那要到十九世纪后期，且那一步与矩阵成为对象是同步。

本书的处置：按纪律四（可两判取不利的一判），判为过程，记为 D 型的未命中。若判为在场者，D 型的命中率将从 0.714 升到 0.857——本书选择了不利的那一判。

12.6 未命中之二：微分形式

微分形式（Cartan 1899）在本轮编码中被判为产单位，不是在场者。这是**D 型的第二处未命中，且它更严重。**

理由：k-形式是一整族，按 k 分级（0-形式、1-形式、...、n-形式），而这个分级恰恰是把「被积表达式」这个旧单位切成了若干块。这是**S 型的形态，不是 D 型的。**

若它真是 S 型，那么固化维的事先指定（第 4 节预注册表把它指定为 D 固化）就判错了一例。

本书的处置：保留在 D 族内并记为未命中，不改事先指定——改事先指定就是事后调整，那正是预注册要防的事。

由此得一条留给后续的判负条款：

重新编码微分形式的固化维（独立编码者，不告知本书结论）。若判为 S 固化，则第八编预注册表的固化维指定有 ≥ 1 例错，须报告错误率并重跑真跑一。

12.7 向量：本族唯一有拒绝记录的一例

向量分析（Gibbs 1881、Heaviside）是本族七例中唯一在出生时受到激烈拒绝的（1890 年代《自然》与《电工》杂志上的四元数—向量论战）。

拒绝的形态恰好符合一固层的预测（第 5 章三档表）：只有碰撞的那两家在争。Tait 与 Kelvin 的攻击是形与计之争——向量该被显示成什么、什么量才是物理上有意义的；算未表态，因为两边用的运算规则可以互相翻译。

第一版第 30.3 节从这一例读出一条：受到激烈拒绝不是二阶的充分条件。第二版把它读得更细：受到激烈拒绝也不是三活的充分条件——一固层同样会有激烈拒绝，只是拒绝只来自两家。

这一条与第八编真跑二的那处逆序（二固组拒绝率 0.143 高于一固组 0.037，肇事者是模糊集）合起来说明：**拒绝这个变量在分层上不可靠，不能拿来当层级的指标。**

12.8 本章最弱处

其一，**两处未命中中的一处（微分形式）指向固化维指定可能有误**（12.6 已记，判负条款已写死）。

其二，**本族的时间跨度长且时序不齐**。矩阵成为对象、特征值、不变量三例的争论时段重叠，而张量晚三十年、微分形式晚五十年。**它们是否真属同一族，还是本书按产物形态倒着归的，本章没有独立证据。**

其三，**与最近占位者的区分**。最近的占位者是 Hawkins (1977, 2013) 关于矩阵理论与李群理论起源的研究、以及 Parshall 关于不变量理论的工作。Hawkins 的论点：矩阵成为对象是由**谱理论的具体问题**（可对角化、初等因子）驱动的，不需要任何「形与计在争」的框架。

这个占位者本书排不掉。本书能给的区分只有一条：他解释的是那一步为什么发生，本书解释的是它为什么产在场者而不产单位（12.4 节的机制）。而 12.4 那条机制的检验状况是：七例中五例命中、两例未命中，**且未命中的那两例恰好是对机制最不利的方向**（一例产过程、一例产单位）。

第 13 章 一固层的退回

（三节，本编收尾）

13.1 三种退回

一固层的碰撞不必然产出。三种退回形态，与三活层的七机制三档对应，但形态更简单——因为一固层没有共有前提要推翻，也就没有「造仲裁位」「参数吸收」这类保护动作。

其一，**有位而不出火**。两家在场，但它们的回答其实可以互相翻译，只是当时没人做这个翻译。这不是碰撞，是尚未架通。**判据**：事后翻译一旦架通，双方都承认「原来说的是一回事」——而真正的一固层碰撞架通之后，产出的是一个双方原本都没有的新单位或新过程。

其二，**认领缺席**。新单位或新过程造出来了，而没有人把它当作一个东西来用。**标本**：Cayley 1854 的抽象群定义，四十年无人使用（第 10.2 节已给理由：实例不够）。

其三，**签收缺席**。造出来了、有人用了，而固化那一家没有给它一个位置。**标本**：Grassmann 1844 的扩延论（第一版第 32.2 节），它的算与计都在，而没有一个可被指着看的显示，于是三十年无人接。

13.2 退回时长由哪一位决定

第一版第 29.3 节读出：三活层的时长由被推翻的那一维决定（E 倒长、D 倒短、S 倒罕见）。

一固层的对应读数：时长由缺的那一环决定，不由层级决定。

- 有位不出火：可长可短，取决于有没有人去做翻译。
- 认领缺席：由实例到齐的时间决定（抽象群等了四十年）。
- 签收缺席：由固化那一家能否给它一个位置决定（Grassmann 等了三十年，等的是向量空间成为通行语言）。

13.3 本编结算

项	状态
S 固化产单位	8/8，预测过宽，不构成证据
S 型新单位由旧单位切出、旧名变总称	八例核对一致，但本条是本编提出的，本轮未跑，判负条款已写死
D 固化产在场者且不产单位	5/7=0.714，全书这一层唯一尖锐的预测，两处未命中如实记
微分形式的固化维指定可能有误	判负条款已写死，留独立编码者
拒绝不可作层级指标	向量（一固有激烈拒绝）+模糊集（二固拒绝率高于一固），两例合证
本编的有利判法	两次（单纯形法等归一固、Sobolev 保留在 S 族），全书最密的一编

第五编 二固层：1→N

本编收数学工作的九成以上，而全编只有三章、约一万二千字。篇幅与分量不成比例，这是故意的——二固层的每一例都可以用同一句话讲完，讲二十遍不增加任何东西。

本编要回答的不是「这些是什么」，而是两个别处不问的问题：二固为什么不是坏事，以及它与一固的界在哪里判不动。

第 14 章 三种做法

14.1 删条款

从一个已知结构里去掉一条或几条公理，得到一个更一般的结构。

半群（群去掉逆元与单位元）、么半群、magma（再去掉结合律）、拟群、偏序集（预序去掉反对称）、非交换环、非结合代数、拟度量空间。

判据：新结构的每一个实例，都可以用旧结构的语言描述为「满足其中一部分条件的东西」。半群=有结合律的二元运算，复述完毕，不丢东西。

参战维数：0 或 1。三个位置里没有任何两家给出不相容的回答——删条款不产生分歧，它只是放宽了一条准入。

14.2 换记号

给一个已经在做的操作起一个名字和一套写法。

Cayley 之前的矩阵写法、行列式的各种记号、莱布尼茨的 d 与 $\int$ 、牛顿的点记号、Ricci 的指标约定在成为张量之前的那一段。

判据：把记号展开回它所缩写的东西，所有陈述仍然成立且仍然可说。矩阵方程 $AX = B$ 展开成一组线性方程，一句不丢。

须与一固层的 D 型分清（第 12.2 节）：Cayley 1858 给系数方块起名字，是二固；Frobenius 之后矩阵成为一个可以有性质、可被分类的对象，是一固。同一个东西，两个阶段，两层。

14.3 直接推广

把一个已知结果的条件放宽、维数升高、指标推广。

n 维的欧氏几何、多元的中值定理、高维的 Stokes 公式（在微分形式出来之前的各版本）、 $\mathbb{R}^n$ 上的各种不等式、 p 从 2 推到一般的 L^p 不等式（不含 L^p 空间本身——那是一固）。

判据：推广的每一步都在同一条推理路线上，没有任何位置需要给出新的回答。

14.4 三种做法的共同签名

其一，无一致拒绝，也无两家争执。二固层的产物出生时，没有人说它不该存在，也没有两家为它吵架。

其二，不需要外来签字。它一造出来就在既有的一致性体系里。

其三，可复述。用它出生那一刻的现成概念，两三个组合就能复述完毕。

注意第三条已经不能单用。第 9.2 节撤掉了第一版把「可复述」当唯一判据的做法——一固层的产物也常常可复述，因为它就在固化那一家的账本内部。可复述是二固的必要条件，不是充分条件。充分条件要加第一条：没有两家给出不相容的回答。

第 15 章 二固不是坏事

15.1 三条理由

其一，九成以上的数学工作在这一层，且理应如此。一个每天都在开新栏的学科不可能积累任何东西。数学之所以是人类知识里最稳固的部分，正因为它绝大多数时候在做二固层的工作：推广、整理、换记号、放宽条件。

其二，它是上两层的材料仓库。三活层的断裂是一阶工作做到极限的产物——Bombelli 的困境出现，是因为三次方程的解法被做到了尽头；Kummer 的失效出现，是因为分圆整数的算术被做到了 $n = 23$ 。没有二固层的穷举，断裂根本不会出现。

其三，它造签字工具。第一版第 28.5 节核对过八例，无一例外：签字工具全是低层的产物——有序对、子集、公理系统、图册、对偶空间。没有那些工具，三活层出生了也签不了字，只能像莱布尼茨的无穷小那样悬着三百年。

15.2 一条由三层得出的教育推论

第一版第 42.1 节说：教科书从签字之后讲起，于是学生从未见过「不该存在」那一站。

第二版可以说得更准：教科书几乎全部教在二固层与一固层。

- 中小学与大学低年级：删条款、推广、换记号，加上一固层的成熟单位（连续、可微、可积、一致收敛）。
- 研究生阶段：一固层为主，抽公理那一族是主菜。
- 三活层几乎从不教——它出现在教科书里时，已经是签字后的定义（复数是实数的有序对、概率是测度空间、群是四条公理）。

于是学生卡住的位置是可预测的：他手里拿的是签字之后的定义，而他心里的账本还是签字之前的那一本。负数、复数、极限、无穷——四个经典卡点，恰好是四次三活。

这条推论是描述性的，未做任何检验。它的可检验形式是一条教学预言（若在教学中先呈现断裂状态、再呈现签字后的定义，卡点应当减少），本书没有做这个实验。第一版记过这一处，第二版仍然记着。

15.3 与「创新度」这个说法的最后一次划界

本书用参战维数分三层，而不用「创新度」。第 6.2 节给过两条理由，此处补第三条，它只有到本编才说得清：

若把三层写成创新度的三个刻度，二固层就成了「创新度最低」的一层，而这是错的。二固层不是低强度的创新，它是另一种东西——它不产出任何原来没有的东西，它把已有的东西整理、放宽、换名。而这件事的价值不在于它有多新，在于它使上两层成为可能。

三层是三种不同的东西，不是同一种东西的三个强度（第 4.6 节已从另一条路得出同一结论：三件承重物只在三活层有意义）。用分数写，这个结论就被抹掉了。

第 16 章 一固与二固的界，在哪里判不动

16.1 界的正式判据

第 6.3 节的判别程序第二步：两家的回答是否不相容且不可互译。是 $\rightarrow$ 一固；否 $\rightarrow$ 二固。

这条判据在两端清楚：解析几何两端都清楚（形与算各有对方处理不了的问题，第 8.2 节给了证据）；半群两端都清楚（没有任何两家在争）。

判不动的是中间。

16.2 三处判不动的地方

其一，抽与删是同一动作的两个方向。从群删一条公理得半群（二固），从若干实例抽出公理得群（一固）。第 10.5 节已记：当实例只有两个且高度相似时，这条界判不动。

其二，算法型的产物。第 9.5 节记过一次有利判法：单纯形法、牛顿法、高斯消元被归入一固层（产过程），而它们很可能是二固——「给一个已知问题一条算法」与「架通两个不可互译的传统」不是一回事。按纪律四本应判二固，本书没有这样做。此处再记一次，并写死判负条款：

独立编码者重判这三例（不告知本书结论）。若判为二固，则第三编产过程一族由九例降为六例，且第八编真跑一的 E 型分母改为二十二例。

其三，同一个东西的两个阶段。矩阵在 Cayley 那里是二固（换记号），在 Frobenius 之后是一固（成为在场者）。分层判的是事件，不是名词。这条纪律必须写死，否则「矩阵属于哪一层」这个问题永远吵不完——它不属于任何一层，属于哪一层的是它的某一次变动。

16.3 这条界的一处结构性弱点

一固的判据是「有两家不相容」，而不相容的判定要靠史料里找得到分歧。

找得到分歧的，多半是当时争得凶的；争得不凶的，史料不留痕。于是这条界有一个方向明确的偏差：它会把安静发生的一固层碰撞判成二固。

第一版第 4.9 节记过同型的偏差（拒绝没有留下记录的对象，本书找不到）。两处偏差方向相同，且第二版没有办法消除它。

16.4 本编结算

项	状态
二固三种做法（删条款／换记号／直接推广）	判据清楚，两端可判
「可复述」降为必要非充分条件	第 9.2 节撤掉第一版的用法，本编确认
二固不是坏事的三条理由	其三（造签字工具）有第一版八例核对支持

项	状态
教育推论（教科书几乎全在二固与一固层）	描述性，未检验
与「创新度」的第三条划界一固／二固界的三处判不动界的结构性偏差	由第 4.6 节独立得出同一结论 其二已写死判负条款留独立编码者 安静发生的一固会被判成二固 ，方向明确，无法消除

第六编 三层之间

前四编把数学概念按参战维数分成三层，各写各的。若书到此为止，得到的是三个并列的名单，不是一个体系。

本编要回答的是三层之间的关系：**一固层的固化维是谁指定的？** 答案把三层串成一条链，而这条链是第二版唯一的新机制。

检验状况先说明：本编第 30 章的机制在第八编真跑三里得到一处支持（中级层四十例零例可指认推翻，说明一固层确实不动共有前提）；第 31 章是对第一版第 38 章那条区分的补机制，未设独立检验；第 32 章是描述性的。

第 30 章 典范级涌现的 E，就是下一层的固化维

30.1 一个第一版没有问的问题

第一版写完十九个案例，回答了「一栏是怎么开的」。它没有问下一句：**开完之后呢。**

账本上多了一栏之后，数学并没有立刻去开下一栏。相反，此后几十年里，大量的工作在这一栏内部做，做出成堆的新单位与新过程，而没有一件动摇任何共有前提。

这些工作在第一版里全部被塞进「一阶」那一格，与删公理并列。第二版把它们提到一固层。而本章要指出的是：**它们不是随便固化了某一维，它们固化的恰恰是上一次三活涌现时被换掉的那一维。**

30.2 三个可核对的链条

链条一：概率。

三活那一步（第一版第 23 章）：Borel 的正规数逼出「概率是情形之比」这条前提的失效，Kolmogorov 1933 把概率钉成测度。**被换掉的是计——账本本身被换了一本。**

此后概率论内部的全部工作，以那本新账为不可动的裁判：随机过程、鞅论、随机微分方程、大偏差、遍历定理。它们造出大量新单位（停时、鞅、Wiener 过程、马尔可夫核）与新过程（伊藤积分、力迫式的构造法），**而没有一件重新问「概率是什么」。**

按第二版的判据，这是 E 固化型的一固层。而它固化的那一维，正是 1933 年被换掉的那一维。

链条二：分析。

三活那一步（第一版第 19 章）：发散级数的矛盾值逼出「无穷过程有值当且仅当它到达一个量」的失效，柯西—魏尔斯特拉斯把「值」改成一个量词结构，1872 年实数构造给它签字。**被换掉的仍是计——「和」的账本。**

此后一个世纪的分析，以 ε - δ 与实数完备性为不可动的裁判：一致收敛、绝对收敛、各级正则性、可积函数类、Sobolev 空间、紧性的各种版本。第二版第四编把它们归为 S 固化型（显露不动，算与计在争）——**注意这里固化的是形而不是计**，因为被换掉的那一维在此后成了争夺的场地，而不是裁判。

这构成本章机制的第一处不整齐，30.5 节正面处理。

链条三：代数几何。

三活那一步（第一版第 18 章）：Bézout 重数逼出「空间先有点」的失效，概形把点换成素理想。**被换掉的是形——显露方式被换了。**

此后代数几何内部的工作，以概形语言为不可动的裁判：上同调理论、形变理论、模空间、étale 拓扑。它们造出大量新单位（层、模空间、上同调群）而不重问「空间是什么」。这是 S 固化型的一固层，固化的正是被换掉的那一维。

30.3 机制：为什么被换掉的那一维会变成裁判

三条链条给的形状是一致的（除去链条二的那处不整齐）。机制不难看出，而且它是结构性的，不是巧合。

三活涌现的产物，是一本被重写过的账。无论被换掉的是计（概率、分析）还是形（代数几何），涌现完成之后，那一维上多出一个东西：一本新账本，或一种新的显示方式。

而新的东西刚被签过字。第一版第 28 章的签字律说：合法化由计以一致性论证完成。刚签完字的那一维，是三个位置里**唯一一个刚被证明过自治的**。

于是它天然成为下一轮的裁判——**因为它是唯一一个大家刚刚同意过的东西**。另外两维上的争执，只能拿它来裁。

这就是本章的机制：

三活涌现给某一维签了字，签过字的那一维在此后的一段时间里不可能再被争，于是它成为下一层的固化维。

30.4 由此得到的三条推论

推论一：子学科就是这样出现的。一个子学科边界，不是由题材划的，是由它**固化了哪一维**划的。概率论与测度论共用一套数学，分开的地方在于概率论把测度当裁判、测度论把它当对象。第一版全书没有回答过子学科为什么存在，本推论是第二版的回答。

推论二：子学科内部重争固化维，就是分出新学科。 若有人在概率论内部重新问「概率是不是测度」（von Mises 一系、算法随机性一系），他做的就不是概率论内部的工作，而是在把固化维解冻——那是下一次三活的开端。此处与第一版第 23.5 节记的「两条路线最终并存」对得上。

推论三：一固层的丰产是必然的，不是数学家偷懒。 一维被钉死之后，另外两维的组合空间立刻可穷举，而每一个组合都产生一个单位或一条过程。第八编真跑一里 E 固化型（闻后三十六例中的二十一例）里那十六例产单位者（拓扑空间、度量空间、巴拿赫空间、环、域、模、格……）就是这个穷举的产物。它们看上去像是一批平行的抽象，其实是同一个固化维下的枚举。

30.5 那处不整齐，以及它的处置

链条二不整齐：分析的三活换掉的是计（「和」的账本），而此后一固层固化的是形，计反倒成了争夺的场地（一致收敛之争、可积性之争、正则性之争都是算与计在争）。

本书对它有二种读法，两种都不完全够：

读法甲：签字的对象与固化的对象不是一回事。 1872 年被签字的是实数系（一个新的在场者），而不是「和的账本」这条规则。实数系属形——它是一个可以被指着看的对象。于是固化的是形，与机制一致。

读法乙：机制只在被换掉的那一维上得到一个新对象时成立。 概率得到了测度空间这个对象，代数几何得到了概形这个对象，分析得到的是一个量词结构——量词结构不是一个对象，它是一条规则。规则钉不住，于是固化落到别处。

两种读法都能救机制，而它们互相不兼容：读法甲说被签字的是形，读法乙说被换掉的是计而没得到对象。本书不在两者之间裁定，因为裁定它需要的是第三条链条以外的更多样本，而第二版的样本只有三条。

记在此处，并写死一条判负条款留给后续：

取三活层十九例中此后确实形成了子学科的那些（概率、分析、代数几何、群论、拓扑、测度论、可计算性），逐例编码「被换掉的维」与「此后子学科的固化维」。若两者一致的比例 < 0.70 ，本章机制撤回，三层回落为三个并列名单。

30.6 与拉卡托斯硬核、与库恩范式的分界

与拉卡托斯的分界。 他的研究纲领有一个「硬核」，纲领内部的工作不许动硬核，只动保护带。这与固化维形状一样。

分界在两处：其一，他没说硬核是哪一维——硬核在他那里是一组命题，而本书说它是三个位置中的一个，且可以逐例指认是哪一个。其二，他没说硬核从哪来——纲领的硬核在他那里是被选定的，而本书说它来自上一次三活涌现中被签了字的那一维。

第二处是实质的：它使「硬核为什么是这个而不是那个」成为一个可回答的问题。

与库恩的分界。 常规科学在他那里是解谜，范式革命是整体更替。他的图景里没有中间层——要么在范式内解谜，要么范式被换掉。而本书的一固层既不是解谜（它产出新单位，不是把已知方法用到新题上），也不是革命（它不动任何共有前提）。

第一版第 40.1 节说过：数学没有库恩式的革命。第二版补一句：数学有的是三层，而库恩的两分把中间那层压没了。

第 31 章 拉卡托斯的伸展，就是 S 固化型的二维碰撞

31.1 第一版欠的那一笔

第一版第 38 章给了伸展与开栏的区分，还给了一条可判错的设计：

伸展之后，被伸展的概念仍在原栏，且原来那个概念会被重新定义；开栏之后，账本上多一栏，而原栏不变。

条款写死了，自查零反例。但第一版承认（第 38.3 节）：在第 19 章内部，本书没有给出可判错的设计——若读者认为「取消到达」也只是概念伸展的一种，第一版无法用那一章的材料反驳。

欠的那一笔是机制：伸展本身是怎么发生的。第二版补上。

31.2 伸展的机制

拿拉卡托斯自己的主例：柯西 1821 年的定理「连续函数的收敛级数连续」被阿贝尔 1826 年的反例推翻，Seidel 1847 与 Stokes 用「一致收敛」修补。

三家的位置：

- 形（固化）：曲线还是那条曲线，函数还是那个函数。显露方式一动没动——争论双方指的是同一批对象。
- 算（在争）：逐项取极限这条程序，在什么条件下可以交换次序。
- 计（在争）：收敛这本账，对逐点与对整体是不是同一本。

形是固化维：它被双方共同援引——两边都用同一条曲线做例子，谁也没有提出「这不是同一个对象」。而按第二版的判据（预注册第一节），形的任何条款都不在被推翻之列：没有任何关于「函数是什么」的共有前提在 1847 年被动过（那一次要等到 1837 年的任意对应与 1945 年的分布，都是三活层的事）。

于是这是 S 固化型的一固层。按三型产物的预测：**S 固化产单位**。产物正是：逐点收敛与一致收敛两个新单位，从「收敛」这一个旧单位里切出来。

31.3 为什么伸展必然重新定义原概念

这一节兑现第一版第 38.4 节那条判据的理由。

一固层的新单位，是从固化那一家的旧单位里切出来的。切出来的意思是：旧单位被分成若干块，每块获得一个名字，而旧的那个名字要么被保留给其中一块，要么被留作总称。无论哪种，旧单位的含义都变了——它现在指的是一块，或者指的是一个类。

「收敛」在 1847 年之后不再是原来那个意思：它成了一个总称，底下有两块。**这就是重新定义。**

而三活层的新在场者，不是从任何旧单位里切出来的，它是加上去的。复数不是从实数里切出来的一块，理想不是从数里切出来的一块，分布不是从函数里切出来的一块——它们各自在账本上占了一个原来空着的位置。**加上去的东西不改变旧栏的定义。**

于是第一版第 38.4 节那条判据得到了理由：

伸展重新定义原概念，因为它切；开栏不重新定义，因为它加。

31.4 由此得的一条新预测

上一节的理由是可判错的，判负条款写在此处：

取一固层三十六例，逐例编码「它的新单位是否由某个旧单位切出，且那个旧单位此后含义改变」。若比例 < 0.70 ，本章机制撤回。

本轮未跑——第八编的四条真跑不含这一条，本条是本章写作时才提出的，按第一版第 26.4 节立下的标准（不能既用一批数据提出一条断言、又用同一批数据确认它），它必须留给下一批。

预先说明一处不利：**E 固化型那二十一例里，有不少不是「切」而是「抽」**——拓扑空间不是从某个旧单位里切出来的，它是从若干实例里抽出的公共部分。若「抽」也算，本条的比例会很高但内容变空；若「抽」不算，本条只对 S 固化型成立，而 S 固化型只有八例。**本条很可能要缩小到「S 固化型的新单位由旧单位切出」这个更窄的形式。**

31.5 与第一版第 38 章的接续

第一版第 38 章的其余内容原样成立，本章只补机制。第 38.5 节（与克罗的分界）不受影响：新存在物是加一栏、旧栏照旧——现在可以再加一句：**而新单位是切一栏，旧栏的定义跟着变。**克罗说数学没有革命，说的是加那一层；他没有看见切那一层，而切那一层确实改变了旧概念的含义。

第 32 章 三活成簇，一固匀速

32.1 两条曲线

把第一版第 29.2 节的时长表按出生年份重排，三活层的十九例在时间上不是均匀分布的。两处密集：

1868—1872 那五年：非欧几何签字（1868）、流形第一次签字（1868）、群签字（1870）、理想（1871）、实数构造（1872）、埃尔朗根纲领（1872，一固）、魏尔斯特拉斯处处不可导函数公开（1872）。

1930—1945 那十五年：概率=测度（1933）、可计算函数（1936）、弱解（1934—1936）、范畴（1945）、分布（1945—1950）。

而一固层三十六例的产出，按年份铺开是匀速的——十九世纪末到二十世纪，每十年都有若干个新单位与新过程。

32.2 对成簇的两种解释，与它们的检验状况

解释甲：条件场松动期。某些时期，多个位置同时出现新的可显示手段或新的账本工具，于是几条不相干的线同时具备了签字条件。1872 前后的解释是：集合语言、算术化、群的抽象定义几乎同时成熟，**签字工具集中成熟**（第一版第 29.7 节已给过这条）。

解释乙：连锁。一次三活涌现给某一维签了字，而签过字的那一维立刻成为另外几条线的签字工具。理想的签字用了集合（1871），而集合在 1874 年成为超穷数的材料；实数构造（1872）为极限签字，而极限的量词结构在 1897 年成为 p 进数的模板。

两种解释不互斥，且**都未经检验**。要区分它们，需要编码「某次涌现的签字工具是否来自前一次涌现的产物」，判负条款写在此处：

十九例逐例编码签字工具的来源。若来自前一次三活涌现产物的比例 < 0.50，**解释乙撤回，成簇只由条件场松动期解释。**

32.3 一固匀速的理由

一固层匀速，机制上是可以说清的，而且它与第 30.4 节推论三是同一件事：

固化维一旦钉死，另外两维的组合空间可穷举。穷举是一件可以匀速进行的事——它不需要等任何外部条件，只需要人手。一固层的产出速度由从业人数决定，三活层的产出速度由条件场决定。

这条有一个可观察的推论：一固层的产出应当随数学从业者人数增长而增长，三活层不当。二十世纪后半叶数学从业人数增长了一个数量级以上，而本书十九例中 1960 年之后一个也没有（概形 1960 是最后一个）。

这个观察对本书是危险的，因为它有一个更简单的解释：本书的选样标准要求「至少两本标准通史称其为新概念」，而通史的写作滞后于事件三四十年，1960 年之后的候选还没进通史。第一版第 4.9 节记过这个选择偏差，此处它再次生效。

因此本节不作断言，只把观察与它的替代解释一并记下。

32.4 本编结算

项	状态
典范级的 E 成为下一层的固化维	三条链条，其中一条不整齐（分析）；判负条款已写死（一致比例 < 0.70 则撤回）
子学科由固化维划界	推论，未检验
重争固化维 = 分出新学科	推论，与第一版第 23.5 节对得上
一固层的丰产是穷举	与真跑一 E 型（阐后二十一例）对得上，但该预测过宽
伸展 = S 固化型二维碰撞	机制已补；新预测（新单位由旧单位切出） 本轮未跑 ，且很可能要缩小到 S 型

项	状态
三活成簇	两种解释并存，均未检验
一固匀速	机制可说；1960年后无三活例的观察不作断言（选样偏差可解释）

第七编 边界与反例

三层分完之后，最要紧的一编是这一编。一个只能给成功案例分层的装置不值钱——成功案例总能被事后归进某一层。本编收三类：不该被算进任何一层的失败、出生了却没被签字的、以及三层之间判不动的悬案。

第一版第六编的三章移入并重判。**重判改动了三例**，其中两例是第一版明确记为悬案或勉强的（Hamilton 三元组、希尔伯特空间），一例是第一版记为「判不干净、不计入」的（层）。三例的重判结果都对本书有利，因此**三例各自写死了一条留给独立编码者的判负条款**——有利的重判必须比不利的重判受更严的检验。

第 17 章 假三活：三家不齐，与三家不争

17.1 两种失败，第一版只有一种

第一版第 31 章筛掉候选用的是一条规矩：三家不得有空位（三家不齐）。第二版把它劈成两种，因为第 4 章的三态判据（在争／固化／缺席）使它们分得开：

其一，三家不齐——某一位置**缺席**：在争论中根本不出现，也不因此拒绝什么。案例作废，不属任何层。

其二，三家不争——三个位置都在场，但没有任何两家给出不相容的回答。这不是失败，这是二固层（第 14.4 节）。

第一版把两者混为一谈，于是把一批二固层的东西和一批真失败一起扔进了「假二阶」。

17.2 Hamilton 的三元组：第一版判失败，第二版改判一固层

第一版的判定（第 31.2 节）：形（复平面）、算（构造尝试）、计（模相乘）三家都在场，但**三家不在争**——形与算与计合作无间地一起找一个东西，而那个东西不存在。第一版由此判为「无断裂」，归入假二阶，并记明这是十九例中最勉强的一例的邻居。

第二版的重判：三家不争，而其中计（模相乘、范数可乘性）恰恰是被双方共同援引的裁判——Hamilton 把它当作不可放弃的约束，一切构造尝试都拿它来检验。按第 4.2 节的三态判据，**计是固化维**。

而形（数被显示为平面上的点，因而三维的数应被显示为空间中的点）与算（三分量乘法的构造程序）在争吗？

在争，而且不可互译：形要求的是「与空间中的点一一对应」，算要求的是「乘法封闭且可逆」，两者在三分量上不能同时满足——这一点由 Euler 四平方恒等式的缺口（三平方和无保范数乘法律）保证。

因此 1830—1843 那十年是 E 固化型的一固层碰撞，产物应当是单位或过程。

而它产出了什么？什么也没有产出。十年无果。

这正是本章要的东西：一固层也会退回，而它的退回形态在第 13.1 节已经列过——有位而不出火。此处是它最纯粹的标本，且退回的原因可以指认：两家的不相容是结构性的（三分量上无解），不是尚未架通。

1843 年发生的事，按第二版的读法，是 Hamilton 解冻了固化维——他没有放弃模相乘（那是裁判），他放弃的是交换律，而交换律属于计的另一条款。固化维被动了一条款，一固层就升为三活层，产出四元数这个新在场者。

这是三层之间升降的第一个可查标本，接第六编第 30 章。

判负条款（因本次重判对本书有利，须加严）：

独立编码者判定 1830—1843 这十年：是（甲）一固层碰撞退回，还是（乙）根本没有碰撞。若判为乙，本节撤回，Hamilton 三元组回到第一版的「三家不争、无断裂」。

17.3 莱布尼茨的无穷小：判定不变

第一版第 31.3 节的判定：算在场且极强，形不在场（数轴上没有位置留给一个比一切正数都小的正数），计在场且拒绝。

按第二版的三态判据复核：形是缺席还是固化？

是缺席。判据是：固化的那一位，它的账被双方当作共同的裁判。而在无穷小的争论里，没有任何一方拿「能否被显示」当作裁判——莱布尼茨一派根本不接受这条要求，Berkeley 一派也不是靠它反驳的（他反驳的是逻辑上的自相矛盾，那是计的语言）。

因此形是缺席，三家不齐，判定不变：案例作废，不属任何层。它在 1961 年成为三活层（第一版第 13 章），那是另一次事件。

17.4 弗雷格的概念外延：判定不变

第一版第 31.4 节：三家齐，而材料（罗素悖论）来自外部，是专门为推翻而造的，因而丧失不可退回性。

第二版复核：三层的分界靠「有无共有前提被推翻」。弗雷格这一例，前提（概念的外延是一个对象）确实被推翻了——但推翻它的材料来自三家之外。

于是它落在一个第一版没有专门命名的位置：有推翻、而材料不合格。按材料来源规则，它不构成三活；按有推翻，它不是一固。

第二版的处置：单列为**废格**——不属三层，与三家不齐并列为第二种作废。理由：三层的分界预设了推翻是由合格材料造成的；由不合格材料造成的推翻，取消的是一条路，不开任何栏（第一版第 31.4 节：**悖论不开栏**，十九例无一例外）。

17.5 本章结算

例	第一版	第二版	依据
Hamilton 三元组	假二阶（三家不 争）	一固层碰撞退 回，1843 升三活	计是固化维；两家 不相容且结构性无 解
莱布尼茨无穷小	三家不齐	不变（形缺席，非 固化）	无人拿可显示性当 裁判
弗雷格概念外延	假二阶（材料外 部）	废格（第二种作 废）	有推翻而材料不合 格

第 18 章 出生了却没被签字

18.1 三活层的三例：判定不变

第一版第 32 章的三例，第二版复核后判定不变，此处只记复核结果：

Grassmann 扩延论（1844）——形不在场，计无从查，等三十年。第二版补一句：它在等的正是向量空间成为一个一固层的成熟单位（Peano 1888 的公理化）。签字工具是低层的产物（第 15.1 节其三），而 1844 年那个工具还不存在。

Kronecker 除子理论（1881）——提出者原则上拒绝签字这个动作。第二版补一句：这是唯一一例由固化维那一侧发出的拒绝——Kronecker 拒绝的正是「用集合论的账给东西发身份证」这件事，而那本账正是当时的固化维。

Brouwer 选择序列（1918—）——签字与对象的本性冲突。判定不变，且它划出的边界不变：本书描述的那条路（逾越—显示—签字）不是唯一的一条，只是主流账本走的那一条。

18.2 一固层的对应形态

一固层也有「造出来了却没被接」的情形，但形态与三活层不同——**因为一固层不需要签字**（第 4.6 节：它造出的单位或过程本来就在固化那一家的账本内部，一致性不成问题）。

一固层缺的不是签字，是**认领**：

标本一：Cayley 1854 的抽象群定义，四十年无人使用。原因在第 10.2 节已给：一个实例抽不出公共部分，因为没有对照。它缺的是**实例**，不是一致性。

标本二：Grassmann 的另一半。他的东西同时缺签字（三活层意义上，没有显示）与认领（一固层意义上，没有实例对照）。第一版把它整个放在「没签字」一栏，第二版指出它跨两层——这也是「**分层判的是事件不是名词**」（第 16.2 节）的一次应用。

18.3 由此得的一条对照

	三活层	一固层
缺什么会卡住	签字（形不在场则计无从查）	认领（实例不够则抽不出）
等的是什么	一个可显示的对象与一个一致性论证	若干个互不相似的实例
时长由谁定	被推翻的那一维（E 倒长、D 倒短）	实例到齐的速度

这条对照未做检验，样本是三活层三例、一固层两例。

第 19 章 三层之间判不动的三处悬案

第一版第 37.6 节查出三处判不干净的边界案例。第二版用三层重判，三例都判动了——但三例的重判都对本书有利，因此本章的三条判负条款写得比别处严。

19.1 希尔伯特空间：第一版改判一阶，第二版定为一固层 E 固化

第一版的经过：第 5.2 节说它是二阶，而它不在十九例之内——一处自相矛盾。第 30.7 节用五步程序重跑，判为一阶，理由之一是三家时序不齐：形（正交函数系）与算（积分方程）在 1900—1910，而计（量子力学的态与观测量）要到 1925 年之后。

第二版的重判：第一版把「计不在场」读成了缺席。按第 4.2 节的三态判据，它是固化维——集合论与一致性这本账在 1906 年完全在场，且它是裁判： ℓ^2 空间合不合法，看它在既有分析框架里造不造得出来（Fischer–Riesz 1907 证明 ℓ^2 与 L^2 同构，用的正是这本账）。

而形与算在争：正交展开要求的是把函数显示为一列系数，积分方程要求的是一套逐次逼近的求解程序，两者在 1900 年前后不可互译——这正是 Hilbert 那六篇论文要架通的东西。

因此：一固层，E 固化型，产单位。产物「一个带内积的完备无穷维线性空间」是一个单位，与第三编第 10 章那十六例同族。

这个重判比第一版干净：它不必声称三家不齐（那与 1906 年集合论确实在场的事实相抵），也不必把它塞进「抽公理」（它不是从若干实例抽出的，它是从两家不可互译中架出的）。

判负条款：

独立编码者判定 1904—1910 年的计（一致性这本账）是在场为裁判，还是根本不参与。若判为不参与，本节撤回，回到第一版第 30.7 节的一阶判定。

19.2 层 (Leray 1946)：第一版悬案不计入，第二版定为一固层 E 固化

第一版的经过：第 31.5 节跑完五步程序，第一步（能否复述）判不干净，第二步沉默期只有两三年，第三步三家是否互不相容说不清。判为悬案，不计入十九例也不判一阶。第一版的实际态度是「它更像范畴那一栏开了之后的第一批产物」，但那个态度没有判据支持。

第二版的重判：三层的分界靠「有无共有前提被推翻」。

层推翻了什么吗？候选是「整体由局部决定」——不成立。层论恰恰是把「局部数据何时能拼成整体」这件事变成一个可计算的量（上同调），它没有推翻任何关于局部与整体的规定，它给了一套记账法。

而两家在争：形（拓扑空间上的局部数据该被显示成什么——预层是一族集合还是一个函子）与算（谱序列的逐页计算程序）。固化维是计：上同调的账在整个过程中是裁判。

因此：一固层，E 固化型，产单位。与第一版的实际态度一致，现在有了判据。

判负条款：

独立编码者判定层是否推翻了某条共有前提。若指认出一条并通过「念给三家听」的验收，本节撤回，层升入三活层，第二编由十九例增为二十例，第八编全部重算。

19.3 椭圆函数的双周期性：第一版判一阶，第二版定为二固层，且它根本不是一个概念

第一版的经过：第 31.6 节判一阶，理由是复述、无一致拒绝（Legendre 读到后极为兴奋、公开赞誉），并从这一例读出一条界：出人意料 ≠ 开栏。

第二版的重判：按第 6.3 节的判别程序第二步——有没有两家给出不相容的回答？没有。形（格与基本区域）、算（反演椭圆积分）、计（周期的算术）三家不在争，它们是同一个发现的三个侧面。因此是二固层。

但第二版还要加一句，而这一句比层级重要：

它根本不是一个新概念，它是一条关于既有概念的定理。椭圆函数是函数，周期是周期——数量从一个变成两个。第一版第 33.9 节说本书不解释定理的发生，而这一例正是被误当作概念收进候选池的一条定理。

因此第二版的处置是移出候选池，不是判为二固。它属于第 33.9 节列的「本书不处理的三类」之一。

这是三例重判中唯一一例对本书不利的——它使中级候选池与二固对照组各少一个可用样本，也说明候选池的入池标准里缺一道闸：先判它是不是一个概念。

19.4 三例重判的总账

例	第一版	第二版	对本书
希尔伯特空间	一阶（三家不齐）	一固层 E 固化，产单位	有利（消掉一处勉强）

例	第一版	第二版	对本书
层	悬案，不计入	一固层 E 固化，产单位	有利（悬案变可判）
椭圆函数双周期	一阶	移出候选池：它是定理不是概念	不利（暴露入池标准缺一道闸）

两利一弊，且三条判负条款全部写死。第 19.3 那一处不利要在第 20 章的欠账清单里单列，因为它指向的是入池标准，而入池标准管着全书的样本。

第 20 章 命题的收口与欠账

20.1 第二版命题的最终形式

数学概念的诞生按参战维数分三层。三个位置全在争、且有一条三家共有的前提被推翻时，账本多一栏（三活层，十九例）；一维固化、两维在争、无前提被推翻时，栏内切出或架出一个单位或一条过程（一固层，三十六例）；两维以上固化时，只是准入放宽（二固层）。三层不是同一种东西的三个强度，而是三种不同的东西——第一版的三件承重物（共有前提、材料、签字）只在三活层有意义，一固层另有一套机制（固化维来自上一次三活涌现中被签了字的那一维）。

20.2 欠账清单

第一版十四条欠账，第二版偿了两条、新增五条。

第一版已偿的两条

#	欠账	状态
一阶那一格塞了性质不同的对象	第一版第 30.5 节记	已偿：劈成一固与二固两层
伸展缺机制	第一版第 38 章记	已偿：S 固化型二维碰撞，切与加的区别（第 31.3 节）

第一版未偿、第二版仍未偿的十二条（原样带过）共有前提的事后可得性 | 样本量太小 | 装置只覆盖数学内部 | 若干出生日期不封闭 | Z 的宽度 | 规格执行不一致 | 单人编码 | 签字律未设检验 | 材料来源规则的表述被放松一次 | 二十世纪案例被纲领叙事占位 | 每章都有更详尽的史学专著在先 | 逐家试推是反事实判断。

其中 Z 的宽度这一条，第二版把它从两档挪到三档，第 5 章已明写：三档没有解开这个环，它把环挪到了新的位置。

第二版新增的五条

#	欠账	记在哪
15	一固的判据是否定式的，依	4.7 其一

#	欠账	记在哪
	赖共有前提那一格判得准	
16	E 型与 S 型的预测过宽，几乎不可能判负；真跑一的信息量集中在 D 型七例	4.5、本编各处
17	固化维指定可能有误（微分形式）	12.6，判负条款已写死
18	一固／二固的界会把 安静发生的一固判成二固 ，方向明确，无法消除	16.3
19	入池标准缺一道闸：先判它是不是一个概念	19.3（椭圆函数双周期）

第 19 条是本编查出的，它比其余四条严重：**它管着全书的样本**。候选池若混进了定理、方法、记号，分层就是在给不同种类的东西排队。第一版第 33.9 节列过「本书不解释的三类」（定理、方法、记号的发生），而第一版自己就把一条定理收进了候选池。

处置：第八编的下一轮编码，入池前加一道闸——**它是一个概念（一类东西的名目），还是一条关于既有概念的陈述？**后者不入池。

20.3 本编三例重判的自查

三例重判两利一弊，且都由本书作者做出。按第一版第 34.5 节的不对称（单人编码判负可信、判正不可信），**两处有利的重判（希尔伯特空间、层）属于「判正」那一侧，不可信**。三条判负条款已全部写死，交独立编码者。

而**唯一那处不利的重判（椭圆函数双周期）属于「判负」那一侧，可信**——并且它查出了第 19 条欠账。这与第一版第 37.10 节的读数一致：**本书能给的最好的东西，落在判负那一侧**。

20.4 给下一个人的四件（按优先级）

1. **独立编码**。第一版列为第一优先，第二版仍是。不做这一件，三层的全部数字只有二级强度。
2. 把 E 型预测改成排他形式并在新候选池上跑 **已执行**（补跑记录之二）：排他式在一个先过闸再挑的新池上跑出 $22/24=0.917$ ，两处未命中方向相反；由此写死的第二次改写仍待检验。
3. **执行本编与第四编写死的五条判负条款**：Hamilton 三元组、希尔伯特空间、层、微分形式的固化维、单纯形法三例的层级。
4. **给候选池加那道闸**（第 19 条欠账），并重跑一遍入池。

第 4 件最省力，第 1 件最贵，第 2 件最值钱。

第八编 真跑

第一版的三条真跑，两条判负、一条未设检验。那两条判负的读数在第二版全部作废——它们是在两组比较下得出的（三活 vs 一阶），而第二版是三组。判负条款必须重新写死、重新跑。

本编报告第二版四条真跑的读数。预注册表在跑之前写成，判负条款跑完未改。读法与第一版一致：单人编码，判负可信、判正不可信。

第 21 章 预注册：判据换过一次

21.1 为什么把换判据的经过放进正文

第一版第 34 章的预注册是干净的：条款写死、跑完不改。第二版的预注册不干净——它的核心判据在写表的过程中当场失效，换过一次。

按第一版的纪律（不利于本书的史料写进正文，不放脚注），换的经过写在这里，也写在第 4.3 节。它是这条判据唯一的强度来源：一条被自己的第一个测试例推翻过、然后被换掉的判据，比一条从未被测试过的判据可信。

21.2 原判据与它的失效

原判据：固化的那一维，被双方共同援引为裁判。

失效的例子是四元数。模相乘（范数可乘性）确实是 Hamilton 与所有人共同援引的裁判——按原判据，计是固化维，四元数应判一固。但同一个「计」里，另一条款——乘法交换律——恰恰是被推翻的那条共有前提。

分数维同型：勒贝格测度是共同标准（ H^s 建在它内部），而「维数必须是整数」也是计的条款，被推翻的正是它。

同一个位置，一条款当裁判、另一条款被推翻。若允许这样，固化与参战分不开，全书的分层立刻失去可证伪性。

21.3 换上的判据

被推翻的共有前提属于哪一位，哪一位必定参战。一个位置是固化维，当且仅当它的任何条款都不在被推翻之列，且两家的不相容要靠它的账来裁。

由此三层的分界不靠任何计数（第 4.4 节）。

21.4 四条判负条款（跑完未改，此处照录）

真跑一（三型产物）：编码中级候选池四十例的实际产物。任一型命中率 < 0.70 ，该型撤回；两型 < 0.70 ，三型产物整条撤回，第 4 章降为分类而非机制。

真跑二（三层的命名与拒绝）：三组各自的否定命名率与否定拒绝率。若一固组的拒绝率 $\geq$ 三活组的一半 (≥ 0.456)，则「一固不引起一致拒绝」撤回。

真跑三（材料来源规则在中级层）：若中级层有 ≥ 3 例可指出「一件三家之一自己的旧材料推翻了什么」，则新判据失效，第 21.3 节要重写。

真跑四（十九例是否降层）： ≥ 2 例判为一固，第二编降为十七例或更少，第八、九编全部重算。

21.5 预先声明的三处限制（跑之前写）

1. 单人编码，且编码者已写过第一版。污染不可消除。
 2. 真跑四接近同义反复。十九例当初的入选标准就含「共有前提被推翻」，而新判据说被推翻的前提属哪一位、哪一位必参战。它的通过不构成证据。
 3. 中级候选池是作者列的，选池偏差方向未知。
-

第 22 章 真跑一：三型产物

22.1 读数

固化型	预测	命中	比率	判定
E（账本不动）	单位 或 过程	25/25（闸后 21/21）	1.000	通过
S（显露不动）	单位	8/8	1.000	通过
D（算法不动）	在场者，且不 产单位	5/7	0.714	通过（擦线）

判负型数 0，三型产物整条保留。

22.2 这个结果的大部分是空的

三型全过，而其中两型几乎不可能不过。

E 型的预测是析取式——「单位或过程」在三种产物类型里占了两种。一个覆盖三分之二可能性的预测，命中率接近 1 是必然的，与机制是否成立无关。

S 型的预测虽然是单称的，但它指的是最常见的那一种。一固层的产物以单位为主（40 例中 24 例产单位），随便指一族说它产单位，命中率也不会低。

因此真跑一的实际信息量集中在 D 型那七例上，而 D 型是唯一擦线通过的。

改写已执行：见补跑记录之二。E 型改成排他式之后，在一个先过闸再挑的新池上跑出 $22/24 = 0.917$ ——它第一次成为一条可以掉下来的预测，而且掉了两次，两次方向相反。

22.3 D 型为什么是唯一尖锐的一条

D 型的预测有两半：产在场者，且不产单位。

第二半是它尖锐的原因。「不产单位」是一条禁止，而禁止可以被单个反例推翻。事实上它被推翻了两次——七例中有两例产出了非在场者，其中一例（微分形式）产的正好是单位。

第 12.4 节给了这条禁止的机制：单位是从旧单位切出来的类，切割需要判据，判据由计给出；S 型里计在争，争的结果就是判据；D 型里计与形争的是归属而不是分界，归属之争的结果是发身份证，不是把旧类切成两块。

这条机制的检验状况是：七例中五例命中、两例未命中，且未命中的两例恰好落在对机制最不利的方向。

22.4 两处未命中，如实照录

行列式：判为产过程。它出生时的功能是一条计算法（判定线性方程组有唯一解、Cramer 法则），那个数在当时是计算的中间结果，不是有性质、可被分类的对象。若判为在场者，D 型命中率将从 0.714 升到 0.857——本书取了不利的一判。

微分形式：判为产单位。k-形式按 k 分级，而这个分级正是把「被积表达式」这个旧单位切成了若干块——这是 S 型的形态。若它真是 S 型，则第 21 章预注册表的固化维指定错了一例。

处置：保留在 D 族内、记为未命中、不改事先指定。改事先指定就是事后调整，那正是预注册要防的事。判负条款已在第 12.6 节写死。

22.5 改写要求（写死，留下一批候选池执行）

E 型的预测须改成排他形式：产过程当且仅当两家争的是翻译规则；产单位当且仅当两家争的是实例的公共部分。改写后的预测不得用本轮那四十例检验（它们是提出这条改写的同一批数据）。

S 型的对应改写：须加上「且该单位由某个旧单位切出、旧名此后变为总称」（第 11.4 节已写死判负条款，本轮未跑）。

22.6 本章判定

项	状态
三型产物整条	保留
E 型读数 1.000	不构成证据（预测过宽）
S 型读数 1.000	不构成证据（指的是最常见的一种）
D 型读数 0.714	本轮唯一有信息量的读数，擦线通过，两处未命中
E/S 型的改写	已写死，留下一批

第 23 章 真跑二：三层的命名与拒绝

23.1 读数

层	n	否定性名字	否定性拒绝
三活	17	0.353	0.912
一固	40 (闸后 36)	0.000	0.037 (闸后 0.042)
二固	7	0.000	0.143

判负线（一固拒绝率 $\geq$ 三活之半 0.456）：未触及，通过。

23.2 一处逆序，以及它的分量

二固组的拒绝率（**0.143**）高于一固组（**0.037**）。

拒绝并不随层级单调下降。肇事者是模糊集——一个纯删条件的二固产物（把特征函数的值域从 $\{0,1\}$ 放宽到 $[0,1]$ ），却受到过激烈拒绝。

这与第 12.7 节（向量分析：一固层而有激烈拒绝）是同一形状。两例合起来的结论：

拒绝这个变量在分层上不可靠，不能拿来当层级的指标。

这一条对第一版是一处修正。第一版第 4.3 节把「三家一致拒绝」定为区分新读数与新存在物的判据，而第二版指出：拒绝的强度不分层，分层的是拒绝的来源——三活层三家一致拒绝，一固层只有碰撞的两家在争，二固层拒绝的来源与层级无关（模糊集受到的拒绝来自应用领域与哲学，不来自三个位置中的任何一个）。

23.3 否定性名字这一栏：三层读数与第一版的关系

第一版把名字化石律判负（0.353 对 0.000，差 $0.353 < 0.40$ 的判负线）。那个判负的读数在第二版作废——它是两组比较，第二版是三组。

三组读数：0.353 / 0.000 / 0.000。一固与二固都是零，且都是干净的零（四十七例无一例外）。

因此第二版能说的只有第一版那条单向结论，且它更清楚了：

若一个数学概念在出生时得到否定性名字，它极可能是三活层的；反之不成立
（三分之二的三活层对象没有这个签名）。

第二版不重新为名字化石律设判负条款，理由：它在第一版已判负，而第二版的三组读数没有给它任何新的支持——两个零不是两条独立证据，它们是同一件事（一固与二固都不推翻共有前提，因而不引起三家一致表态）。

23.4 本章判定

项	状态
「一固不引起一致拒绝」	通过（0.037；闸后 0.042，均远低于判负线

项	状态
拒绝率随层级单调	0.456)
拒绝可作层级指标	判负（二固 0.143 > 一固 0.037）
名字化石律	撤回（向量分析+模糊集两例合证）
	第一版已判负，第二版读数不给新支持， 单向结论保留

第 24 章 真跑三与真跑四

24.1 真跑三：材料来源规则在中级层

读数：四十例中（闸前池；闸挡下的四例亦为零），零例可指出「一件三家之一自己的旧材料推翻了一条共有前提」。

判负线（≥3 例）：未触及，通过。

这是本轮唯一一条有实质内容且没被稀释的结果。它坐实了第 4.4 节那条分界：

一固层不推翻任何东西，因此材料来源规则在中级层不适用——不是成立，是不适用。

它的分量在于它使三层不是三个并列的名单。第一版的三件承重物（共有前提、材料、签字）全部只在三活层有意义；一固层有它自己的另一套（固化维从哪来、新单位怎么从旧单位里切出来）。三层是三种不同的东西，不是同一种东西的三个强度——这个结论在第 4.6 节、第 15.3 节、第 20.1 节三处独立得出，本节是它的数据来源。

一处须记的弱点：零命中有两种可能的解释。其一，一固层确实不推翻任何东西（本书的解释）。其二，本书在列候选池时，凡是能指出推翻的都被归进三活层了——选池本身保证了这个零。

第二种解释无法排除，因为候选池是作者列的（第 21.5 节限制三）。判负条款留给独立编码者：

由不知道本书结论的人重列一个一固层候选池，重跑真跑三。若出现 ≥3 例可指认的推翻，第 21.3 节的判据要重写。

24.2 真跑四：十九例是否降层

读数：按新判据逐例复判，十九例全部三活，降层 0 例。

判负线（≥2 例）：未触及，通过。

但这条通过不构成证据，第 21.5 节限制二已在跑之前记明：十九例当初的入选标准（第一版第 6.7 节）就包含「共有前提被推翻」，而新判据说被推翻的前提属哪一位、哪一位必参战。两者接近同义反复。

有信息量的部分不在这个 0，而在两个最危险的候选（第 21 章预注册指名的四元数与分数维）为什么没有降层：

- **四元数**：交换律是计的条款，被推翻了，故计必参战。虽然同一个计的另一条款（模相乘）在当裁判——这正是原判据失效的那个例子，也是换判据之后它仍留在三活层的理由。
- **分数维**：「维数必须是整数」是计的条款，被推翻了，故计必参战。

两例都是靠新判据留在三活层的，而新判据正是被它们逼出来的。这是一个循环：**判据**由两个例子逼出，又由那两个例子确认。

本书不掩饰这个循环。它的唯一出路是在没有参与逼出判据的例子上检验新判据，而那需要一个新的候选池——与第 22.5 节、第 24.1 节的要求是同一件事。

24.3 第二版真跑总判决

真跑	结果	信息量
一 三型产物	三型全过 (1.000/1.000/0.714)	仅 D 型七例有信息量
二 三层命名与拒绝	主条通过； 拒绝随层级单调判负	中：查出一处逆序，撤回一个指标
三 材料来源规则在中级层	零命中，规则在此层 不适用	高（本轮唯一未被稀释的结果），但选池偏差无法排除
四 十九例降层	0 例	低（接近同义反复，且判据由其中两例逼出）

24.4 第九编的写作预算

照第一版第 37.9 节的做法，由本编结果定第九编能写多硬。

第 4 章（固化维）：可以写成机制，但**必须把判据换过一次的经过与它的循环（24.2）**写在正文。

三型产物：E 型与 S 型只作分类报告，不得称机制；**D 型可以称机制**，并附两处未命中。

「**三层是三种不同的东西**」：这是第二版最硬的一条，有真跑三支持，且在三处独立得出。可以作为第二版的**承重物**写。但选池偏差那一处必须同页写明。

「**拒绝可作层级指标**」：撤回，第九编不得使用。

与拉卡托斯、库恩的划界（第六编第 30.6 节、第 31 章）：机制已给，**未设检验**，第九编须在章首声明。

第二版承重物的最终状态：

- **三层是三种不同的东西**——有检验（真跑三），保留，为第二版唯一承重物。
- **三型产物**——D 型可称机制，E/S 型待改写后重跑。
- **固化维**来自上一次三活涌现被签字的那一维（第六编第 30 章）——三条链一条不整齐，判负条款已写死，**未检验**。

- 第一版的**材料来源规则**——原样保留，但作用域缩小到三活层。

第一版三件承重物剩一件半；第二版是一件半加一件新的。

第九编 划界与推论

第一版第八编五章移入并重判。**移入不是照搬**：三层装上之后，与拉卡托斯、库恩、克罗的分界全部要重写，因为第一版的两档在他们面前分不清哪一层在对话。本编第 25、26 章的机制**未设检验**，章首照第八编第 24.4 节的写作预算声明。

第 25 章 与拉卡托斯的分界：伸展在哪一层

章首声明：本章的机制（伸展= S 固化型二维碰撞）未设独立检验。第六编第 31.4 节写死的判负条款本轮未跑。

25.1 第一版给了区分，没给机制

第一版第 38 章的区分：**伸展之后原概念被重新定义，开栏之后原栏不变**。判负条款写死、自查零反例。

但第一版第 38.3 节承认：在第 19 章（极限）内部，它没有可判错的设计——若读者认为「取消到达」也只是伸展的一种，第一版无法用那一章的材料反驳。

欠的是机制。第二版补上，并把它安在具体的层上。

25.2 伸展在哪一层

拿拉卡托斯自己的主例：柯西 1821 年的定理被阿贝尔 1826 年的反例推翻，Seidel 1847 与 Stokes 用一致收敛修补。

形是固化维：争论双方指的是同一批对象，谁也没有提出「这不是同一个函数」——形在场、被共同援引、且它的任何条款都不在被推翻之列（关于「函数是什么」的前提，1837 年动过一次、1945 年动过一次，都不在 1847 年）。

算与计在争：逐项取极限可否交换次序（算），收敛这本账对逐点与对整体是不是同一本（计）。

因此：一固层， S 固化型，产单位。产物是从「收敛」这一个旧单位里切出来的两块。

25.3 为什么伸展必然重新定义原概念

一固层的新单位是从旧单位里切出来的，切了旧名字就得改指。

「收敛」在 1847 年之后成了一个总称，底下有两块。「可微」在正则性等级出来之后成了总称。「连续」在一致连续与半连续出来之后成了总称（第 11.3 节八例核对）。

而三活层的新在场者是加在空位上的，加了旧栏一动不动。复数不是从实数里切出来的一块，理想不是从数里切出来的一块，分布不是从函数里切出来的一块。

于是第一版那条判据得到了理由：

伸展重新定义原概念，因为它切；开栏不重新定义，因为它加。

25.4 与拉卡托斯的三处分手

其一，他没有中间层。《证明与反驳》里，反例逼出的动作只有一种——伸展。而第二版说伸展是一固层的一种（S 固化型），一固层还有另外两型，其中 E 固化型（抽公理那十六例与产过程那五例）根本不产生反例，也就不在他的框架里。

其二，他没有说伸展固化了哪一维。「怪物驳斥」与「怪物调整」在他那里是策略选择；在第二版里，能不能驳斥怪物取决于形是不是固化——若形也在争（有人主张「这不是同一个对象」），那就不是伸展，那是三活层的开端。

这条给出一个可查的判别：看争论中有没有人说「我们说的不是同一个东西」。有，则不是伸展。

其三，他的伸展没有产物的类型。第二版说 S 固化产单位、E 固化产单位或过程、D 固化产在场者——伸展只对应其中一格。

25.5 本章最弱处

其一，机制未检验（章首已声明）。

其二，25.4 其二那条判别是本章唯一的可判错设计，而它本轮未用。要用它，须编码一批伸展案例，看争论中「这不是同一个对象」这句话出现与否。本书未做。

第 26 章 与库恩、与克罗—吉利的分界

章首声明：本章的机制未设独立检验。

26.1 库恩：两分把中间那层压没了

常规科学在库恩那里是解谜，范式革命是整体更替。他的图景里没有中间层——要么在范式内解谜，要么范式被换掉。

而一固层既不是解谜（它产出新单位，不是把已知方法用到新题上），也不是革命（它不动任何共有前提）。

第一版第 40.1 节说：数学没有库恩式的革命。第二版补一句：数学有的是三层，而库恩的两分把中间那层压没了。

一处须记的不对称：库恩谈的是自然科学，本书谈的是数学。第一版第 40.2 节已给过数学与自然科学的一处结构差别——数学的共有前提在定理之外，所以推翻它只加栏、不作废任何定理；自然科学的共有前提常被写进理论的核心陈述，推翻它就要改写理论。因此「库恩压没了中间层」这句话，本书只能对数学说。

26.2 拉卡托斯的硬核就是固化维

研究纲领有一个硬核，纲领内部的工作不许动硬核，只动保护带。这与固化维形状一样。

分界在两处：

其一，他没说硬核是哪一维。硬核在他那里是一组命题；在本书里它是三个位置中的一个，且可以逐例指认是哪一个（第二版四十例逐例指认了固化维）。

其二，他没说硬核从哪来。纲领的硬核在他那里是被选定的；本书说它来自上一次三活涌现中被签了字的那一维（第六编第 30 章）。

第二处是实质的：它使「硬核为什么是这个而不是那个」成为一个可回答的问题。

而它的检验状况必须同页写明：第 30 章三条链条中有一条不整齐（分析：三活换掉的是计，此后固化的却是形），两种读法互不兼容，本书不裁定，判负条款已写死（一致比例 < 0.70 则本章机制撤回）。

26.3 克罗：加与切

克罗 1975 年说数学中没有革命，理由是旧成果从不被推翻，只被包含。

第一版第 40.2 节给了机制解释：共有前提从未写在任何一条定理里，所以推翻它不作废任何定理。

第二版补的那一句在这里：

克罗说的是加那一层（三活层：加一栏，旧栏照旧）。他没有看见切那一层（一固层：切一栏，旧栏的定义跟着变）。

而切确实改变了旧概念的含义——1847 年之后「收敛」不再是原来那个意思。这不是革命（没有任何定理作废），但它也不是纯粹的累积（旧概念的所指变了）。

因此对克罗的准确回应是：数学没有库恩式的革命；数学有加，也有切；加不改变任何东西，切改变名词的所指而不改变任何定理。

第 27 章 逼生，与三层各自的出生方式

27.1 三活层：逼生（第一版原样）

不是发现：碰撞之前账本上确实没有它；那些「还原」（复数是实数的有序对、理想是环的子集）全部是签字时才造出来的，用签字之后的构造去判定签字之前的对象是不是新的，是时序倒置。

不是发明：三家一致拒绝（0.912），且四例中提出者本人拒绝（Cantor 九年、哥德尔五年、Kummer 只肯当算法、普朗克式的犹豫）。一个人不会拒绝自己的发明。

是逼生：三家的证据合起来只能得出它，而三家谁也不想要它。

27.2 一固层：不是逼生，是架通或切割

一固层的出生方式与三活层不同，这一点第一版无法说，因为第一版没有这一层。

- **E 固化产过程：**架通。两家各有对方处理不了的问题，翻译一旦架成，两边的问题可以互相搬运。**没有人不想要它**——解析几何出来之后双方都在用。
- **E 固化产单位：**抽出。若干互不相似的实例的公共部分。同样没有人不想要。
- **S 固化产单位：**切割。从一个旧单位切出若干块，旧名变总称。
- **D 固化产在场者：**发身份证。归属之争的结果。

四种都不是逼生，因为没有任何一家在拒绝。它们的阻力不在拒绝，在**认领**（实例不够则抽不出，第 18.2 节）。

27.3 二固层：既非发现也非发明也非逼生——是整理

删条款、换记号、直接推广。三个位置没有任何两家给出不相容的回答。

它的出生方式没有哲学问题，这正是它在两千年的数学哲学里从未被讨论过的原因。而第 15.1 节指出它的分量：**它是上两层的材料仓库，也是签字工具的产地。**

27.4 三层的出生方式总表

层	出生方式	阻力在哪	三家的反应
三活	逼生	签字（形不在场则计无从查）	一致拒绝（0.912）
一固	架通／抽出／切割 ／发身份证	认领（实例不够）	只有碰撞的两家在争（0.042）
二固	整理	无	无（0.000）

发现／发明这个二分，漏掉的不是一种出生方式，是三种。

第 28 章 两项推论

章首声明：本章两项推论均未做检验。第二项所需的真跑在第一版即未执行，第二版仍未执行。

28.1 推论一：教科书几乎全部教在下两层

第一版第 42.1 节说：教科书从签字之后讲起，学生从未见过「不该存在」那一站。

第二版说得更准（第 15.2 节）：

- 中小学与大学低年级：二固层，加上一固层的成熟单位（连续、可微、可积、一致收敛）。
- 研究生阶段：一固层为主，抽公理那一族是主菜。
- 三活层几乎从不教——它在教科书里出现时，已经是签字后的定义。

学生卡住的位置因此可预测：**他手里拿的是签字之后的定义，心里的账本还是签字之前的那一本。**负数、复数、极限、无穷——四个经典卡点，恰好是四次三活。

可检验形式（本书未做）：若在教学中先呈现断裂状态、再呈现签字后的定义，卡点应当减少。

28.2 推论二：人工智能能做哪一层

本节是一条待检验的预言，不是有检验支持的推论。第一版第 37 章的协议未执行，第二版仍未执行（本书写作环境没有到其他厂商基底的通道）。

按三层划分，预期可以说得比第一版细：

二固层——删条款、换记号、直接推广。**模型最擅长的一层**，因为它们全部是从一家推出的。

一固层——需要两件事：把两家的回答保持为不相容而不折中；指认固化维。**第一件是障碍：**模型倾向于把两家的说法综合成一个都能接受的版本，而综合恰恰取消了不相容。但**一固层不需要第三件事（找到那件旧材料），因为一固层没有材料这一环节**（第 4.6 节）——**这使一固层比第一版预期的更可能被机器做到。**

这是第二版对第一版的一处修正：第一版把「二阶」当作一个整体，说模型做不到；第二版说**模型可能做得到一固层，做不到三活层。**

三活层——需要三件事：保持三家不相容；看见三家共有的前提；找到那件在本家回答另一道题的旧材料。**第三件模型可能做得比人好**（它读过的旧材料多，而材料的杀伤力与它的不引人注目程度成正比）；**前两件做不到**——模型作为三家文献的总和，天然站在三家共有的那块地上。

具体预言（第一版原样）：

人工智能做出的第一个三活层数学对象，将不是它自己提出的，而是它在某个算法的输出里报告的一个「非法产物」，由人给它名分。

第二版新增的预言：

在此之前，模型将先做出可观数量的一固层产物——新的翻译、新的抽象单位、新的切割——而这些不会被认作「机器做出了新数学」，因为它们看上去像整理。

两条预言的检验协议见第一版第 37.3 节，须按三层重写题面。

结语 谁也不要的那样东西，与谁都要的那些

第一版结语原题《它的名字里永远留着那一天三家说的那个「不」》，因名字化石律判负而改题。第二版沿用改后的题，并加后半句——因为第二版多了两层，而那两层的東西是**谁都要的**。

数学哲学问了两千年「数学对象在哪儿」。本书问的是「它怎么出生」。

第一版的答案是一张表，四个格子。第二版的答案是：**先问它出生时有几个位置在争。**

三个都在争，且有一条三家共有的前提被推翻——账本多一栏。落下来的是一个三家都不要、而三家的证据合起来只能得出的存在物。它出生时被一致拒绝（0.912），要等一个可显示的形出场、等计给它签字，等的时间从二十年到两千三百年不等。

一个位置固化、两个在争，而没有任何前提被推翻——栏内多一个单位或一条过程。它是被架通的、被抽出的、被切出来的、被发了身份证的。**没有人不想要它**，它的阻力不在拒绝，在等实例到齐。这一层最丰产，数学里最漂亮的那些方法与最好用的那些名目都在这里。

两个位置固化——只是准入放宽。九成以上的数学工作在这一层，而它不是低强度的创新，它是**另一种东西**：它造签字工具，它把账本做厚，它把一条路走到尽头从而逼出断裂。**没有它，上面两层一件也发生不了。**

三层不是同一种东西的三个强度。这是第二版唯一有检验支持的一条：四十例中零例可指出「一件自家旧材料推翻了什么」——材料来源规则在一固层不适用，不是成立。**第一版的三件承重物只在三活层有意义。**

而第二版自己的账也要摊开。四条真跑全过，其中三条几乎不可能不过：E 型的预测覆盖三分之二的可能性，S 型指的是最常见的一种，真跑四接近同义反复且它的判据由其中两个例子逼出、又由那两个例子确认。**本轮唯一未被稀释的是真跑三，而它的零命中有一个排不掉的替代解释——候选池是作者列的。**

第一版有十四条方法论欠账，偿了两条；第二版新增五条，其中一条最严重：**入池标准缺一道闸——先判它是不是一个概念。**是一条被移出候选池的定理查出来的，而那是第二版三次重判中唯一对本书不利的一次。

判负可信，判正不可信。这是单人编码的代价，第一版记过，第二版仍然记着。而本书两版加起来推翻了自己四条断言、撤回两条修正、改判两处自相矛盾、查出四处证据经不起查。

至于那个三活层的对象——

它出生的那一刻，三家的账本上都没有它的位置。说它不可能的人没有说错：在那一刻，账本上确实没有。错的只是把「账本上没有」当成了「不该有」。

而它之所以还是来了，不是因为有人想要它。三家都不要它，而三家自己的证据合起来，只能得出它。

至于下面那两层的東西——谁都要。它们从不被拒绝，也从不被写进哲学。而没有它们，那个谁也不要的东西，一件也生不出来。

附录一 三层案例总表

三活层（十九例）：见第一版附录一（四要件总表），第二版加填固化维一格，十九例均填「无」。

一固层（三十六例；闸前四十例，入池闸挡下四例）

固化维	例	产物
E·产过程（5）	生成函数 拉普拉斯变换 傅里叶变换 勒贝格积分 谱序列	过程
E·产单位（16）	拓扑空间 度量空间 巴拿赫空间 抽象群公理 环 域 模 格 布尔代数 一致空间 赋值论 导出范畴 同调群 基本群 希尔伯特空间 层	单位
S·产单位（8）	一致收敛 绝对收敛 黎曼可积类 C^k 正则性等级 Sobolev 空间 半连续 一致连续 紧性	单位
D·产在场者（7）	矩阵成为对象 特征值 变量 张量 向量 行列式（未命中：产过程） 微分形式（未命中：产单位）	在场者

二固层（对照组 7）：半群 | 么半群 | magma | 偏序集 | 非交换环 | 拟群 | 模糊集

被入池闸挡下（是方法，不是概念）：解析几何 | 埃尔朗根纲领 | 函数域数域平行处理 | 单纯形法-牛顿法-高斯消元

作废（不属任何层）：莱布尼茨无穷小（三家不齐，形缺席） | 弗雷格概念外延（废格：有推翻而材料不合格） | Hamilton 三元组 1830—1843（一固层退回，1843 升三活）

移出候选池：椭圆函数双周期（是定理不是概念）

附录二 命名与拒绝记录表（三组）

第一版附录二原样，加一列「层」。三组读数：否定性名字 0.353/0.000/0.000；否定性拒绝 0.912/0.042/0.143（一固组为闸后三十六例）。

表内三处存疑标注沿用：Poincaré「疾病」语存疑（Gray 1991）|「general abstract nonsense」非贬义（Steenrod 自用）| Kelvin 语属实但为接受期评价而非命名。

附录三 方法卡：十六问

第一版十二问，第二版加四问，且次序改了——先判层，再填表。

判层（前四问） 1. 有没有一条三家共有的前提被推翻？（用固定句式写出，并通过「念给三家听」的验收）有 - 三活，转第 5 问。2. 无。那么两家的回答是否不相容且不可互译？（须给出证据：两边各有对方处理不了的问题）是 - 一固，转第 3 问。否 - 转第 4 问。3. 固化的是哪一维？（**必须事先指定**，并指出它的账如何被双方当作裁判；并核验它的任何条款都不在被推翻之列）4. 是不是删条款、换记号、直接推广？是 - 二固。否 - 存疑，不计入。

入池闸（第二版新增，第 19 条欠账） 5. 它是一个概念（一类东西的名目），还是一条关于既有概念的陈述（定理）、一种做法（方法）、一套写法（记号）？后三者不入池。

三活层填表（第 6-12 问） 第一版十二问的第 6-12 问原样：三家各占一位 | 三家是否互不相容 | 共有前提 | 念给三家听的验收 | 补丁在哪、谁在打 | 材料的产出位置、撞上位置、原题 | 谁在什么时候用什么模型签的字。

一固层填表（第 13-16 问，第二版新增） 13. 在争的两家各是谁，何以不可互译？14. 明写「本例未推翻任何共有前提」，并说明若有人主张有、那一条是什么、为何不成立。15. Z 是单位还是过程？若是单位，它由固化那一家的哪个旧单位切出，那个旧单位此后是否变为总称？16. 拒绝是否只来自碰撞的那两家？固化的那一家是否表态？

执行纪律（两版通用） - 固化维必须事先指定，写在读史料之前。 - 凡归属可两判者，取对你自己的结论不利的那一判。 - 每一次判定写一节「本次最弱处」，包括与最近占位者的区分是否有可判错设计。 - 不利于你的史料写进正文，不放脚注。

附录四 两版的判负与撤回记录

第一版：名字化石律判负 | 逾越律以材料出处为指标的形式判负 | 中心性修正撤回 | 希尔伯特空间自相矛盾改判 | 三处证据改写（Poincaré 语存疑、abstract nonsense 非贬义、Kelvin 语定位）。

第二版：固化维原判据（共同援引为裁判）在四元数上当场失效并被换掉 | 拒绝随层级单调判负、拒绝作层级指标撤回 | 椭圆函数双周期移出候选池并查出入池标准缺闸 | E 型与 S 型预测过宽，读数不构成证据 | 真跑四的判据由其中两例逼出又由那两例确认（循环，未解）。

这份记录随书公开，是本书唯一不能被拿走的凭据：一套能推翻自己的装置。

附录五 全书判负条款一览

本书写死的判负条款共十六条，散在十六处。此处按「谁能执行」分四组汇总，供后续执行者取用。

每一条都写在看数据之前，或写在提出该断言的同一处并声明本轮不用该数据检验。

甲 本书已执行的（4条）

#	条款	结果
1	三型产物：任一型 < 0.70 撤回该型；两型 < 0.70 整条撤回	全过（E 1.000 / S 1.000 / D 0.714），但 E、S 两型预测过宽，读数不构成证据
2	一固组拒绝率 $\geq$ 三活组之半（0.456）则「一固不引起一致拒绝」撤回	未触及（0.042）。顺带判负一项：拒绝率随层级单调不成立（二固 0.143 $>$ 一固 0.042），拒绝作层级指标撤回
3	中级层若有 ≥ 3 例可指认的推翻，则固化维判据重写	零命中，通过。本轮唯一未被稀释的结果，但选池偏差排不掉
4	十九例若 ≥ 2 例判为一固，第二编降为十七例	0 例。接近同义反复，通过不构成证据，且判据由其中两例逼出又由那两例确认（循环，未解）

乙 本书已部分执行、须在新池上完成的（3条）

#	条款	状态
5	E 型排他式：在新池上跑， < 0.70 撤回	已执行：22/24 = 0.917（先过闸再挑的新池）。本书第一条自己掉下来过的预测
6	E 型第二次改写（翻译要不要新落脚处 / 公共部分有没有名目）：在第三个池上跑， < 0.80 则退回第一次改写	未执行。不得用补跑二那二十四例
7	S 型加「新单位由旧单位切出、旧名变总称」后重跑；八例中 ≥ 2 例不成立则撤回	未执行

丙 须由独立编码者执行的（6 条）

#	条款
8	微分形式 的固化维重判。若判为 S 固化，则预注册表的固化维指定有 ≥ 1 例错，须报告错误率并重跑真跑一
9	单纯形法／牛顿法／高斯消元 的层级重判（本已由入池闸挡下，本条改为核验闸的判定是否正确）
10	Hamilton 三元组 1830-43 ：是一固层碰撞退回，还是根本没有碰撞。判为后者则第 17.2 节撤回
11	希尔伯特空间 ：1904-1910 年的计是在场为裁判，还是根本不参与。判为后者则回到第一版的一阶判定
12	层 ：是否推翻了某条共有前提。若指出一条并通过验收，层升入三活层，第二编增为二十例，第八编全部重算
13	独立列一个一固层候选池 （先过闸再挑）。若与本书三十六例重合度 < 0.50 ，说明选池严重偏斜，第三、四编须重写

丁 须在本书之外取样执行的（3 条）

#	条款
14	逾越（重述形式） ：取本书未处理的 0 到 1 候选，编码「非法产物是否由算跑出」； < 0.60 则重述形式撤回。 并已加一条更尖锐的 ：若出现撞上位置为形或计的案例 ≥ 2 例，重述形式撤回
15	模型签字律 ：编码「合法化是否由一致性模型或构造完成」「该模型是否由计给出」；任一项 < 0.70 则降为倾向性描述
16	固化维的来源 （第 30 章机制）：编码「被换掉的维」与「此后子学科的固化维」；一致比例 < 0.70 则本章机制撤回，三层回落为三个并列名单

戊 两条不写成判负条款、但同样待办的

- 裁定一处归位不一致（统稿记录第五节）：被推翻前提的归位（本书计 13／形 4／算 2）与九门一百七十例真跑中数学那一栏（E 10／D 9／S 1）对不上。若裁定为两者测同一个量，本书十九例的归位表要重做，第二编补节全部重写。
- 交叉引用的脚本核对（约二百六十处，未逐条核）。

己 一句话

十六条里，本书自己执行了五条（甲四、乙一），其中判负两项、撤回一项、循环一处未解。其余十一条留给别人——而那十一条里，任何一条落下来，都会改写本书的某一编。

参考文献

分七类。凡在正文中作为**材料**（第 6.4 节规格：可引用的具体结果）引用的原始文献，列在第一类；史学与哲学的二手文献列在第二至六类；第七类是第 35 章为核查三处证据而查证的出处。

凡本书未能核对原件、只据二手转引者，条目后标 [转引]。凡真实性在史学上有争议者，标 [存疑] 并在第七类给出争议出处。

一 作为材料被引用的原始文献

Abel, N. H. (1826). Untersuchungen über die Reihe $1 + (m/1)x + \dots$ *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1, 311–339.

Bézout, É. (1779). *Théorie générale des équations algébriques*. Paris.

Bolyai, J. (1832). Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens. In F. Bolyai, *Tentamen*, Maros-Vásárhely.

Bombelli, R. (1572). *L'Algebra*. Bologna.

Borel, É. (1909). Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 27, 247–271.

Brahmagupta (628). *Brāhmasphuṭasiddhānta*. （据 Colebrooke 1817 英译本转引）[转引]

Cantor, G. (1874). Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 77, 258–262.

Cantor, G. (1883). *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Leipzig: Teubner.

Cardano, G. (1545). *Artis maginae sive de regulis algebraicis liber unus*. Nürnberg.

Cauchy, A.-L. (1821). *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*. Paris.

Cauchy, A.-L. (1815). Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir. *Journal de l'École polytechnique*, 10, 1–28.

Cayley, A. (1854). On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\Theta^n = 1$. *Philosophical Magazine*, 7, 40–47.

Cayley, A. (1858). A memoir on the theory of matrices. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 148, 17–37.

- Church, A. (1936). An unsolvable problem of elementary number theory. *American Journal of Mathematics*, 58, 345–363.
- Dedekind, R. (1871). Supplement X. In P. G. L. Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 2nd ed. Braunschweig: Vieweg.
- Dedekind, R. (1872). *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Braunschweig: Vieweg.
- Dedekind, R., & Weber, H. (1882). Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92, 181–290.
- Descartes, R. (1637). *La Géométrie*. Leiden.
- Dirac, P. A. M. (1930). *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford: Clarendon Press.
- Dirichlet, P. G. L. (1829). Sur la convergence des séries trigonométriques. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 4, 157–169.
- Dirichlet, P. G. L. (1837). Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen. *Repertorium der Physik*, 1, 152–174.
- Eilenberg, S., & Mac Lane, S. (1945). General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, 58, 231–294.
- Euclid. *Elements*. (据 Heath 1908 英译本)
- Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum*. Lausanne.
- Euler, L. (1770). *Vollständige Anleitung zur Algebra*. St. Petersburg.
- Fourier, J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*. Paris: Firmin Didot.
- Frobenius, G. (1878). Über lineare Substitutionen und bilineare Formen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 84, 1–63.
- Galois, É. (1846). Œuvres mathématiques (éd. J. Liouville). *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 11, 381–444.
- Gauss, C. F. (1801). *Disquisitiones arithmeticae*. Leipzig.
- Gauss, C. F. (1828). *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Göttingen.
- Gauss, C. F. (1831). Anzeige zu: Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda. *Göttingische gelehrte Anzeigen*.
- Gödel, K. (1930). Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37, 349–360.
- Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38, 173–198.
- Grandi, G. (1703). *Quadratura circuli et hyperbolae*. Pisa.
- Grassmann, H. (1844). *Die lineale Ausdehnungslehre*. Leipzig: Wigand.

- Hamilton, W. R. (1837). Theory of conjugate functions, or algebraic couples. *Transactions of the Royal Irish Academy*, 17, 293–422.
- Hamilton, W. R. (1844). On quaternions. *Philosophical Magazine*, 25, 489–495.
- Hankel, H. (1867). *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen*. Leipzig.
- Hausdorff, F. (1918). Dimension und äußeres Maß. *Mathematische Annalen*, 79, 157–179.
- Hensel, K. (1897). Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen. *Jahresbericht der DMV*, 6, 83–88.
- Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig: Teubner.
- Hilbert, D., & Ackermann, W. (1928). *Grundzüge der theoretischen Logik*. Berlin: Springer.
- Kolmogorov, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin: Springer.
- Kronecker, L. (1881). Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92, 1–122.
- Kummer, E. E. (1847). Zur Theorie der complexen Zahlen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 35, 319–326.
- Lagrange, J.-L. (1770–71). Réflexions sur la résolution algébrique des équations. *Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin*.
- Lagrange, J.-L. (1797). *Théorie des fonctions analytiques*. Paris.
- Leray, J. (1934). Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Mathematica*, 63, 193–248.
- Leray, J. (1946). L'anneau d'homologie d'une représentation. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 222, 1366–1368.
- Lobachevsky, N. I. (1829–30). О началах геометрии. *Казанский вестник*.
- Ostrowski, A. (1916). Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(xy)$. *Acta Mathematica*, 41, 271–284.
- Riemann, B. (1854/1868). Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. *Abhandlungen der Königlich Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 13, 133–150.
- Robinson, A. (1961). Non-standard analysis. *Indagationes Mathematicae*, 23, 432–440.
- Robinson, A. (1966). *Non-standard Analysis*. Amsterdam: North-Holland.
- Saccheri, G. (1733). *Euclides ab omni naevo vindicatus*. Milan.
- Schwartz, L. (1950–51). *Théorie des distributions*, 2 vols. Paris: Hermann.
- Sobolev, S. L. (1936). Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales. *Matematicheskii Sbornik*, 1(43), 39–72.

Turing, A. M. (1936). On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-42, 230–265.

von Neumann, J. (1932). *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Berlin: Springer.

Weyl, H. (1913). *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Leipzig: Teubner.

Zermelo, E. (1908). Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. *Mathematische Annalen*, 65, 261–281.

Grothendieck, A., & Dieudonné, J. (1960–67). Éléments de géométrie algébrique. *Publications mathématiques de l’IHÉS*, 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32.

二 数学哲学：本书的五位先行者

Cavaillès, J. (1938). *Méthode axiomatique et formalisme*. Paris: Hermann.

Crowe, M. J. (1975). Ten “laws” concerning patterns of change in the history of mathematics. *Historia Mathematica*, 2, 161–166.

Gillies, D. (ed.) (1992). *Revolutions in Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Grosholz, E. (2007). *Representation and Productive Ambiguity in Mathematics and the Sciences*. Oxford: Oxford University Press.

Hacking, I. (2014). *Why Is There Philosophy of Mathematics At All?* Cambridge: Cambridge University Press.

Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford: Oxford University Press.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Nagel, E. (1935). “Impossible numbers”: A chapter in the history of modern logic. *Studies in the History of Ideas*, 3, 429–474.

三 数学哲学：其余

Benacerraf, P. (1965). What numbers could not be. *Philosophical Review*, 74, 47–73.

Corfield, D. (2003). *Towards a Philosophy of Real Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Ferreirós, J. (2016). *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices*. Princeton: Princeton University Press.

Maddy, P. (1997). *Naturalism in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

Mancosu, P. (ed.) (2008). *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford: Oxford University Press.

Manders, K. (2008). The Euclidean diagram. In Mancosu (ed.), 80–133.

Marquis, J.-P. (2009). *From a Geometrical Point of View: A Study of the History and Philosophy of Category Theory*. Dordrecht: Springer.

Shapiro, S. (1997). *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. Oxford: Oxford University Press.

Wilson, M. (2006). *Wandering Significance: An Essay on Conceptual Behavior*. Oxford: Clarendon Press.

四 数学史：通史与工具

Bourbaki, N. (1960). *Éléments d'histoire des mathématiques*. Paris: Hermann.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

Wilder, R. L. (1968). *Evolution of Mathematical Concepts: An Elementary Study*. New York: Wiley.

MacTutor History of Mathematics Archive, University of St Andrews. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>

五 数学史：分案例专著（各章「最近占位者」）

Avigad, J. (2006). Methodology and metaphysics in the development of Dedekind's theory of ideals. In J. Ferreirós & J. Gray (eds.), *The Architecture of Modern Mathematics*, 159–186. Oxford: Oxford University Press.

Bottazzini, U. (1986). *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. New York: Springer.

Corry, L. (2004). *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, 2nd ed. Basel: Birkhäuser.

Crowe, M. J. (1967). *A History of Vector Analysis*. Notre Dame: University of Notre Dame Press.

Dauben, J. W. (1979). *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Dauben, J. W. (1995). *Abraham Robinson: The Creation of Nonstandard Analysis*. Princeton: Princeton University Press.

Davis, M. (2000). *The Universal Computer: The Road from Leibniz to Turing*. New York: Norton.

Dieudonné, J. (1985). *History of Algebraic Geometry*. Monterey: Wadsworth.

Edwards, H. M. (1977). *Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*. New York: Springer.

Edwards, H. M. (1980). The genesis of ideal theory. *Archive for History of Exact Sciences*, 23, 321–378.

Ehrhardt, C. (2012). *Itinéraire d'un texte mathématique: Réélaborations des écrits de Galois au XIXe siècle*. Paris: Hermann.

Ferreirós, J. (2007). *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*, 2nd ed. Basel: Birkhäuser.

Fowler, D. (1987). *The Mathematics of Plato's Academy: A New Reconstruction*. Oxford: Clarendon Press.

Gandy, R. (1988). The confluence of ideas in 1936. In R. Herken (ed.), *The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey*, 55–111. Oxford: Oxford University Press.

Grabiner, J. (1981). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. Cambridge, MA: MIT Press.

Gray, J. (1989). *Ideas of Space: Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic*, 2nd ed. Oxford: Clarendon Press.

Gray, J. (2007). *Worlds Out of Nothing: A Course in the History of Geometry in the 19th Century*. London: Springer.

Hochkirchen, T. (1999). *Die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Kontexte*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Kiernan, B. M. (1971). The development of Galois theory from Lagrange to Artin. *Archive for History of Exact Sciences*, 8, 40–154.

Knorr, W. (1975). *The Evolution of the Euclidean Elements*. Dordrecht: Reidel.

Krömer, R. (2007). *Tool and Object: A History and Philosophy of Category Theory*. Basel: Birkhäuser.

Laugwitz, D. (1999). *Bernhard Riemann 1826–1866: Turning Points in the Conception of Mathematics*. Boston: Birkhäuser.

Lützen, J. (1982). *The Prehistory of the Theory of Distributions*. New York: Springer.

Lützen, J. (2003). Between rigor and applications: Developments in the concept of function. In M. J. Nye (ed.), *The Cambridge History of Science*, vol. 5, 468–487.

McLarty, C. (2007). The rising sea: Grothendieck on simplicity and generality. In J. Gray & K. Parshall (eds.), *Episodes in the History of Modern Algebra*, 301–325. Providence: AMS.

Menninger, K. (1958). *Zahlwort und Ziffer*, 2nd ed. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Nahin, P. J. (1998). *An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$* . Princeton: Princeton University Press.

Pycior, H. M. (1976). *The Role of Sir William Rowan Hamilton in the Development of British Modern Algebra*. Ph.D. dissertation, Cornell University.

Scholz, E. (1980). *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*. Boston: Birkhäuser.

Schappacher, N. (2010). Rewriting points. In *Proceedings of the ICM 2010*.

Shafer, G., & Vovk, V. (2006). The sources of Kolmogorov's *Grundbegriffe*. *Statistical Science*, 21, 70–98.

Sieg, W. (1994). Mechanical procedures and mathematical experience. In A. George (ed.), *Mathematics and Mind*, 71–117. Oxford: Oxford University Press.

Sieg, W. (2009). On computability. In A. Irvine (ed.), *Philosophy of Mathematics*, 535–630. Amsterdam: Elsevier.

Torretti, R. (1978). *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*. Dordrecht: Reidel.

Ullrich, P. (1998). The genesis of Hensel's p-adic numbers. In *Charlemagne and His Heritage: 1200 Years of Civilization and Science in Europe*, vol. 2, 163–178. Turnhout: Brepols.

van der Waerden, B. L. (1976). Hamilton's discovery of quaternions. *Mathematics Magazine*, 49, 227–234.

von Plato, J. (1994). *Creating Modern Probability*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wussing, H. (1969). *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*, 16, 37–85.

六 构造主义与其拒绝谱系（第 26.5 节）

Bishop, E. (1977). Review of *Elementary Calculus* by H. J. Keisler. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83, 205–208.

Brouwer, L. E. J. (1918–19). Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. *Verhandelingen der KNAW*.

Troelstra, A. S., & van Dalen, D. (1988). *Constructivism in Mathematics*, 2 vols. Amsterdam: North-Holland.

van Dalen, D. (1999–2005). *Mystic, Geometer, and Intuitionist: The Life of L. E. J. Brouwer*, 2 vols. Oxford: Clarendon Press.

七 第 35 章证据核查所依据的出处

Gray, J. (1991). Did Poincaré say “set theory is a disease”? *The Mathematical Intelligencer*, 13(1), 19–22. [本书据此把该语标为存疑]

Mac Lane, S. (1997). The PNAS way back then. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 94, 5983–5985. [「general abstract nonsense」的自述出处]

Smith, C., & Wise, M. N. (1989). *Energy and Empire: A Biographical Study of Lord Kelvin*. Cambridge: Cambridge University Press. [Kelvin 1892 年致 Hayward 信的转引出处]

Mitchell, B. (1965). *Theory of Categories*. New York: Academic Press. [序言中关于范畴论受到的轻视]

参考文献·第二版增补

第一版七类原样沿用。第二版新增第八类（一固层各例的原始文献与史学专著）与第九类（分层、纲领与硬核的理论文献）。

体例同第一版：凡未核对原件、只据二手转引者标 [转引]；凡真实性在史学上有争议者标 [存疑]。

八 一固层各例（第三、四编）

E 固化产过程

Descartes, R. (1637). *La Géométrie*. Leiden. （已见第一类，此处标其在一固层的用途）

Fermat, P. de (1636/1679). *Ad locos planos et solidos isagoge*. In *Varia opera mathematica*. Toulouse.

Bos, H. J. M. (2001). *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. New York: Springer. [第 8.5 节最近占位者]

Mancosu, P. (1996). *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*. Oxford: Oxford University Press.

Klein, F. (1872). *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*（埃尔朗根纲领）. Erlangen: Deichert.

Hawkins, T. (1984). The Erlanger Programm of Felix Klein: Reflections on its place in the history of mathematics. *Historia Mathematica*, 11, 442–470.

Lebesgue, H. (1902). Intégrale, longueur, aire. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 7, 231–359.

Hawkins, T. (1975). *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Development*, 2nd ed. New York: Chelsea.

Leray, J. (1946). L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 29, 1–139.（谱序列；层见第一类）

Dantzig, G. B. (1963). *Linear Programming and Extensions*. Princeton: Princeton University Press.（单纯形法）

E 固化产单位

Fréchet, M. (1906). Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 22, 1–74.（度量空间）

Hausdorff, F. (1914). *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig: Veit.（拓扑空间）

Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, 3, 133–181.

Weber, H. (1893). Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie. *Mathematische Annalen*, 43, 521–549. (抽象群的通行定义)

Steinitz, E. (1910). Algebraische Theorie der Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 137, 167–309.

Noether, E. (1921). Idealtheorie in Ringbereichen. *Mathematische Annalen*, 83, 24–66.

Birkhoff, G. (1940). *Lattice Theory*. Providence: AMS.

Hilbert, D. (1904–1910). Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (六篇). *Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften*. [第 19.1 节: 希尔伯特空间]

Fischer, E. (1907). Sur la convergence en moyenne. *Comptes rendus*, 144, 1022–1024.

Riesz, F. (1907). Sur les systèmes orthogonaux de fonctions. *Comptes rendus*, 144, 615–619.

Bernkopf, M. (1966). The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory. *Archive for History of Exact Sciences*, 3, 1–96. [第 19.1 节最近占位者]

Houzel, C. (1998). Histoire de la théorie des faisceaux. In *Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XXe siècle*, 101–119. Paris: SMF. [第 19.2 节: 层]

S 固化·产单位

Seidel, P. L. (1847). Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen. *Abhandlungen der Bayerischen Akademie*, 5, 381–393.

Stokes, G. G. (1849). On the critical values of the sums of periodic series. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8, 533–583.

Baire, R. (1899). Sur les fonctions de variables réelles. *Annali di Matematica*, 3, 1–123. (半连续)

Borel, É. (1895). Sur quelques points de la théorie des fonctions. *Annales scientifiques de l'ENS*, 12, 9–55. (覆盖紧的雏形)

Sobolev, S. L. (1938). Sur un théorème d'analyse fonctionnelle. *Matematicheskii Sbornik*, 4(46), 471–497.

D 固化·产在场者

Frobenius, G. (1878). Über lineare Substitutionen und bilineare Formen. (已见第一类)

Cauchy, A.-L. (1829). Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires. *Exercices de mathématiques*, 4. (特征值)

Sylvester, J. J. (1851–52). On the principles of the calculus of forms. *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*. (不变量)

Ricci, G., & Levi-Civita, T. (1900). Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. *Mathematische Annalen*, 54, 125–201.

Cartan, É. (1899). Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff. *Annales scientifiques de l'ENS*, 16, 239–332. (微分形式)

Hawkins, T. (1977). Another look at Cayley and the theory of matrices. *Archives internationales d'histoire des sciences*, 27, 82–112. [第 12.8 节最近占位者]

Hawkins, T. (2013). *The Mathematics of Frobenius in Context*. New York: Springer.

Parshall, K. H. (1989). Toward a history of nineteenth-century invariant theory. In D. Rowe & J. McCleary (eds.), *The History of Modern Mathematics*, vol. 1, 157–206. Boston: Academic Press.

二固层对照组

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8, 338–353. (模糊集；其受到的拒绝见第 23.2 节)

九 分层、纲领与硬核

Lakatos, I. (1970). Falsification and the methodology of scientific research programmes. In I. Lakatos & A. Musgrave (eds.), *Criticism and the Growth of Knowledge*, 91–196. Cambridge: Cambridge University Press. [第 26.2 节：硬核=固化维]

Kuhn, T. S. (1962/1970). *The Structure of Scientific Revolutions*, 2nd ed. Chicago: University of Chicago Press. [第 26.1 节]

Laudan, L. (1977). *Progress and Its Problems*. Berkeley: University of California Press.

Hacking, I. (2002). *Historical Ontology*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Netz, R. (1999). *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press. (第 7 章不可通约量的史料背景)

补跑记录 入池闸的执行，及其砸中的东西

第 20.4 节把「给候选池加那道闸」列为四件待办里最省力的一件。执行了，而它不省力——它砸中了本书自己的起点。

本篇按第一版第 6.8 节纪律三（不利于本书的读数写进正文，不放脚注）写在正文，且置于统稿记录之前，以免读者读完全书才看到它。

一 闸的内容与执行结果

闸（第 19.3 节、附录三第 5 问）：

它是一个概念（一类东西的名目），还是一条关于既有概念的陈述（定理）、一种做法（方法）、一套写法（记号）？后三者不入池。

闸的来源：第一版第 33.9 节明列本书不解释的三类——定理的发生、方法的发生、记号的发生，各自需要另一本书。而第一版自己把一条定理（椭圆函数的双周期性）收进了候选池，第 19.3 节查出这一处，立为第 19 条欠账。

执行结果：

组	总数	挡下	入池
三活层	19	0	19
一固层	40	4	36
二固层对照组	7	0	7

被挡下的四例，全部出自 E 固化·产过程那一族：

例	判为	理由
解析几何	方法	它是一个领域的名字与一套做数学的方式，不是一类东西的名目
埃尔朗根纲领	方法	纲领即方法论，它规定「怎样组织几何」，本身不进账本
函数域数域平行处理	方法	一套类比的做法
单纯形法／牛顿法／高斯消元	方法	求解程序

二 它砸中的的是本书的起点

导论第 7.1 节——第二版重写的全部理由——开头第一句是：

一阶那一档里坐着四十三个对象。其中有解析几何，也有半群。

整节的论证靠这一对对照撑着：两件事量级差着数量级，而第一版的两档装不下这个差别。

而闸把解析几何挡在了池外。

若解析几何根本不是一个概念，那么它与半群不同格这件事，不构成给概念分层的理由——它只说明本书的候选池里混进了一个不该在的东西。

这是本书两版中最难堪的一处：第二版重写的动机例，被第二版自己的闸挡下了。

三 四例被挡下的方式是一致的，这一点要紧

必须同时记下另一件事，它使这一处不是纯粹的塌方。

被挡下的四例，构成一个干净的类：它们全部是「做数学的方式」——一个领域、一个纲领、一套类比做法、一批求解程序。它们不进账本。你可以用它们证定理，但你不能对它们证定理。

而 E 固化·产过程那一族剩下的五例，全部是可以被证定理的对象：

傅里叶变换（有反演定理、Plancherel 定理） | 拉普拉斯变换（有存在域、卷积定理） | 生成函数（有形式幂级数环上的性质） | 勒贝格积分（有收敛定理） | 谱序列（有收敛性与退化判据）。

于是闸切出的是一条实质的界，不是任意的：

「过程」有两种：本身成为研究对象的过程（进账本，是概念），与做数学的方式（不进账本，是方法）。一固层产的是前者。后者不属于本书的题域。

这条区分是闸逼出来的，第二版正文里没有。第 4.5 节的三型产物表把「过程」当作一个单一的产物类型，而它其实是两个。

四 修订要求（三条，已全部执行）

其一（已执行），第 4.5 节的三型产物表加限定：E 固化产单位或可被证定理的过程；做数学的方式不是产物。

其二（已执行），导论第 7.1 节改写：动机例不能用解析几何。可用的替代是勒贝格积分与半群——勒贝格积分是一个可被证定理的对象（收敛定理是关于它的），它与半群同格同样荒谬，而它过得了闸。第 7.1 节的论证不因换例而失效，但那一节必须重写。

其三（已执行），第三编第 8 章改写为附论：它不再是一固层的一个案例，而是一个说明闸为什么必要的边界讨论。第 9 章的合章由九例减为五例。

五 闸后重算：三层的数字变了哪些

项	闸前	闸后
一固层例数	40	36
E 固化·产过程	9	5
E 固化·产单位	16	16
S 固化·产单位	8	8
D 固化·产在场者	7	7
E 型命中率	25/25 = 1.000	21/21 = 1.000
S 型命中率	8/8 = 1.000	8/8 = 1.000
D 型命中率	5/7 = 0.714	5/7 = 0.714

三型产物的命中率一个也没变，因为被挡下的四例原本全部是「命中」。

这件事本身是一处读数，而且不利：一个把四个原本命中的例子拿掉、而命中率纹丝不动的检验，说明这个检验对这一族根本没有分辨力。它与第 22.2 节的诊断是同一件事的第二次出现——E 型的预测太宽，不管池里有什么都会命中。

真跑二的三层读数须重算（一固组分母 $40-36$ ），但四个被挡下的例子在命名与拒绝两栏均为 0，故：一固组否定命名率仍为 0.000，否定拒绝率由 0.037 ($1.5/40$) 变为 **0.042** ($1.5/36$)。判负线 0.456 仍未触及。

真跑三仍为零命中（四例原本也是零）。

六 这次补跑的账

产出三样：

1. 一条实质的新区分（过程有两种，第三节），第二版正文里没有。
2. 三条已写死的修订要求（第四节）。
3. 一处证明检验无分辨力的读数（第五节）。

代价一样：第二版的动机例作废，导论第 7.1 节必须重写。

而这三样产出与那一样代价，都由同一个动作得到——执行一件被本书自己标为「最省力」的待办。第一版第 37.10 节说过：本书能给的最好的东西落在判负那一侧。这是它的第三次兑现，也是最贵的一次。

七 未做的一件

四例被挡下之后，须问一句：候选池里还有没有别的东西过不了闸？

本次只对已在池中的四十七例执行了闸。而闸的正确用法是在入池之前执行——即从数学史里挑候选时就先过闸。本书两版的候选池都是先挑后闸的，因此这次执行只能删，不能补。

被闸删掉的位置上，本应有别的东西。那些东西是什么，本书不知道，因为它们从未被挑进来过。

这一条留给下一个人，并写死一条判负：

由不知道本书结论的人，先过闸再挑，独立列一个一固层候选池。若新池与本书的三十六例重合度 < 0.50 ，说明本书的选池由「先挑后闸」严重偏斜，第三、四编须重写。

补跑记录之二 E 型排他式预测，与一个先过闸再挑的新池

第 20.4 节把「把 E 型预测改成排他形式并在新候选池上跑」列为四件待办里最值钱的一件。第 22.5 节写死了改写要求与「不得用本轮那四十例」的限制。补跑记录第七节又留下一件未做的事：闸的正确用法是入池之前执行，而本书两版的池都是先挑后闸。

本篇把这两件一起做了：先过闸，再挑一个与原池不相交的新池，用排他式预测跑一遍。

一 排他式预测（写在编码之前）

第 4.5 节原来的 E 型预测是析取式：产单位或过程。第 22.2 节诊断过它的毛病——三种产物类型里占了两种，命中率接近 1 是必然的，与机制是否成立无关。

改写后的排他式：

若两家争的是「翻译规则」（各有对方处理不了的问题，需要架一条对应）－产过程。若两家争的是「实例的公共部分」（多个互不相似的实例，需要抽一个名目）－产单位。

每一例的「争的是什么」事先指定，产物是编码结果。两者不一致即为未命中。

二 先过闸再挑：新池的建法

挑出候选三十四例，先过闸（附录三第 5 问：它是概念，还是定理／方法／记号？），闸挡下十例：

挡下	判为
公理化方法 构造性方法 反证法 Bourbaki 结构纲领 Hilbert 纲领	方法
Euler 恒等式 Stokes 公式 指标定理	定理
Einstein 求和约定 大 O 记号	记号

入池二十四例，与第三、四编的三十六例不相交。

- 事先指定「争翻译规则」的十二例：梅林变换 | Z 变换 | 小波变换 | Radon 变换 | Legendre 变换 | 卷积 | 磨光（正则化算子） | 解析延拓 | 留数计算 | Newton 多边形 | 母函数的 Borel 求和 | Gelfand 变换
- 事先指定「争实例公共部分」的十二例：拓扑群 | 李代数 | 纤维丛 | 联络 | Banach 代数 | C*代数 | von Neumann 代数 | 测度代数 | 弱拓扑 | 一致收敛拓扑 | 赋范空间的对偶 | 凸体

三 读数

事先指定	预测	命中	比率	判定
争翻译规则	产过程	11/12	0.917	通过
争实例公共部分	产单位	11/12	0.917	通过
合计		22/24	0.917	通过

判负线 0.70，未触及。

与旧式的对照：同一个池上，旧的析取式预测命中率必然是 $24/24=1.000$ （它覆盖两种产物）。新式 0.917。信息量差 0.083——这个差就是改写换来的全部分辨力。

差看着小，但性质不同：旧式的 1.000 是定义使然，新式的 0.917 是可以掉下来的。事实上它掉了两次。

四 两处未命中

其一，Gelfand 变换：事先指定为「争翻译规则」（把交换 Banach 代数的元素译成谱空间上的函数），预测产过程，实产单位——它真正落进账本的是谱空间（极大理想空间）这个东西，而不是那条变换本身。

这一处提示排他式的一个漏洞：当一条翻译足够好时，它会顺带造出翻译的目标空间，而目标空间是一个单位。换言之，争翻译规则也可能产单位，只要那条翻译需要一个新的落脚处。

其二，凸体：事先指定为「争实例公共部分」（各种凸集合的公共部分），预测产单位，实产过程——凸性研究落进账本的多是方法与不等式（Brunn-Minkowski、混合体积的计算），而「凸体」这个名目本身是既有的、几乎不需要抽。

这一处提示另一个漏洞：当实例的公共部分早已有名字时，抽名目这个动作产不出新单位，产出的是使用它的过程。

两处未命中的方向相反，各堵一个漏洞。这比两处同向的未命中更有用——它说明排他式的两条分支各自都有边界，而不是整条预测偏在一边。

五 由此得的第三次改写（写死，留给下一批）

E 型排他式（第二次改写）：争翻译规则 且 翻译不需要新的落脚处 $\rightarrow$ 产过程；争翻译规则 且 翻译需要一个新的落脚处 $\rightarrow$ 产单位（那个落脚处）；争实例公共部分 且 公共部分尚无名目 $\rightarrow$ 产单位；争实例公共部分 且 公共部分已有名目 $\rightarrow$ 产过程（使用它的方法）。

判负条款：在第三个新池（与前两池均不相交）上跑，命中率 < 0.80 则第二次改写撤回，退回本篇第一节的第一次改写。

本次不得用本篇这二十四例检验第二次改写——它是由这两处未命中提出的，同一批数据不能既提出又确认（第一版第 26.4 节的标准）。

六 这次补跑还上了什么，欠下了什么

还上两笔：

1. 第 20.4 节的第 2 件（最值钱那件）已执行：E 型预测改成排他形式，在新池上跑出 0.917，它第一次成为一条可以掉下来的预测。
2. 补跑记录第七节那件未做的事已执行：这是本书两版中第一个先过闸再挑的池。闸在入池前挡下十例（五方法、三定理、二记号），而这十例若按旧办法（先挑后闸）本会先进池、再被删。

欠下三笔：

- 1. 仍是单人编码。事先指定与产物编码都由本书作者做，污染不可消除。判负可信，判正不可信——本次两处未命中属可信的那一侧。
- 2. 新池仍是作者挑的。「先过闸」改善的是入池标准，不改善选池偏差。补跑记录第七节那条判负条款（由不知道本书结论的人独立列池，重合度 < 0.50 则第三、四编须重写）仍然有效且仍未执行。
- 3. 第二次改写未检验（第五节已写死条款）。

七 对正文的两处修订要求

其一，第 4.5 节的三型产物表：E 型一栏改为本篇第一节的排他式，并注明读数 $22/24=0.917$ （新池）与第二次改写待检验。旧的析取式读数 $21/21=1.000$ 保留在表下，标为「无分辨力，不作证据」。

其二，第 22.2 节（真跑一的诊断）：加一句——改写已执行，见补跑记录之二；改写后的预测在新池上掉了两次，两次方向相反。

一句结算：本书两版做过的检验里，这是第一条自己掉下来过的预测。在此之前，所有「通过」的读数不是判据太宽（E 型、S 型），就是接近同义反复（真跑四），要么是零命中而选池可能保证了那个零（真跑三）。0.917 比之前那些 1.000 值钱，正因为它不是 1.000。

统稿记录·第二版

本篇不属于正文。它记录第二版的编次、与第一版的差异、以及一致性核查的结果。

一 与第一版的差异总账

项	第一版	第二版
分档	二档（二阶／一阶）	三层（三活／一固／二固），按参战维数
装置	六章	七章，新增第 4 章固化维；原第 5 章拆为第 5、6 章
案例编	二至四编，十九章	第二编，十九章原样＋十九节固化维核验补节
中级层	无（散在「一阶」四十三例中）	第三、四编，四十例，按固化维分三型
二固层	与中级混在一起	第五编，独立三章
三层之间	无	第六编，第二版真正的新内容
真跑	三条（判负两条、一条未设检验）	四条，全部重跑；第一版读数作废

项	第一版	第二版
承重物	三件，剩一件半	一件半+一件新的（三层是三种不同的东西）
欠账	十四条，偿两条	十七条 （十二条带过、五条新增）
结语	《谁也不要的那样东西》	同题 加后半句 （下两层是谁都要的）
篇幅	12.48 万汉字／186 页	10.52 万汉字／160 页

篇幅反而变小，原因有二：第一版第 30 章的一阶名录（列举四十三例并逐类交代）在第二版被拆进第三、四、五编并改写为分析，去掉了列举；第一版第五编的三条模式在第二版被降级并压缩（两条判负的读数作废，不再逐条展开）。

二 沿用未改的部分

- 十九章案例正文一字未改（含第一版第 36.5 节增补的材料产出／撞上分填）。
- 导论一至六节原样，加第七节。
- 材料来源规则原样，含第一版第 36.3 节那次放松；作用域缩小到三活层。
- 参考文献七类原样，加第八、九类。
- 附录二（命名与拒绝记录表）原样，加一列「层」；三处存疑标注沿用。
- 执行纪律原样：固化维事先指定 | 可两判取不利的一判 | 每章最弱处 | 不利史料写正文。

三 第二版新增的判负条款清单（八条，全部未跑）

#	条款	记在哪
1	三型产物：任一型 < 0.70 撤回该型；两型 < 0.70 整条撤回	21.4（已跑，全过，但 E/S 型无信息量）
2	E 型预测改排他形式后重跑， 不得用本轮四十例	22.5
3	S 型加「由旧单位切出、旧名变总称」后重跑	11.4
4	微分形式的固化维由独立编码者重判	12.6
5	单纯形法／牛顿法／高斯消元的层级由独立编码者重判	16.2
6	Hamilton 三元组 1830-43 是一固退回还是根本无碰撞	17.2
7	希尔伯特空间的计是裁判还是不参与	19.1
8	层是否推翻了某条共有前提	19.2
9	「被换掉的维」与「此后子学科的固化维」一致比例 <	30.5

#	条款	记在哪
10	0.70 则第 30 章机制撤回 独立候选池重跑真跑三	24.1

十条中九条未跑。第 1 条跑了而其中两型无信息量。

四 一致性核查（九项）

1. 三层名称与措辞。全书用「三活／一固／二固」与「参战维数」，不用「创新度几分」。核过，正文零处出现分数式表述。
2. 承重物状态一致。第 20.1 节、第 24.4 节、结语三处的表述一致：第一版剩一件半，第二版加一件新的。核过。
3. 判负执行落实。拒绝作层级指标撤回（23.4）→ 第九编未使用，核过。
4. 第一版判负结论不得直接引用。核过：第 23.3 节明写名字化石律的第一版判负读数在第二版作废，第二版不重设条款并说明理由。
5. 三例重判落实。希尔伯特空间（19.1）、层（19.2）、椭圆函数双周期（19.3）三处的结论在附录一总表中一致。核过。
6. 循环已披露。新判据由四元数与分数维逼出、又由这两例确认——在 21.2、24.2、补节第 10 章、补节结算三处均已写明。核过。
7. 有利判法的标记。第二版三处（9.5 单纯形法等归一固、11.5 Sobolev 保留在 S 族、补节第 21 章群继承第一版那次），全部标明。核过。
8. 交叉引用。约二百六十处，未逐条核对——与第一版同一处欠账，须在排版时用脚本核。
9. 数字一致。关键数字：19／40／7（三层例数） | 1.000／1.000／0.714（三型产物） | 0.353／0.000／0.000（否定命名） | 0.912／0.037／0.143（否定拒绝） | 13／4／2（被推翻前提所属位置） | 0/40（中级层可指认推翻）。全书一致，核过。

五 一处交用户裁的不一致（补节结算第二节）

第二编补节做完后数出：被推翻的共有前提，计 13／形 4／算 2。

这与九门一百七十例真跑中数学那一栏（E 10／D 9／S 1）对不上，D 那一列差得最远。两处的归位规则不同：

- 本书：按「被推翻的前提规定了什么」归位。
- 那一边：按「在场者-E、单位与过程-D、显露-S」归位。

两套规则至少有一套要改，或者两者测的根本不是同一个量。本书不擅自裁定。

这一处若裁定为「两者测的是同一个量」，则本书的十九例归位表要重做，第二编补节全部重写。

六 尚未做的五件

1. 独立编码（第一版列第一优先，第二版仍是）。
2. 执行第三节那九条未跑的判负条款。
3. 给候选池加「先判它是不是一个概念」那道闸，重跑入池（第 19 条欠账，最省力）。
4. 交叉引用的脚本核对。
5. 裁定第五节那处不一致。

第 3 件最省力，第 1 件最贵，第 2 件中的第 2 条最值钱。

七 书号与出版

德麦国际专著第 107 号 | ISBN 979-8-90690-042-5 | US\$21.00 | 160 页 | 2026 年 9 月第二版。

ISBN 042-5 于站点仓库 grep 查重零命中，校验位自算 5（算法以 040-1、058-6 两例反验通过）。第一版未上站，故不存在作废与改号问题，书号沿用。

上站前仍差两件：042-5 的 Bowker 台账登记与真 EAN-13 条码（后封条码框现为占位）；落地页 </books/m/107/>。