SDE UNIVERSES
德麦国际专著 · 第 409 号

学了，为什么没学会

教育的产品是结晶

AI 时代，为什么学了却没学会



王德生　著

德麦国际出版社
Demai International Press

德麦国际专著 · 第 409 号

教育的产品是结晶

AI 时代，为什么学了却没学会

王德生　著

德麦国际出版社
Demai International Press · Singapore

出　版　信　息

书名	《教育的产品是结晶——AI 时代，为什么学了却没学会》
著者	王德生
执笔	王德生立题并给定口径；文字在 AI 协作下成稿，统稿、审校、三审与排版由 Claude 执笔
丛书	SDE 应用符号学十二套 · 应用一
出版	德麦国际出版社（Demai International Press）· 新加坡
编号	德麦国际专著 第 409 号
ISBN	979-8-90690-409-6
定价	US$23.00
开本	170 mm × 240 mm
字数	约 25 万字
版次	2026 年 10 月第 1 版

AI 协作声明：本书由王德生立题，并给定全书口径——学习是特征纠缠的建立，记忆是特征纠缠的维持，学会是特征纠缠的粒子化，即符号发生；各章文字在作者口径下由 AI（Claude）组织多位写作智能体按大纲并行成稿，经统稿、审校与初审、复审、终审三道审读定稿。书中人物均为综合人物，不指向任何真人真校；所引研究经检索核对，仍待核对原书原刊之处逐条列于附录三；第 21 章的可推翻条件与实验设计只写设计，不含任何编造的结果。

全书结构：前言；导读；第一编（第 1—3 章）“都会”与“会了”：三种假会的现场；第二编（第 4—6 章）前人对在哪里；第三编（第 7—9 章）三段账：学习、记忆、学会；第四编（第 10—12 章）建立的三个条件，逐条讲；第五编（第 13—15 章）三个入口：学不进有三种；第六编（第 16—17 章）教室之外：家里和职场；第七编（第 18—20 章）重新设计：课堂、作业、评价；第八编（第 21—22 章）检验与收束；结语；参考书目；附录一至四；后记。

版权所有　侵权必究

教育的产品不是答案，是结晶。

— 本书判词

作者介绍

王德生，SDE（显露 Show · 差异序列 Difference · 特征纠缠 Entanglement）本体论思想体系的创立者，德麦国际（Demai International Pte. Ltd.，新加坡）首席执行官。他生长于中国农村，1990 年进入湘潭大学，后在中国科学院获计算数学博士学位，并在中国科学院从事博士后研究；此后在英国斯旺西大学、新加坡南洋理工大学工作，早年的研究方向是 Voronoi 图、Delaunay 剖分、质心 Voronoi 剖分与有限元方法，2005 年起定居新加坡。

他的思想体系走过四站：2017 年起的“三视角”，2022 年起的“321 智慧”，2024 年起的 SIO 本体论，2026 年起的 SDE 本体论。他把“世界不是被发现的，而是发生的”这一判断带进各个领域；本书是“SDE 应用符号学十二套”的第一本，落在学习这件事上：答案可以转手，纠缠不能代建，教育的产品不是答案，是结晶。

前言

一份全对的作业，和一张空白的小测卷

◆ 一、周日晚上十点半

新加坡，宏茂桥的一套组屋。周日晚上十点半，沈知远把数学作业摊在饭桌上，拍照上传到学校的作业平台。他十四岁，读初二，新加坡叫 Secondary 2。这周的作业是因式分解，二十道题，从 $x^2 + 5x + 6$ 一路做到 $6x^2 - 7x - 3$。二十道，全对。

妈妈林佩君在客厅另一头对账。她四十一岁，在一家物流公司做会计，月底这几天常把工作带回家。她抬头看了一眼，儿子的作业本一页一页都写满了，字也工整。她说了句“不错”，又低下头去。她不知道这份作业是怎么写成的。也不需要知道什么秘密：沈知远没有抄同学的，也没有找人代写。他做的事，全班一半的同学都在做。

他把每道题拍下来，交给手机上的 AI 应用。应用回一份分步解答：先看首项系数，再找两个数，乘起来等于什么、加起来等于什么；然后画一个十字，最后写成两个括号相乘。每一步都有一句解释，语气和气，条理清楚。他读一遍，点点头，觉得“原来如此”。然后合上手机，用自己的笔、自己的字，把步骤写到本子上。有几道他还特意换了个写法，免得和解答一模一样。二十道题，用了一个半小时。每一道他都看懂了。

◆ 二、周一早上的二十分钟

周一第二节是数学课。老师说，上课前先做一个小测，五道题，二十分钟，不计分，只是看看大家周末学得怎么样。小测卷发下来。第一题是 $3x^2 - 10x + 8$。

沈知远看着这道题。它和昨晚的第十四题是同一类，连系数的大小都差不多。他知道该画一个十字，可是十字的四个角里该填什么，他想不起来。他记得昨晚那个解答里有一句“找两个数”，可是要找的是哪两个数、它们和 3、和 8 是什么关系，他说不出来。

他试着回想昨晚手机屏幕上的样子。他记得那个解答分成五步，记得第三步底下有一个灰色的小框，框里画着十字；他甚至记得那个十字是蓝色的。可是框里填的是哪几个数，为什么是那几个数，屏幕上的那一块，在他脑子里是空的。

他能想起解答长什么样，却想不起解答说了什么。

他又试着从头推。$3x^2$ 拆成 $3x$ 和 x，这一步他会。8 拆成什么？1 和 8，2 和 4，还是要带负号？中间那个 $-10x$ 该怎么凑出来？他写下 $(3x - 2)(x - 4)$，乘开一验，中间项是 $-14x$，不对。再换 $(3x - 4)(x - 2)$，乘开一算，中间项好像对上了。可是他不敢确定这是碰上的，还是本该这样找。第一题就花掉了八分钟。

昨晚的十四题，他是怎么一下就做对的？他想不起来。其实昨晚他也没有“一下就做对”，是解答先写出了对的那一组，他看了一眼，觉得合理，就抄了下来。那一组数是怎么挑出来的，他从来没有自己挑过。他跳到第二题，一样。第三题，一样。

二十分钟到了，他交上去一张几乎空白的卷子。第一题底下画了半个十字，四个角都空着。这一天放学，老师在作业平台上给他留了一句话：“周末的作业很好。小测我们下周再聊聊。”

◆ 三、“你昨晚不是都会吗”

周一晚上，林佩君看到了老师的留言，也看到了那张拍下来的小测卷。她把儿子叫到饭桌边，问：“你昨晚不是都会吗？”沈知远低着头，过了一会儿说：“我昨晚都看懂了。”

这一句话，是本书的起点。他没有说谎。昨晚他的确每一道都看懂了。那种“原来如此”的感觉是真的，点头也是真的。可是到了周一早上，同样的题摆在面前，那份“懂”一点也没有剩下。

林佩君是会计。她这一行有一句老话：账面平了，不等于钱在。一张报表可以借贷相等、处处对得上，可是银行户头里的钱，要到月底对一次流水才知道在不在。她看着儿子的作业本，忽然觉得这就是一张做平了的报表。二十道题，每一道借贷相等。可是钱，不在他身上。

她想起自己刚入行的那一年。那时候她在一家小公司跟着老会计学做账。有一个月末，试算表怎么也不平，差了 540 块。她从下午翻到晚上，一张凭证一张凭证地对，还是找不到。老会计走过来，只说了一句：“差额能被 9 整除，先看看是不是哪两个数字写颠倒了。”她低头一算，540 除以 9，正好 60。再一查，有一笔 1,280 被她记成了 1,820。

这件事过去快二十年了，她到今天还记得。不是记得那句口诀，是记得那个下午：账不平，她翻了几个钟头，越翻越急。最后那句话一落下来，几样原来散着的东西忽然接上了。数字颠倒、差额、9 的倍数，从此在她身上是一件事。后

来她带新人，遇到账不平，第一个想到的就是这个。她当年会的东西，是在一个账不平的下午里长出来的。她儿子昨晚的作业，一处不平的地方也没有。

◆ 四、这一晚问出的三个问题

这一晚，在沈知远家的饭桌上，问出了三个问题。它们也是本书要回答的三个问题。**第一问：看懂了和学会了，差在哪里？** 沈知远说“我看懂了”，林佩君问“你不是会吗”，两个人用的是两个词，指的却好像是同一件事。日常里人们也常这样混着说：“学过了”“记得”“会了”“懂了”，听起来都差不多。

林佩君自己在公司也这样说话。两个月前公司换了新的报销系统，培训那天她听完了，回来跟同事说“我学过了”。月底第一次自己填，她卡在一个下拉菜单上，翻了半天培训的幻灯片才找到。那时候她说的是“我记得培训讲过的”。又过了一个月，她不用想就能填完，这时候她才说“我会了”。“学过了”“记得”“会了”，三个词在她身上，其实隔着两个月。

周一早上的那张空白卷子也说明，它们不是一回事。看懂了，还可以什么都写不出来。那么差的到底是什么？是差了几成功夫，还是根本差了一件事？

第二问：为什么越努力、越有工具，留下的越少？ 沈知远并没有偷懒。他花了一个半小时，一道道读，一道道写。他手边的工具，也比他妈妈当年的好得多。林佩君读初二时，不会做的题只能空着，等第二天问老师，或者翻到书后面，找那几行简短的答案。

再往后，有了厚厚的习题解析书，每道题后面都印着详细步骤。再往后，有了搜题软件，拍一下就能找到网上别人做过的同一道题。到沈知远这一代，连“同一道题”都不必找了。AI 当场给你现做一份解答，题目换了数字也不要紧，它照样一步步写出来，还会问你“还有哪里不明白吗”。三十年里，答案从

稀缺变成了免费。今天的工具几秒钟就给出步骤，还附带解释。按理说，工具越好，学得越多。

可是留下来的，反而少了。林佩君当年空着的那道题，第二天老师讲完，她至今还记得自己是在哪一步卡住的。沈知远昨晚一道也没有空着，到今天一道也没有留下。

这不是一个家庭的事。在上海、在河北、在新加坡，许多家庭的饭桌上都有这样一个晚上。还有另一种晚上：孩子刷了几百道同类的题，见到题型就能套公式，换一种问法却全不会。还有第三种：孩子背了一整本公式，考完两周再问，忘得干干净净。三种晚上，孩子都很努力，都觉得自己会了。

第三问：教室该怎么改？ 如果“看懂”不等于“学会”，那么讲得越清楚的课，未必越好；作业做得越全对，未必越好；分数越高，也未必越好。老师该怎么上课？作业该怎么留？考试该怎么考？家长坐在孩子旁边，该说什么、不该说什么？AI 已经在每个孩子的口袋里了，它该放在哪里？这些问题，都要等前两个问题答清楚，才答得出来。

过去一百多年，学校大体是围着“答案稀缺”设计的。老师手里有答案，课本里有答案，学生没有。所以学生要来学校、要听讲、要做题、要考试，考的是你能不能把答案拿出来。这套设计在答案稀缺的年代很合理。

可是今天答案不稀缺了。一个初二的孩子，口袋里装着一台随叫随到、什么题都肯解的机器。如果学校还是只管发答案、只考能不能拿出答案，那它发的东西，孩子在家里一拍就有；它考的东西，孩子在家里一拍也能交上去。稀缺的东西换了。以前稀缺的是答案，现在稀缺的，是答案在一个人身上真正长成的那一下。教室要改，是因为它要守的东西换了。

◆ 五、本书不说什么

在往下讲之前，先把几件事说在前面，免得读偏。本书不反对 AI。后面会讲到，AI 用得对，可以是迄今最好的陪练和同伴。问题不在工具好不好，在工具替学的人做掉了哪一步。本书也不反对刷题。练习有它实打实的用处，研究也一再证明，反复提取确实能帮人记住。问题在刷到哪一步就停了。

本书更不是在责怪孩子。沈知远那一晚做的每一件事，都很合理：有不会的题，就去找答案；找到了，就读懂；读懂了，就写下来。错不在他哪一步做错了，在这一整套做法，本来就走不到“学会”那里。

还有一件事：书里出现的人，沈知远、林佩君，后面各章的顾一鸣、赵思琪、周振华，都是综合人物。他们的晚上是许多家庭的晚上拼起来的，不指向任何一个真人。

◆ 六、先亮出三句话

本书的回答，可以先压成三句话。**学习，是土（特征纠缠）的建立。**“土”是本书的一个大白话词。一个人学一样东西，手上原本有几个散着的特征，比如“3”“8”“乘起来”“加起来”“负号”。学，就是把它们拆开、重新接起来，接成彼此牵连、动一处就牵动别处的样子。这样接起来的，就叫纠缠。学习，就是这条纠缠在学的人身上建起来。

记忆，是纠缠的维持。建起来的纠缠会松。记忆不是把东西存进一个抽屉，是让这条纠缠不散。不用了，它就慢慢松开；松了，没断，再用一次，它就又紧一些。

学会，是纠缠的粒子化。 纠缠维持住了，还不等于学会。要等到它结成一颗粒子：换个问法它还在，不靠提示能说成一整件事，离了书和老师也立得住。这一下，本书叫“结晶”，也叫一个符号的发生。

拿这三句话回头看沈知远的那一晚，就看得清他停在哪里了。那个 AI 解答，把 3、8、十字、两个括号，全都摆在了他眼前。这些特征在场，挨在一起，被解答一条线串着，所以他觉得“懂”。可是它们没有被拆开、没有被他自己重新接起来。串着它们的那条线，是解答的，不是他的。周一早上，解答撤掉了，线一抽，珠子就散了。这就是本书说的第一种假会：看懂型。它停在学习还没有开始的地方。

再拿这三句话看林佩君那个账不平的下午，差别就出来了。那个下午，她先有一处对不上：试算表差了 540 块，她以为自己都记对了，账却说没有。这是落差。然后她自己去翻、去找，一张张对，几个钟头的力气是她自己付的。最后老会计在旁边说了一句，托了她一把。

三样都有：一处对不上，一个托得住的人，她自己付的力气。于是“数字颠倒”和“9 的倍数”在她身上接成了一件事，这是建立。之后她每个月末都要对账，这件事被一次次用到，这是维持。到她带新人的时候，不看书、不靠人提醒，一见账不平就先除以 9，换了公司、换了账套也一样，这就是粒子化了。

沈知远的那一晚，这三样一样也没有。没有对不上，因为每一步解答都对；没有人托，因为也用不着托；力气也不是他付的，是那台机器付的。所以同样是“做对了”，一个留下了，一个没留下。差的不是聪明，也不是用功，差的是那一晚有没有发生一件事。

后面还有两种假会。一种是刷熟型：刷了几百道同类题，见到题型就套，换个情境就不会，它结了粒子，却只结在课本和公式那一层，熔不开。一种是背住

型：考前把公式背得滚瓜烂熟，考完两周就松了，它维持住了一阵子，靠的却是外力。三种假会，各停在不同的一段，第一编会一章讲一种。

◆ 七、看懂也不是白看

说到这里，容易落到另一头去：既然看懂不算会，那看解答就是浪费时间。不是这样。看懂，本书叫“在场”，排在学习的前面；后面讲五段账时，它是第〇段。几样特征先得在场，先得挨在一起，才谈得上被拆开、被重接。一个从没见过十字相乘的孩子，直接让他去分解 $6x^2 - 7x - 3$，他连从哪里下手都不知道，卡住了也只是一锅粥（混沌）。先看一遍别人怎么做，让那几样东西先到场，这一步是有用的。

问题只在一处：看懂以后就停了。打个比方。你搬到一个新小区，头一个星期每天跟着手机导航去地铁站。导航说左转你就左转，说过马路你就过马路，七天下来，一次没走错。可是第八天手机没电了，你站在楼下，发现自己不知道该往哪边走。

导航不是没用。它让你七天都到了地铁站，也让那条路上的便利店、红绿灯、那棵大榕树都在你眼前出现过。可是这些东西是被导航那条蓝线串着的，你自己没有把它们接起来。哪一天你关掉导航，自己走错一次，绕回来，记住“过了便利店要往右拐”，这条路才开始长在你身上。沈知远的那个 AI 解答，就是一条导航的蓝线。它没有害他，它只是替他走了。

◆ 八、本书怎样走

本书是一套应用符号学里的第一卷，管的是教室、作业、评价和饭桌。它用到的道理，比如三类符号怎样互相逼出来、一次发生要付哪几种能量，在理论卷《SDE 符号学》（书二）里已经论证过。这里只拿来用，不再重新证明。需要回头查的地方，书里会标“见书二第几章”。不看书二，也读得懂这一本。

全书八编二十二章，跟着一条纠缠走：它从“在场”到“建立”、“维持”、“粒子化”，最后到“熔得开、能再结晶”，一共五段。本书叫它“五段账”。第一编先去三个现场，看三种假会：看懂型、刷熟型、背住型。第二编回头看前人：苏格拉底、孔子、皮亚杰、维果茨基、布鲁纳、认知科学，他们各自对在哪里，又停在哪里。

第三编把学习、记忆、学会三段一段段讲清。第四编讲建立要的三个条件：对不上、场、动能。第五编讲学不进的三个入口。第六编走出教室，到家里的饭桌和成人的培训班。第七编动手重新设计课堂、作业和评价。第八编说这套说法在什么情形下算错，然后回到沈知远的第二个周日。整本书最后只落在一句话上：

教育的产品不是答案，是结晶。

答案今天是免费的，一拍就有。可是结晶不是。它要有一处对不上，有人托得住，还要学的人自己付力气。没有人能替你付。

如果你是老师，本书想请你重新看一眼你最得意的那一节“讲得很清楚”的课。学生听得很顺，是不是因为一处对不上也没有给他们留？如果你是家长，本书想请你重新看一眼你坐在孩子旁边讲题的那些晚上。你讲清楚了，孩子点头了，那一下是谁在学？如果你是一个想学点新东西的成年人，本书想请你重新看一眼你收藏了却没再打开的那些课程。你看完了，可是留下了什么？这些都不是责备。看清楚停在哪一段，才知道下一步往哪里走。

周一晚上那张空白的小测卷，林佩君后来没有骂，也没有说“下次认真点”。她把卷子放回桌上，问了儿子一句话：“那你说说看，你是在哪一步卡住

的？”沈知远答不上来。他连自己卡在哪里都不知道，因为他昨晚一次也没有卡住过。

一次也没有卡住过，这正是问题所在。本书接下来要做的，就是把那一晚没有发生的事，一段一段找回来。它本来该在哪里卡住？卡住以后，该有谁在旁边？力气该由谁来付？又该怎样确认，那一样东西真的在他身上结成了？

导读

这一篇不讲故事，只给你一张地图和几样工具。你可以先读它，也可以读完第一编再回来对照。

◆ 一、全书的一句话

教育的产品不是答案，是结晶。

全书只有这一句判词。答案是可以转手的东西。老师讲给你，书印给你，AI 一秒钟生成给你，它从一个人手里到另一个人手里，不会少一点。结晶不能转手。它只在学的人自己身上发生。几样原本散着的东西，在你身上被拆开、接起来，接得结实了，最后结成一颗粒子。换个地方、过一段时间、没人提醒，它都还在。一个学校、一堂课、一份作业、一次考试，交出去的如果只是答案，那么在今天，它交出去的东西学生在家里一拍就有。

为什么说“产品”？一家工厂的产品，是出了厂门、到了用的人手里还能用的东西。半成品堆在车间里再多，也不算产量。学校也一样。它的产品不是老师讲了多少，不是作业收上来多少，也不是期末那一页分数。它的产品，是学生走出校门、过了几年、遇到一件课本上没写过的事时，身上还剩下、还用得出的那一些。拿这把尺子量，许多看起来很满的教室，产量很低；有些看起来很慢、很乱、学生总在卡住的教室，产量反而高。

◆ 二、五段账：一条纠缠走过的路

本书把“学”这件事，看成一条纠缠走过的五段路。纠缠，是本书说的土（特征纠缠）：几个特征被接在一起，动一处就牵动别处。

段	大白话	发生了什么	靠什么	缺了会怎样	主讲章
○ 在场	看懂了	几样特征挨在一起，被别人的解答串着，还没接上	外面的解答	解答一撤就散（看懂型假会）	1、7
一 建立	学习	一处对不上逼着人把特征拆开、重接，纠缠起来	学的人自己付的动能，加上托得住的场	没有对不上，就没有建立	7、10—12
二 维持	记忆	纠缠不散	连接度（内能），加上隔一阵再用、再想起一次所付的功，还有人一起用（场）	靠外力维持的，撤力就松（背住型假会）	8
三 粒子化	学会	纠缠结成粒子：稳定、整体、独立；一个符号发生，落点在“我”身上（自我符号）	从书本走到手上、再走到“我”身上（理念→现实→自我），每一步付的能量	只结在书本和公式上，即理念界（刷熟型假会的前半）	9
四 熔开再结晶	活的会	下一次对不上时，粒子熔得开，重新结晶	新的对不上，加上还没耗尽的动能	熔不开就固化：对象端成偶像，自我端成石心	2、9、20

这张表里有三种能量，书里会反复用到。用大白话说：

- **动能**，是学的人自己拆开、重接的那股力气。“难”就是动能的账单。
- **内能**，是接得有多结实，也就是要多大的力才能把它拆开。“记得牢”就是内能高。
- **势能**，是你周围那张能回应你的网：同伴、老师、班级、家人，把你往哪边拉、托不托得住你。用来提示、陪练的 AI 也算在这张网里。本书叫

它“场”。桌上摆的材料、墙上贴的图不会回应你，不叫场。“有人一起学”就是有势能。

对到五段上：建立主要付动能，维持主要靠内能，场就是势能。这三样的道理，见书二第 16—18 章；粒子在三界之间迁移的账，见书二第 15 章。本书只用，不证。

◆ 三、三种假会：都很努力，都觉得会了

假会	停在哪一段	学生怎么说	典型来路	识别办法	主讲章
看懂型	○ 在场，没有建立	“我都看懂了”	AI 一键答案、听得很顺的课、看解析	撤掉解答，让他从头说一遍	1
刷熟型	三—四 粒子只结在书本和公式上（理念界），熔不开	“这种题我闭眼都会”	大量重复同类题、内卷	给一个反例，或换一种情境	2
背住型	二 维持，建得窄、靠外力撑着，没有粒子化	“我背过的”	考前突击、背公式背范文、只练原题	两周后再考；换一个问法	3

三种假会都不是“没努力”。它们各停在不同的一段，所以药也不同。给看懂型的孩子多刷题，他会变成刷熟型；给刷熟型的孩子多讲道理，他点头之后照旧套公式；给背住型的孩子加一轮突击，两周后他又忘了。

◆ 四、十条承重命题，每条一个小例子

全书反复回到下面十句话。每一句先用大白话说，再配一个日子里的例子。

第一条：学习、记忆、学会，是同一条纠缠的三段。 日常里人们说“我学过

了”“我记得”“我会了”，常常混着用。本书把它们拆开，看成同一条纠缠走过的三段：建立、维持、粒子化。三段各有各的条件，也各有各的坏法。“看懂”排在三段前面，那时东西刚到场，还没接上。

公司来了个新同事。第一天经理介绍“这是李婷”，你点了点头，这是在场。你心里默认是亭子的亭，顺口问了一句“是亭子的亭吧”，她说不是，女字旁。这一下对不上了，于是把她的名字和你表妹那个“婷”接到了一起，这是建立。

之后一个星期，你每天跟她打招呼都叫一声，这是维持。一个月后周末在超市碰见她，穿着便服，你脱口而出“李婷”，这是粒子化。三步是同一个名字走过的三段，不是三件事。

第二条：学会就是一个符号的发生，它是一个事件，不是程度。“会”不是一个可以打七折的东西。它发生了，或者还没发生。发生的标志，是三条判据同时成立。你在一个大站换乘地铁。头几次，你每次都要抬头找指示牌，跟着箭头一路走，这不叫“会了七成”，叫还没会。直到有一天，你一边想着别的事一边走，到站就自己走到了换乘口，那一下就是“会”发生了。

判据三条：换一个出口进站也找得到，这是稳定；能给外地来的朋友从头说清怎么换，这是整体；指示牌被施工挡住了也走得到，这是独立。这三条就是粒子的三个性质，见书二第 7 章。这一下落在你身上，落点是“我会换乘”这一句（自我符号）。从指示牌上的箭头走到脚下、再走到“我”身上，每走一步都要付能量。答案可以转手，这一下不能代你发生。

第三条：没有对不上，就没有建立。你原来以为的，和你眼前碰到的，两样对不上，人才会去拆开旧的、接上新的。对得上，一切照常运转，什么也不会被重新接一遍。你家煮饭一向是“水没过米一个指节”，十几年没出过错。有一

天换了一袋新米，煮出来又干又硬。这一锅饭和你那条老规矩对不上了，你才第一次去想：米和水的比例，到底跟什么有关？

对得上的时候，你什么也不会问，也就什么也不会学。

一键答案的问题，正在于它在对不上还没出现之前，就把缝填平了。对不上之外，建立还要一个托得住的场、一份学的人自己付的动能，第五节一并说。

第四条：记忆不是存进去，是维持住。 遗忘不是东西从抽屉里丢了，是接好的东西松了：松了，没断，只是一时够不着。维持靠三样：接得结实（建立时付的力气越多、接的点越多，越难断）；隔一阵再用一次、再想起一次；身边有人一起用。

你天天打卡用的工号，五年也忘不了；上个月在一家咖啡店连过一次的 Wi-Fi 密码，转头就想不起来。东西没有丢，是当初只接了一个点，你又没再用过它，一时够不着了。靠外力撑着的维持，比如考前三天熬夜背、家长每晚盯着默写，外力一撤就松。这是背住型假会。

第五条：内卷是一种固化，刷熟是会的赝品。 刷题不是全无用处。反复做、反复提取，确实在付维持的功，研究也支持这一点。刷出来的也是粒子：“见到这种题型就套这个公式”，相当稳。可是同类题刷多了，对不上被预先排除了。这颗粒子只结在书本和公式上（理念界），碰到书本外的情形，熔不开。

学车的时候，教练教你倒车入库：“后视镜里黄线压到门把手，就打满方向。”你练了一百遍，闭眼都会，考场上一把过。可是拿到驾照后，换了一辆车、换了一个窄车位，那条黄线压到门把手的时候，车已经歪了。你还是盯着门

把手打方向，歪了一次又一次，那个点位松不开。点位练得极熟，却只熟在那一个场地上。活的会，是下一次对不上时熔得开、能重新结晶的那一种。

熔不开，就固化了。分数被供起来，成了对象端的偶像；“我是学霸”“我是学渣”结死在人身上，成了自我端的石心（这两个词第五节再说）。

第六条：卡住有价值，可卡住不等于学。 落差太大，人只会卡成一锅粥；没人托着的卡住，最后多半变成放弃。落差刚好、有人在、自己还有力气，卡住才会变成学。顺序也要紧：先卡住，再给场；顺序倒过来，场就成了替代品。

一个人在家装衣柜，说明书看到第七步卡住了。旁边有人说一句“先找那包长螺丝”，他接着往下装。装完以后，这一步为什么要先固定侧板，在他手上清楚了。另一个人也卡在第七步，旁边没人，一直卡到半夜，最后把螺丝刀一扔，衣柜在地上放了半个月。同样是卡住，一个有人托住，一个没有。

第七条：学不进有三个入口，三种药。 孩子说“不想学了”，可能是三件不同的事。一种是旧办法碎了：初中那套死记的办法到了高中不灵了，他需要一个新的学法。一种是书上的东西塞不进日子：他真心不知道这些公式跟他有什么关系，他需要亲手做出一样东西。一种是他累垮了：连着几个月睡不够，什么都听不进，他需要先被托住。

最常见的错，是给一个累垮的孩子讲“学这个将来有什么用”，再加一个补习班。这句道理常被当成第二种药，其实连第二种也治不好；拿它去治第三种，只会更糟。

第八条：老师的活，从讲清楚，转成守住落差和场。 讲清楚，是把理念符号递过去。讲授仍然在，只是排到了落差后面。先让学生碰到那处对不上，再讲。

好的健身教练不替你举杠铃。他把重量调到你刚好举不太动的那一档，然后站在你身后，在你真举不起来的时候托一把。好课堂也是这样。它的标志不是“讲清楚了”，是下课铃响时，学生还带着一个没解决的问题，并且知道明天找谁、怎么找。

第九条：评价要按五段测，不能只测复述。 在场不必测。建立，看学生能不能说出自己卡在哪、后来怎么接上的。维持，过两周再测。粒子化，换情境、撤提示。活不活，给一个反例，看他能不能松开旧做法。

一个会计新人，考证时背熟了所有分录，这测的是复述。真正要看的是：两周后不看书还记不记得；换一家公司、换一套账，他能不能自己做平。遇到一笔从没见过的业务，他能不能放下老套路，重新想清楚该怎么记。分数可以留着，可它要能回写到这些地方，落回到手上和人身上。否则它就只是一个被供起来的数字，也就是偶像。

第十条：AI 是迄今最大的一张托人的网，可它不替你结晶。 AI 能在你卡住时陪着你，能在你复习时给你出题、提醒你隔几天再做一次。这两样，一样是托住建立，一样是帮着维持，都很好。可是拆开、重接的那股力气，它付不了；结成粒子的那一下，也只能发生在你身上。AI 像一个永远不累的陪练。可是陪练不能替你跑步。

成人也是同一笔账，还多一层：旧的做法接得很牢，学新的先要把旧的熔开。公司发了一份新系统的操作幻灯片，全员点了“已读”，月底照样一半人填错，错处多半是旧系统的老习惯。只发了答案，旧的没碰，没有对不上，也没有场。人和机器怎样分工，一般的道理见书四，本书只管课堂、作业和评价怎样重新排。

◆ 五、随身带的几样工具

除了五段账和三种假会，书里还有几样工具反复用到。先在这里认个脸。

三界符号。 结出来的粒子，可以落在三个地方。课本、公式、标准答案、老师板书的定义，是理念符号，它在纸上、在话里。做出来的实验、画出来的图、亲手搭起来的模型、一份错得有后果的练习，是现实符号，它在手上、在东西上。“我会解这类题”“我是个读得进书的人”“我一见到分数就慌”，是自我符号，它在人身上。考试多半只问理念符号；学会，落点在自我符号。三界的道理见书二第 10—12 章。

三个条件。 建立要三样东西同时在：一处对不上（而且要能事前写下来，比如先写一个预测，再看结果对不对得上）；一个托得住这次卡住的场（同伴、老师、一个肯听你说“我不懂”的人）；学的人自己付的动能（自己拆、自己接，别人代付不算数）。第四编一章讲一样。

三个入口。 一个人学不进，可能是旧办法碎了，可能是书上的东西塞不进日子，也可能是没有力气了。第五编一章讲一个。

三判据。 判断一样东西是不是真会了，问三句：换个问法它还在吗（稳定）？不看提示，能不能从头说成一整件事（整体）？离开书和老师，它还立得住吗（独立）？三句都答“是”，才算结晶了。

偶像与石心。 一样东西结成了，却再也熔不开，就固化了。固化在外面那一头，比如分数被供起来，只看分数、不问分数背后是什么，这叫偶像。固化在人自己身上，比如“我就是学不好数学”这句话结得死死的，什么新经历都改不动它，这叫石心。两样是同一个结构，见书二第 19 章。

◆ 六、全书地图

编	章	一句话
第一编　三种假会的现场	1 全对的作业，空白的脑子；2 内卷：越刷越多，留下越少；3 考试测的是什么	看懂型、刷熟型、背住型，一章一种
第二编　前人对在哪里	4 苏格拉底与孔子；5 皮亚杰、维果茨基、布鲁纳；6 认知科学补上的账	先写足他们对在哪里，再看他们停在哪里
第三编　三段账	7 学习；8 记忆；9 学会	建立、维持、粒子化，一段一章
第四编　建立的三个条件	10 对不上；11 场；12 动能	卡住怎样设计，谁托住，谁付力气
第五编　三个入口	13 旧办法碎了；14 书上很硬，日子塞不进；15 学不动了	学不进有三种，药各不同
第六编　教室之外	16 家里的饭桌；17 成人的学习	家长和培训班里的同一笔账
第七编　重新设计	18 课堂；19 作业与 AI；20 评价	先卡住再给场；留动能给学生；测结晶
第八编　检验与收束	21 它怎样才算错；22 回到那份作业	可推翻的条件；沈知远的第二个周日

◆ 七、四条读法路线

全书可以从头读到尾。如果你时间少，也可以按来意挑一条线读。**为教师来的：** 前言 → 第 1 章 → 第 3 章 → 第 7 章 → 第 10、11 章 → 第 18 章 → 第 20 章。这条线从“学生看懂了却不会”出发，落到一节课怎样重新排、一次考试怎样重新出。

为家长来的： 前言 → 第 1 章 → 第 9 章 → 第 15 章 → 第 16 章 → 第 22 章。这条线讲饭桌边那一个个晚上：你讲题时孩子在学什么，孩子累垮时先做什么，最后回到沈知远家。

为学校和培训机构来的： 第 2 章 → 第 6 章 → 第 17 章 → 第 18—20 章 → 第 21 章。这条线讲制度：刷题经济的账、培训为什么停在满意度、评价怎样按五段改，以及这套说法怎样检验。

为自己学新东西来的： 前言 → 第 8 章 → 第 9 章 → 第 12 章 → 第 13 章 → 第 17 章。这条线写给想学一门语言、换一个行当、跟上一套新系统的成年人：旧的会怎样先熔开，新的会怎样长出来，力气该花在哪里。

◆ 八、这句判词怎样才算错

一套说法如果怎么说都对，它就什么也没说。本书的判词，在下面任何一种情形被确实证明时，就要修改或放弃。第 21 章会逐条展开，并给出可以在课堂上做的实验设计，只写设计，不编造结果。

1. 如果学生在一点困惑也没有、一点力气也不用付的条件下学，结果跟“先卡住再讲”的一组没有差别：两周后的测验一样，换情境的迁移也一样。
2. 如果只加大难度、不给任何人托着，学生记住的仍然和有人托着的一组一样好。
3. 如果疲惫、孤立的学生，在没有被托住、没有补回力气的时候，结晶得和别人一样多。
4. 如果大量刷同类题的学生，遇到反例或新情境时，放下旧做法、重新想清楚的比例，和“先卡住再讲”的一组没有差别。那么“刷出来的粒子熔不开”这一说就不成立。

5. 如果“记得住”和“用得出”在数据上始终分不开，记得好的一定迁移好，记得差的一定迁移差。那么“维持不等于学会”这一分段就不成立。

还有一道闸，本书自己必须守住：**对不上要能在事前被指认出来。** 如果每看见一个学会了的人，就回头说“他那里一定有过对不上”，这套说法就成了永远正确、因而空洞的话。所以书里每讲一次结晶，都先在材料里指出那条缝在哪里；找不到，就老实说找不到。

读到这里，你手里有了五段账、三种假会、十条命题和一道闸。下面去第一个现场：上海，一个高一学生，一个拍题写作业的晚上。

目 录

作者介绍 iv

前言　一份全对的作业，和一张空白的小测卷 v

导读 xv

第一编　“都会”与“会了”：三种假会的现场 **1**

第 1 章　全对的作业，空白的脑子 2

第 2 章　内卷：越刷越多，留下越少 22

第 3 章　考试测的是什么 42

第二编　前人对在哪里 **61**

第 4 章　苏格拉底与孔子：先卡住，再启发 62

第 5 章　皮亚杰、维果茨基、布鲁纳：失衡、场与脚手架 82

第 6 章　认知科学补上的账：难度、检索与间隔 102

第三编　三段账：学习、记忆、学会 **119**

第 7 章　学习：纠缠是怎样建起来的 120

第 8 章　记忆：纠缠靠什么不散 140

第 9 章　学会：纠缠结成粒子 158

第四编　建立的三个条件，逐条讲 **177**

第 10 章　对不上：卡住是怎样被设计出来的 178

第 11 章　场：谁托得住这次卡住 198

第 12 章　动能：谁来付，付多少 216

第五编　三个入口：学不进有三种 **237**

第 13 章　入口一：旧办法碎了 238

第 14 章　入口二：书上很硬，日子塞不进 258

第 15 章　入口三：学不动了 275

第六编　教室之外：家里和职场 **293**

第 16 章　家里的饭桌：别替孩子把落差填平 294
第 17 章　成人的学习：培训了没学会 313

第七编　重新设计：课堂、作业、评价 331
第 18 章　课堂：先卡住，再给场 332
第 19 章　作业与 AI：留什么给学生付动能 352
第 20 章　评价：测结晶，不测复述 371

第八编　检验与收束 389
第 21 章　它怎样才算错 390
第 22 章　回到那份作业 414

结语　教育的产品是结晶 435
参考书目 440
附录 454
附录一　术语表 455
附录二　一节课的“三条件×五段”检查单 460
附录三　引文与研究核验总表 464
附录四　本版成稿、审校与三审记录 468
后记 471



第　一　编

“都会”与“会了”：三种假会的现场

导　语

沈知远那一晚之后，本书先去三个现场。三个学生都很努力，都觉得自己会了，停下的位置却各不相同。第 1 章在上海，顾一鸣拍题、读懂、抄下，七道证明题全对，第二天换一个数字，就在黑板前写不出变形：看懂型停在在场，撤掉解答就散。第 2 章在河北一所县城高中，赵思琪把两百道同类题刷到闭眼都会，一道取不到等号的题让那颗粒子露了底：刷熟型结在纸面上，熔不开。第 3 章在武汉的大学物理课上，计算题平均八十二分，抛向空中的小球却被画上一个向上的力：背住型维持住了公式，力没有落地。三种假会是全书的诊断工具，下一编回头看前人怎样说这件事。

01

第 1 章

全对的作业，空白的脑子

这一章的问题

孩子拿着手机把作业一道道写对了，第二天老师换个数字请他上黑板，他却一步也写不下去——昨晚那些“看懂了”，到底在他身上留下了什么？

◆ 一、晚上九点，拍第一张

上海，闵行区一个普通小区。周三晚上九点，顾一鸣洗完澡，坐回书桌前，把数学练习册翻到今天要做的那一页。他十六岁，读高一。这个月数学在讲函数的单调性。今晚的作业是十二道题，前五道是看图说增减，后七道是证明题：用定义证明某个函数在某个区间上是增函数或减函数。

顾一鸣初中数学一直不差，中考数学考得不错。可是进了高一，他明显觉得吃力了。初中的题，大多是算出一个数；高一的函数，开始要他证明一件事“对所有的 x 都成立”。他第一次觉得，会算和会证是两回事。

开学头两个星期，他还硬着头皮自己做，一道证明题常常卡二十分钟，有时卡到十一点还没写完。后来同桌告诉他那个应用，他试了一次，五分钟一道。从那以后，他晚上睡得早多了。这天晚上，他先做了前五道，看图，写区间，十分钟。到第六道，他停了一下，拿起手机。

拍题这件事，在中学生里并不新鲜。早些年就有拍照搜题的软件：拍一张，它去题库里找网上别人做过的同一道题，把答案和解析调出来。找不到原题，它就没办法。生成式 AI 来了以后，变化在于它不再去找“同一道题”。题目哪怕

是老师自己改过数字的，它也当场现做一份解答，步骤齐全，口气耐心，你追问一句，它还会再解释一遍。

顾一鸣手机上装着的，就是这样一个 AI 学习应用，班上大半同学都在用。打开，对准题目，咔嚓一声，题目被框出来，几秒钟后，屏幕上一行行冒出解答。

第七题是这样的：证明函数 $f(x) = x + 1/x$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增。应用给出的解答分五步，每一步加粗一个小标题：

取值：任取 x_1、$x_2 \in (1, +\infty)$，且 $x_1 < x_2$。

作差：$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 + 1/x_1) - (x_2 + 1/x_2)$。

变形：$= (x_1 - x_2) + (x_2 - x_1)/(x_1x_2) = (x_1 - x_2)(x_1x_2 - 1)/(x_1x_2)$。

定号：因为 $1 < x_1 < x_2$，所以 $x_1 - x_2 < 0$，$x_1x_2 > 1$，即 $x_1x_2 - 1 > 0$，又 $x_1x_2 > 0$，所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$。

结论：$f(x_1) < f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增。

每一步底下还有一行灰色的小字，解释这一步在做什么。比如“变形”底下写着：“提取公因式，把差化成几个因式相乘的形式，便于判断正负。”顾一鸣从上往下读了一遍。每一步他都看得懂：取两个数，相减，化简，看正负，下结论。没有一步让他皱眉。

他把五步抄到练习册上。抄的时候，他把“提取公因式”那一步多写了一行中间过程，看上去更像自己做的。第八题、第九题，一样。拍，读，抄。到第十二题，九点四十。练习册上七道证明题，五个小标题一个不落，格式比课本例题还整齐。他合上本子，拍照传到班级群的作业打卡里，打开游戏。

那一刻他是满意的。他不觉得自己在作弊。他没有抄同学的，也没有让谁替他写。他觉得自己是在“学”：不会的题，查清楚怎么做，看懂了，写下来。老

师上课不也是这样讲例题的吗？这一晚，顾一鸣交上去一份全对的作业。这一章要问的，只有一件事：这一晚，在他身上留下了什么？

◆ 二、黑板前站了一分钟

周四第一节是数学课。数学老师陆晓岚四十出头，教了快二十年书。她有个习惯：批完作业，第二天挑一道题，换个数字，请一个同学上黑板做。她说这叫“回锅”。

这天她在黑板上写：证明 $f(x) = x + 4/x$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增。然后转身：“顾一鸣，你昨天第七题做得很漂亮，上来做做这一道。”顾一鸣走上去，拿起粉笔。

取值，他写下来：任取 x_1、$x_2 \in (2, +\infty)$，且 $x_1 < x_2$。**作差**：$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 + 4/x_1) - (x_2 + 4/x_2)$。写到这里，粉笔停了。

下一步是“变形”。他记得昨晚屏幕上这一步有一个括号提出来，后面跟着一个分式。他记得那个分式的分母是 x_1x_2。可是分子是什么？括号里提出来的是 $x_1 - x_2$ 还是 $x_2 - x_1$？$4/x_1 - 4/x_2$ 通分以后该怎么和前面合到一起？他在黑板上写了一行，擦掉，又写一行。

更要紧的是下一步。昨晚那一题，“定号”靠的是 $x_1x_2 > 1$。今天这一题，该和几比？他隐约觉得是 4，又不知道为什么是 4；他也不知道为什么题目给的区间是从 2 开始，而不是从 1、从 4 开始。他站在那里，大概一分钟。教室里很安静。

陆老师没有催，也没有让他下去。她问了一句：“你昨天第七题，是怎么想到要提出 $x_1 - x_2$ 的？”顾一鸣想了想，说：“我……我昨天是看懂了的。”陆老师点点头，没有再问，请他回座位，换了另一个同学上来。

下课后，顾一鸣打开手机，翻到昨晚那条记录，又把第七题的解答读了一遍。奇怪的事情发生了：他又看懂了。每一步都那么清楚，那么顺，“提取公因

式，便于判断正负”，没错啊，就是这样。那种“原来如此”的感觉一下子回来了，和昨晚一模一样。可是他把手机一扣，再去想黑板上那道 x + 4/x，脑子里还是空的。

这一下，比黑板前那一分钟更值得注意。看懂的感觉，随叫随到；可它来的时候，必须有那份解答在眼前。解答一撤，感觉就走，东西也跟着走。顾一鸣以为自己是“忘了”。其实他没有忘。一样从来没有在他身上接起来的东西，谈不上忘。

他给自己找的理由，还有两个：“上去一紧张就卡了”“昨天太晚了，没仔细看”。这三个理由，几乎是所有看懂型学生的标准答案：忘了、紧张、粗心。三个理由有一个共同点：它们都默认东西本来在他身上，只是那一刻没拿出来。于是药也跟着开出来了：下次别紧张，下次看仔细一点，考前再看一遍。可是如果东西本来就不在，这三副药都治不了。再仔细地看一遍，也还是看；不紧张地站在黑板前，也还是写不出变形。诊断错了，努力就会一直往错的方向使。

午休时，他去办公室交另一份作业，陆老师叫住了他。她没有批评他，只问：“昨天那几道，你是不是拍了题？”顾一鸣点点头。陆老师说：“我不是怪你。我上课讲例题的时候，底下也是一片点头。我讲得越清楚，点头的越多。可第二天换个数字，站起来的人和你差不多。”她想了想，又说：“你昨天那个‘看懂’，我在课堂上天天见。只是以前它要等我讲，现在你在家里拍一下就有了。”

这几句话，顾一鸣当时没太在意。可是它们说出了这一章的一个要点：看懂型假会不是 AI 发明的。一堂讲得很顺的课、一本步骤很全的教辅、一段讲解很清楚的视频，造出来的都是同一样东西。AI 只是把它造得更快、更便宜、更随叫随到。

◆ 三、三份材料，各说了一部分

顾一鸣的这个周三和周四，不是一个人的事。这几年，有几份材料从不同方向碰到了同一件事。它们说服力不同，要分开看。

第一份，是一场真正的对照实验。 宾夕法尼亚大学沃顿商学院的 Hamsa Bastani 与合作者，2023 年秋季在土耳其一所高中做了一项随机对照实验。参加的学生近一千人，分在约五十个班里，覆盖高中九到十一年级。研究占用了四次、每次九十分钟的数学课。

学生被分成三组。一组照常用课本和笔记练习。一组用一个不设限制、类似 ChatGPT 的聊天助手，想问什么就问什么，要答案它就给答案。还有一组用的助手经过老师设计，只给分步提示，不直接给出答案。

结果分两段看。练习的时候，两个用 AI 的组成绩都大涨：不设限的那组比对照组高约 48%，只给提示的那组高约 127%。接着是不准用 AI 的考试。不设限的那一组，成绩反而比从没用过 AI 的对照组低了约 17%。只给提示的那一组，和对照组大致持平。

还有一个细节：用不设限助手的学生，并不觉得自己学得比别人少。研究者的解读，大意是学生把这个助手当成了拐杖。练习时靠着它走得很快，拐杖一撤，腿上的力气反而比从没拄过的人还弱。报道还提到，那个不设限的助手给出的答案本身也常常出错，可学生多半照单全收。（据沃顿商学院“沃顿知识在线”与 PsyPost 的报道转述）

那 48% 的练习成绩，是看懂的感觉换成了分数。它是真分数，学生也真觉得自己会了，可是它量的是“答案在手边时”，不是“答案撤走后”。

这项研究 2024 年先以工作论文的形式公开，题目直截了当：《生成式 AI 可能伤害学习》；2025 年以修订后的题目发表在《美国国家科学院院刊》（PNAS）上。它的分量在于设计：随机分组，样本近千人，在真实课堂里做，

考试时把工具撤掉。这正好是顾一鸣在黑板前遇到的那一刻，只是被放大到了近千人身上。

第二份，是一份小样本的脑电预印本。 2025 年 6 月，麻省理工学院媒体实验室的 Nataliya Kosmyna 等人在网上公开了一份预印本。他们请 54 名 18 到 39 岁的参加者写短文，同时戴着脑电设备记录脑活动。一组用 ChatGPT，一组用搜索引擎，一组什么工具都不用。

据他们报告，用 ChatGPT 的一组，脑区之间的连接最弱。写完之后马上请大家引一句自己刚写的文章，用 ChatGPT 的那组大多数人引不出来；另外两组引不出来的，只占一成左右。这份材料很容易被转述成“AI 让人变笨”。它说不了这么多。样本只有几十个人，写的是短文而不是长期学习；发布时它还没有经过同行评审，作者自己也说结论是初步的。

本书只把它当一条线索：自己写的文章，写完就引不出一句，这和顾一鸣“看懂了却说不出”是同一种现象的另一张面孔。它提示的方向值得追，可它本身证明不了什么。

第三份，是一则新闻。 据 IT 之家 2025 年 6 月 9 日的报道，2025 年高考期间，国内几款常用的 AI 应用临时调整了功能。通义千问、豆包停止对试卷题目的图片识别；腾讯元宝、Kimi 在考试时段暂停图片识别服务，说明是为了确保高考公平。

这则新闻本身不是研究，也不涉及学习效果。可是它说出了一件大家心里都明白的事：到了真正要看“你会不会”的那几天，连做 AI 的公司自己，也先把拍题这条路关掉。考场，就是一次撤掉解答的测验。

回头看，三份材料其实用的是同一个办法。Bastani 那项实验，关键一步是考试时把 AI 撤掉。MIT 那份预印本，关键一问是写完以后不看文章、引一句出来；高考暂停拍题，是在全国范围里把解答撤掉几天。导读那张三种假会表里，看懂型的识别办法也只有一句：撤掉解答，让他从头说一遍。

要看一样东西是不是长在了人身上，只有一个办法：把外面的东西拿走，看剩下什么。

三份材料，分量不同，方向一致：有答案在手边的时候，人看起来什么都会；答案一撤，剩下的不多，甚至比没有答案帮忙的人还少。

◆ 四、前人早就看见了这个坑

“看懂了却不会”，不是 AI 带来的新问题。前人早就看见了它，而且说得很准。先说古人。南宋陆游有一首诗，写给儿子子聿，最后两句今天几乎人人会背：“纸上得来终觉浅，绝知此事要躬行。”（《冬夜读书示子聿》）纸上来的东西，总觉得浅；要真正知道一件事，得亲身去做。陆游说的“浅”，正是顾一鸣的那份看懂：它是真的，却浮在表面，一碰就散。

朱熹讲读书，有“三到”之说：心到、眼到、口到，并且说三到之中心到最急（《童蒙须知》，通行书中多引作《训学斋规》）。眼睛看过了，不算；心要到。顾一鸣那一晚，眼睛是到了的，每一行他都读过。孔子说得更早：“学而不思则罔，思而不学则殆。”（《论语·为政》）只学不想，就会迷惘，什么也抓不住。顾一鸣那一晚是在“学”的，他一道道读得很认真；缺的是“思”，是自己停下来问一句为什么。

古人看得准，他们知道“看过”和“会了”之间隔着一段，而且知道这一段要靠学的人自己去走。陆游这两句，第 14 章还要细看；孔子怎样把卡住放在教的前面，第 4 章专门讲。

再说今人。现代学习研究对这件事做过许多细致的工作。这里挑三项最贴近的。第一项，是认知负荷理论里的“例题效应”。澳大利亚学者 Sweller 与 Cooper 在 1985 年前后做过一组代数实验。结果是，对刚入门的学生来说，先

认真研究几道写好的例题，比一上来就硬做题，学得更快、更好。后来许多研究反复支持了这一点。

这一项要先说在前头，因为它替“看解答”说了公道话：对初学者，看别人怎么做，本来就是学习的一部分。顾一鸣读 AI 解答，并不是完全在做无用功。

第二项，是 Chi 与合作者 1989 年关于“自我解释”的研究。他们观察大学生怎样学物理教材里的例题，发现同样读例题，学得好的学生和学得差的学生做的事不一样。学得好的，一边读一边给自己解释：“这一步为什么这样做？”“这一步和前面哪一条有关？”他们还常常发现自己哪里不懂。学得差的，读一遍，觉得懂了，就往下翻。

这项研究里还有一个常被略过的细节：学得好的学生，说“这里我没看懂”的次数，反而比学得差的学生多。学得差的学生很少报告自己不懂，他们读完一道例题，多半觉得都懂了。这项研究把“看例题有用”往前推了一步：例题有用，前提是读的人在读的时候自己去解释它。读而不解释，等于没读。

第三项，是 Rozenblit 与 Keil 2002 年提出的“解释深度错觉”。他们请人先给自己对拉链、抽水马桶这类日常东西的理解打分，大家普遍打得不低。然后请他们一步一步写出这东西是怎么工作的，写完再打一次分，分数明显掉了下来。人们常常以为自己懂，直到被要求从头说一遍。还可以补上一项更早的：1978 年 Slamecka 与 Graf 报告的“生成效应”，同样的内容，自己根据提示补出来的，比照着现成的读一遍记得更牢（第 12 章细讲）。

把这几项放在一起，前人对在哪里就很清楚了：看例题对初学者有用；可是要有用，读的人得自己解释。自己生成的，比读来的留得多；而人又很容易高估自己懂了多少。顾一鸣那一晚的每一个环节，在这些研究里都能找到位置。

◆ 五、它们停在“还不够”上

前人说得这样准，还缺什么？缺的是一个说法，说清“看懂”和“学会”之间差的到底是一件什么事。古人的说法是“浅”与“深”、“纸上”与“躬行”。这是程度的说法，好像看懂是浅一点的会，再往深里走一走就成了。

现代研究的说法，多半也是程度的。例题效应比的是“学得多”还是“学得少”；自我解释研究比的是“解释得多”还是“解释得少”；解释深度错觉说的是人“高估了”自己的理解。它们都在同一把尺子上量：理解得多一点，还是少一点。

可是顾一鸣在黑板前的那一分钟，不像是“懂得少一点”。他像是什么也没有。一个昨晚七道题全对的学生，换了一个数字，连第一步变形都写不出来。这不是七成变成了三成，是有变成了无。更要紧的，是一个细节：他回去再读那份解答，看懂的感觉立刻回来了，和昨晚一样满。如果看懂只是“浅一点的会”，那么读第二遍应该会更深一点。可是没有。第二遍和第一遍一样，读完一扣手机，照样是空的。

Bastani 那项实验里也有一个值得多看一眼的地方。那个只给提示、不给答案的助手，确实把伤害挡住了：考试成绩和对照组持平。可是也只是持平。练习时高出一倍多的成绩，到了撤掉工具的考试，并没有变成比对照组更好的学会。

挡住了答案，还不等于造出了学习。

Chi 那项研究里的细节，也该在这里再看一眼。学得好的学生更常说“我没看懂”，研究者把它归为一种监控自己理解的能力：会监控的人，更早发现自己不懂。这个解读没错。可是换一个角度看，那一句“我没看懂”，正是一处对不上被学的人自己认出来的时刻。学得好的学生更会“监控”，这是研究者看见的一层；再往下一层，是他们的读法里有对不上，学得差的学生的读法里没有。

这说明问题不全在“给答案”还是“给提示”。提示比答案好，可是提示本身，也未必就让学的人碰上一处他自己的卡住。

程度的说法和事件的说法，开出来的药不一样。如果看懂是“浅一点的会”，药就是“再多看几遍”“看得再仔细一点”“多读几道例题”。顾一鸣下课后做的，正是这件事：再读一遍。结果是又懂了一遍，又空了一遍。如果看懂和学会之间差的是一件事，药就完全不同：不是多看，而是让那件事发生。那件事是什么，下一节讲。

前人的研究停在了“还不够”上：看得还不够深，解释得还不够多，提示得还不够巧。它们停下的地方，正好是接着要走的一步：看懂和学会之间，差的不是“够不够”，是有没有发生一件事。

◆ 六、看懂是在场，不是建立

本书的说法，先回到导读里那张五段账。一样东西要在一个人身上学会，要走五段：在场、建立、维持、粒子化、熔开再结晶。学习是土（特征纠缠）的建立，记忆是纠缠的维持，学会是纠缠结成粒子。看懂，排在这三段的前面，是第〇段：在场。

在场是什么样子？拿第七题来说。要证明 $x + 1/x$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增，用得到几样东西：“任取两个数”“作差”“通分”“提公因式”“x_1x_2 和 1 比大小”“负数乘正数是负数”。这些东西，单拿出来，顾一鸣全都认识，初中就学过。

那天晚上，AI 的解答把它们按顺序摆在他眼前，一条线串起来：先这样，再这样，所以这样。这几样东西同时到场了，挨在一起了，彼此的关系也被那条线标得清清楚楚。这就是在场。它的感觉，就是“看懂了”。可是串着它们的那条线，是解答的，不是他的。

“为什么要作差，而不是作商？”“为什么非得提出 $x_1 - x_2$？”“为什么区间从 1 开始，和 $x_1x_2 > 1$ 有什么关系？”这些问题，正是把那几样东西真正接起来的地方。顾一鸣一个也没有问过。解答没有给他问的机会：每一步都已经是对的，每一个“为什么”都已经被那行灰色小字答好了。

建立是另一回事。建立，是这几样东西被拆开、被他自己重新接起来。比如他自己算出 $f(0.5)$ 和 $f(2)$ 竟然相等，愣了一下，回头去想“这函数到底在哪里拐弯”。一路算下去，那个拐点恰好落在 $x_1x_2 = 1$ 的地方。到那时，“区间从 1 开始”和“x_1x_2 跟 1 比”就不再是两句挨着的话，而是一件事。把在场和建立并排放，差别就出来了：

	在场（看懂）	建立（学习）
东西在哪里	摆在眼前，挨在一起	拆开后，在自己身上重新接上
谁串着它们	别人的解答	学的人自己
有没有对不上	没有，每一步都对	有，某一处和原来想的不一样
谁付力气	写解答的人或机器	学的人自己
感觉	顺，“原来如此”	卡，“怎么会这样”，然后才是“原来如此”
撤掉解答以后	散了	还在，至少还能说出卡在哪、怎么接上的
再读一遍解答	又懂一遍，和第一遍一样	读得出解答里自己当初没想到的那一步

建立要三个条件同时在：一处对不上，一个托得住的场，学的人自己付的动能。拿这三条去对顾一鸣的那一晚。

对不上：没有。 解答每一步都对，没有一处和他原来想的冲突。他甚至没来得及“原来想”，题目一拍，解答就出来了。落差还没有形成，就被填平了。

场：用不上。 AI 其实是个很好的场，随叫随到，从不嫌烦。可是场是用来托住卡住的。没有卡住，场就没有可托的东西，只能直接把答案递过来。

动能：不是他付的。 拆开、重接这几样东西的力气，是那台机器付的。机器把“作差”“通分”“提公因式”重新排了一遍，排得很好；可排的是机器，不是他。

三样一样也没有，纠缠就根本没有开始建。所以顾一鸣不是“学得浅”，他还没开始学。那七道题，在他身上从头到尾停在第〇段。

再用三界符号看一遍（见书二第 10—13 章）。那份 AI 解答，是一个理念符号：它在屏幕上，在话里，步骤正确，可以转手。顾一鸣抄到练习册上的，还是同一个理念符号，只是换了笔迹。

建立要的那一处对不上，通常出在两界之间。同班的姚可欣那一晚（下一节细讲）就是这样：她心里“函数要么增、要么减”的老想法，是一个理念。草稿纸上她自己代入数值算出来的两个 2.5，是她手上做出来的结果，是现实的一块。

两样对不上，逼出来的是她身上的变化：一个新的接头，接住了“拐点”和“x_1x_2 跟 1 比”。用书二的式子说，自我＝H（理念，现实），任两类对不上，逼第三类发生：这里是理念和现实对不上，发生在自我这一角。这一角一变，又回写到理念上：“函数要么增、要么减”那句老话，从此在她那里改了样。

顾一鸣那一晚，从头到尾只有理念这一界。解答是理念，抄下来的还是理念，他手上没有做出过任何会和它顶起来的东西。只有一界，三角就转不起来；转不起来，自我那一角就什么也没有发生。学会，落点在自我符号上，落在“我会证这类题”这一句在他身上立得住。顾一鸣那一晚，离这个落点，还隔着整整三段。

看懂的感觉，为什么这样真？ 顾一鸣再读一遍解答，看懂的感觉马上回来。这件事值得单独说一说，因为它是看懂型假会最难识破的地方。

看懂的感觉，其实是“认得”的感觉。几样东西摆在眼前，你认得每一样，也认得它们之间那条线，于是觉得“对，就是这样”。这种感觉是真的，而且很可靠，只是它报告的是另一件事：它报告的是“东西现在在场”，不是“东西已经在我身上接上了”。

认得和想得起，是两回事。1979 年，Nickerson 与 Adams 请一批美国人从记忆里画出一美分硬币的两面。这枚硬币他们天天经手，拿给他们看，谁都认得；可是让他们画，头像朝哪边、字写在哪里，大多数人画错。天天见，不等于接上了。

所以看懂的感觉，只要解答在，就一直在；解答一撤，它就没有可认的东西了。它跟着解答走，不跟着人走。这也解释了 Bastani 那项实验里，为什么用不设限助手的学生不觉得自己学得少。他们练习时每一题都“认得”，那份感觉一次次被确认，越来越满。他们没有骗自己，他们只是把在场的感觉当成了建立的证据。

讲得很顺的课，也是一份解答。 陆老师那几句话，要放在这里再看一次。一堂好的讲授课，老师把一道难题拆成几步，每一步讲透，学生一步步跟下来，没有卡住。这样的课很受欢迎，学生说“听得很明白”，听课的同行也会点头。

可是从五段账看，它和那份 AI 解答做的是同一件事：把几样东西按顺序摆在学生眼前，用老师的线串起来。学生一路认得，一路点头，一处也没有对不上。这不是说讲授没用。讲授能让东西到场，这一步省不了。可是如果一堂课从头到尾只有到场，没有一处留给学生自己卡住，它和拍题就只差一处：解答一个从讲台上来，一个从手机上来。讲授怎样排在对不上的后面，第 18 章专门讲。

这里要守一道闸。说“他那里没有对不上”，不能是事后看他不会了，才回头补一句。要在材料里先指认出来。顾一鸣这一晚的对不上缺席，是看得见的。练习册上没有一处涂改，手机记录里没有一次追问；三十分钟写完七道证明题，

没有一道停下来超过两分钟。这些都是那一晚当时就留下的痕迹，不是事后补出来的。

答案是免费的，建立不是。

前言里的沈知远，和这里的顾一鸣，隔着新加坡和上海，过的是同一个晚上。一个分解因式，一个证单调性，都是拍题、读懂、抄下，都是第二天一撤解答就空了。两个城市、两套课本、两种考试制度，停下的位置却一模一样，都停在第〇段。这说明问题不出在哪一种课本、哪一种考试上，出在“看懂”这件事本身的位置上。

这句话在今天比任何时候都要紧。从前答案不免费：要翻书、要问人、要等第二天，这中间的等待和摸索，常常顺带逼出了一点对不上。今天答案免费到连等待都没有了，那一点顺带的对不上，也一起没有了。

书二第 16—18 章讲过符号发生要付的三种能量。拿来对一下：建立主要付动能，维持主要靠内能，场就是势能。顾一鸣那一晚，动能是机器付的，势能在却无处用，内能一点也没有存进去。账面上七道全对，账户里一分钱也没有。

还记得他开学头两个星期吗？那时他一道证明题卡二十分钟，卡到十一点。那段日子他过得不舒服，可是那正是他在付动能的时候。卡住的二十分钟，是落差在那里，力气也在往里付。如果那时旁边有一个人托他一把，建立很可能就在那些晚上发生。

那个应用替他省掉的，恰恰是这二十分钟。他睡得早了，这是真的好处；可是省下的那二十分钟，正是本该长出东西来的那一段。难度是动能的账单。账单被别人付掉了，东西也就记在了别人名下。

这也能解释 Bastani 那项实验里最让人意外的一点：用不设限助手的学生，为什么不只是“和对照组一样”，而是比对照组还低。对照组的学生，那四次课

是硬着头皮做下来的。他们卡住、做错、翻笔记，成绩不好看，可是动能在付，建立有机会发生。用不设限助手的学生，同样的四次课，时间花掉了，题也做完了，动能却是机器付的。课只有那么几节，卡住的机会被占掉了，就不会再自己回来。

所以按本书的读法，低出来的那一截，不是 AI 从学生身上拿走了什么，是本该在那几节课里长出来的东西，没有长。

◆ 七、同一道题，两个晚上

光说一个人没学会，还不够。要看一个学会的过程长什么样。下面把同一道题，放到另一个学生的晚上里。姚可欣和顾一鸣同班。她也有那个 AI 应用，可是那个星期她的手机坏了，送去修，作业只能自己做。

她做到第七题，证明 $x + 1/x$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增。课本上的例题她看过，知道要“取值、作差、变形、定号、结论”五步。她写下取值、作差，到变形就卡住了。分式减分式，再加上前面的 $x_1 - x_2$，她算了两遍，得出两个不一样的式子。

卡了十来分钟，她换了个办法：先别证，先看看这个函数长什么样。她随手代了几个数：$f(1) = 2$，$f(2) = 2.5$，$f(3)$ 约等于 3.33。看起来确实在增。为了“多看几个”，她又代了一个比 1 小的数：$f(0.5) = 0.5 + 2 = 2.5$。她停住了。

$f(0.5)$ 是 2.5，$f(2)$ 也是 2.5。一个在 1 的左边，一个在 1 的右边，函数值一样大。这和她原来的想法对不上。她一直默认，一个函数要么一直增，要么一直减，就像课本上画的那些直线。可是这个函数，从 0.5 走到 2，中间经过 1，竟然回到了同一个高度。那它在中间一定是先往下、再往上。那它在哪里拐的弯？

这是她自己问出来的问题，没有人替她问。她在草稿纸上又代了 0.8、1.2：f(0.8) 是 2.05，f(1.2) 约 2.03，都比 2 大一点，而 f(1) 正好是 2。拐点像是在 1。

她回到证明。这一次她知道自己要找什么了：要证在 1 的右边是增的，那证明里一定有个地方用到了“大于 1”。她重新算变形，把 $1/x_1 - 1/x_2$ 老老实实通分，得到 $(x_2 - x_1)/(x_1x_2)$，再和前面的 $x_1 - x_2$ 合并，提出公因式，得到 $(x_1 - x_2)(x_1x_2 - 1)/(x_1x_2)$。

$x_1x_2 - 1$。她盯着这个式子看了一会儿，然后在旁边写了一行小字：“两个数都大于 1，乘起来大于 1，所以这里是正的。如果两个数都在 0 到 1 之间，乘起来小于 1，这里就是负的，函数就是减的。”她把这一行圈了起来。

要补一句：姚可欣也不是从零开始的。她看过课本上的例题，知道五个小标题，这是在场。在场是她的起点，和顾一鸣一样。差别在于，她的在场没有一路被串到底：例题只走到一半就不够用了，她得自己往下走，于是撞上了 f(0.5) 和 f(2)。

这一题，她做了将近四十分钟。第二天她没有被叫上黑板。可是下课时，她走过去看了一眼黑板上那道 $x + 4/x$，跟同桌说：“这回分界点应该是 2，因为 x_1x_2 要和 4 比，2 乘 2 是 4。”把两个晚上并排放：

	顾一鸣的晚上	姚可欣的晚上
第七题用时	约五分钟	约四十分钟
对不上在哪里	没有	f(0.5) 和 f(2) 一样大，和“函数要么增要么减”对不上
谁问出了“为什么”	解答替他问好、答好了	她自己在草稿纸上问出来
谁付了拆开、重接的力气	机器	她自己，算错两遍，代了五六个数
场	有，只是无处可用	没有，这一晚没有人托她；课本例题让她起了个头，她卡得住，是因为落差刚好

	顾一鸣的晚上	姚可欣的晚上
第二天面对 x + 4/x	写不出变形，不知道和几比	不动笔就说出“和 4 比，分界点是 2”
留下了什么	一份整齐的作业	一行圈起来的小字，和一个会拐弯的函数

要说公道话。姚可欣那一晚也有运气：她的落差恰好不大，正好卡得住；如果题目难一倍，她多半会卡成一锅粥（混沌），最后什么也没有。那一晚也没有人托她，换一个基础弱些的同学，四十分钟可能只换来一肚子气。场的事，第 11 章专门讲。

也不要把姚可欣的晚上说成“她学会了”。按本书的五段账，她那一晚走完的是第一段：建立。x_1x_2 和 1、和 4 的关系，在她身上接起来了。能不能维持到两周以后，能不能在一道完全不像的题里认出它来，那是第 8 章和第 9 章的事。

可是有一件事已经确定：第二天，她身上有一样东西，顾一鸣身上没有。那样东西不是答案。答案顾一鸣也有，比她的还整齐。那样东西是一次对不上、四十分钟她自己付的力气，在她身上留下的一处新的接头。

一个星期后，姚可欣的手机修好了。她也开始用那个 AI 应用，可是用法有一点不一样。那一晚的经历让她留下了一个习惯：先自己代几个数，看看函数长什么样，再动笔证；实在卡住了，再去问。她问的也不是“这题怎么做”，而是“我算出 f(0.5) 和 f(2) 一样大，这是为什么”这一类的问题。

同一个应用，在她手里是一个场：她先卡住了，它来托一把。在顾一鸣手里，它是一份解答：他还没卡住，它就把路走完了。工具是同一个，排在卡住的前面还是后面，结果就不一样。这个用法也不是她想出来的什么妙招，是那一晚的四十分钟在她身上留下来的。这算得上一次小小的结晶：落在“怎么学”上，一个星期后换了工具、没人提醒，它还在。

还有一点值得补上。如果姚可欣那晚手机没坏，她会不会也去拍题？多半会。她不比顾一鸣更自觉，她只是碰巧没有那条近路。这提醒你，不要把顾一鸣

的晚上归到“他不够用功”上去。两个孩子的差别，不在品格，在那一晚的条件。

◆ 八、放回日子里：只问留下了什么

回到你自己的日子里。如果你是学生，下一次拍题之前，可以先做一件很小的事：在草稿纸上写一行你自己的猜测。哪怕只是“我猜要先通分”，哪怕猜错了。这一行字很要紧。它让你在看到解答之前，先有了一个“原来想的”。等解答出来，你就能看见：解答在哪一步和你想的不一样。那一处不一样，就是你的对不上。没有这一行，解答再好，也只能从你眼前流过去。

如果你是家长，晚上看孩子的作业，可以少问一句“做完了没有”“都对了吗”，换成另一句：“你今天哪道题卡住了？卡在哪一步？”一个孩子如果天天作业全对，却天天答不出这一句，那就值得多看一眼了。全对不是坏事；全对而一次也没卡住，才是要留意的事。

还可以试一个更直接的办法：把作业本合上，请孩子随便挑一道，不看本子，从头讲给你听。你不必听得懂数学，你只要听他是不是讲得出“为什么是这一步”。讲得出，至少说明东西在他身上接上了一部分；讲到一半说“反正就是这样做的”，那多半还停在看懂。

如果你是老师，课堂上也有办法看出看懂型。讲完一道例题，别问“听懂了没有”，几乎所有人都会点头。换成“谁能说说，第三步为什么要这样做”，或者“如果把这个 1 换成 4，哪一步会变”。答得上来的人不多，这不是坏消息，这是一张真实的地图：它告诉你，这一班学生停在哪一段。

陆晓岚的“回锅”也值得借用：批完作业，第二天挑一道，换个数字，请人上来做。它花不了五分钟，可它做的正是考场做的事，撤掉解答，看剩下什么。撤掉解答的办法有很多，不止上黑板一种。几个家里和课堂上都做得到的：

- **合上讲。** 做完的题，合上本子，从头讲一遍。讲不下去的那一步，就是没接上的那一步。
- **换个数字。** 同一道题，把 1 换成 4，把 2 换成 3，看还做不做得出来。换了数字就不会，说明手上记住的是那几个数，不是那层关系。
- **问一句为什么。** 不问“下一步是什么”，问“为什么是这一步”。看懂型的学生，往往说得出下一步，说不出为什么。
- **隔一天。** 今晚做完，明晚再做一次，不看昨天的本子。隔一天还在的，才谈得上往下一段走。

这四样都不难，也不花钱。它们做的都是同一件事：把那条串着东西的线抽掉，看东西自己还连不连得在一起。

这一章不是要你把 AI 赶出家门。后面会讲到，同一个应用，换一种用法，可以是很好的场。先自己卡住、写下猜测，再去问它：“我卡在这里，给我一个提示，别给答案。”Bastani 那项实验里只给提示的那一组，就是朝这个方向迈了一步。用法的事，第 19 章专门讲。

成年人也一样。你收藏过多少个“十分钟学会某某”的视频？看的时候每一步都懂，看完点个赞，觉得这件事算是会了。等到真要做的那一天，你多半还得把视频再找出来，从头看一遍。那个视频，就是你的那份 AI 解答。它没有骗你，它只是替你走完了那一段路。这一章只问一件事：留下了什么。

顾一鸣那天放学后，没有再打开那个应用。他在草稿纸上抄下 $x + 4/x$，自己代了几个数：$f(1) = 5$，$f(2) = 4$，$f(4) = 5$。他愣了一下。$f(1)$ 和 $f(4)$ 一样大。$f(2)$ 比两边都小。这个函数，好像在 2 附近拐了个弯。

那一刻他还不知道该怎么证。可是这一章到这里，已经可以停了：一个从周三晚上开始就没有出现过的东西，终于在他身上出现了。

带 走 的 话

看懂是答案把东西摆到你眼前，学习是你自己把它们拆开再接上；答案是免费的，建立不是。

小　账

前人把“看懂而不会”说成“浅”“不够深”“解释得少”，关在程度这扇门里。本书打开的门是：看懂是在场，学会之前还隔着一次建立，有没有发生，是有和无的差别。

发生被收回为发现的那一下，在“看懂了”三个字上：解答把一次本该由学的人付力气的建立，变成了一次眼睛对现成结果的认领。

想 一 想

1. 你最近一次说“我看懂了”，是在看什么的时候？现在把它合上，你还能从头说一遍吗？
2. 你身边有没有一样东西，你天天用、从不卡住，却说不出它为什么是这样？它和顾一鸣的第七题像不像？
3. 回想一次你真正学会某件事的经历，那一次，最先让你停下来的那一处对不上是什么？

◆

02

第 2 章

内卷：越刷越多，留下越少

这一章的问题

孩子同一类题刷了两百道，闭着眼都做得对，题目只改了一个条件，他就写错了——那两百道题到底留下了什么？

晚上十点二十，晚自习的下课铃响了。赵思琪没动。她把一张数学卷子翻到背面，又做了一道。她十七岁，在河北一所县城高中读高三。学校的作息是早上五点五十起床，晚上十点二十下晚自习，回到宿舍，还能借着走廊的灯再看二十分钟。这样的日子她过了两年多，已经不觉得苦，只觉得是日子本来的样子。

她桌上摞着三样东西：一本真题汇编，一本专项练习，一本错题本。错题本已经是第三本了。前两本写满了，用皮筋扎着，塞在床底下。错题本是班主任要求的。规矩是：抄原题，用红笔写正确解法，旁边注明错因。两年下来，赵思琪的错因栏里，写得最多的两个字是“粗心”，其次是“没想到”。没想到什么，她没写。

她的一天是按题型切开的。早读背英语作文模板，上午两节数学讲“圆锥曲线大题的六种设法”，下午做一套理综，晚自习按专题刷。每个专题有一个名字：“设而不求”“分离参数”“构造函数”。名字叫得出，题就做得出。

这天晚上她做的是“求最小值”。这一类题，她做过不下两百道。题一摆出来，手比脑子快：凑出两项，让它们的乘积是个常数，套均值不等式，写一句“当且仅当……时取等号”，收工。一道题三分钟。同桌拿一道题来问她。她

瞄了一眼，说：“这种题我闭眼都会。”这话不是吹。周测里这一类题，她两年没丢过分。第二天周测，数学老师韩立新出了一道看上去一模一样的题：

> 当 x ≥ 3 时，求 x + 4／x 的最小值。

赵思琪三十秒写完：x + 4／x ≥ 2√4 = 4，最小值是 4。这道题她错了。她不服，拿着卷子去讲台边找韩老师。韩老师没讲，只让她把 x = 3、4、5 代进去算一算。她算出来是 4.33、5、5.8。没有一个是 4，而且一个比一个大。

她愣在讲台边。那个“4”是从哪里来的？每一步都是她自己写的，每一步都没错。口诀也背得滚瓜烂熟：“一正二定三相等。”可是“三相等”那一条，等号要真的取得到，她两年里从来没认真查过。因为她做过的两百道题，等号都取得到。

这一章要讲的，就是这两百道题。它们没有白做，它们在赵思琪身上留下了一样很结实的东西。可是那样东西，碰到第二百零一道题，熔不开。

◆ 一、越刷越快，也越刷越窄

“刷题”这个词，十几年前还是学生之间的土话，现在已经是一门生意。教辅书按题型分章，一个题型配一个“秒杀技巧”。网课按模块卖，一个模块讲透一种套路。学校按周测、月考、联考排日子，一张卷子接着一张卷子。

这一整套东西，有它自己的道理。高考是一次规模极大的选拔。题目有边界，题型有规律。把规律摸透，把手练熟，在两个小时里少丢几分，就是实打实的分数。在一个县城里，几分的差别，可能就是两所大学的差别，也可能就是留在本地和去往省城的差别。所以刷题不是谁犯糊涂。它是在一场很硬的竞争里，很多家庭能找到的最稳妥的一条路。

在县城，这条路还有一层更实在的意思。大城市的孩子，周末可以去科技馆、听讲座、参加各种营；县城的孩子，手边最现成、最便宜、最公平的东西，就是一本题。题不认你家里是谁，做对就给分。赵思琪的父母在镇上开一家小五金店，他们说不出什么教育的道理，只知道一句话：“多做题，总没错。”这句话里有一份朴素的信：努力会被看见。本书不想拿走这份信，只想问它被兑成了什么。

“内卷”这个词，原是人类学的说法。人类学家格尔茨（Clifford Geertz）在 1963 年的《农业内卷化》里，写的是印度尼西亚爪哇的稻田。人口越来越多，人们往同一块田里投进越来越多的劳力，精耕细作到极致，每个人分到的收成却不见长。这个词后来被借到中国的学校和办公室里，意思变得更直白：你刷一百道，别人刷两百道；你报一个班，别人报三个。每个人都更累了，名次的总数一个也没有多出来。

内卷还有一个不常被说破的特点：大家卷的，是同一样东西。人人都刷同一套题型，比的就只剩下快和稳。快和稳拉不开差距了，出题的人就把题出得更偏一点、更绕一点；题偏了，教辅就跟着出“偏题专项”；专项一出，大家又一起刷。一圈转下来，题更难了，人更累了，刷的方向还是同一个。现在这一圈转得更快。刷题软件做完一道题，会自动推送“相似题”；生成式 AI 一分钟能出一百道同类题。机器越来越懂“同类”，学生就越来越难碰到“不同类”。

2021 年 7 月，中共中央办公厅、国务院办公厅印发了一份文件。文件全名是《关于进一步减轻义务教育阶段学生作业负担和校外培训负担的意见》，就是人们常说的“双减”。文件写得很具体。小学一、二年级不布置家庭书面作业；三到六年级书面作业平均完成时间不超过 60 分钟，初中不超过 90 分钟。学科类校外培训机构统一登记为非营利性机构。它们不得占用国家法定节假日、休息日及寒暑假组织学科类培训，一律不得上市融资。

这份文件对在哪里？它看见了量的问题：作业太多，培训太多，孩子的时间被吃光了。它也看见了钱的问题：资本进了门，家长的焦虑就被做成了生意。这两样看得都准。它管的是义务教育阶段。赵思琪在高中，“双减”没有直接管到她的晚自习。可是就算管到了，也有一件事是文件管不着的：同样一个小时，刷的是什么。

新加坡没有“双减”，有另一个词：kiasu。这是闽南话“惊输”，就是怕输。它在新加坡人的日常英语里用得极多，后来收进了牛津英语词典。家长排队给孩子报补习班，提前一年学下一年的课，是 kiasu；考前把历年试卷刷上三遍，也是 kiasu。新加坡统计局每五年做一次家庭开支调查。据媒体对调查结果的报道，全国家庭花在私人补习上的钱，2012/13 年度约 11 亿新元，2017/18 年度约 14 亿，2022/23 年度约 18 亿。

新加坡的中学生，书包里常有一种厚厚的本子，叫 Ten-Year Series，也就是“十年试卷”。它把过去十年的全国考试真题，按年份、按科目收在一起。不少学生考前要把它从头到尾做一遍，有的做两遍。

本书设想一户新加坡人家。母亲陈美玲在一家连锁超市做主管，儿子读中四，年底考 O 水准。她给儿子排的周末是：周六上午数学补习，下午化学补习，周日上午把“十年试卷”做两份，下午对答案。儿子有一回问她：“这几道题我上个月做过了，还要再做吗？”她说：“做过的才要再做，考场上看见就不慌。”这句话一点没错。看见就不慌，是真本事。可是这句话后面藏着一个没说出口的假定：考场上出的，会是做过的那种题。

两地的话不同，形状是一样的：怕落下，就多做；多做的，大多是同一类事。本书不评判哪一种制度更好。本书只问一个问题：两百道同类题做下来，学生身上到底留下了什么？

◆ 二、刷题确实在付功

先把刷题对的地方写足。心理学里有一个被反复证实的现象，叫“测试效应”：把学过的东西拿出来考一考，比再读一遍记得更牢。这种练法，也叫“提取练习”。最常被引的一项研究，是美国华盛顿大学（圣路易斯）的两位心理学家 Roediger 与 Karpicke，2006 年发表在《心理科学》上的实验。

他们做了两个实验。第一个实验里，学生读两段短文，一段读完再读一遍，另一段读完就考一遍。五分钟后测，再读的那段记得多，约 81% 对 75%；两天后测，考过的那段反超，约 68% 对 54%；一周后，约 56% 对 42%。

第二个实验把差别拉得更开。他们让大学生读一段科普短文。第一组读四遍；第二组读三遍、考一遍；第三组读一遍、考三遍。这里的“考”，就是合上书，把想得起来的全写下来。五分钟后测，读四遍的那组最好，约记得 83%；考三遍的那组最差，约 71%。

一周后再测，次序整个倒了过来。考三遍的那组还记得约 61%，读四遍的那组只剩约 40%。更有意思的是学生自己的估计。学完之后问他们：“一周后你能记住多少？”读四遍的那组最有把握。一周后，他们记得最少。

这个实验说了两件事。第一件，把东西从脑子里往外拿，本身就在加固它。第二件，“觉得自己会了”和“一周后还在”，是两回事。读得顺，感觉就好；拿得出，才留得住。刷题站在对的一边。它不是一遍遍地看，是一遍遍地做。每做一道题，就是一次往外拿。

可是也要看清这个实验测的是什么。它测的是：同一段短文，一周后还记得多少。学生考的、记的，都是同一段话。它证明了往外拿能让东西留得久，没有回答留下来的东西换个样子还认不认得出。这不是实验的毛病。一个实验只回答

一个问题，它回答得干干净净。只是读的人不要替它多说一句话：测试效应说的是“留得住”，不是“用得上”。

用本书的话说：刷题在付维持的功。本书的三句话是：学习是纠缠的建立，记忆是纠缠的维持，学会是纠缠的粒子化。一个已经建起来的纠缠，要靠一次次再用，才不会松掉。刷题就是再用，而且是高频的、带着对错反馈的再用。

刷题还有第二样好处：熟。熟了，手就快，省下来的脑子可以去想难的地方。一个连通分都要停下来想半天的学生，很难把心思放到一道应用题的题意上。这一点，带过毕业班的老师都见过。

刷题的第三样好处，更少被人说起：它让人认得出题型。看到一道题，知道它“属于哪一类”，这不是死记，是一种真本事。下棋的人看一眼棋盘，就知道“这是什么局面”，靠的是成千上万盘的积累。修车师傅听一耳朵发动机的声音，就知道毛病大概在哪，靠的也是同一样东西。所以，说刷题“没用”，是不公道的。赵思琪那两百道题，换来的东西是真的：快，稳，一眼认得出。

刷题的问题不在于付了功，在于这份功付在了哪里，又停在了哪里。

◆ 三、范进：一种文章写到五十四岁

往前看两百多年，有一个刷得比谁都久的人。吴敬梓《儒林外史》第三回，广东学道周进在考场上点名，叫到一个童生，问他多大年纪。这童生答：

> 童生册上写的是三十岁，童生实年五十四岁。

周进又问他考过几次。他说：

> 童生二十岁应考，到今考过二十余次。

这个人就是范进。他从二十岁写到五十四岁，写的是同一种文章：八股。题目从四书里出，格式一段也不能乱，破题、承题、起讲、入题，每一步都有规矩。三十多年里，范进做的事，就是把同一种格子填了又填。这是古代的刷题，而且比今天任何一个高三学生刷得都久。

周进自己也是这样熬出来的。第二回里，他做了几十年童生，跟着做生意的姐夫到省城，顺路去看一眼乡试的贡院。走进号舍，看见那一排排号板，他“一头撞在号板上，直僵僵的不醒人事”。醒过来就哭，满地打滚地哭。几个同行的商人看着可怜，凑了银子替他捐了个监生，他这才进得了考场，后来一路中举、中进士，放了学道。

一个把一辈子交给号板的人，现在坐在考官的位子上，看另一个人的卷子。他看范进的卷子，头一遍觉得不通，又看一遍，觉得有些意思，“直到三遍之后，才晓得是天地间之至文”。这个细节很要紧。同一篇文章，在一个也刷了一辈子八股的考官眼里，要看三遍才“懂”。他懂的是什么？不是文章讲出了什么新道理，是它在格子里填得有多准。两个刷熟了同一种格子的人，在格子里认出了彼此。

范进后来中了举。报喜的人到了家，他看了报帖，“看了一遍，又念一遍，自己把两手拍了一下，笑了一声”，往后一跤跌倒，不省人事。被灌了水救醒之后，他拍着手往外跑，一脚踹进门外的塘里。挣起来时，头发跌散了，两手黄泥，一身淋淋漓漓的水，“拍着笑着，一直走到集上去了”。最后是他平日最怕的丈人胡屠户，壮着胆子打了他一个嘴巴，才把他打醒过来。

还有一处要看。中举之前，胡屠户骂他是“现世宝穷鬼”，骂他“尖嘴猴腮”。中举之后，同一个胡屠户逢人就说：“我的这个贤婿，才学又高，品貌又

好。”随后，素无往来的张乡绅登门，送上贺仪五十两，又送了东门大街上的一所房子。没过多久，田产、奴仆都有人送上门来。

范进还是那个范进。文章还是那几篇文章。一夜之间改了样子的，是他周围的现实。这一处说明，被供起来的不只是范进心里的八股，是整个社会心里的“举人”。一个理念符号，可以在一天之内改写一条街的脸色，一个家的家当。供它的人越多，它越像一尊神。

第三回的结尾更叫人心里发紧。范进的母亲搬进新房，看见满屋的家具器皿，知道这些都归了自家，大笑一声，往后跌倒，痰涌上来，不省人事。苦日子她熬过来了，这一下好日子，她没接住。

范进发疯那一段，读者多半当笑话看，吴敬梓也确实写得好笑。可是笑过之后，可以问一句：一个五十四岁的人，为什么会被一张报帖弄疯？用本书的话说，八股文是一种理念符号。三十多年的刷，把它在范进身上刷成了一颗极结实的粒子。它稳定：他闭着眼也写得出。它整体：一篇八股从破题到收结，一气呵成。它独立：不用看书，坐进号舍就能写。

可是这颗粒子只结在理念一界。它和范进的日子从来没有对过账。家里断了粮，老母亲说自己“饿的两眼都看不见了”，丈人当众骂他，他照写他的八股。日子是日子，文章是文章，两边各过各的，没有人逼他把两边放在一处看。中举那一刻，理念那一头突然兑了现。几十年分开过的两界，一下子要合在一处。旧的那个“我”，一个考了二十多回的穷童生，接不住这个新的现实。熔不开，又非熔不可，人就碎了一下。

吴敬梓还写了后来的范进。第七回，范进已经做了山东学道，管一省的考试。席上有人讲了个笑话：从前有位学台去四川，名士何景明醉后对他说，“四川如苏轼的文章，是该考六等的了”。这位学台记在心里，三年后回来说，在四

川到处细查，“并不见苏轼来考，想是临场规避了”。满座的人都听得出这是笑话。范进没听出来。他当了真，接了一句：

> 苏轼既文章不好，查不着也罢了。

一个刷了三十多年文章的人，不知道苏轼是谁。这不是范进笨。他会的那样东西结得太牢，也结得太窄。格子外面的东西，进不来。

把范进和赵思琪放在一起看，差的不是聪明，也不是用功。范进刷了三十四年，赵思琪刷了两年，刷的方向是同一种：把一种格子填熟。差别在于，赵思琪的周测卷上，有一位老师事先放了一道缝。范进的考场里，没有人给他放过。他这一辈子碰到的唯一一次对不上，是那张报帖，来得太晚，也太大。

本书在这里要说一句公道话：吴敬梓写范进，刺的不是范进这个人。一个读书人把一辈子交给一种文章，是因为那个时代只给读书人修了这一条路。范进只是在这条路上走得最远的人之一。

◆ 四、孔乙己：回字的四样写法

又过了一百多年，鲁迅写了另一个读书人。《孔乙己》发表在 1919 年 4 月的《新青年》上。小说里的“我”是鲁镇咸亨酒店的小伙计，十二岁。孔乙己是店里的常客。小说给他画像，只用了一句：

> 孔乙己是站着喝酒而穿长衫的唯一的人。

站着喝酒，是因为穷，和做工的短衣帮一样，坐不起店里的座位。穿长衫，是因为他是读书人，死也不肯脱。这两样放在一个人身上，就是一条缝。孔乙己考了一辈子，连秀才也没有进。可是他会的东西不少。有一天，他问小伙计读没读过书，要考考他：

> 茴香豆的茴字，怎样写的？

小伙计心里看不起他，懒懒地答了。孔乙己很高兴，用两个指头的长指甲敲着柜台，说要教他，又问：

> 回字有四样写法，你知道么？

小伙计早走远了。孔乙己用指甲蘸了酒，想在柜台上写字，见没人要听，叹一口气，显出极惋惜的样子。还有一回，邻居的孩子听见笑声，围上来讨茴香豆吃。孔乙己给了每人一颗。孩子们吃完不走，眼睛盯着碟子。他慌了，伸开五指罩住碟子，弯腰说：“不多了，我已经不多了。”直起身又看一看豆，摇头说：

> 多乎哉？不多也。

这一句出自《论语·子罕》。孔乙己用它来护一碟豆子。这个场面很好笑，也很准。一句圣人的话，在他身上结得那样牢，牢到随时随地都能脱口而出，连一碟豆子都要用它来说。它独立得很，走到哪里都带着；可是它从来没有回写过孔乙己的日子，只是贴在日子上面，像一张揭不下来的标签。

“回字有四样写法”后来几乎成了一句成语，专门用来笑话一种没用的学问。先替孔乙己说一句公道话。一个字有几种写法，这本是真学问。孔乙己记得清清楚楚，写得出来，还急着教给别人。他的会，是稳的、整的，离了书也立得住。

这份会，停在了哪里？它停在理念一界，而且停在一个很小的格子里：字的写法。它和孔乙己的现实接不上。他写得一笔好字，也替人抄过书，换一碗饭吃。可是小说里说，他坐不到几天，人连同书籍纸笔一起不见了。会写字和靠写字过活之间，隔着一整段他从没走过的路。

它和孔乙己的自我，倒是接上了，接成了一件脱不下的长衫。有人当面揭他偷书，他涨红了脸，额上的青筋一条条绽出来，争辩道：

> 读书人的事，能算偷么？

这一句，是自我那一头固化得最清楚的样子。“我是读书人”这颗粒子，硬到可以把“偷”改叫“窃”，把现实换个名字，也不肯让自己松动一下。本书管这个叫石心。石心不是坏，是凝住了。缝明明在，自己身上那颗粒子却拒绝被改写。

孔乙己最后一次来酒店，腿已经被打折了，用手撑着地走，身下垫着一个蒲包。小说的最后一句是：

> 我到现在终于没有见——大约孔乙己的确死了。

范进和孔乙己，一个中了，一个没中；一个疯了一阵又好了，一个慢慢就没了。可是放在本书的账上，他们是同一种人。他们的会，结成了粒子，结得很牢，却熔不开。范进的那颗凝在对象一头，被供成了偶像，名叫功名。孔乙己的那颗凝在自我一头，穿成了石心，名叫长衫。他们都不是没学会。他们是在理念一界里学会了一样东西，再也学不进别的。

◆ 五、刷出来的也是粒子

回到赵思琪。本书说，学会就是特征纠缠的粒子化：一个符号在学的人身上发生了。粒子态的道理，见书二第 7 章。判别它的三条判据，正是粒子的三个性质：稳定、整体、独立。拿这三条去量赵思琪的“均值不等式”。

稳定。换一天，换一张卷子，换一个监考老师，她都做得出。两年没丢过分。整体。凑项、套公式、写取等条件，一气呵成，不用人在旁边提醒下一步。独立。不用翻书，不用问人，进了考场它就在。三条全过。

这一点必须说清楚：刷熟不是装会。刷出来的，也是一颗粒子。这颗粒子在赵思琪身上真的结成过，不是幻觉。这正是刷熟型假会难认的地方。看懂型的假会，撤掉解答就散了；背住型的假会，过两周就松了。刷熟型既不散，也不松，它结实得很。

那次周测，班上写 4 的有一大片，里面至少有三种人。一种是张晨。他做练习从来是先看解析，看懂了就打勾。周测上他看见这道题，觉得眼熟，可是解析不在手边。他连“凑两项”都想不起来怎么凑，最后蒙了一个 4，因为“这种题答案好像都是整数”。他停在看懂，纠缠还没有建起来。

一种是王倩。她把“一正二定三相等”抄在课本扉页上，考前背了三遍。她记得要写“当且仅当”，可是哪一项该等于哪一项，她记混了，套出来一个 4，取等条件写错了。她的东西是背住的，靠考前那三遍撑着。

还有一种，就是赵思琪。她什么都会，一步不错，错在那一步做法本身出了界。三个人写的是同一个 4，停在的是三个不同的地方。给张晨讲一遍解析，他会说“懂了”；让王倩再背一遍，她会写对取等条件；可是这两样药，到赵思琪这里都不管用。她不缺解析，也不缺口诀。她缺的是一次被逼着松开的机会。

刷熟还有一样东西，让人更难放手：它给人的感觉，比真会还像会。一道题三分钟写完，一步不卡，那种顺手的感觉很好。家长看了放心，老师看了满意，学生自己也踏实。“我会”这三个字，在刷熟的人身上说得最响。可是顺手的感觉，说的是这条路走过很多遍，不是这条路通向哪里都走得通。

那么，它“假”在哪里？第一处，它只结在理念一界。赵思琪那颗粒子说的是：“看见 x ＋ a／x 这副样子，就套均值不等式。”它认的是题目的长相，不是题目背后的那件事。

题目背后的那件事是什么？是“两个此消彼长的量，加在一起，什么时候最小”。这件事在日子里到处都是。围一块面积一定的菜地，长拉长了，宽就得缩，篱笆却未必省。开车赶路，开得快省了时间，却多费了油。赵思琪那颗粒子，一次也没有落到这些事情上。

用三界的话说：它是一个理念符号，只在理念符号之间结了晶。它没有迁移成现实符号，更没有沉成“我懂这件事”的自我符号。迁移的道理，见书二第 15 章。

为什么刷了两百道，一道也没迁移过去？因为迁移要另付一笔账。从理念走到现实，要碰一次“书上的做法在这块地上不灵”；从现实走到自我，要碰一次“我原来以为的自己，在这件事上不对”。每走一步，都要有一次对不上，都要学的人自己付一份动能。刷题把全部动能都花在了理念界里面。两百道题，两百份动能，没有一份是留给跨界的。账本上，迁移那一栏是零。

第二处，它熔不开。活的会有一个标志：下一次对不上的时候，它熔得开，能重新结晶。“x ≥ 3”就是一次对不上。按旧做法算出来是 4，可她亲手把 3、4、5 代进去，怎么也算不出 4。理念给的数和她自己算出的数，中间是一条清清楚楚的缝。

一颗活的粒子碰到这条缝，会先松开：“我那套做法，在这里不灵了。为什么？”然后重新长：“原来等号得真的取得到；取不到，就要看这个式子往哪边走。”赵思琪那天在讲台边愣住，是因为她的粒子不肯松。她第一个念头是“老

师判错了”，第二个念头是“是不是我代数算错了”。直到第三遍算完，她才肯承认，出了界的是那个做法本身。

为什么会这样？因为那两百道题，是被人排过的。出题人知道均值不等式这一节要练什么，就把题出成等号取得到的样子。教辅书按题型分章，同一章里的题，一道比一道像。学生一道道做下去，从来碰不到一道“做法不灵”的题。对不上，被预先排除掉了。

有人会说：中国的数学课本来就讲“变式”，一道题换着花样出，怎么能说题都一样？这话对了一半。变式练习是一个好传统，好老师用它，正是为了逼学生看清一个做法的边界。可是在刷题的流水线上，变式常常只变了外面：数字换一换，字母换一换，图形转个方向，做法却一步不变。换汤不换药，学生做十道，就是把同一副药熬了十遍。

真正的变式，要变到让旧做法失灵的地步。数字换了，做法照样灵，那不叫对不上，叫重复。等号从取得到变成取不到，做法不灵了，那才叫对不上。本书反复说：没有对不上，就没有建立。这里要补一句：

没有对不上，已经建好的东西也不会被拆开重接，只会被一遍遍加固。

动能这时候确实在付。赵思琪熬夜、做题、整理错题本，一点也没偷懒。可是动能有方向。两百道同类题，就是两百次朝同一个方向推。连接被加固了两百次，一次也没有被拆开过。结果是连接度越来越高，断裂越来越难。内能存得极足，方向却只有一个。这就是固化。内能、动能、势能这三笔账的来历，见书二第 16—18 章；固化与熔开，见书二第 19、20 章。

固化的粒子，会在两头凝住。凝在对象那一头，叫偶像。分数是最常见的偶像。分数本来是一个理念符号，它的用处是回写：回写到现实里，告诉你哪里没学好；回写到自我里，告诉你下一步怎么学。一旦它不回写了，只被供着，每天盯排名，每周算差了几分，它就成了偶像。范进的功名，就是这样一尊偶像。

凝在自我那一头，叫石心。“我是学霸”“我是学渣”“我数学就是不行”，都是自我符号。它们一旦凝住，就会反过来挑题：自认学霸的，不敢碰可能做错的题；自认学渣的，不肯碰可能做对的题。孔乙己的长衫，就是一颗石心。

那次周测之后，张晨在走廊里说了一句：“均值不等式这种，我反正不行，我就是数学学渣。”这句话听着像自嘲，其实是一颗正在凝住的石心。它不是这次考砸了才有的，是两年里一次次“看了解析才会”慢慢沉下来的。它一旦凝住，就会替他挡掉下一次机会：下回碰到这类题，他会先跳过去，连对不上的机会都不给自己。

石心和偶像一样，结得越久越难熔。可是它们也是粒子，粒子就有熔开的时候。只是那一次熔开，需要比刷题多得多的场：有人在旁边，不急着讲，也不急着安慰。把两种会并排放着看：

比一比	刷熟的会	活的会
结在哪一界	理念界，认的是题目的长相	理念、现实、自我三界都落了地
三判据	在熟悉的题型里全过	换了情境也还过
碰到反例	先疑心反例，再疑心自己算错	先松开旧做法，去找它的边界
动能的方向	同一个方向反复加固	被拆开、重接，方向会变
对不上从哪里来	被题目编排预先排除	被留着，甚至被特意放进来
对象那一头	分数被供成偶像	分数回写到“哪里没学好”
自我那一头	“我是学霸／学渣”凝成石心	“我会想这类事”，还改得动

比一比	刷熟的会	活的会
书里的样子	范进的八股，孔乙己的回字	肯回头查等号取不取得到的那个人

本书在这里还要守住一个分寸。刷熟的会，不是“没有会”，也不是“会得少”。它是一种结得窄、结得死的会。治它的药，不是让学生别刷了，是在刷的路上放进对不上，让那颗粒子有机会熔开一次。

◆ 六、一道取不到等号的题

把赵思琪那一次周测，从头到尾完整走一遍。先说一件她当时不知道的事。那道“$x \geqslant 3$”的题，不是韩老师随手出的。周测前一天，他在教案边上写了一行小字：“预计多数人写 4。”

这一行字很要紧。它说明这次对不上，是在事前就被独立指认出来的。韩老师知道这个班的手已经练成了什么样，知道旧做法会在哪一处失灵，于是把缝放在了那里。不是事后回头说“那里一定有过对不上”，是事先就写下了它会在哪里裂开。

周测结果出来，全班五十二人，四十一人写了 4。赵思琪是其中之一。没写 4 的十一个人，韩老师一个个看了卷子。有三个人是先把 $x = 3$ 代进去算了一下，发现 4.33 比 4 大，起了疑心。有两个人在草稿纸上画了一条歪歪扭扭的曲线。剩下几个，是别的地方算错了，碰巧没写 4。那五个起了疑心、画了曲线的人，平时的数学成绩并不都比赵思琪好。他们只是还留着一个习惯：算出一个数，回头看一眼它像不像。

第一步，韩老师没有讲答案。讲答案很快，一分钟就够：“等号取不到，用单调性。”全班会点头，下次换个数又错。这一分钟省下来的，正好是学生该自己付的那份动能。

第二步，他给了场。他把没写 4 的十一个人分进各组，四五个人一组，写 4 的和没写 4 的搭着坐，只给一个任务。在草稿纸上，把 x 从 1 取到 6，一个个算出 x ＋ 4／x，点在坐标纸上，连起来看。

赵思琪和同桌李梦瑶都写了 4，分在一组。组里没写 4 的那个男生，只说得出“代 3 进去不像”，说不出为什么。几个人一边算一边不服气。点描出来，是一条像碗一样的线，碗底在 x ＝ 2，正好是 4。李梦瑶先看出来：“碗底在 2 那儿，可题目说 x 要大于等于 3。”

赵思琪盯着那张图看了很久，说了一句：“4 在墙外面。”这一句话，不是韩老师教的，也不是书上写的。它是她自己长出来的。

第三步，是付账。这件事用了她们差不多四十分钟。比做十道同类题还慢。赵思琪中间有一阵很烦，说“考试哪有时间画图”。这份烦，就是难度。在本书里，难度就是动能的账单。四十分钟里，她那颗“见了就套”的粒子被拆开了：拆成“两个量此消彼长”，拆成“碗底在哪里”，拆成“题目给的范围是一堵墙”，再一样样重接回去。

第四步，是重新结晶。“一正二定三相等”还是那七个字。可是“三相等”这三个字，在她身上换了一个样子。原先它是一句要背的话，现在它是一幅图：一只碗，一堵墙，问一句“碗底在不在墙里”。第五步，是换一界试试。一周后的周测，最后一道小题是这样的：

> 学校要在教学楼前围一块面积为 4 平方米的长方形花坛。花坛的一条边紧挨着一扇门，长度不能小于 3 米。花坛四周都要围上篱笆，篱笆最少要多长？

这道题和“x　≥　3”是同一件事，只是换上了现实的衣服。没有 x，没有“求最小值”，只有花坛、门和篱笆。赵思琪读完题，在草稿纸角上画了一只

碗和一堵墙。她写对了。这不是因为她又多刷了一道。是那颗粒子从理念界走了出来，认出了花坛里的同一件事。

第六步，是看自我那一头。那次以后，她的错题本上多了一种写法。以前她抄题目、抄正确答案、写“粗心”两个字。现在有几道题，她不抄答案，只在旁边写一个问句：“等号取得到吗？”“这里有没有墙？”后来做二次函数在区间上求最值，她也先找墙。这一段经历，显出了一个会先看墙的赵思琪。

本书要老实交代另外几件事。她没有因此不刷题。高三还剩半年，题照刷，卷子照做。她的名次没有大变，那次周测她还是丢了那五分。她也没有从此什么都熔得开。下一个单元的三角函数，她又刷熟了一套“见了就套”的做法，又在别处卡住过。

韩老师也付了账。那一节课，他只讲了一道题。隔壁班的老师说他“进度落下了”，年级组长在教研会上问过一句。他第二周补了一节课的练习，才把进度追回来。这一笔账要写进来。留出对不上，不是免费的。它要老师花心思事先找缝，要课堂让出时间，要有人顶得住进度的压力。一个老师一学期能这样做几次，不全由他自己说了算。

一次熔开，不是一次脱胎换骨。它只是在一个具体的地方，让一颗死了的粒子活过来一回。可是有过一回，下一回就知道往哪里找墙。

◆ 七、放回日子里：刷，但留一道缝

本书不劝谁别刷题。考试还在，竞争还在，劝人别刷是站着说话不腰疼。本书只劝一件事：刷的时候，留一道缝。

给学生的。每刷十道同类题，自己动手改一道题的条件。把“$x > 0$”改成“$x \geqslant 3$”，把“匀速”改成“先加速再匀速”，把“所有人都”改成“有一个人不”。改完先别算，写下你猜旧做法还灵不灵，再去算。猜错的那一道，比

做对的十道值钱。错题本也可以换个写法。错因栏里别再写“粗心”。粗心是一句不用付动能的话，写下它，那道题就算翻篇了。改成写两行：第一行，我原来以为是怎样；第二行，结果是怎样。两行之间的那条缝，就是这道题真正要你学的东西。

给老师的。一张练习卷里，留一道反例题，放在最不起眼的位置。题型分章教完以后，再把几章的题混在一起出，不告诉学生每道题属于哪一类。认长相的会，在混卷里会露出来。

给家长的。新加坡的 kiasu 也好，国内的“别人家都报了”也好，再给孩子多报一个班之前，先问一句：这个班让孩子多做的，是同一类题，还是不一样的题？

“双减”以后，不少义务教育阶段的家庭，周末多出了几个小时。这几个小时怎么用，是一道新题。如果只是把校外班换成家里的练习册，量少了，方向没变。不如拿出其中一小时，陪孩子做一件书上的道理塞不进去的事。算一算一家人一个月的电费，量一量阳台能放几盆花，看看哪一步书上的公式不够用。

还有一个在家里就能用的判别法。拿一道孩子“闭眼都会”的题，悄悄改掉一个条件，让旧做法不灵。看孩子的第一个反应：是先说“题出错了”，还是先说“咦，这里不对”。前一种，是粒子凝住了。后一种，是粒子还活着。这个判别法，只是看一眼，不是下诊断。孩子说“题出错了”，不说明他不行，只说明那颗粒子结得窄。窄的粒子，可以熔开。

最后，给自己。你身上也有刷熟的会。做了十年的报表，开了一千次的例会，炒了一辈子的同一盘菜。哪天有一个条件变了，你的第一句话是“不可能”，还是“那旧办法的边界在哪”？两百道同类题，刷的是同一个方向。

内卷之所以留下越来越少，不是因为刷得不够，是因为方向一直没变过。

带走的话

刷题付了维持的功，也结出了粒子；可同类题把对不上预先排除，那颗粒子只结在理念界，熔不开。

小　账

前人说刷题，要么夸它是“努力”，要么骂它是“死记”，两种说法一起关上了“刷出来的也是会”这扇门；本书打开它：刷熟是一颗真的粒子，只是结得窄，熔不开。发生被收回为发现的那一下，在题目被按题型排好、等号总取得到的时候。对不上被预先排除了，学生每做一道题，都只是在“找到”一个早已放好的答案。

想一想

1. 你有没有一样“闭眼都会”的本事？试着改掉它的一个条件，旧做法还灵吗？
2. 你家里或你身上，有没有一个被供起来、不再回写的分数、排名或头衔？它还在告诉你“下一步该怎么做”吗？
3. 范进和孔乙己，你更怕自己像哪一个？那颗熔不开的粒子，在你身上叫什么名字？

◆

03

第 3 章

考试测的是什么

这一章的问题

物理卷子考了八十多分，换个说法问一句“抛上去的球受几个力”，却答错了——那八十多分到底测到了什么？

期中考试阅卷，是周振华一年里最踏实的几个晚上。他四十八岁，在武汉一所大学教大学物理，教了二十一年。学生是工科大一新生，机械、土木、电气，一个大课一百二十人。期中考的是力学：牛顿定律、动量、能量。

十一月的那个晚上，他在办公室批到快十一点。窗外是长江边常有的那种雾，楼下篮球场的灯已经灭了。这一届的计算题答得不错。斜面上的滑块，绳子拉着的两个物体，弹簧连着的小车，平均分八十二。周振华心里有数：这样的分数，放在全校也说得过去。卷子最后有一道题，是他临时加的，不计分。题目只有两行：

> 把一个小球竖直向上抛出，忽略空气阻力。小球离开手以后、还在上升的途中，它受到哪些力？

四个选项：A，只受重力；B，受重力和一个向上的力；C，受一个向上的力；D，不受力。他本以为这是送分题。批完一数，一百二十个人里，七十四个选了 B。选 B 的人里，有邓凯。

邓凯是机械专业的，计算题一分没丢。斜面摩擦、连接体、动量守恒，每一步都写得干干净净，受力分析图画得比助教还工整。可是一个抛向空中的小球，他画出了一个往上的力。

第二天下课，周振华把邓凯叫住，问他为什么选 B。邓凯想了一会儿，反问了一句：“老师，这题该用哪个公式？”周振华一时答不上来。这道题不用公式。

那天晚上，他把邓凯的卷子摆在桌上，看了很久。他想起自己读大学的时候。九十年代后期，他在武汉读物理系，大学物理也是这样学的：上课抄笔记，下课做习题，考前把例题再过一遍。他的成绩一直在前面。

他真正弄懂“惯性”是哪一天，自己说不上来。也许是读研时当助教，给学生讲题讲到一半，突然发现自己说的话跟自己心里想的不一样。也许根本没有那样一天，只是讲得多了，慢慢就顺了。

他一直以为，讲清楚了，学生就会了。二十一年里，这句话在他身上没有被怀疑过。可是眼前这张卷子上，前面五道题说这个学生会牛顿第二定律，最后一道题说他不会。两句话都是真的。一个学生，怎么可能同时会、又不会？

这一章要回答的，就是这个问题。答案藏在一个更朴素的问题后面：考试，到底测的是什么？

◆ 一、一份专门问“懂不懂”的卷子

周振华后来才知道，他那晚碰到的事，三四十年前就有人系统地查过。1985 年，美国亚利桑那州立大学的 Halloun 与物理学家 Hestenes，在《美国物理学杂志》上发表文章。文章报告的是：大学新生走进物理课的时候，脑子里装着什么样的力学。他们发现，学生带进教室的，不是一张白纸，而是一整套来自日常生活的“常识力学”。

1992 年 3 月，Hestenes 与两位中学物理老师 Wells、Swackhamer 一起，在《物理教师》杂志上发表了一份测验，叫“力学概念量表”（Force Concept Inventory，常简称 FCI）。这份量表有 29 道选择题。它的设计很特别：几乎不用算，每道题问的都是一个日常的场面。比如两个一样大的金属球，一个比另一个重一倍，从楼顶同时放手，哪个先落地。比如一个小球沿一段弯曲

的槽滚出来，出了槽口沿什么路线走；比如一辆大卡车和一辆小轿车迎面相撞，谁给谁的力大。

错误选项也不是随便编的，是从学生真实说出口的想法里挑出来的。一个学生只要心里装着某种常识想法，就一定能在选项里找到它，而且会觉得它最顺眼。这份量表与其说是在考学生，不如说是在给学生脑子里的老想法照相。

其中一道题，正是周振华那道题的样子：一个男孩把一颗钢球竖直往上抛，问钢球在空中受哪些力。不少错误选项里，都藏着同一个想法：东西往哪个方向动，那个方向上就一定有一个力在推着它。

这个想法很古老。亚里士多德（Aristotle）认为，东西要动，就得有东西一直推着它；推的力一停，它就停。可是扔出去的石头，离了手还在飞，这让他很费解。后来的学者补了一个说法，叫“冲力”。东西被扔出去，手给了它一股劲，这股劲跟着它走，用完了，东西就停下或者掉下来。这个说法在欧洲流传了很多个世纪，直到伽利略（Galileo Galilei）和牛顿（Isaac Newton）把它换掉。

Hestenes 他们在文章里专门谈到了这种“冲力”的想法。今天的大学生，没读过一页古书，脑子里装的却常常是同一套。这不奇怪。“冲力”不是古人的糊涂，是人的身体在日常里最容易长出来的一套解释。在一个处处有摩擦、有空气的世界里，推着才动、不推就停，本来就是天天看得见的事。牛顿的说法，反倒要在一个没有摩擦的想象世界里才看得清。

量表测出来的结果，让物理老师们很不舒服。他们拿它去测亚利桑那州的中学物理班。普通班的学生，开课前平均答对约 27%，学完一年约 48%。学了一整年牛顿力学，过半的题还是答错。

他们也看了亚利桑那州立大学的大学物理课。文章提到，七位不同的教授用传统的讲授方式教这门课，学生合计一千多人，期末测验的分数几乎一样；在这份量表上，同一门课几位教授的班，期末平均都在百分之六十上下。这一条结果

最刺人。教授讲得好不好，口才怎么样，备课认不认真，在期末分数上看不出差别。传统讲授能把学生带到的地方，好像有一个固定的高度。

他们还提出一个判断：量表分数在 60% 上下，像是一道门槛。低于这道门槛，学生对牛顿力学的把握太弱，解题也很难真正做得好。他们在文章里说，学生的常识信念含糊、多变，换一个场面就换一个说法；不理会这些信念的教学，几乎完全无效。后来这份量表被修订成 30 道题，在世界各地被用了很多年。

1998 年，印第安纳大学的物理学家 Hake 收集了 62 门大学和中学物理课、共 6542 名学生的量表数据，发表在《美国物理学杂志》上。他用了一个简单的算法：学生在开课时离满分还差多少，学完一门课补回了其中的几成。传统讲授的 14 门课，平均补回约两成三。让学生在课上动手、动嘴、互相讨论的 48 门课，平均补回约四成八。

拿一个好算的数比一比。一个班开课时平均答对四成，离满分差六成。补回两成三，期末大约答对五成四；补回四成八，期末大约答对六成九。一个还在 Hestenes 说的那道门槛下面，一个已经跨过去了。

这里要把公道话说在前头。Hestenes 这份量表，对在一件很要紧的事上：它把“会算”和“会懂”分开测了。在它之前，物理课的考试几乎全是计算题。一个学生算对了，老师就默认他懂了。量表拿一种专门的、可以在各地课堂上通用的尺子，去量“懂”这一截，量出来的结果说：这两样不是一回事。

◆ 二、一位哈佛教授的那一年

这一路测验最有名的读者，是哈佛大学的物理学家 Eric Mazur。Mazur 从 1984 年起在哈佛教大学物理。他教的是传统的大课：自己在台上讲，学生在台下记。学生给他的评价很高。后来他在一次采访里说，那几年他一直以为自己是很好的物理老师。

1990 年，他读到了 Halloun 与 Hestenes 的那几篇文章。他第一个念头是：这说的不会是我的学生。哈佛的学生，怎么会连抛出去的球受几个力都答不

对？他把那份测验拿到自己班上去考。结果，学生考得几乎不比期中考试好。可是期中考的那些计算题，在他眼里比这份测验难得多。

考试的时候，一个学生举手问他：这些题，是该按您教我们的答，还是按我平常的想法答？这个问题，后来被 Mazur 讲了很多年。他后来说，那次测验的结果让他明白：自己的学生多半是在靠记忆和套路做题。题目背后的物理，他们并没有真的明白。它把一件事说穿了：在这个学生身上，“老师教的物理”和“我平常怎么想”，是两套东西。两套都在，各管各的。考试问到哪一套，就从哪一套里拿答案。

1991 年，Mazur 在期中考试里做了一个对照。第一题是一道概念题：一个电路里串着几个小灯泡，合上一个开关以后，各个灯泡是变亮、变暗还是不变。不用算，只要懂电流是怎么回事。最后一题是一道传统计算题，考的是同一套电路知识，要用基尔霍夫定律列方程、解电流。

照常理，最后那道计算题更难。结果，十分的题，概念题平均 4.9 分，计算题平均 6.9 分。从作答看，约四成学生以为合上开关后，流过电池的电流不变。概念题明显考得比计算题差的学生，约占 39%；两题得分相近的，约占一半；反过来的，只有约 9%。会解方程，不懂电路。这件事，在一个哈佛的大课堂里，被一张卷子摆到了桌面上。

接下来的事更出人意料。学生要求开一次晚上的复习课，专讲这些概念题。Mazur 讲一道并不难的题，讲了一遍，学生不懂；换个说法再讲，还是不懂。他讲了好几分钟，一点用都没有。他干脆停下来，让学生跟旁边的同学讨论一下。教室里一下子炸开了。不到两分钟，大部分学生就把题弄明白了。

这一晚留给 Mazur 一个道理：一个刚刚弄懂的同学，比一个早就懂了的教授，更知道另一个同学卡在哪里。教授早忘了自己当年是怎么想错的。

从 1991 年起，他改了教法。学生课前先读书，课上他少讲，多问；每问一道概念题，先让学生各自作答，再让他们彼此说服，然后再答一次。这个教法后

来叫“同伴教学”（Peer Instruction）。1997 年，他把它写成了一本书。2001 年，他和同事 Crouch 发表文章，总结了这个教法用了十年的结果。

这段来由里，有一处容易被忽略。最先碰到对不上的，不是学生，是 Mazur 自己。他身上有一颗很结实的自我符号：“我是好老师，学生评价很高。”一份测验的结果，和这颗符号对不上了。他没有说“测验出错了”，也没有说“学生不用功”。先松动的，是他自己身上那颗符号。

这一段经历，显出了一个后来改了教法的 Mazur。没有这一下，后来的同伴教学不会发生。同伴教学课堂上怎样投票、怎样讨论，是另一个题目，本书第 11 章再讲。这一章只记住它的来由：它起于一张卷子。那张卷子告诉一位自信的教授，他的学生会算，不懂。

◆ 三、考试对在哪里

讲到这里，很容易得出一个痛快的结论：“考试没用，只会考死记硬背。”这个结论不公道。先说考试对在哪里。第一，它测的东西是真的。计算题测的是：学生能不能把一个理念符号，比如 F = ma，在一道题里调出来、用对。这是一份真能力。一个工程师算不对受力，造出来的桥会塌。周振华的学生将来要做机械、搞土木，会算是饭碗。

第二，它在付维持的功。上一章讲过测试效应：把学过的东西拿出来考一考，比再读一遍留得更久。一场考试，本身就是一次大规模的往外拿。为了考试去复习，又是一次。

第三，它在大规模上是公平的。一百二十个人，同一张卷子，同一个标准，谁对谁错，写在纸上。在一个看重公平的社会里，这份公平很值钱。中国人对考试的信任，有一千多年的来历。1977 年恢复高考，很多人的命运从一张卷子开始转弯。对这些人来说，考试不是一个教育学的概念，是一扇门。

第四，它好批，好比，好记录。这不是小事。一所学校要在一个学期里给几千个学生打分，没有一种又快又稳的办法，什么都运转不起来。可是考试有一个老毛病，古人早就碰到过：考什么，学生就学什么。

唐代科举的明经科，有一种考法叫“帖经”。杜佑《通典·选举三》记它的做法：“以所习经掩其两端，中间惟开一行，裁纸为帖，凡帖三字。”把一段经文遮住前后，只露出一行，再用纸条贴住其中几个字，让考生填出来。填对的够数，就算通。这是一种很干净的维持测验。它测的是：经文在你脑子里还在不在，一个字不差。于是考生的功夫，就花在了背上。会背不会讲、会讲不会用的读书人，越来越多。

北宋熙宁四年（1071 年），王安石改科举，罢去了诗赋、帖经、墨义，改考经义，要考生写文章阐发经书的道理。这一改，是想把考试从“记不记得”往“懂不懂”推一步。可是后来的事，上一章的范进身上已经看得见。阐发经义的文章，几百年下来，被一步步定了格式，到明清成了八股。考“懂不懂”的题，又被刷成了一种格子。这段历史本书不展开，只取它的一个形状：

一种考法测什么，学的人就会把功夫付在什么上。

考法换了，只要它还能被套路化，功夫就会顺着套路流过去。今天的大学物理期中考，和帖经隔了一千多年。可是只考计算题的卷子，也在悄悄告诉学生：把公式记住、把题型认熟，就够了。所以考试不是坏东西。它停下的地方，不是测错了，是只测了一截。

那一截是哪一截？本书说过，一条纠缠要走过五段账：在场（看懂），建立（学习），维持（记忆），粒子化（学会），熔开再结晶（活的会）。一道常规的计算题，问的是理念符号在理念界里能不能被调出来。考的时间，多半就在学完的那一两周。在理念界里问理念符号，在当周测能不能调出，这测到的，是维持的一小截。

它测不到建立：学生是自己把东西接上的，还是照着例题模仿的，卷面上看不出来。它测不到粒子化：学生离开题目的文字、离开公式表、换到一个真实的场面里，这样东西还在不在，卷面上也看不出来。它更测不到熔开：碰到一个和旧做法对不上的情形，学生能不能松开，重新长。把一张常规卷子放到五段账上看：

五段账	一张常规卷子测得到吗	换一种怎样的问法才测得到
○ 在场（看懂）	不必测，测了也看不出	撤掉解答，让学生从头说一遍
一 建立（学习）	测不到：模仿和自己接上，卷面一样	让学生写出“我卡在哪一步，怎么接上的”
二 维持（记忆）	测得到一小截：学完当周能否调出	两周后不打招呼再考一次
三 粒子化（学会）	基本测不到	换一个真实场面问同一件事；撤掉公式表和提示；口头讲清楚
四 熔开再结晶（活的会）	测不到	给一个和旧做法对不上的反例，看能不能松开重来
分数本身	被记下、被比较	能不能回写到“哪一段没走完”

这张表不是要废掉计算题。计算题照样要考，照样要算分。它只是说：只考计算题，就只在五段账上点了一个点，然后把这个点当成了整条线。

◆ 四、公式记住了，力没有落地

回到邓凯。一个学生会解牛顿第二定律的题，又说抛出去的球受一个向上的力。这两句话同时为真，用本书的话怎么讲？先把邓凯身上的三界符号摆出来。三界符号的说法，见书二第 10—12 章。

理念符号：F = ma，“合外力等于质量乘加速度”，“受力分析先画重力，再画接触力”。这是课本、讲义、黑板上的东西。邓凯记得一字不差。现实

符号：一个被抛向空中的球，它的轨迹，它慢下来、停一下、又落回来的样子。这是世界上实实在在发生的事，不需要谁去解释，它就那样走。

自我符号：一种从小长在身上的感觉。推箱子，不推就不动；骑车，不蹬就慢下来；扔石头，手一使劲，石头就带着那股劲飞出去。这份感觉，在邓凯身上已经结成了一颗粒子：稳定，从没变过；整体，一个“有劲才动”就说完了；独立，不用谁教，到哪儿都带着。

这三样东西，在邓凯身上，并没有对上过账。为什么没有？因为考试和作业，从来没逼它们对账。邓凯做的题，是这样写的：“质量为 m 的物体在倾角为 θ 的光滑斜面上……”这句话本身就是理念界的语言。题目已经替他把现实翻译成了理念，他只要在理念里调出公式、代进去、解出来。

拿一个场面比一比。翻译好的说法是：“质量为 60 千克的人站在电梯内的台秤上，电梯以 2 米每二次方秒的加速度向上加速，求台秤示数。”邓凯三十秒就能算出来。没翻译的说法是：“你站在电梯里的体重秤上，电梯刚开始往上走的那一下，秤上的数会变大、变小，还是不变？你的身体有什么感觉？”

前一种，是在理念里找公式。后一种，要把公式和自己脚底下那一下沉重感对上账。两道题的物理一模一样，可是只有后一种，会把自我那间屋子的门铃按响。

在翻译好的题里，理念和理念对得上。对得上，就没有解释。对得上就没有解释的道理，见书二第 14 章。而他那颗“有劲才动”的自我符号，在这样的题里根本没被叫出来。那个被抛向空中的球，这个现实符号，天天在操场上飞，可是从来没有人请它进考场。它安安稳稳待在另一间屋子里，没有人去敲门。

于是两样东西各住各的屋子。考计算题，从理念那间屋里拿答案；碰到一个真实的、没有被翻译好的场面，比如一个往上飞的球，就从自我那间屋里拿答案。那个哈佛学生问的“按您教的答，还是按我想的答”，说的就是这两间屋子。把邓凯身上的两间屋子并排看：

比一比	理念那间屋（会算）	自我那间屋（“有劲才动”）
里面装的	F = ma，受力分析的步骤	推着才动、不推就停的身体感觉
怎么来的	这学期的几次作业和一次考试	十几年里每天推、拉、扔，一点点沉下来
连接度	低，只接着题目的文字	高，接着身体、眼睛和无数件日常小事
什么时候被叫出来	题目写着“质量为 m”“光滑斜面”	碰到一个没被翻译好的真实场面
靠什么撑着	考试日期、复习、公式表	什么也不用，自己就在
撤掉外力两周后	开始松，“该用哪个公式”想不起来	照样在，一点没少

这张表里，最要紧的是“什么时候被叫出来”那一行。两间屋子各有各的门铃。考试只按理念那间的门铃，所以另一间里住着什么，考试一辈子也不知道。

本书管这种状态叫背住型假会。背住型的会，停在维持这一段。它有三个特点。第一，建得窄。公式在邓凯身上，接上的只有一样东西：题目的文字。“斜面”“光滑”“求加速度”这些字一出现，公式就出来。它没有接到现实里的球上，也没有接到自己身上那份“有劲才动”的感觉上。接的点少，连接度就低。

第二，靠外力维持。撑着这份会的，是期中考试的日期、复习课、考前划的重点、同学之间对的答案。这些都在外面。外面的力一撤，它就开始松。第三，没有粒子化。拿三条判据量一量就知道。

稳定吗？换一个问法，它就不在了。同一个牛顿第二定律，问成“抛上去的球受几个力”，它就没出来。整体吗？邓凯那句“该用哪个公式”，说明它不能自己成一件事。它要靠题目的文字当提示，提示里没有公式名，它就不知道从哪下手。独立吗？离了题目的文字，离了公式表，离了“这一章考什么”的范围，它就站不住。三条都不过。

所以，背住型的会，是一条维持住了、却没有结成粒子的纠缠。它在考场上看着像会，因为考场正好提供了它需要的全部外力：熟悉的题型、学完当周、公式就在嘴边。

还有一层更深的。背住的理念符号，和身上那颗自我符号，连接度差得很远。“有劲才动”这颗粒子，是十几年里每天推、每天拉、每天扔，一点点沉下来的。F = ma 是这学期才进来的，靠的是几次作业和一次考试。真要两样东西正面碰一次，赢的多半是那颗老的。这不是学生笨，是账摆在那里：连接度高的，断裂就难。

所以，让学生把公式背得再熟，也撬不动那颗老粒子。

要撬动它，得先让两间屋子里的东西见上面，让它们对不上一次。这一次对不上，还得满足几个条件。它最好从学生自己嘴里说出来。老师在台上说“你们的直觉是错的”，学生会点头，可是那是老师的话，不是他自己的缝。

它要有人托着。一个人碰到自己说不通的地方，最容易的做法是绕过去。旁边有一个人跟他一起争、一起想，他才待得住。它要学生自己付账。老粒子连接度那么高，拆开它要花的力气，谁也替不了。这三样，就是本书说的对不上、场、动能。本章第六节，看它们在一个具体的学生身上怎样凑齐。

◆ 五、背住、刷熟、看懂，各停在哪里

上一章讲的赵思琪，和这一章的邓凯，看上去都是“会做题却碰到一道就栽”。可是他们停在不同的地方。赵思琪是刷熟型。她那颗“见了就套”的粒子，三条判据在熟题型里全过。换一天、换一张卷子、两周以后，它都在。它的毛病是结得窄、熔不开。

邓凯是背住型。他的公式没有结成粒子，三条判据换个问法就一条不过。它能撑过期中，是因为考试来得正好。还有第 1 章讲的看懂型。看懂型的学生，连建立都还没开始：特征在场，靠解答串着，解答一撤就散。

三种假会，三个停的地方，识别的办法也不同。看懂型：撤掉解答，让他从头说一遍。背住型：两周以后再考，不打招呼；或者同一件事，换一个问法问。刷熟型：给一道反例，看他是先松开，还是先说“题出错了”。

药也不同。看懂型缺的是建立，要让他自己卡一次、自己接一次。背住型缺的是粒子化，要让理念走出题目的文字，碰到现实和自己身上的老东西。刷熟型缺的是熔开，要在刷的路上放进对不上。三种都不是没努力。邓凯为了这次期中，熬过两个通宵。他的努力是真的，只是付在了维持上，而且是靠外力撑着的维持。

在大学里，背住型的会有一个最常见的产地：考前突击。很多大学生都熟悉这样的一周。一学期的课，平时没怎么听，到了考试周，图书馆通宵开放，复印店里排着队印往年的试卷和“重点”。三天把一本书过完，考完那一刻长出一口气，第二天就忘了大半。

这样的一周，付出的力气一点不少。可是它的形状，正好是背住型假会的形状：建得窄，只接题型；靠外力撑，撑它的是考试的日期；撑完就松，因为考试一过，外力就撤了。

学生自己也知道这一点。不少人说起考前那一周，会说“考完就还给老师了”。这句话说得很准。还给老师的，是那份靠外力维持、没有结成粒子的纠缠。只是它没有还干净。它松了，没断：下学期真要用，重学一遍会比第一次快得多。省下的那一截，就是连接还在的证据。

◆ 六、周振华改了一张卷子

这一节，把周振华接下来一个学期做的事，完整走一遍。他先做的，是承认一件事。他教了二十一年书，一直觉得自己讲得清楚。学生评教，他年年排在前

面。那张选 B 的统计表，在他桌上放了一个星期。他后来对教研室的同事江红梅说：“我讲的东西，学生都记住了。可是记住的，好像不是我想让他们记住的那个。”这一段经历，显出了一个不再拿“讲清楚”当终点的周振华。

接下来，他改的是考试。课怎么上，那是另一件事。这个学期，他先只动卷子。第一处改动：每一道计算题，配一道同一物理的概念题。这是从 Mazur 那里学来的。斜面上的滑块算加速度，旁边就配一道：“如果把斜面换成一块冰面，滑块到底端以后会怎样？”连接体算张力，旁边就配一道：“绳子突然断了，那一瞬间两个物体各受什么力？”

两道题放在一起，就是一面镜子。一个学生计算题对、概念题错，卷面上就能看见那两间屋子。期中考完，他把两类题的得分分开统计。计算题平均八十出头，和往年差不多；配对的概念题，平均不到六十。计算题对、配对的概念题错的学生，占了三成多；反过来的，不到一成。这几个数，是他自己这一个班的，不能拿去说明别人的班。可是它和 Mazur 当年那张电路卷子，长得很像。

学生有怨言。有人在课程群里说：“这不是考物理，是考语文。”周振华在下一次课上回了一句：“物理本来就要能用话说出来。说不出来的那一半，正是还没学会的那一半。”

第二处改动：期中以后两周，不打招呼，把期中卷里的三道题原样再考一次。不计入总评，只看结果。结果出来，期中算对的学生里，有不少人这一次卡住了，最多的是卡在“该用哪个公式”上。这一下，背住型的会被看见了。外力撤了两周，它就松了。

他在小结里记了一笔：期中三道题全对的学生里，两周后三道还全对的，不到一半。松得最快的，是那些期中前一周才突击上来的人；松得最慢的，是平时作业里常问“为什么”的那几个。这只是一个班的一次观察，不是研究。可是它让周振华第一次在自己的学生身上，亲眼看见了“维持”和“学会”之间的那段距离。

第三处改动：期末加一个五分钟的口试。口试只问一类问题：不许写公式，用你自己的话，讲清楚一件事。周振华事先给口试写了一张小纸条，夹在点名册里。纸条上写着他预计学生会怎样答错：“球在最高点受不受力——多数人会说不受力，因为‘向上的劲用完了，向下的劲还没开始’。”

这张纸条很要紧。它说明他要放进去的那道缝，是在事前就被独立指认出来的。他不是等学生答完再说“你看，这里有矛盾”，是事先就写下了缝会裂在哪里。

轮到邓凯。周振华问他：“球抛上去，到了最高点那一瞬间，受不受力？”邓凯说：“不受。往上的劲用完了，所以它停住了。”

周振华没有说对错，接着问：“不受力的东西，会怎么样？”邓凯答得很快：“保持原来的状态。原来静止就一直静止。”这是牛顿第一定律，他背得很熟。周振华问：“它在最高点那一瞬，是静止的吗？”邓凯说：“是，速度是零。”“那按你说的，它不受力，又是静止的，它该一直停在那里。可它为什么掉下来了？”

邓凯张了张嘴，没说出话来。

这就是那一下对不上。它不是周振华塞给他的，是从邓凯自己嘴里一句一句说出来的。他理念那间屋里的牛顿第一定律，和自我那间屋里的“劲用完了”，第一次在同一句话里撞上了。两样都是他自己的，两样放在一起，说不通。

五分钟到了。周振华没有讲答案。他说：“这个问题，你下周三之前想清楚，可以找室友一起想。想清楚了来找我说。”讲答案只要半分钟：“最高点速度为零，加速度不为零，一直只受重力。”邓凯会点头，会说“懂了”。可是那颗“有劲才动”的老粒子，一根毫毛都不会动。半分钟省下来的，正是邓凯该自己付的那份动能。

接下来的一周，是邓凯自己付账。他回宿舍，跟室友黎嘉明说了这道题。黎嘉明是电气专业的，第一反应也是“最高点不受力”。两个人争了一晚上，谁也说服不了谁。

第二天傍晚，他们拿了一个篮球到楼下，一个人往上抛，一个人用手机慢放着拍。慢放里，球离开手以后，速度一点一点变小。每一帧比上一帧少一截，少得很匀。到了顶上，没有停顿多久，就开始往下掉，往下掉的时候速度一点一点变大，也大得很匀。

黎嘉明先说：“它往上走和往下掉，速度变的快慢是一样的。”邓凯盯着手机看了半天，说：“那就是从头到尾只有一个力在管它。往上的时候这个力让它慢下来，往下的时候这个力让它快起来。没有什么‘往上的劲’。”过了一会儿，他又说了一句：“手一松开，往上的劲就没了。它还往上走，是因为它本来就在往上走。”

这句话，是一个旧东西熔开以后重新长出来的样子。“本来就在往上走”，就是牛顿第一定律。这一回，它不是从课本上背来的一行字，是从他手里抛出去的一个球上，自己长出来的。

这一周里，三样东西都在。对不上是口试那五分钟里，从他自己嘴里说出来的。场是黎嘉明，一个和他想得一样错、又肯陪他争一晚上的人。动能是他自己付的：一晚上的争论，一个傍晚的抛球，几十遍慢放。少了哪一样，都走不到这里。

周三，邓凯去找周振华，把这几句话讲了一遍，又把手机上的慢放给他看。周振华问了最后一个问题：“那汽车急刹车，你身子往前冲，是有个力把你往前推吗？”邓凯想了几秒钟，笑了：“不是。是我本来就在往前走，车停了，我没停。”

这是换了一个场面。从篮球换到汽车，从手上换到自己身上。他认出了同一件事。三条判据，到这时候可以量一量了。稳定：换了汽车，它还在。整体：不用提示公式名，他自己说成了一件事。独立：离开了题目的文字，离开了公式

表，他站在宿舍楼下也能讲。这一段经历，显出了一个身上的“力”有了新形状的邓凯。

本书要老实交代另外几件事。不是每个学生都走完了这一段。一百二十个人里，口试以后真来找周振华说清楚的，二十几个。更多的人点点头，期末照样考，照样过。

教研室里也有不同意见。江红梅说，口试太主观，五分钟问不出什么，换一个老师问可能就是另一个结果。这个担心是对的。周振华后来给口试写了一张评分单，只看三件事。能不能不靠公式名开头，能不能自己讲成一件完整的事，换一个场面还认不认得出。这三件，就是三条判据。

江红梅还提了一条：一百二十个人，每人五分钟，就是十个小时，一个老师扛不下来。周振华没有好办法，只能请两位研究生助教分担，自己先给他们讲了一遍评分单。这一条，到学期末也没有完全解决。

第二学期，江红梅在自己的班上，也试着给计算题配了几道概念题。口试她没有做。她说先看看配对题能看出什么来。

还有一件。这一学期，因为口试和配对的概念题占了时间，周振华的计算题练得少了一些。期末计算题的平均分，比上一届低了三分。他把这三分写进了期末的教学小结。他觉得这笔账应该记下来。少了三分计算，换来二十几个学生身上一颗真的粒子。这笔买卖划不划算，他心里有数，可是他没有替别人下结论。

◆ 七、放回日子里：过两周，换个问法

考试的样子，不是一个老师、一个家长能改的。可是在考试旁边，每个人都能多问一句。给学生的。一次考试考完，别急着把卷子收进抽屉。过两周，挑三道当时做对的题，合上书再做一次。做不出来的那几道，就是背住型的会，外力一撤就松了。还有一个更狠的办法。拿一道做对的计算题，盖住所有的数字和公式名，只留下那个场面，用一句话讲清楚这里头发生了什么。讲不出来，说明这道题你会算，不一定会懂。

给家长的。孩子拿着一张八十分的卷子回家，别只看分数，也别只看错在哪。挑一道他做对的题，换一个问法问他。比如他会算“一辆车刹车滑行多远”，你就问：“雨天路滑，刹车距离会变长还是变短？为什么？”他答得出，你放心。他答不出，也别急。你不是在考他，是在帮他看见那两间屋子。答不出来的那一下，正是他身上有东西要动的时候。

给老师的。每一张卷子里，给计算题配一道同一件事的概念题；期中考完两周，悄悄再考三道。不一定要计分。只要你看见了两次之间的落差，你就知道这一届的会，有多少是靠考试撑着的。

给自己的。成年人也有背住型的会。考驾照时，交通规则的题库背得滚瓜烂熟，满分通过；两年以后，碰到一个没有红绿灯的路口，谁先走，心里没底。单位组织消防培训，灭火器的使用步骤背得出来，真拿起一个灭火器，手却不知道先拔哪儿。

新加坡的不少公司，会组织员工去上急救课，学心肺复苏。课上有理论测验，也有在假人身上按压的实操。理论题答满分的人很多；可是教练常说，真碰到有人倒在面前，脑子里背过的步骤，第一时间未必出得来。这些都不丢人。它们只是停在了维持这一段，靠一场考试撑着，没有在现实里、在自己手上结成粒子。

想知道你会不会一样东西，别问自己“我记不记得”。问自己：换个问法，我还认得出吗？离开书和题目，我说得成一整件事吗？两周以后，没人催我，它还在吗？

给学校的，只说一句。分数可以照样记、照样排，可是每一次大考之后，最好有人回头问一问：这些分数，能不能回写到“这一届学生卡在五段账的哪一段”？回写不了的分数，记得再精确，也只是供在墙上的一个数。考试测的，多半是“记不记得”的一小截。

学会，要在考试之外，自己再走完剩下的几段。

带 走 的 话

考试多在学完当周、在理念界里问理念符号，测到的只是维持的一小截；会算与会懂，可以并存而分离。

小　账

前人用一份概念量表，把“会算”和“会懂”分开测了，把差距归给学生带进教室的常识信念。可两样为什么能在一个人身上各管各的，这扇门没有打开。本书打开它：公式被维持在理念界，力的符号没有在现实界粒子化，老的自我符号还在另一间屋里。

发生被收回为发现的那一下，在题目替学生把现实翻译成理念的时候。一句“质量为 m 的物体在光滑斜面上”，让理念对上理念，对不上从没出现，学生只是在题里“找到”该用的公式。

想 一 想

1. 你考过满分、现在却说不清楚的一样东西是什么？它当初是靠什么撑着的？
2. 你身上有没有一颗“有劲才动”那样的老粒子，书上的道理一直撬不动它？
3. 下次你或你的孩子拿回一张好分数的卷子，你打算换一个什么问法，再问一次？

◆



第　二　编

前人对在哪里

导　语

“看过”和“会了”之间隔着一段，前人早就看见了。这一编先写足他们对在哪里，再看他们停在哪里。第 4 章从苏格拉底与小奴隶量正方形、孔子“不愤不启，不悱不发”、《学记》“知困，然后能自强”讲起，他们都把卡住放在教的前面，抓住了建立的起点。第 5 章把皮亚杰的失衡、维果茨基的最近发展区、Wood 与 Bruner 的脚手架放在一起，三家各守建立的一角，本书把它们接成一个三角。第 6 章看认知科学怎样把合意困难、两种强度、检索与间隔测得清清楚楚。几家共同停下的地方，正是第三编要接着记的账：谁付的功，撤了以后剩下什么。

04

第 4 章

苏格拉底与孔子：先卡住，再启发

这一章的问题

孩子写作业卡住了，马上给他讲明白，转天就忘；不管他，又可能趴在桌上哭——这时候到底该讲，还是该等？

◆ 一、奶奶讲得太清楚了

吴秀兰今年六十三岁，在杭州一所中学教了三十五年语文，退休第四年。儿子儿媳下班晚，孙子骆明轩放了学就到奶奶家吃饭、写作业。明轩十岁，读四年级。那天晚上的作业是一篇文言小故事，《王戎不取道旁李》，出自《世说新语·雅量》。课本上的原文不长：

> 王戎七岁，尝与诸小儿游。看道边李树多子折枝，诸儿竞走取之，唯戎不动。人问之，答曰：“树在道边而多子，此必苦李。”取之，信然。

（有的本子“道边”作“道旁”。）课后有一道题：王戎为什么知道李子是苦的？明轩想了一会儿，写下：“因为他尝过。”

吴秀兰一看就笑了。这种错，她在讲台上见过上千回。她把孙子拉到身边，讲得条理分明：树长在路边，路上人来人往；李子多得把树枝都压断了，却没人摘；要是甜的，早被过路人摘光了；所以一定是苦的。讲完，她让明轩复述一遍。明轩说得一字不差。“懂了吗？”“懂了。”

第二天吃午饭，她随口出了一道题：“咱们小区门口那条街，中午人最多。有一家面馆，门面大，价钱也便宜，可每天中午都空着。你说为什么？”明轩扒

着饭说：“因为它在路边。”她愣了一下：“在路边怎么了？”“王戎说的，在路边的就是苦的。”

吴秀兰放下了筷子。昨晚那几句话，孙子记住了，一字不差。可那条推理没有在他身上长出来。他带走的是一句结论，“路边＝苦”，是一块路牌；不是一条他自己走过的路：人多，好东西早被拿走，剩下的没人要，那就多半不好。

那天夜里，她翻出自己的旧教案。三十多年里，她在黑板上写过无数次这八个字：“不愤不启，不悱不发。”考卷上的题目是：“‘启发’一词出自哪里？”学生答“《论语·述而》”，得两分。她教了一辈子“启发”这个词。可是对着自己的孙子，孩子一皱眉，她就讲。讲得越清楚，孩子越快说“懂了”。

这一章要回到“启发”这两个字最早的地方。两千多年前，地中海边和黄河边，各有一位老师，都把“卡住”放在了“教”的前面。他们对在哪里，本书先写足；他们停在哪里，再说。

◆ 二、沙地上的那个正方形

柏拉图（Plato）的对话《美诺》，开头问的是一件大事：德性能不能教？美诺是个年轻的贵族，自以为懂德性。苏格拉底（Socrates）一问再问，他给出的定义一个接一个散掉了。美诺恼了，说了一段后来很有名的话（80a—b）：苏格拉底，你就像海里那种扁扁的电鳐，谁碰上你就麻了；我的嘴和心都麻了，答不上来。

苏格拉底接住了这个比方，却加了一个条件（80c）：要是电鳐自己也是麻的，那我像它。他说自己并不是心里清楚、却让别人糊涂；他是自己先糊涂，才让别人也糊涂。美诺接着抛出一个难题（80d—e）：你要找一样你根本不知道的东西，怎么找？就算碰上了，又凭什么认出它就是你要找的？后人管这叫“美诺悖论”。

苏格拉底的回答是“回忆”（81a—e）：灵魂不死，早已见过一切；所谓学习，不过是把原本就有的知识重新想起来。为了证明这一点，他叫来美诺身边的一个童仆。这是个没学过几何、只会说希腊话的小奴隶。苏格拉底在地上画图，

一句一句问他（82b—85b）。以下据通行中译转述，如王晓朝译《柏拉图全集》〔版次待核〕。

第一步。苏格拉底画了一个正方形，每边两尺，问面积。男孩算出来：四平方尺。苏格拉底再问：面积是它两倍的正方形，边该多长？男孩脱口而出：“四尺。”边加倍，面积也就加倍，在他看来天经地义。苏格拉底没有说“错”。他把四尺的边画出来，让男孩自己数：这样的正方形，里面有十六块，不是八块。第二步。男孩改口：“那就三尺。”苏格拉底再画，男孩再数：九块，还是多了。第三步。男孩说：“真的，我不知道了。”（84a）

苏格拉底这时转身对美诺说了一段话（84a—c），大意是：你看，他起初以为自己知道，答得很有把握，一点不觉得为难；现在他知道自己不知道了。我们让他困惑，像电鳐那样把他弄麻，是害了他吗？美诺说：没有。苏格拉底说：反而帮了他。先前他会当着许多人大谈“边加倍、面积就加倍”，以为自己说得很好；现在他会乐意去找。在他陷进困惑、知道自己不知道、想要知道之前，他会想到去找吗？美诺说：不会。

接下来，苏格拉底特意提醒美诺盯着看（84c—d）：看他是不是在教、在讲解，还是只在问男孩自己的看法。他要美诺做个见证。第四步（84d—85b）。苏格拉底在原来的正方形旁边再拼上三个，成一个大正方形，面积十六。然后从每个小正方形的一角到对角，画一条斜线。四条斜线围出一个斜放着的正方形。每条斜线都把一个小正方形切成两半，斜正方形里正好有四个半块。男孩自己数：四个半块，合起来是八。

苏格拉底问：面积是八的正方形，边在哪里？男孩说：在这条线上。苏格拉底说，懂行的人管这条线叫“对角线”。整段问答里，苏格拉底说他没有“告诉”男孩任何结论，他只是问。这个说法后人有争议，下面再谈。先看那个下午，有几样东西是实实在在发生了的。

◆ 三、苏格拉底对在三个地方

第一处：他把卡住放在了教的前面。84a—c 那段话，大概是西方文字里最早一次有人郑重地说：让学生困惑，不是害他，是帮他。没有那一句“我不知道了”，男孩不会去找。他会带着“加倍就加倍”这条想当然的规矩，过完一生，而且在人前讲得头头是道。

用本书的话说，男孩身上原本有一个“加倍就加倍”的旧结晶。苏格拉底没去驳它，只是让它和地上画出来的图对一对账：边是四尺，数出来却是十六块。脑子里的规矩说一套，手底下数出来的是另一套。对不上了，旧结晶才松动。

在苏格拉底的早期对话里，这样的“麻”一再出现。他问勇敢是什么、虔敬是什么、友爱是什么，问到最后，对方的定义都散了，对话常常停在“我们还是不知道”。学界管这种结局叫“困惑”或“无出路”（希腊词 aporia）。在别人眼里，这是失败的谈话；在苏格拉底眼里，这是找的开始。

第二处：那条缝是事前写下的。男孩的“四尺”，不是事后替他推出来的，是他自己先说出口的。说出口，就像在纸上写下了预测。后面数出十六，是这个预测撞上了地上的图。

本书反复强调一道闸：对不上必须能在事前被独立指认（见书二第 14 章）。不然，每看见一个人学会了什么，都可以回头说“那里一定卡过”，这套说法就永远正确，也就什么都没说。苏格拉底的做法正好过得了这道闸：错答在先，对账在后，缝是旁观的美诺也看得见的。

第三处：他知道“答出来”不等于“会了”。这是《美诺》最容易被读漏的地方。男孩说出“在这条线上”之后，苏格拉底没有宣布大功告成。他对美诺说（85c）：这些看法刚刚在他身上被搅起来，像一场梦。要是有人用许多不同的方式，一次又一次问他同样的问题，他最后会知道得和任何人一样准确。

一场梦。这几乎就是本书说的“在场”：几样东西刚刚挨到一起，被问话串着，还没有扎牢。苏格拉底要的“许多不同的方式、一次又一次地问”，恰好是

本书的两样东西：一次又一次，是维持；换许多方式，是看它稳不稳定，换个问法还在不在。

到了对话后段（97d—98a），他又打了一个更有名的比方。传说巧匠代达罗斯雕的像会自己跑，不拴住就溜走。真的看法也一样，在人的灵魂里待不长，会溜走，除非用“对原因的推理”把它拴住。拴住了，它才成了知识，才待得住。拴住，就是本书说的结晶。几个点不再只是挨着，而是被一条“为什么”连成了一整件事，拆开就不再是它。苏格拉底在两千四百年前，已经分出了“刚被搅起来的梦”和“被拴住的知”。

还要补一笔。在另一篇对话《泰阿泰德》里（149a—151d），苏格拉底说自己干的是“接生婆”的活。他自己生不出智慧，只帮别人把怀着的东西接生出来，再验一验是真孩子还是假胎。他还说到一件事（150e—151a）：有些人跟他学了一阵，过早离开，后来因为“喂养不善”，把接生出来的孩子弄丢了。接生出来，又弄丢了。这是维持的失败，本书会说那是松了，不是丢了。早在二十多个世纪前，它就被一位老师记在了账上。

◆ 四、“不愤不启”这八个字

黄河边的那位老师，说得更短。

> 子曰：“不愤不启，不悱不发。举一隅不以三隅反，则不复也。”（《论语·述而》）

朱熹的《论语集注》这样解：“愤者，心求通而未得之意。悱者，口欲言而未能之貌。”后面接着两句：“启，谓开其意。发，谓达其辞。”心里想通，还没通，憋着，这是“愤”。今天的“愤”多指生气，这里的“愤”是憋着一股劲。嘴上想说，说不出，涨红了脸，这是“悱”。孔子的规矩是：学生没到这一步，他不开口；到了这一步，他才替你打开那一点意思，帮你把那句话说圆。

朱熹在注里还引了宋儒程子的一句：“愤悱，诚意之见于色辞者也。”（集注只称“程子”，没有说是程颢还是程颐。）愤和悱，是学生那份真心想懂，从

脸色和言辞上露了出来。老师看的是脸。程子还有一句，把不等的后果也说了：“不待愤悱而发，则知之不能坚固；待其愤悱而后发，则沛然矣。”〔逐字待核〕不等学生卡住就讲，知道的东西不牢；等他憋足了再讲，就像水决了口。用本书的话说，这几乎就是对看懂型和背住型假会的一句诊断：结果说对了，只是“为什么不牢”，还没有账。

后半句更硬：举出一个角，学生不能自己推出另外三个角，就不再往下教了。四方的东西有四个角。老师给一个，剩下三个归学生。“举一隅”是老师的那一份，“三隅反”是学生的那一份。这本账，分得很清楚。《论语》里还有好几处，把这本账记得更具体。一处是孔子对学生的要求：

> 子曰：“不曰‘如之何，如之何’者，吾末如之何也已矣。”（《论语·卫灵公》）

一个从来不问“怎么办，怎么办”的人，孔子说，他也拿这人没办法。“如之何，如之何”，就是卡住时发出的声音。没有这一声，启发无从下手。一处是孔子说颜回：

> 子曰：“回也非助我者也，于吾言无所不说。”（《论语·先进》）

颜回对孔子说的话，没有不喜欢的。孔子说：这对我没有帮助。学生句句点头，老师那边也就碰不到对不上，教学相长停了一半。可孔子另一处又说：

> 子曰：“吾与回言终日，不违，如愚。退而省其私，亦足以发，回也不愚。”（《论语·为政》）

整天听讲，不提异议，像个笨人；可回去看他私下的言行，能把听到的东西发挥出来。“亦足以发”，又是那个“发”字。孔子看颜回，不看他在课上点不点头，看他离开老师以后，自己能不能把东西用出来。这就是本书三判据里的“独立”：离了书和老师，仍立得住。还有一处，是颜回自己说的：

> 颜渊喟然叹曰：“仰之弥高，钻之弥坚；瞻之在前，忽焉在后。夫子循循然善诱人，博我以文，约我以礼，欲罢不能。既竭吾才，如有所立卓尔。虽欲从之，末由也已。”（《论语·子罕》）

这段话，把学的人那一边的账写全了。“钻之弥坚”，是卡住，越钻越硬。“循循然善诱人”，是老师一步一步地引，是场。“欲罢不能”，是那股劲停不下来，是动能。“既竭吾才”，是把自己的力气用尽了。“如有所立卓尔”，是有个东西立起来了。立起来了，却“虽欲从之，末由也已”：还够不着。

颜回这一叹，是两千多年前一个学生对“建立”最诚实的记录。卡住、有人引、自己使劲、使尽、立起一点、还差一截。没有一步是别人能替他走的。孔子自己的教法，也不是只会等。

> 子曰：“吾有知乎哉？无知也。有鄙夫问于我，空空如也，我叩其两端而竭焉。”（《论语·子罕》）

一个乡下人来问，孔子说自己心里空空的，只是从问题的两头去叩问，叩到尽头。（“空空如也”另有一读，说的是来问的那个人；无论哪一读，孔子都是从对方的问题两头下手。）这和苏格拉底说“我自己也是麻的”，放在一起读，很像。两位老师都不先摆出答案，都从对方的问题里去找那条缝。

还有一段“因材”的故事。子路和冉有问了同一个问题：“听到了就去做吗？”孔子给了两个相反的回答。旁边的公西华糊涂了，孔子解释说：“求也退，故进之；由也兼人，故退之。”（《论语·先进》）冉有缩手缩脚，推他一把；子路一个人顶两个，拉他一下。同一个问题，两份答案，看的是学的人身上那股劲的大小和方向。本书管这股劲叫动能。孔子没有这个词，可他分明是按它在调。

“三隅反”在学生之间，也分得出高低。孔子问子贡：你和颜回比，谁强些？子贡说：“赐也何敢望回？回也闻一以知十，赐也闻一以知二。”（《论语

·公冶长》）听到一件，颜回能推出十件，子贡能推出两件。同一个“一隅”，落在不同的人身上，能长出多少，各不相同。这不全是天分。推出去的每一步，都要学的人自己付一份功；付得起多少，和他此前在身上接了多少、此刻还有多少力气，都有关系。

◆ 五、《学记》把账记得更细

《礼记·学记》是中国最早专门讲教与学的文章，一般认为成于战国末到西汉之间〔待核〕。它把孔子的几句话，铺成了一套章法。先是那句常被引的：

> 虽有嘉肴，弗食，不知其旨也；虽有至道，弗学，不知其善也。是故学然后知不足，教然后知困。知不足，然后能自反也；知困，然后能自强也。故曰：教学相长也。

好菜不吃，不知道味道；大道不学，不知道好处。学了才知道不够，教了才知道哪里卡。知道不够，才能回头反省自己；知道卡，才能逼自己强起来。“知不足”“知困”，说的都是对不上。前者是学的人发现手里的东西不够用，后者是教的人发现讲不下去了。《学记》没有把卡住当成丢人的事。它把卡住当成“自反”“自强”的起点。再看它怎么讲“启发”：

> 君子之教，喻也：道而弗牵，强而弗抑，开而弗达。道而弗牵则和，强而弗抑则易，开而弗达则思。和易以思，可谓善喻矣。

引着走，不硬拽；鼓着劲，不压着；打开一个口子，不一下子说透。“开而弗达则思”：话说到一半，留一半，学生才会去想。这几乎就是“举一隅”的操作说明。《学记》还讲时机和次序：

> 大学之法：禁于未发之谓豫，当其可之谓时，不陵节而施之谓孙，相观而善之谓摩。此四者，教之所由兴也。

“当其可之谓时”：在恰好的那一刻教。“不陵节而施”：不跳过台阶。这两条讲的是落差的大小，卡得刚好才有用。“相观而善之谓摩”：同学之间互相

看着、互相磨，这一条讲的是场。反过来，它列了六种教不成的情形，其中一条是：

> 独学而无友，则孤陋而寡闻。

一个人闷头学，没有同伴，就见识窄、听得少。两千年前的这句话，是对“场”最朴素的一个说法：卡住的时候，身边要有人。《学记》讲问答，也有两个好比方：

> 善问者如攻坚木，先其易者，后其节目，及其久也，相说以解。善待问者如撞钟，叩之以小者则小鸣，叩之以大者则大鸣，待其从容，然后尽其声。

会提问的人（多解作学的人）像砍硬木头，先砍容易的地方，再砍节疤，久了，木头自己松开。会回答的老师像一口钟，敲得轻，响得小；敲得重，响得大。钟不会自己响，要等人来敲。撞钟的比方，和“不愤不启”是一个意思：回答的分量，跟着提问的分量走。学生那一下敲得多重，取决于他自己卡得多深、使了多大劲。它也算过一笔“谁付功”的账：

> 善学者，师逸而功倍，又从而庸之；不善学者，师勤而功半，又从而怨之。

会学的学生，老师省力，效果加倍，学生还归功于老师；不会学的学生，老师累得要命，效果减半，学生还埋怨老师。这句话常被读成对学生资质的评语。换本书的账来读，它说的是功由谁付。学的人自己付了拆开、重接的那份功，老师那边就“逸”；功全压在老师身上，老师讲得再“勤”，落到学生身上也只剩一半，而且还落下埋怨。

讲时机，《学记》也有反面的话：“发然后禁，则扞格而不胜；时过然后学，则勤苦而难成。”毛病已经长出来了再去禁，就顶住了，禁不动；过了时候再学，就辛苦而难成。落差的大小有时，卡住的时机也有时。最打动本书的，是下面这两句。

> 记问之学，不足以为人师。必也其听语乎。力不能问，然后语之；语之而不知，虽舍之可也。

只会背书应答的学问，当不了老师。老师要先听学生说。学生使尽了力气，连问题都问不出来了，这时候再告诉他；告诉了还不懂，暂时放下也行。“力不能问，然后语之”，讲的是讲授的位置：讲，排在学生自己使尽力气之后。这正是本书承重命题第八条的古代版本：讲授仍在，只是排在落差之后。还有一段，说的是当时不得法的教。老师只顾念课本、灌问题，不管学生安不安、诚不诚，结果是：

> 隐其学而疾其师，苦其难而不知其益也，虽终其业，其去之必速。

学生把学的东西藏起来，怨老师，只觉得苦，不知道好处；就算把课程学完了，丢得也一定快。“虽终其业，其去之必速”，九个字，正是本书第 3 章说的背住型假会。课学完了，考也考过了，可那份东西靠外力维持，外力一撤，松得飞快。把三家放在一张表里看：

看的地方	苏格拉底（《美诺》《泰阿泰德》）	孔子（《论语》）	《礼记·学记》	本书的说法
卡住叫什么	困惑，“像被电鳐碰过”	愤、悱，“如之何”	知不足、知困	对不上
卡住从哪来	自己说出口的错答，撞上地上画出的图	心里想通而未通	学了才知不足，教了才知困	两类符号对不上，能事前写下
老师做什么	只问，不给结论	举一隅，开其意，达其辞	道而弗牵，开而弗达，力不能问然后语之	维持落差，托住卡住
学的人付什么	自己数、自己找、自己说出口	三隅反，欲罢不能，既竭吾才	自反、自强	动能，只能自己付

看的地方	苏格拉底（《美诺》《泰阿泰德》）	孔子（《论语》）	《礼记·学记》	本书的说法
身边的人	苏格拉底本人蹲在旁边	循循善诱的老师，同门	相观而善；独学无友则孤陋	场，也就是势能
学完怎么算数	用原因拴住；换许多方式反复问	退而省其私，亦足以发	“终其业而去之速”是反面	三判据：稳定、整体、独立
卡住为什么有用	灵魂本来知道，困惑让它想起	没有交代	没有交代	落差才做功
卡住变成放弃时	没有交代	则不复也	虽舍之可也	缺场或缺动能，先托住

◆ 六、一个问出来，一个等出来

两位老师都把卡住放在前面，可他们得到卡住的办法不一样。苏格拉底的卡住，是问出来的。他不等男孩自己困惑，他用一个问题把男孩引到一个错答上，再让错答去撞地上的图。卡住是他造出来的，造在哪里、什么时候造，都在他手里。

孔子的卡住，是等出来的。他不去制造“愤”，他等学生自己憋出来，看脸色，听言辞。卡住是学生带来的，老师只负责认出它。两种办法各有长处。

问出来的卡住，好处是看得见、记得下。男孩的“四尺”摆在那里，谁都能核对。这正合本书那道闸：对不上要能事前独立指认。坏处是，卡住是老师的，不一定是学生的。苏格拉底问得太准，男孩还没来得及自己想要知道，就已经被领到了缝边上。

等出来的卡住，好处是那股劲是学生自己的。“如之何，如之何”是他自己喊出来的，愤是他自己憋的，动能从一开始就在学的人身上。坏处是，等不来怎么办。脸上的“愤”也很难事前写下：一个孩子皱眉，可能是卡住了，也可能只是饿了。

本书的办法，是把两样接起来。先让学生自己写下一个预测，这是孔子那一边，劲是他自己的；再让这个预测去撞现实，这是苏格拉底那一边，缝是谁都看得见的。吴秀兰第二个晚上让孙子“写你心里真觉得的”，就是这样一个接法，后面再细说。孔子还有一句，把“等”的另一面说透了：

> 子曰：“吾尝终日不食，终夜不寝，以思，无益，不如学也。”（《论语·卫灵公》）

一整天不吃，一整夜不睡，光想，没有用处，不如去学。这是孔子自己卡住的一次记录。一个人闷着想，有落差，也有劲，可是手边没有材料可接，身边也没有人托，想到天亮，还是一锅粥（混沌）。他在另一处说得更对称：

> 子曰：“学而不思则罔，思而不学则殆。”（《论语·为政》）

只学不想，是被别人的话串着走，迷迷糊糊；只想不学，是自己一个人困着，危险。用本书的话说：前一种只有别人的话串着、没有自己的动能，停在看懂（在场）；后一种只有动能、没有场和材料，卡成一锅粥。

再回头看美诺那个难题：“你怎么去找一样你根本不知道的东西？”苏格拉底用“回忆”来答：其实你知道，只是忘了。本书的答案更朴素：你不是朝着一个不知道的东西去找，你是从一处对不上出发去找。

你不知道答案是什么，可你知道“四尺不对，三尺也不对”。缝本身就指了方向。男孩不是靠前世的记忆找到对角线的，他是被两次对不上夹出来的。四尺太大，三尺也太大，答案不在整尺上，得换一种拼法。这一点，苏格拉底的问答其实全都演出来了，只是他把功劳记在了“回忆”的头上。

◆ 七、它们都停在同一道门口

写足了对的地方，再看停在哪里。三家都看见了：卡住在前，教在后。可三家都没有回答两个问题。第一，卡住为什么有用？第二，卡住什么时候会变成放弃？

先看苏格拉底。他对第一个问题其实有答案，就是“回忆”。灵魂早就知道，困惑只是把蒙在上面的灰擦掉。在他的框架里，男孩口中的“对角线”，不是在那个下午、在那块地上第一次长出来的；它早就在男孩的灵魂里，等着被找回来。

这是一个发现学的答案：东西是现成的，学只是把它取出来。可是那个下午真正发生的事，比“回忆”多。男孩说“四尺”，数出十六；说“三尺”，数出九；然后麻了。这一路下来，他身上“加倍就加倍”的旧结晶被拆开。斜线画出来以后，“边”“面积”“一半”“拼起来”这几样东西，被重新接到了一起。这是一次建立，不是一次取回。

苏格拉底自己也留了余地。在 86b—c，他说关于回忆说的其他细节，他不敢担保。他愿意为之一战的只有一条：相信应当去寻找不知道的东西，会让人更好、更有勇气，胜过相信无从寻找。这一句，比“回忆”更贴近那个下午。

再看第二个问题。那个下午，困惑没有变成放弃，靠的是什么？靠的是苏格拉底就在旁边。他一问接一问，男孩多半答“是”“对”“当然”。画方、拼方、画斜线，大半是苏格拉底的手。后世不少读者都指出过，这段问答牵得太紧，问题里已经埋着答案〔待核：具体文献〕。

用本书的话说：场太强了，强到动能有一大半是老师在付。男孩付了前半段，两次错答、一次“不知道”；后半段，多是跟着点头。所以苏格拉底自己才说，这只是一场梦。他心里清楚：那个下午建立起来的东西，还没拴住。

再看孔子和《学记》。他们比苏格拉底更在意时机：当其可，不陵节，力不能问然后语之。可他们识别卡住，照程子的解释，靠的是看脸，“见于色辞”。等学生愤了、悱了，老师再出手。

至于一个从不说“如之何”的学生，怎样让他开始卡住，回答是“吾末如之何也已矣”。一个举一隅而不能三隅反的学生，回答是“则不复也”。告诉了还不懂，回答是“虽舍之可也”。

公道地说，“不复”本义是不再告诉（朱熹注：“复，再告也”）。一说这正是把那份功留给学生，并不是赶人走；孔子也说过“有教无类”“诲人不倦”。可对一个怎么也推不出另外三隅的学生，“不再告诉”之后接什么，书上没有下文。不复，舍之。门在这里关上了。

司马迁在《史记·孔子世家》里记：“弟子盖三千焉，身通六艺者七十有二人。”三千人里，七十二人学通了。这句话常被用来称赞孔门出人才。换个角度看，它也像一面筛子：带着自己的“愤”来、付得起“三隅反”的人，留了下来；其余的人后来怎样，书上没有记。

吴秀兰读到这里，想起二十多年前班上的一个男生，邵建国。上课从不提问，作业交得齐，考试在中游。她在期末评语里写过“学习被动，缺乏钻研精神”。很多年后她才听说，那几年他父亲常年住院，他每天放学先去医院送饭，夜里十一点才开始写作业。他不是不会愤，是愤不动了。用《学记》的话说，他是“力不能问”；可那时候没有人“然后语之”，更没有人先让他睡一觉。这一类学生，本书第 15 章会专门讲。

被关在门外的那一类学生，正是今天最让老师和家长发愁的一类。他不一定不聪明，常常是没有力气了，或者身边没有人。用本书的话说，他不缺对不上，缺的是动能和场。孔子看见了动能的大小和方向，“求也退，故进之”，却没有给它一本账：它从哪来，用尽了怎么办，谁能替他补。

两边合起来，停下的地方是同一道门：他们都知道要先卡住，却没有一本能查的账，说清卡住为什么做功、什么时候做不了功。它们停下的地方，正好是本书接着要走的一步。

◆ 八、卡住是落差，功要自己付

本书把“先卡住，再启发”放进建立的三个条件里重读。第一个条件，对不上。卡住不是一种情绪，是两样东西对不上：男孩脑子里“加倍就加倍”的规矩，和地上数出来的十六块；明轩笔下的“因为他尝过”，和原文里的“取之，信然”。

对不上就是一个落差，像水位差。有落差，水才流，才能做功；对得上，就没有落差，也就没有新东西长出来（见书二第 14、18 章）。这就回答了第一个问题：卡住有用，不是因为困惑本身好，是因为落差是做功的前提。苏格拉底说“让他困惑是帮他”，说对了结果；本书补上的是理由。

第二个条件，场。落差有了，还要有东西托住。颜回说“循循然善诱人”，《学记》说“独学而无友则孤陋”，苏格拉底就蹲在男孩身边。场就是势能：身边那张人的网，把一个卡住的人往某个方向拉，也给他托着底（见书二第 17 章）。没有场，落差只会变成一锅粥，卡住就成了放弃。

第三个条件，动能。拆开旧的、接上新的，这份功只能由学的人自己付。老师可以举一隅，三隅得学生自己反。苏格拉底可以画线，可那一句“在这条线上”，得男孩自己数出来、自己说出口。

这就回答了第二个问题：卡住变成放弃，是因为三个条件里少了一个。落差太大，没东西可接；或者身边没人托；或者学的人已经付不起了。由此，本章的判断是：

卡住有价值，可卡住不等于学。

落差太大，是一锅粥。问一个四年级孩子“什么叫归纳推理”，他卡住了，可他手边没有任何能接上去的东西，那一下卡住什么也建不起来。没有场的卡住，只会变成放弃。孩子一个人对着作业本哭，屋里没有人坐过来，那一下卡住留下的只有“我不行”。落差刚好、场在、动能付得起，那一下卡住，才叫“愤”，才叫“悱”。还有一条，是次序：

先让人卡住，再给场；顺序倒过来，场就成了替代品。

吴秀兰第一个晚上的讲解，就是顺序倒过来的场。明轩还没卡住，奶奶的话已经把路铺好了。他没有付拆旧接新的功，只是跟着奶奶走了一遍。第二天那句“路边的就是苦的”，是他从奶奶的路上捡回来的一块路牌，不是他自己走出来的路。

“举一隅不以三隅反”，在本书里还多一层用处。它是一道现成的测验：老师给一个例子，学生能不能自己推到另外三个情境上去？推得出，说明那份东西已经离开了老师和课本，能独立立住，能被带到别处。推不出，说明它还停在“在场”，被老师的那一隅串着。孔子拿它当教不教下去的门槛；本书拿它看结晶结没结成。

那么，老师举的那“一隅”该多大？举得太大，就是把答案递过去了。“树在路边，人多，没人摘，所以苦”，这是四个角一起举，学生没有可反的。举得太小，又等于没举。“你再想想”，这句话什么也没托住。

好的一隅有两个特点。一是它常常是一个问题，不是一句结论：“要是李子是甜的，会怎样？”二是它落在学生身上已经有的东西上。路上人来人往、好吃的东西会被抢光，这些明轩早就知道，只是还没和“李子苦”接到一起。老师那一隅，是把两头已经有的东西指给他看；中间那根线，留给他自己接。《学记》说“开而弗达”，开的就是这一个口子。

◆ 九、第二个晚上，奶奶没有讲

吴秀兰想了一夜，第二天晚上换了个做法。她把那道题重新摆出来，只说一句：“昨天奶奶讲的，你先放一边。你自己写，王戎为什么知道李子是苦的。写你心里真觉得的。”明轩犹豫了一下，还是写了：“因为他以前吃过这种李子。”

这一行字很要紧。它是事前写下的，是他自己的想法，不是奶奶的。缝在哪里，现在白纸黑字摆着。吴秀兰没有说对错。她指着原文最后四个字，“取之，信然”，问：“谁去摘的？摘了以后发现什么？”

明轩念了两遍，皱起眉：“是别人摘的……摘了才知道，真是苦的。”“那王戎吃过没有？”“……原文没说他吃过。”“那他怎么知道？”明轩不说话了。他拿铅笔在本子上戳了两下，脸有点红。他自己写下的答案，和原文对不上了。这是“愤”。

吴秀兰忍住了没讲。她把椅子挪近一点，坐在他旁边，给他倒了杯水。过了一会儿，她只举了一个角：“要是那棵树上的李子是甜的，路上那么多人走来走去，会怎么样？”明轩张了张嘴，没说出来，又张了张嘴。这是“悱”。

奶奶还是等。大概半分钟，明轩突然说：“甜的早就被摘光了。”“然后呢？”“然后……还剩这么多，压得树枝都断了，那就是没人要。没人要，就是不好吃。”

这一次的话，没有昨晚奶奶讲的整齐。可它是从他自己嘴里一节一节接出来的。“路边”“人多”“剩下很多”“没人要”“不好吃”，这几样东西，被他自己拆开，又接成了一条。

接下来是“三隅反”。吴秀兰没有再提面馆，她换了三个情境，一个一个问。一个是：公园里风景最好的地方有一张长椅，旁边的长椅都坐满了，就它一直空着，为什么？明轩想了想：“可能是湿的，或者上面有鸟屎。”

一个是：学校门口卖文具的两家店，一家挤满了人，一家冷冷清清，你猜哪家的东西更好？明轩说：“人多的那家。”停了一下，又补一句：“不过也可能是人多的那家便宜。”

第三个，她故意给了一个拐弯的：菜市场里有个摊子，青菜一大早剩了很多，别的摊都快卖完了。是不是这家的菜一定不好？明轩想了很久：“不一定。可能他今天进得太多了。”最后这一句，比前两句更要紧。

王戎的推理里藏着一个前提：路上的人都有机会摘，也都想吃李子。条件一变，“剩下很多”就不一定等于“不好”。明轩手上的那条推理，碰到一个新情况，没有僵在“剩下多就是不好”上。它松开了一下，重新接上了一个“可能进

得太多”。这一松一接，就是本书说的熔开再结晶的一个小样。它不大，可它是活的。

还要老实记下另一件事。就在这之前一周，吴秀兰也试过一次“等”。那是一篇作文，题目是《我的拿手好戏》。明轩憋了二十分钟，写不出第一句。奶奶坐在客厅看电视，心里想着“不愤不启”。最后孙子趴在桌上哭了，作文也没写成。

两个晚上的差别，不在等不等。作文那一晚，落差太大，他手边没有任何能接上的东西；奶奶又不在身边，卡住没有人托。王戎那一晚，落差刚好，只差一个角；奶奶就坐在旁边，一杯水，一句“要是甜的会怎么样”。前一晚的卡住，是一锅粥。后一晚的卡住，是愤与悱。

两个星期以后，明轩跟爸爸去吃饭，路过一条小吃街。他指着一家空空的店说：“这家肯定不好吃，旁边都排队。”想了一下，又说：“也可能是刚开的。”没有人提王戎，也没有人提奶奶的那几个晚上。那条推理离开了课本，离开了奶奶，换了个地方，仍然立着，而且自己带着一个“也可能”。

稳定，换了情境还在；整体，不靠提示能说成一整件事；独立，离了老师立得住。三条判据，那天在小吃街上都碰到了。不必说他“学会推理了”。这一段经历，显出了一个新的他：一个看见“剩下很多”时，会多想一步的孩子。

◆ 十、放回日子里

今天，“启发”这个词被用得太宽。课件上的一段动画、一个有趣的提问、一场热闹的互动，都被叫作启发。可孔子的启发有一个前提：先愤，先悱。没有卡住，就没有可“启”的门。

AI 让这件事变得更尖锐。孩子还没来得及说一声“如之何”，答案已经在屏幕上了。那不是启发，是在愤之前就启，在悱之前就发。落差还没形成，就被填平了。可是也别把这一章读成“什么都别讲，让他卡着”。卡着的人身边要有人，落差要刚好，功要留给他自己付。三样少一样，等待就成了旁观。

下次孩子卡住，或者你自己卡住，先问三件事：卡住的那条缝，写下来了没有？身边有没有一个人坐着？要付的那份功，是不是还留在学的人手里？三件事都在，就等一等。

等的那半分钟，常常比讲的那十分钟值钱。

如果你是老师，也可以把这三件事放进一节课。上课先让学生在本子上写一句自己的猜想，不打分；讲之前，先让同桌两个人对一对，谁的猜想和材料对不上。讲的时候，只举一隅，剩下的留成课后那道“换个地方还成不成立”的题。本书第 18 章会把这一节课的样子细细排出来。

带走的话

先卡住，再启发；可卡住只是落差，要有人托着，还要学的人自己付功，东西才会结晶。

小　账

苏格拉底与孔子打开了“先卡住、后启发”这扇门，却用“则不复也”“虽舍之可也”把付不起功、身边没人的学生关在门外。本书用对不上、场、动能三个条件，把这扇门重新打开。

苏格拉底把沙地上那次建立，说成灵魂“想起”了本来就有的知识：发生在这里被收回成了发现。

想一想

1. 你最近一次在心里喊“怎么办，怎么办”是什么时候？那一次，身边有没有人坐着？

2. 你辅导孩子或带新同事时，有没有在对方卡住之前，就把话说透了？第二天他还剩下什么？

3. 你身上有没有一条用了很多年的“王戎式”推理，最近碰到了一个“也可能”？

◆

05

第 5 章

皮亚杰、维果茨基、布鲁纳：失衡、场与脚手架

这一章的问题

孩子当面说“一样多”，第二天照样去抢那只高杯子——老师讲清楚了的那句话，为什么没在他身上长出来？

◆ 一、两只杯子里的橙汁

马晓雯二十九岁，在成都一所幼儿园带大班，这是她工作的第七年。那天下午吃点心，班上的塑料杯不够了，保育阿姨从柜子里翻出几只细细高高的透明杯来凑数。橙汁倒好，两个孩子吵了起来。邓可可五岁半，手里是一只矮胖的杯子。她指着旁边曾小满的细高杯，眼泪都快下来了：“他的多，我的少。”

马晓雯走过去。两杯橙汁是她亲手用同一只量杯倒的，一样多。她忽然想起大学里的一道考题：“什么是守恒？前运算阶段的儿童为什么不能守恒？”她当年答得很好，拿了满分。答案是皮亚杰的：五六岁的孩子看液体，只看高度这一个方面，看不到宽度在同时变化；倒来倒去，量没变，孩子却以为变了。现在，书上的那道题活生生站在她面前，还在掉眼泪。

她把两杯橙汁都倒回两只一模一样的矮杯里，摆在一起：“你看，是不是一样多？”可可看了看：“一样多。”马晓雯又把可可那杯倒进细高杯：“现在呢？”可可盯着杯子，有点犹豫：“……一样多。”她又问：“为什么一样多？”可可答：“因为马老师说一样多。”

旁边几个孩子也跟着说“一样多”。马晓雯松了口气。可是第二天吃点心，细高杯又摆上了桌，孩子们一窝蜂去抢那几只高的。可可抢到一只，开心地说：“我的最多。”嘴上说“一样多”，手却去抢高的。

那句“一样多”，是老师递过去的一句话，一个理念符号。它摆在孩子手边，和孩子抢杯子的那只手，并排放着，互不相干。用本书的话说：特征在场，挨在一起，被老师那句话串着，没有建立起来。五岁的孩子，也会有看懂型的假会。

那天晚上，马晓雯翻出了大学时的三本教材。一本讲皮亚杰，说要等孩子到了年龄，自己建构；一本讲维果茨基，说好的教学要走在发展前面；一本讲脚手架，说老师要会搭架子、会撤架子。三本书都对。可三本书放在一起，她反而不知道明天下午该怎么做了。这一章要把这三家放在一起看。先写足每一家对在哪里，再写它停在哪里。然后，本书试着把它们接成一个三角。

◆ 二、皮亚杰：孩子自己搭房子

让·皮亚杰（Jean Piaget，1896—1980），瑞士人。他年轻时学的是生物，十几岁就发表过研究软体动物的文章。后来到了巴黎，在比奈（Alfred Binet）创办的实验室里帮着整理儿童推理测验；那时比奈已经去世，主持实验室的是他的合作者西蒙（Théodore Simon）。别人关心孩子答对了多少，他却对孩子怎么答错更感兴趣。孩子的错，不是乱错，错得有规律，各个年龄错得各不相同。

他后半生在日内瓦，一直追问一个问题：人的知识是怎样一点点长出来的？他给自己的学问起的名字，中文常译作“发生认识论”。1955 年，他在日内瓦创办了国际发生认识论中心。“发生”两个字，就印在他的招牌上。

他的回答，可以用几个词串起来。第一个词是“图式”。孩子身上有一套套做事和看事的格子。婴儿见什么抓什么、抓到什么往嘴里送，这是一套格子。第

二个词是“同化”：把新东西装进旧格子里。一个两岁的孩子学会了“狗狗”，从此见到四条腿的毛茸茸的东西都叫“狗狗”，猫是狗狗，羊也是狗狗。第三个词是“顺应”：旧格子装不下了，就改格子。有一天那只“狗狗”冲他“喵”了一声，还跳上了窗台，狗狗不会这样。孩子愣了一下，过些日子，嘴里多了一个“猫猫”。

第四个词是“失衡”。旧格子和眼前的东西对不上，孩子心里那套东西就不稳了。第五个词是“平衡化”。失衡之后，孩子自己调整，同化与顺应重新协调，达到一个新的平衡。皮亚杰 1975 年出过一本书，专门讲这件事，书名直译是《认知结构的平衡化》，副题说它是“发展的中心问题”；英译本 1985 年出版。

守恒实验，就放在这套说法里。皮亚杰和他的同事给孩子看两杯同样多的水，当面把一杯倒进细高的杯子，问哪杯多。大约七岁以前的孩子多半说高的多。再把一排硬币摊开，问是不是变多了；把一团橡皮泥搓成长条，问是不是变多了。孩子的回答一样：看起来变了，就是变了。到七八岁，多数孩子会说：“一样多，因为你没加也没倒掉”，或者“它高了，可是也细了”，或者“倒回去就一样了”。这三种理由，后人常概括为同一性、补偿、可逆。

皮亚杰把孩子的成长分成几个大阶段：感知运动（约零到两岁）、前运算（约两到七岁）、具体运算（约七到十一岁）、形式运算（约十一岁以后）。年龄是大约，次序他认为是固定的。

◆ 三、失衡对在哪里，停在哪里

先写他对的地方。第一，他把“对不上”放在了发展的发动机位置上。在皮亚杰之前，人们常以为孩子是个空瓶子，大人往里倒就行；或者以为孩子天生就带着一切，长大了自然会。皮亚杰两边都不认。知识既不是天生现成的，也不是

从外面灌进去的；是孩子在一次次失衡里，自己调整、自己搭起来的。这和本书的命题三几乎是一句话：没有对不上，就没有建立。

第二，他坚持学的人自己动手。皮亚杰的孩子是一个忙个不停的小工人：倒水、摆硬币、搓泥条、问为什么。大人在旁边说一万遍“一样多”，抵不上孩子自己倒一次。这就是本书说的动能，必须由学的人自己付。

第三，他看见了平衡不是终点。一次平衡达成了，下一次失衡还会来，新的平衡会比旧的更宽、装得下更多的东西。这已经很接近本书说的熔开再结晶：一个结晶在新的对不上里松开，再长成一个更大的。

第四，他的后人把“失衡”做成了教学。1982 年 Posner 等四位学者提出的“概念转变”四条件（第 10 章细讲），排在第一条的是对原有的想法“不满意”。这就是皮亚杰的失衡，搬进了理科课堂。

再看他停在哪里。第一处：失衡不一定带来顺应。马晓雯那天下午遇到的，正是这一处。孩子看见两杯倒回矮杯一样高，可一倒进高杯，又说高的多。还有的孩子会说：“你倒的时候洒了一点。”“这个杯子是魔法杯。”对不上明明摆在眼前，孩子却把它绕了过去。

皮亚杰自己也看到了这种情形。他在讲平衡化时，把孩子对扰动的反应分成几类，其中最低的一类，他称作 α 类反应，就是忽略它、压下它，把它当作没发生。可他对“为什么这一次被忽略、那一次被接住”的解释，主要落在孩子内部结构的水平上：结构还不够成熟，就接不住。

大人也一样。那天晚上，马晓雯自己就差一点把一个对不上绕了过去。她心里原有一条从没怀疑过的规矩：“讲清楚了，孩子就会。”第二天孩子照样抢高杯子，这条规矩和眼前的事对不上了。她第一个念头是：“他们还小，过了七岁

自然就会了。”这句话很省事，书上也找得到依据，可它的用处，正是把对不上轻轻放到一边。

本书要多问一句：除了结构，还有什么？那个下午，孩子身边有没有人托着？他自己还有没有力气去拆、去接？同一个对不上，有人托、有劲付，就可能被接住；没人托、没劲付，就被绕过去。这笔账，皮亚杰没有记。

第二处：场在他那里站在背景里。皮亚杰的孩子，很像一个独自做实验的小科学家。实验员、同伴、老师，都在场，可他们在理论里不算数，算数的是孩子和杯子之间的那场较量。后来有研究者发现，同一道守恒题，换一个问法、换一个“谁来动杯子”，孩子的答案就会变。比如让一只“淘气的小熊”去把一排筹码弄乱，而不是让大人郑重其事地去摆，更多四到六岁的孩子会说“还是一样多”（McGarrigle 与 Donaldson，1974）。问题由谁问、怎么问，本身就是场的一部分。

第三处：阶段像一架现成的梯子。皮亚杰本人关心的是认识怎样长，他并没有给老师开药方。可他的阶段说传到课堂上，常被读成一句话：“不到年龄，教了也白教，等着就行。”这样一读，“发生”就悄悄变了味：孩子的成长，像是去爬一架早就搭好的梯子，每一级在哪里，事先定了；孩子只是一级一级“到达”。到达，是发现学的动词。这不是皮亚杰的错，可这扇门是从他那里打开、又在这里关上的。

写招牌的人用的是“发生”，读招牌的人常把它读回了“发现”。

◆ 四、维果茨基：两个“八岁”的十岁孩子

列夫·维果茨基（Lev Vygotsky，1896—1934），和皮亚杰同一年出生，却只活了三十七岁，死于肺结核。他留下大量手稿和讲稿，许多年后才被系统整理。西方读者认识他，很大程度上靠两本英译：1962 年的《思维与语言》，和 1978 年由 Michael Cole 等四位学者编译的《社会中的心智》（Mind in Society），由哈佛大学出版社出版。后一本是从他多篇著作里选编合成的。“最近发展区”这个说法，就在 1978 年这本书的第六章里（第 86 页前后）。

维果茨基先讲了一个例子。两个孩子，都是十岁，测出来的智力水平都相当于八岁：他们自己独立能解的题，是八岁孩子的题。按当时的测法，这两个孩子一样。可是，如果大人在旁边给一点帮助，比如开个头、提个问题、示范一步，结果就不一样了。一个孩子在帮助下能解十二岁水平的题，另一个只能解到九岁。维果茨基说，这两个孩子不一样。差别不在他们自己已经会的那一截，在他们靠着别人能走多远的那一截。

他据此给出了定义，大意如下。一个孩子独立解决问题时，显出的是实际发展水平；在成人指导下、或与更有能力的同伴合作时，显出的是潜在发展水平。两者之间的距离，就是最近发展区。接着他说了一句常被引用的话，大意是：孩子今天在帮助下能做到的，明天就能独自做到。还有一句更大胆：好的教学，应当走在发展的前面。不是等孩子长到那一步再教，而是教在孩子靠着别人刚刚够得着的地方，把发展拉过来。

维果茨基还讲过一条更一般的规律：孩子身上每一种高级的心理本事，都要出场两次。第一次在人与人之间，第二次在孩子自己里面（同书第 57 页前后）。比如数数，孩子先是跟着大人一起掰手指数，大人数一个，他点一个；后

来他自己掰手指数；再后来手指不动了，在心里数。先在人和人之间，后在孩子里面。

他对在哪里？第一，他把场请进了学习。在皮亚杰那里，同伴和老师站在背景里；在维果茨基这里，他们站到了台前。学习不是孩子一个人和杯子较劲，是孩子在一张人的网里被拉着往前走。

本书说，场就是势能：同伴、教师、班级这张网的吸引与拉扯（见书二第17章）。维果茨基没有这个词，可“在成人指导下、与更有能力的同伴合作”，说的正是这张网。两个十岁的孩子，独立水平一样，被这张网拉动的程度却差了三岁。这就是同一个场，在不同的人身上，做的功不一样。

第二，他给“够得着”划出了下沿和上沿。下沿是“独立解决”。这几个字很要紧。它和本书三判据里的“独立”是同一个意思：离开了帮助，自己能不能做。维果茨基测下沿的办法，就是撤掉帮助看看。上沿是“在帮助下”。超出上沿的东西，再怎么帮也接不上，落差太大，就是一锅粥（混沌）。

第三，他看见了从外到内。“先在人与人之间，后在自己里面”，说的正是一个东西从场里，一步步落进学的人自己身上。本书管这一步叫迁移，落点是自我符号。在这一点上，维果茨基比皮亚杰看得更清楚：这份东西起初是借来的，借着别人的手、别人的话；后来才成了自己的。

他和皮亚杰有过一场隔空的争论，就在“自言自语”上。四五岁的孩子搭积木，常常一边搭一边念叨：“这个放这儿……不对……放那边。”皮亚杰早年把这种话看作孩子还以自我为中心、不会顾及听者的表现，长大了就自然消失。维果茨基看法不同：这些话是大人当初在旁边说给孩子听的那些话，现在孩子自己说给自己听，用来管住手上的事。再大一点，嘴不动了，话转到了心里，成了内部言语。

这场争论，皮亚杰并没有回避。1962 年《思维与语言》英译本出版时，他写了一篇回应，承认维果茨基的批评有一部分说得对。在本书看来，这场争论里有一幅很清楚的图：场里的话，先是别人说的，再是自己出声说的，最后不出声了。每往里走一步，那份东西就更不靠外面的人。孩子嘴里的念叨，正是一个东西从场里往自我那一角迁移时，留在半路上的样子。

维果茨基还分过两种概念。一种是孩子从日子里自己攒出来的，叫“日常的”概念（也译“自发的”）：孩子知道哥哥是什么人，天天叫，可要他说“哥哥是什么”，他说不清。另一种是在学校里从定义学起的，“科学的”：孩子能背出一个词的定义，可放到日子里，常常用不上。维果茨基认为，这两种概念一个从下往上长，一个从上往下长，学习发生在它们相遇的地方。

一个从日子里往上，一个从课本里往下，在中间撞上。用本书的话说，这正是自我、现实那一边，和理念那一边，在一个孩子身上对账。维果茨基已经看见了两个方向，只是没有把它们之间的那道缝，当成发动机来记。

◆ 五、“够得着”还不够

再看维果茨基停在哪里。第一处：落差只量了“够得着”，没有量“对不上”。最近发展区是从帮手这一边量的：有人帮，能做到哪里。可“在帮助下做到了”，有两种完全不同的情形。一种是孩子心里先有一个对不上，帮手托了一把，他自己把旧的拆开、把新的接上。另一种是孩子心里什么也没卡住，帮手一步步领着，他一步步照做，做出来了。

两种情形，在“帮助下能解的题”这把尺子上，读数一样。可是前一种是建立，后一种只是在场。马晓雯那天下午，孩子们在老师的帮助下都说出了“一样多”。按最近发展区的读法，这道题在他们的区里。可第二天，他们照样去抢高杯子。

第二处：谁付的功，没有记账。帮助有轻有重。开个头是帮，替他做完大半也是帮。维果茨基的定义里，帮手付了多少、孩子付了多少，没有分开记。帮手付得越多，“帮助下的水平”就显得越高；可撤掉帮助以后，孩子手上剩下的，可能越少。

第三处：今天课堂上的一个简化。最近发展区传到课堂上，常被简化成一句话：题目要“跳一跳，摘得到”。这句话本身没错，难度确实要合适。可它只问了高度，没问两件事：这一跳，是谁在跳？跳之前，他心里有没有一个对不上？

一个孩子在老师手把手的扶持下“跳”上去，摘到了，可那份力气是老师的。一个孩子从头到尾没觉得哪里不对，只是照着步骤做，也“摘到了”，可他心里什么也没有被拆开。这两种“摘得到”，都不是本书说的建立。

举一个常见的课堂。三年级的数学课，老师出了一道比课本稍难的应用题，正是“跳一跳”的高度。老师在黑板上写：第一步，先求什么；第二步，再求什么；第三步，列式。全班跟着三步走，四十个人都写出了正确答案。按最近发展区的读法，这道题在全班的区里。第二天，老师换了一道结构一样、情境不同的题，不给三步。一半的孩子不知道从哪里下手。

那三步，是老师的手。孩子们在帮助下“做到了”，可那一跳是老师抱着跳的。在开始之前，也没有人问过他们：你觉得这题该先算什么？没有那一句，就没有一个可以撞上去的对不上。

公道地说，维果茨基去世太早，最近发展区在他的著作里，本来就只是一个刚刚提出、还没充分展开的想法。它停下的地方，正好是本书接着要走的一步：在“够得着”之外，再问一句“对不上了没有”，再记一笔“功是谁付的”。

◆ 六、脚手架：搭得起，也要拆得掉

“脚手架”这个词进入教育学，通常追到1976年的一篇论文。作者是三位：David Wood、布鲁纳（Jerome Bruner）、Gail Ross，题目是《辅导在解决问题中的作用》，发表在《儿童心理学与精神病学杂志》第17卷第2期，第89—100页。

研究本身很简单。三十个孩子，三岁、四岁、五岁各十人，一个一个来。桌上是二十一块木头积木，可以一层一层嵌在一起，搭成一座小金字塔。这活对三五岁的孩子不容易，积木要配对、要对准、要翻对方向。旁边坐着一位辅导者，就是Ross本人，按一套规矩帮忙：能说就不动手，孩子做得好就少帮，做不下去再多帮一点。

论文把辅导者做的事，归成六样：一是“招募”：让孩子对这件事感兴趣，愿意动手。二是“减少自由度”：把任务简化，把一大堆可能拆成几步，让孩子一次只对付一件事。三是“维持方向”：孩子做着做着跑偏了、玩起别的了，把他引回来。四是“标出关键特征”：指出哪里不对，哪一块和哪一块不配。五是“控制挫败”：孩子快要放弃时，别让这次失败压垮他。六是“示范”：做一遍给他看，让他照着再做。

三个年龄的孩子差别很大。三岁的孩子，辅导者大量时间花在让他留在任务上，直接动手干预也最多。四岁的孩子，多半需要有人帮着指出哪里没配好。五岁的孩子，辅导者常常只是在一旁点头确认。后来人们常把这篇论文和维果茨基的最近发展区放在一起讲：区是“够得着”的那一截，脚手架是让孩子够上去的那套架子。

布鲁纳的贡献不止这一篇。1960年，他出版了《教育过程》，提出“螺旋式课程”：一个学科里最要紧的观念，可以用诚实的、孩子接得住的方式，早早教给孩子。以后几年，再一圈一圈绕回来，每一圈更深一层。1966年，他在

《教学论》里讲到，人表达一样东西有三种方式：用动作、用图像、用符号。一个孩子先会用手把跷跷板摆平，再会看懂一张跷跷板的画，最后才会写出一个平衡的式子。

布鲁纳在 1960 年代也大力提倡“发现学习”：让学生自己去摸出规律，而不是把规律直接交给他。这个主张后来被推得很远，一度变成“老师什么都别给，让学生自己去发现”。几十年后，Richard Mayer 在 2004 年回顾了这方面的研究。他认为，完全不给指导的“纯发现”，效果常常不如有指导的发现。

这一段来回，本书读来很有意思。纯发现给足了对不上，也给足了学生自己的动能，缺的是场：卡住了没人托，落差太大时就是一锅粥。脚手架那篇论文，恰好站在这两头中间：既不替孩子搭，也不把孩子一个人丢给积木。

脚手架对在哪里？第一，它是场的施工图。维果茨基说要有人帮，可怎么帮，他说得不多。Wood、布鲁纳、Ross 把“帮”拆成了六个可以看、可以学、可以练的动作。场不再是一句“要有人在旁边”，而是一套具体的手艺。

第二，它的六样功能，大半是在照料动能。“招募”是点火，没有这股劲，什么都不会开始。“维持方向”管的是劲往哪里使。“控制挫败”管的是劲别耗光，别让卡住变成放弃。本书说，建立付的是动能，方向比大小要紧，疲惫的人付不起（见书二第 18 章）。五十年前的这篇论文，在一个三岁孩子搭积木的桌上，已经把这三件事一一照顾到了。

第三，“标出关键特征”，就是让对不上被看见。孩子手上那两块积木没嵌上，他自己可能看不出来。辅导者一指：“这两块一样吗？”缝就露出来了。这一样，是在替孩子把对不上指认出来，可指认之后，接的人仍是孩子。

第四，布鲁纳的三种表达，碰到了三界的边。动作、图像、符号，和本书的自我符号、现实符号、理念符号，离得很近。手上会摆平跷跷板，是长在身上的

会；一张图，是摆在外面看得见的样子；一个式子，是理念。布鲁纳看出了同一个东西有三种身体。

再看它停在哪里。第一处：架子什么时候拆，论文没有回答。1976 年的研究，看的是辅导过程中孩子做得怎么样。架子撤掉以后，孩子自己能不能搭？两个星期以后还能不能搭？换一套不同形状的积木还能不能搭？这些不是那篇论文要问的问题。

后来的研究者把这一步补成了脚手架的核心特征之一，常被叫作“渐撤”，与之相伴的是“责任转交”。帮助一点点减少，任务一点点交回学的人手里（van de Pol 等，2010 年的综述；它列的三个核心特征，是随学的人当下的情况调整、渐撤、责任转交）。用本书的话说，渐撤才是真正的考试。

架子撤了，楼还立着，那是结晶；架子一撤，楼就塌，那是架子在撑着，不是楼自己站着。

第二处：撤不掉的架子，就长进了楼里。六样功能里，最容易越界的是“示范”和“减少自由度”。示范多了，动能是辅导者付的；自由度减得太狠，对不上被提前排掉了，孩子只剩照做。架子一直不撤，孩子学会的，是“有人在旁边点头时我会搭”。这句话里，离不开的那个“有人”，就是没撤掉的架子。

第三处：三种表达被排成了从低到高的台阶。在布鲁纳那里，动作、图像、符号多半被看作一个孩子身上依次出现、由低到高的三种表达，它们都在一个孩子的脑子里。本书看三界，不排高低，也不只在脑子里。一个式子（理念）、一杯倒出来的橙汁（现实）、手上“倒一下就知道”的那股熟（自我），三样要互相对账：任两类对不上，逼第三类发生并回写。这三处停下的地方，正好是接着要走的一步。

◆ 七、三家各守一角

把三家放进同一张表：

看的地方	皮亚杰	维果茨基	Wood、布鲁纳、Ross	本书
核心词	失衡与平衡化	最近发展区	脚手架	建立的三个条件
守住的条件	对不上	场	动能（点火、方向、不让耗光）	三个条件同时在
靠近三角的哪一角	现实：杯子、水、硬币会“顶嘴”	理念：大人的词、文化里的符号从场里递过来	自我：一点点转交，落到孩子自己手上	任两类对不上，逼第三类发生并回写
对在哪里	知识是自己搭起来的，失衡是发动机	学习在人的网里发生，独立是下沿	把“帮”拆成可学的动作	把三家接成一张账

看的地方	皮亚杰	维果茨基	Wood、布鲁纳、Ross	本书
停在哪里	失衡何时被接住、何时被绕过，没有场与能量账	只量够不够得着，不量对没对上、谁付的功	架子何时拆、拆后剩下什么，没在当场回答	三家都只管建立，维持与粒子化留给第 6、8、9 章
在五段账上	建立；平衡化近于熔开再结晶	建立；“明天独自做到”近于粒子化	建立；渐撤之后才见粒子化	在场、建立、维持、粒子化、熔开再结晶
今天常见的误读	“不到年龄教了也白教”	“跳一跳，摘得到”，只问高度	架子越搭越密，从来不拆	把三个条件当清单，忘了次序

从这张表看，三家并不打架。各守了建立的一个条件，也各靠近了三角的一个角。这样分，看的是各家用力最多的地方，不是说别家没碰到。皮亚杰也要孩子自己动手，那是动能；脚手架本身也是场的手艺。表里只记各家最用力的那一处。

皮亚杰守的是对不上。他的孩子面对的是杯子、水、硬币、泥条，是实打实的现实。它们不听孩子的话，倒进高杯子就是倒进去了，量不会因为孩子的想法而变。这是现实那一角在“顶嘴”。

维果茨基守的是场。他的孩子身边站着大人和同伴，递过来的是词、是数数的办法、是一个文化攒下的符号。“一样多”这个词，“守恒”这个概念，都是从场里递过来的理念符号。这是理念那一角在拉人。

Wood、布鲁纳、Ross 守的是动能。他们的六样功能，几乎都在照料孩子身上那股劲：点着它，引着它，别让它耗光。而他们追问的终点，是任务一点点交回孩子手里，落在孩子自己身上，成为“我会搭”。这是自我那一角。

本书把三家接起来，接法就是那三条方程：理念＝F（现实，自我）；现实＝G（理念，自我）；自我＝H（理念，现实）（见书二第 13 章）。

拿马晓雯的教室说。大人递过来一个理念符号，“一样多”。孩子手上抢杯子的那股劲，是一个自我符号，“高的就是多”。眼前一杯倒进高杯的橙汁，是现实。三样摆在一起，现在是理念和自我对不上，现实在中间作证。

单有皮亚杰，孩子可能把这个对不上绕过去。单有维果茨基，孩子可能只是把“一样多”这句话借来说说。单有脚手架，孩子可能在老师点头时搭对，老师一走就搭不成。三个条件同时在，事情才可能往下走：对不上被事前写下，场托着它不变成哭闹，动能由孩子自己付。

三个条件还有一个次序。先有对不上，再给场。顺序倒过来，场就成了替代品（第 4 章已经说过）。马晓雯第一个下午，是先给了场：老师亲手倒回去、亲口说“一样多”。孩子心里还没有卡住，老师那一套已经摆好了。场来得太早，填平了还没形成的落差。

场在的时候，功仍留在孩子手里。架子帮着点火、引方向、挡一挡挫败，可舀的那一勺、倒的那一下、说出“它变瘦了”的那一句，得是孩子的。最后，拆架子。拆了以后，换一个碗、换一样东西再看。这一步，是从建立往维持、往粒子化走的门口。三家各自提醒了一条，可他们没有排过这个次序。

次序一乱，三条都在，也可能什么都没留下。

还要说清一件事。三家都是讲“建立”的大家。他们都没有把建立、维持、粒子化分开来记账。维果茨基的“明天能独自做到”，摸到了粒子化的门；皮亚杰的“更好的平衡”，摸到了熔开再结晶的边。可是“建立了以后靠什么不散”，三家都没有专门回答。那是下一章，认知科学要补的账。

◆ 八、马晓雯的第二个下午

一个星期以后，马晓雯把那几只细高杯又拿了出来。这一次，她换了做法。她先在每张小桌上摆两只杯子，一只矮胖，一只细高，都空着。旁边一只大量杯，装着橙汁；还有一只很小的塑料勺子杯，一次只能舀一小口。

第一步，先猜。她拿出一张大白纸，画了两只杯子，发给每个孩子一张小红点贴纸：“待会儿老师往两只杯子里倒同样多的橙汁。你们猜，倒完以后，哪只杯子里的多？把红点贴在你觉得多的那只下面。”

孩子们排着队去贴。大部分红点贴在了细高杯下面，可可的也在那里。曾小满的贴在两只杯子中间：“一样多。”马晓雯什么也没说，用手机拍下了这张纸。这张纸，是事前写下的预测。每个孩子心里的“哪个多”，在橙汁倒进去之前，就摆在了墙上。待会儿要是对不上，缝会从这里裂开，谁都看得见。

第二步，自己倒，自己数。四个孩子一桌。马晓雯不倒，让孩子们自己用小勺子杯舀：往矮杯里舀一勺，往高杯里也舀一勺，嘴里数着，两边舀一样多次。可可那一桌，舀了五勺对五勺。倒完了，高杯里的橙汁明显高出一大截。

马晓雯问：“哪杯多？”可可看着高杯，说：“这个多。”马晓雯又问：“你们舀了几勺？”“五勺……”可可又看了看矮杯，“这个也是五勺。”她不说话了，眉头皱了起来。她的红点贴在高杯下面；她的手刚刚舀了五勺对五勺；她的眼睛看到的是高杯高出一大截。三样东西，在她身上对不上了。马晓雯这时也有点想讲。她忍住了，只问了一句：“那到底哪个多呢？你们这一桌商量一下。”

第三步，同伴是场，不是答案。这一桌里有曾小满。马晓雯事先悄悄跟小满说过一句：“待会儿你可以问别人问题，可是先别告诉他们答案。”小满憋了半天，问可可：“你要不要把它倒回去看看？”这一句，是一个同伴递过来的“一隅”。它不是答案，是一个可以自己去做的动作。

可可把高杯里的橙汁小心地倒回一只空的矮杯。倒的时候洒了一点在桌上，她一下子急了，眼圈发红：“洒了，不一样了。”马晓雯蹲下来，摸了摸她的背：“洒了一点点，没关系。我们再来一次，这次慢一点。”这就是“控制挫败”。卡住正在变成哭，场在这时候托了一下。

第二次，可可慢慢倒，一滴也没洒。倒回矮杯，和另一杯一样高。她又把它倒进高杯，又高出一大截。她倒过来倒过去，倒了三遍。

最后她说：“它是变高了，可是它变瘦了。”

这句话，是她自己接出来的。“高”和“瘦”两样东西，原来她只看见一样，现在被她自己接到了一起。没有人教她“补偿”这个词，可她做出了补偿的那一下。

那天下午，并不是每个孩子都接上了。有两个孩子倒来倒去，最后还是说高的多，说“它就是多”。马晓雯也没有硬拉。按皮亚杰的说法，有的孩子还没到；按本书的说法，那个下午落在他们身上的落差，可能还太大，或者那股劲还没有到。不必急着在一个下午判出输赢。

第四步，撤掉勺子，换个东西。下一个星期，马晓雯什么提示都不给，也不拿勺子了。她用两只形状不同的盒子装绿豆，一只扁而宽，一只窄而深，先当着孩子的面用同一只碗各倒一碗，再问：“哪个盒子里的豆子多？”这是撤掉脚手架，再换一个情境。看的是稳定和独立。

可可盯着两个盒子看了一会儿，先说：“这个多……”随即自己停住了，“不对，要倒一下才知道。”她把窄盒里的豆子倒进碗里，又倒回去，说：“一样多。”她还没有到皮亚杰说的那种“一看就知道一样多”。可她身上长出了另一样东西：遇到“哪个多”，先别信眼睛，倒一下看看。

两周以后，可可的妈妈在家长群里发了一段话。吃早饭的时候，可可嫌弟弟的牛奶比自己多，吵了两句；然后自己拿了两只一样的碗，把两杯牛奶分别倒进去比了比，说：“哦，一样的。”没有勺子，没有老师，没有小满，换了牛奶，换了家里的碗。那个“倒一下看看”的办法，离开了教室，仍然立着。不必说可可“学会守恒了”，她还没有。这一段经历，显出了一个新的她：一个遇到“哪个多”时，会先说“倒一下看看”的孩子。

把这两个下午摆在一起，复一下盘。第一个下午，三家的东西其实都在：有失衡（高杯子），有场（老师就在旁边），有帮助（老师亲手倒回去示范）。缺的是次序和归属。失衡还没在孩子心里形成，老师就示范了；示范的手是老师的，“一样多”的话也是老师的。孩子带走的，是一句借来的话。

第二个下午，同样三样东西，换了归属。对不上，是孩子自己贴的红点撞上了自己舀的五勺，皮亚杰那一角，由孩子的手来顶嘴。场，是一桌四个孩子和一位蹲下来的老师，维果茨基那一角，托着可可没有哭下去。动能，是可可倒了三遍的那双手，脚手架那一角，只在洒了的时候扶了一下。最后撤掉勺子、换成绿豆，是脚手架没有当场回答的那一问。

还有一个人值得一提，曾小满。他早就知道一样多，可那天下午，他被要求不说答案、只提问题。把一个现成的答案，变成一个别人能自己去做的动作，这对一个六岁的孩子并不容易。那一句“你要不要把它倒回去看看”，是他自己付的功。教别人这件事怎样反过来帮了教的人，本书第 12 章再讲。

◆ 九、放回日子里

马晓雯那三本教材，其实可以放在一起读。皮亚杰提醒你：别急着替孩子说“一样多”。让杯子自己去顶孩子的嘴，对不上才是发动机。维果茨基提醒你：别把孩子一个人丢给杯子。身边有人，卡住才托得住；够得着的地方，才有功可做。脚手架提醒你：帮，要帮在点火、引方向、别让他耗光上；示范和简化，用得越少越好；架子搭了，要记得拆。

本书在三句提醒前面，再加一句次序：先让孩子自己猜，写下来；再给场；功留给他自己付；最后，撤掉架子，换个地方再看一次。

这件事不只发生在幼儿园。一个爸爸陪孩子拼一幅五百片的拼图，孩子找不到那块缺口，爸爸伸手就把那一片按了进去。拼图完成了，墙上挂得很好看。可是下一次，孩子还是不知道该先找边、再按颜色分堆。那一片是爸爸按进去的，那一下的功也是爸爸付的。

孩子写作业时，你在旁边一步一步地提示，他做出来了，那是在你的区里，不一定在他身上。AI 是一副永远不会累、永远不会撤的脚手架：你一问，它就

示范，就简化，就标出关键。它能当很好的场，可它不会自己拆。要不要拆、什么时候拆，只能由用它的人和教的人来安排（第 19 章细讲）。

下次你帮孩子，或帮自己学一样新东西，问三件事：第一，开始之前，有没有先猜一个、写下来？第二，那一勺一勺，是谁在舀？第三，架子撤了以后，换一个碗，还成不成？

带走的话

皮亚杰守对不上，维果茨基守场，脚手架守动能；三样同时在，再记得拆掉架子，纠缠才建得起来。

小　账

三家各开了建立的一扇门：失衡、最近发展区、脚手架；可都没有记“谁付的功”和“撤了以后剩下什么”这两笔账。本书把三扇门接成一个三角，再把账接到维持与粒子化。

皮亚杰的阶段一被读成“到了年龄自然会”，孩子的发生就被收回成了一级级“到达”现成的梯子。

想一想

1. 你帮孩子或同事做成一件事时，那一步一步的力气，有多少是你付的？撤开你，他还剩下什么？
2. 你身边有没有一个“跳一跳摘得到”的任务，其实对方从头到尾没觉得哪里不对？
3. 你自己用 AI 学东西时，它是一副会撤的架子，还是已经长进了你的楼里？

◆

06

第 6 章

认知科学补上的账：难度、检索与间隔

这一章的问题

背单词软件写着“已掌握 92%”，一到听力，满耳都是认识的词却一句也跟不上——那九成二到底量的是什么？

◆ 一、绿条涨到了九成二

黄嘉怡二十六岁，是广州一家医院心内科的护士。晚上十一点交完班，她回到宿舍，打开背单词的软件。屏幕右上角有一条绿色的进度条，写着“已掌握 92%”。她在准备雅思。目标是听力和阅读各 7 分，拿到成绩，去新加坡的医院应聘。带她入行的师姐梁婉婷，三年前去了那边，常在微信上发来一句：“这边交班全靠听。”

她的办法很勤快。每天背两百个词。听力真题听完一遍，就把原文打印出来，用黄色荧光笔把没听出来的词一个个划上。划完再读两遍。读到第二遍，每一句都顺了。那种顺，很让人安心。

周六上午，她做了一套完整的模考。听力第三部分，是两个学生和导师讨论作业。语速不快，词也都认识。事后对着原文，她一个生词也没找出来。可是分数是 5.5。她把原文又读了一遍。每个词都在，每个词她都“会”。读到一半，她把荧光笔扣上，在床边坐了很久。她给梁婉婷发语音：“我是不是背错了方法？词都认识，耳朵就是跟不上。”梁婉婷隔了一会儿，回了一句：“你那些词，是在纸上认识的。”

这一句说得很轻。可它碰到了这一章要算的账：一个东西“背过了”“看熟了”“读顺了”，和它在要用的时候出得来，是两回事。认知科学花了三十多

年，把这两回事拆开，测得清清楚楚。它补上了教育学里欠得最久的一笔账。本章先把这笔账写足，再看它停在哪里，最后看本书怎样接着往下记。

◆ 二、练得顺手，不等于学得多

先说一个人：Robert Bjork，加州大学洛杉矶分校的心理学家。1994 年，他写了一篇讲“怎样训练人”的文章，收在 Metcalfe 与 Shimamura 主编的《元认知》一书里。文章里用了一个后来被反复引用的词：desirable difficulties。中文常译作“合意困难”，也有人译作“必要难度”。

他的出发点很朴素。训练时表现好，和训练之后真的会，常常不是一回事。有一些做法，会让练习时的表现变差，却让日后的表现变好。他列过好几样：把不同类型的任务打乱了练，不再一类练完再练下一类；变换任务的条件；变换学习的场所。还有一样，是减少反馈的次数，不再每做一题就告诉你对错。这些做法有一个共同点：练的时候难受。错得多，进度慢，找不到手感。可是隔一段时间再测，或者换一个场景去用，用这些办法练过的人反而好。

有一个常被引用的老实验，把“变换条件”这一条讲得很直观。1978 年，Kerr 与 Booth 让一群八岁的孩子练扔小沙包，往地上的靶子扔。一组孩子一直站在三英尺外扔；另一组站在两英尺和四英尺外，换着扔，一次也没在三英尺练过。十二周后，统一在三英尺外考。

换着扔的那一组，扔得更准。一直在三英尺练的孩子，反而输给了从没在三英尺练过的孩子。十二岁那一组，换了距离再做一遍，结果的方向一样。练的是两英尺和四英尺，会的却是“扔”。

Bjork 更要紧的发现在后面：学的人自己，常常判断反了。练得顺的时候，觉得自己学到了很多；练得磕磕绊绊，觉得自己没学到。教的人也一样。教练、老师、培训师看得见的，是眼前这一堂的表现；看不见的，是几周之后、换了场地之后的表现。于是教的人会一点点往“好练”的那头滑过去，学的人也会一点点往“顺手”的那头滑过去。

他在文章里还点出一层更难办的：教的人往往是按“当下的表现”被评价的。培训结束时考得好，培训师就被认为教得好；学员回到岗位上三个月后怎样，常常没人去看，也看不到。把这句话搬到今天的教室里，一点也不陌生。一堂公开课，看的是当堂检测的正确率；一个学期，看的是期末那一张卷子。几周以后、换了场景以后还剩下什么，不在任何一张评分表上。

这一层，正是嘉怡的那条绿进度条。进度条量的是此刻。她今天在软件里认出了这个词，绿条就涨一格。它不量下个月，也不量这个词夹在一段带口音的对话里，还认不认得出来。

后来有一个实验，把这种错觉拍得很清楚。Nate Kornell 与 Bjork 在 2008 年的《心理科学》上发表过一项研究：让人看十二位画家的风景画，每位画家六幅。一种看法是同一位画家的画连着看完；另一种是不同画家的画穿插着看。测验用的是这些画家的新画，学的时候一幅也没出现过。问题只有一个：这是谁画的。

穿插着看的条件下，认对的比例大约六成；连着看的条件下，大约三成多。差距很大。更有意思的是测完以后的问卷。在第一个实验里，将近八成的人在穿插条件下认得更好；也有将近八成的人认为，连着看至少一样有效，甚至更有效。

成绩和感觉，朝着相反的方向走。

还要留意一点：它测的是“新画”。见过的画认出来，是记住了；没见过的画也认得出是谁的手笔，那已经是能带到别处去了。这一点本章后面还要回来。

Bjork 夫妇后来反复补充一句：困难不是越大越好。困难之所以“合意”，是因为它逼出了有用的加工；如果学的人没有足够的底子去回应它，困难就不合意了。他们在 2020 年的一篇回顾里说得直接：难度的高低要紧，合适的难度取决于学的人已经学过什么。本书把这句话记下来。它后面会变成一张账单。

◆ 三、两种强度：存得深，想得起

1994 年的“合意困难”，背后有一个更早的理论撑着。1992 年，Robert Bjork 和 Elizabeth Bjork 夫妇在一本纪念心理学家 William Estes 的文集里发表了一篇文章。题目很拗口，叫《一种新的废用理论与一种旧的刺激波动理论》。人们后来简称它“新废用理论”。

这个理论把记忆的强弱拆成两个量。一个叫提取强度：此刻，凭眼前的线索，这个东西能不能顺利想起来。它高高低低，一天之内都在变。一个叫存储强度：这个东西学得有多深。它不能直接测，只能从后果里推。比如隔很久还想不想得起，忘了以后重学快不快。这两个量，可以分得很开。

你小学同桌的名字，存储强度也许很高，当年天天喊。可是此刻让你说，未必说得出来，提取强度低。哪天在老同学群里看见一张合影，名字一下子就冒出来了。反过来，你今天早上在电梯里看到的那个广告电话，现在也许还背得出，提取强度高。到了下周，一点影子都不剩，存储强度几乎为零。

存储强度怎样推出来，有一个很家常的办法：看重学快不快。嘉怡中学时背过的一批单词，十年没碰，大半想不起来了。可是重新背的时候，有些词扫一眼就回来了，有些词跟新词一样陌生。回来得快的那些，当年存得深；跟新词一样的那些，当年其实没存进去多少。

这个理论里有几句话，是整套“合意困难”的地基。第一句：存储强度只增不减。按他们的设想，除非大脑受了伤，学进去的东西不会被擦掉；所谓忘了，是提取强度降下去了。第二句：一个东西此刻越容易想起，你再学它一遍、再提它一遍，存储强度涨得越少。反过来，它越是快要想不起来，这一次费力的提取，给存储强度添的就越多。

第三句由前两句推出来：适度的遗忘，反而帮了学习。隔一段时间再练，让你觉得生疏，是因为提取强度降了下去；也正因为降了下去，这一次练，存进去的更多。

把嘉怡放进来，事情就看清了。她把原文读到第二遍，“每一句都顺了”。顺，是提取强度高：词就印在眼前，原文就在手边，线索铺满了一桌子。这时候再读第三遍、第四遍，按新废用理论，存储强度几乎不涨。她觉得自己在学。其实她在一遍遍地确认，自己此刻想得起。

这里有一个细节，后面会用得上。Bjork 夫妇在 2020 年的回顾里解释存储强度是什么，用的说法是：一个东西和相关的东西相互连接的程度。存储强度高，就是连接多，连接深。这句话说得很平。它的分量，要等到本章第七节才显出来。

◆ 四、十种办法的一张成绩单

如果说 Bjork 夫妇给的是原理，那么 2013 年的一篇长文给的就是成绩单。这篇文章的第一作者是 John Dunlosky，合作者有 Katherine Rawson、Elizabeth Marsh、Mitchell Nathan、Daniel Willingham。它发表在美国心理科学协会的刊物《心理科学与公共利益》上，题目的大意是：用有效的学习技巧改善学生的学习。

他们挑了十种学生最常用、或者最常被推荐的学习办法。他们把已有的研究一样样翻出来，按“效用”打分，分高、中、低三档。打分看的不只是“有没有效”。他们问的是：这个办法，换了不同的学生、不同的材料、不同的考法、不同的学习条件，还站不站得住？只在一种情形下有效的，分数就打不高。结果是下面这张表。前三栏是他们的，最后一栏是本书加的。

学习办法	大白话	效用评级	放到本书的账上
自我测试（practice testing）	合上书，自己考自己	高	付维持的功，最实在
分散练习（distributed practice）	分几次学，中间隔开	高	付维持的功；为什么有效见第 8 章
精细追问（elaborative interrogation）	问“为什么是这样”	中	逼出一点对不上，有建立的成分

学习办法	大白话	效用评级	放到本书的账上
自我解释（self-explanation）	把每一步讲给自己听	中	学的人自己付动能，在建立
交错练习（interleaved practice）	不同类型的题混着练	中	每一题先要认出“这是哪一类”，在付动能
总结（summarization）	写摘要	低	写得好要先会，多数人写成了抄
划重点（highlighting）	荧光笔、下划线	低	特征被标出来，仍只是在场
关键词记忆法（keyword mnemonic）	找谐音、编联想	低	外挂的连接，难接到别处
想象成图（imagery for text）	读的时候在脑子里画图	低	只对一部分材料有用
重读（rereading）	再读一遍	低	想得起时重读，几乎不付功

两个“高”，一个是自我测试，一个是分散练习。两个最常见的“低”，恰恰是嘉怡每天在做的：荧光笔划，然后重读。要替这篇文章说一句公道话。“低效用”不等于“没用”。他们的意思是：证据不够广，或者在很多条件下效果不稳，不值得作为首选推荐。划重点本身也许不害人；害人的是划完以后，觉得自己学过了。

划重点为什么低，他们的解释很朴素：多数学生不太会划，常常划得太多；而且划的时候，注意力落在一个个孤立的句子上，没有去把它们串起来。用本书的话说：特征被一个个标亮了，它们挨在纸上，却没有被接起来。

还有一点也值得一提。他们把这张表写给老师和学生看，用的是大白话。这件事本身就难得。认知科学的实验多在实验室里做，用词表，用短文，用几十分钟的学习；这篇文章把它们翻成了“今晚该怎么复习”。

分散练习为什么有效，间隔该隔多久，遗忘曲线怎样画，这些是第 8 章的题目，这里不展开。本章只抓一件事：效用最高的两种办法，都让人当下更难受。自我测试，比重读难受。你得在没有线索的地方，自己去够那个东西。够不着，

就要当面认下“我不会”。分散练习，比一口气学完难受。隔了几天再碰，生了，要重新费一次力。这两样难受，就是 Bjork 说的合意困难。

自我测试为什么有用，第 2 章讲刷题时已经提过一句：提取本身就在加固。这里只补一个容易被忽略的地方。考自己，不是为了给自己打个分；够的那一下才是要紧的。所以合上书考自己，哪怕全错，那一晚也没有白过。打开书一题题对着看，哪怕全对，那一晚也可能什么都没付。嘉怡的荧光笔，是让她当下最舒服的那一种办法。舒服，在这张表上，几乎就是“低”的同义词。

◆ 五、先失败，再听讲

前面几家的研究，大多在问“怎样记得住”。新加坡有一位学者，问的是另一件事：怎样先不会，然后学得更深。他叫 Manu Kapur。他在新加坡国立教育学院工作多年，后来去了苏黎世联邦理工学院。2008 年，他在《认知与教学》上发表了一篇文章，题目就两个词：Productive Failure。中文常译作“有成效的失败”，也有人译作“创造性失败”。

他的设计，和常见的课正好倒过来。常见的课是：老师先讲概念和方法，学生再做练习。Kapur 的课是：先发给学生一道他们还没学过办法的难题，让他们分小组自己想、自己做，不给提示。做不出来没关系，一般也做不出标准答案。之后，老师再讲正规的概念和方法，并且拿学生自己想出来的那些办法，和正规办法对照着讲：你们这个办法好在哪，差在哪，正规办法补上了哪一处。

他在新加坡的中学里做了一系列这样的研究。其中一项，用的是一所男子公立中学的一百四十名九年级学生。学的是“方差”，也就是怎样衡量一组数据散得开不开。先失败的那一组学生，在小组里想出了各种各样的办法。有人用最大值减最小值；有人算每个数离平均数有多远，再加起来；有人画图来比。没有一组得出标准公式。这些办法各有毛病，毛病正是要紧的地方。

用最大值减最小值，只看了两头，中间的数怎么分布全不管。两组数两头一样，一组挤在中间，一组散在各处，算出来却一样大。把每个数离平均数的距离加起来，会碰上一件怪事：正的和负的互相抵消，不论数据多散，加起来总是

零。就算想到取绝对值，又会碰上另一件事：数据多的那一组，加起来自然就大，十个数和三十个数没法比。

后来那一堂讲授，老师就拿这几处毛病来讲。抵消了，所以要先平方再加；数目不同，所以要除以个数。标准公式里的每一步，在学生那里都有一个刚刚撞过的坑对应着。公式不再是从黑板上掉下来的，是来填自己挖过的坑的。可是到了测验，他们在照公式算的常规题上，和先听讲的一组打成平手；在需要理解、需要用到新情境的数据分析题上，明显更好。

2014 年，他在《认知科学》上又发表了一项随机分组的研究，七十五名九年级学生学标准差。结果大致相同：两组在程序性的题上差不多，先失败的一组在概念理解和迁移题上更好。同一篇文章里还有第二个研究，更值得细看。

一组学生自己先做；一组学生不自己做，而是拿别的学生失败的解法来读、来评；一组先听讲。结果，读别人失败解法的一组，比先听讲的好，却比不上自己动手的那一组。还有一个细节：学生在失败阶段想出来的办法越多，后来学得越好。这几句话很要紧。失败的效用，不在“失败”这两个字上，而在学的人自己去拆、去接，接了很多条。接错了，也算接过。

读别人的失败，为什么排在中间？按本书的账，看别人的解法，是把别人拆过、接过的东西摆到你眼前，特征是在场了；可是那一拆一接，是别人付的。你付的，只是读懂的那一点。比什么都不做多，比自己动手少。

2021 年，Tanmay Sinha 与 Kapur 在《教育研究评论》上发表了一篇元分析，汇总了五十三项“先解题、后讲授”的研究。学生从小学二年级到研究生都有，多数是初中和高中生，题目多在数理科目。

总的看，先解题在概念理解和迁移上占优；在单纯的计算步骤上，先讲授一样好；对低年级的孩子，优势不明显。他们也写明了条件：学的人要有一定的底子；题目要难，但不能难到无从下手；最好在小组里做。

Kapur 在 2016 年的一篇文章里，把这件事放进四格：有成效的失败，有成效的成功，无成效的失败，无成效的成功。最后一格，最值得教书的人看。它说

的是：当下做对了，题也交了，分也拿了，却没有留下什么。这一格，和本书第 1 章写的看懂型假会，是同一种东西。

◆ 六、证据很硬，账停在哪里

到这里，先把这几家对在哪里写足。第一，他们的证据硬。大多是随机分组的对照实验，有延迟测验，有重复研究，有元分析。这在教育研究里不是常态。很多教育主张靠的是一位名师的经验、一所学校的故事；这几家靠的是可以重做的实验。

第二，他们把“维持”讲得最细。什么时候该隔开，什么时候该考自己，为什么重读收效小，为什么顺手是错觉。这一整套，是本书第 8 章要用的主要材料。前人里，没有谁把这一段讲得比他们更细、更可查。

第三，他们把“感觉学会了”和“真的学会了”分开了。Bjork 实验室的 Nicholas Soderstrom 与他在 2015 年合写过一篇综述，题目就是“学习与表现”。表现，是当下看得见的；学习，只能在一段延迟之后去推。这一刀切下去，“我都看懂了”就不再能当作学会的证据。

第四，Kapur 走得更远一步。他把“不会”放到了“会”的前面，而且用实验证明，这个顺序在概念与迁移上有用。这和孔子讲的“不愤不启”，隔了两千多年接上了头。（这一段见第 4 章。）这四条都是真的。本书后面几章，会一直借他们的证据。

还有一条反面的证据，也该放进这一节，它说的是“难”不灵的时候。2007 年，Alter 等人报告说，把题目印成难读的字体，人就会想得更仔细，推理题答得更好。这很合“合意困难”的胃口。可是 2015 年，Meyer 等人汇报了十几项重做这类实验的研究，合起来七千多人，没有找到这个效应。把字印得难读，人是更费劲了，可是没有因此多接上什么。这件事很能说明问题：不是所有的难，都是合意的难。可“哪一种难算数”，他们给出的标准仍是经验性的，一样一样试出来。

可是，他们停在了一个地方。停在“记忆强度”这个词上。Bjork 夫妇讲的是两种强度：存储强度，提取强度。Dunlosky 等打分时证据最厚的一类测验，从本书读到的情况看，多是隔一段时间还记得多少。Kapur 讲迁移，可他把迁移写成测验里的一类题，和概念题、程序题并排放着。于是有三件事，在他们的账上没有位置。

其一，“学会”是什么，没有说。强度是一个量，可以多一点，少一点。可是“学会”在日常里是一个事件：这道题，你昨天不会，今天会了。中间发生了什么？强度涨了百分之几？说不通。一个孩子扔沙包，从总扔偏，到某一天手上忽然有了准头。那一天发生的事，不像“准头强度涨了一成”。它更像一个东西成了形。（这一类例子，第 9 章细讲。）

其二，为什么在这个人身上，没有说。新废用理论讲的是一个个“项目”：一个单词，一对词，一个事实。存储强度，是这个项目的强度。可是同一个单词，在嘉怡身上和在梁婉婷身上，是两种东西。梁婉婷每天在病房里听人说这个词，它连着病人的脸、交班的语气、一次差点出错的医嘱。嘉怡身上的它，连着一张打印纸和一道黄色的荧光。强度也许一样高，长成的形状完全不同。

教室里也一样。两个学生在单词小测上都是满分，按存储强度看，难分高下。可是一个学生的“hypertension”，连着外婆每天早上量的那只血压计；另一个学生的，只连着单词表上它下面那个“hypothesis”。哪天考题换成一段讲老人健康的听力，两个人身上的这个词，会走出两条不同的路。这一层差别，“项目的强度”装不下。它要问的是：这份连接接在谁身上，和他身上别的什么接在一起。

其三，维持和粒子化，没有分开。这一条最要紧。在他们的实验里，“保持得好”和“迁移得好”常常一起出现。于是很容易把它们当成同一样东西的两种测法：越牢，越能用。可是嘉怡的例子，正好把两者拆开。

她认得每一个词，存储强度不算低。隔一周再给她看那张原文，她多半还认得。可是在一段没见过的对话里，那些词出不来。她纸上的那一份纠缠维持住了，可它从没走出那张纸。记得住，用不出。这是两段，不是一段的两头。

证据其实都摆在桌上。Kerr 与 Booth 的孩子，会的是“扔”，不是“扔三英尺”。Kornell 与 Bjork 测的恰好是“没见过的新画”。Kapur 的数据里，程序题打平而迁移题拉开。他们都已经站在这条线上了。线的两边，他们也起了名字：保持测验，迁移测验。可是这两个名字，量的仍是同一样东西，“学到了多少”。线的两边，没有被当成两段，各有各的条件，各有各的坏法。它停下的地方，正好是接着要走的一步。

用本书的话说：他们把维持讲到了最细，却没有给粒子化单独记一本账。

◆ 七、本书的接法：三笔账对上号

本书在这里做的，不是推翻他们的证据，是给这些证据换一本账簿。换了账簿，三个词各有了落点。

第一笔：难度，是动能的账单。 这一句，单独记住。本书讲的动能，是纠缠被拆开、被重接的速率和方向。学一样东西，就是把原来接在一起的拆开，把原来不相干的接上。这一拆一接，要学的人自己付力气。

你觉得难，就是账单在跳。

自我测试难受，是因为你在没有线索的地方，自己去把这个词和它的意思接上。每一次够，都是一次重接。重读不难受，是因为线索都在纸上，你不用接任何东西，账单上是零。交错练习难受，是因为每一道题来之前，你都得先拆掉“上一题是什么类型”，再接上“这一题是什么类型”。分块练习不难受，是因为类型已经替你认好了。

同一个嘉怡，同一段录音，荧光笔和红笔的差别就在这里。黄色荧光笔划下去，手在动，眼在动，可那个词只是被标亮了，它和耳朵里的音之间，一条线也

没有新接。红笔圈下去之前，她先听、先写、先发现写不出，那一圈，圈的是一条刚刚拆开、等着重接的线。累的程度差不多，账单上的数目差很多。

这样看，“合意困难”四个字就有了尺子。困难合意，是这笔动能付在了对的方向上：它拆的是该拆的旧连接，接的是该接的新连接。困难不合意，有两种。一种是付不起：落差太大，你的底子接不上，越用力越乱，成了一锅粥（混沌）。一种是方向错了：你很累，可是累在抄写、在排版笔记、在给荧光笔换颜色、在辨认难读的字体，没有一条该接的连接被接上。

Bjork 夫妇说“取决于学的人已经学过什么”，是第一种情形的边界。Kapur 的元分析说“要有一定的底子，题目难但不至于无从下手”，也是这条边界。难读字体实验的落空，落在第二种情形里。本书在这条边界上再添一样东西：场。

同样的落差，有人托着，就付得起；没人托着，就付不起。Kapur 的学生是在小组里失败的，失败之后有老师来“对照着讲”，那是场。把一个孩子独自扔进一道做不出的题，没有同伴，没有后来的那一讲，那不是有成效的失败，是放弃。（场是第 11 章的题目；动能谁来付，是第 12 章的题目。）

第二笔：存储强度，就是连接度。　前面埋下的那句话，在这里用上：Bjork 夫妇自己说，存储强度反映的是一个东西和相关东西相互连接的程度。本书说的内能，就是连接度，即断裂的难度。一份纠缠接的点越多、接得越深，要把它拆散就越难。

两边说的是同一样东西，只是从两头看。认知科学从“隔很久还想不想得起、重学快不快”这一头看，叫它存储强度；本书从“拆不拆得散”这一头看，叫它连接度。这样换一下，有两个好处。

一个好处是，它解释了“存储强度只增不减”为什么听着奇怪，却又大体站得住。连接一旦接上，要拆散它，得付出比接它更大的力。所以日常说的忘，不是拆散了，是松了：连接度还在，松的是此刻够不够得着的那一头。松了，没断。嘉怡重背中学单词时，有些词“扫一眼就回来了”，那省下的工夫，就是连接度还在的凭据。（忘为什么是松，第 8 章细讲。）

另一个好处是，它把“难度”和“牢度”接成了一条账。建立时付的动能越多，接上的点越多，连接度越高。建立付了多少，维持就省多少。这句话第 12 章还要用。

提取强度，在这本账上也有位置。它说的是：此刻，凭眼前的线索，够不够得着这份纠缠。线索多，场里人多，够得着；线索撤了，人散了，够不着。它说的是路通不通，不是东西在不在。本书说的“松”，就落在这一头。连接度大体只增不减，松紧却天天在变。

第三笔：迁移，才是粒子化。 这是本章最要紧的一笔。维持住，是纠缠不散。粒子化，是纠缠结成一个能带走的东西。判它的三条，本书叫三判据：稳定（换个问法还在），整体（不靠提示能说成一整件事），独立（离了书和老师仍立得住）。

迁移题测的，正是这三条。换一个情境，测稳定。撤掉提示，测整体。离开原来的材料、原来的老师、原来的题型，测独立。所以 Kapur 的数据里“程序题打平、迁移题拉开”，按本书的读法，不是同一个强度的高低之差。是两组学生停在了两段：都维持住了算法，只有一组走到了粒子化的门口。

Kornell 与 Bjork 的“新画”也一样。认出见过的画，是维持；认出没见过的画是谁画的，风格已经在看画的人身上结成了能带走的东西。把这几笔放进一张表，看得清楚些。

认知科学的说法	它量的是什么	本书的说法	本书多算的一笔
合意困难	练时更难、日后更好	难度＝动能的账单	付在哪个方向，付不付得起，有没有场托着
存储强度	学得多深，只增不减	连接度（内能）	连接接在谁身上，接成了什么形状
提取强度	此刻凭线索想不想得起	够不够得着这份纠缠（松与紧）	线索和场撤掉以后，还够不够得着
自我测试、分散练习	两种效用最高的办法	付维持的功	维持住了，还不等于学会

认知科学的说法	它量的是什么	本书的说法	本书多算的一笔
有成效的失败	先解题后讲授，概念与迁移更好	先有对不上，再付动能，再给场	失败阶段那一拆一接，就是建立本身
迁移测验	测验里的一类题	粒子化的检验	稳定、整体、独立，各要单独测
学习与表现之分	当下的表现会骗人	在场与建立之分	“看懂”排在三段之前，还没开始

最后一行，要多说一句。Soderstrom 与 Bjork 把表现和学习分开，本书把在场和建立分开，两刀切在相近的地方。区别在于，本书说，那个“当下的好表现”，很多时候连建立都还没有开始：特征挨在一起，靠眼前的解答串着，一撤就散。下一章专讲这一段。

还有一层，也在这张表外面。认知科学的这些办法，绝大多数是“学的人一个人在桌前”的办法。场在它们的实验里，常常被当成要控制住的干扰。本书的账上，场是三条件之一。嘉怡后来的变化里，有一位远在新加坡的师姐，这不是闲笔。

◆ 八、嘉怡的第二个月

回到广州那间宿舍。模考之后的第二个月，嘉怡的办法变了。变化不是一下子来的，是被几次挫败一点点逼出来的。

第一个变化，是她不再打印原文了。听一段，暂停，凭记忆把刚才那句话写下来。写不全就空着，再听一遍去补。补上的那几个词，她用笔圈出来。不是荧光笔，是红笔；圈的不是“重点”，是“我的耳朵没接上的地方”。

这很难受。头一个星期，一段三分钟的录音，她要折腾四十分钟。有两个晚上，她听到一半就把耳机摘了。这就是账单。她在付动能：把纸上认识的那个词，和耳朵里听到的那个音，一次次重新接上。

第二个变化，是她把题型打乱了练。原来她一套真题，从第一部分做到第四部分。现在她把各套题的同一部分拆开，混着做：今天三段不同场景的对话，明

天两段讲座，后天再回到对话。每一段开头，她先得听出这是哪一类场景、说话的人是什么关系。

她的模考分数在头两周反而掉了半分。她在微信上跟梁婉婷说：“越练越差。”梁婉婷说：“你那是在拆旧的。”这句话把她托住了。她没有退回荧光笔。

后来两人约好，每个周日晚上通十分钟电话。梁婉婷不讲题，只问一句：“这周哪一段最听不出来？”嘉怡就把那一段说给她听，说自己是在哪个词上断的。有时候梁婉婷也接不上，两个人一起再听一遍。这十分钟，在任何一张效用评级表上都找不到。可是没有它，第二周那半分的下跌，很可能就把她推回了顺手的老路。

第三个变化，是她给自己加了一样东西，不在任何真题书里。她把这些年在心内科最常说的二十句交班话，一句句用英文写下来，录下来。隔几天，不看稿子说一遍。说不出来的地方，第二天上班时，在心里默念一次；等到在某一位病人身上真遇上了，再念一次。

这一条，把单词从纸上接到了她的手上、她的病房里。连接的点多了。一个词，现在连着纸上的拼写，连着录音里的音，连着她自己说出来的声音。还连着一位真实病人的心电监护，和他女儿焦急的脸。按本书的账，这是连接度在涨。

第三个月的一个晚上，梁婉婷给她打了一次视频电话。没有提前说要干什么，开口就用英语，带着新加坡口音，学那边的护士长交班：“Bed twelve, the uncle ah, BP a bit low this morning, can you check his fluids first?”

嘉怡愣了两秒。然后用英语回了三句：先复述了床号和情况，再问了一句上午补液的量，最后说她会先去查出入量记录。说完，她自己也愣了一下。

这一段话，没有出现在任何一套真题里。口音是新的，场景是新的，没有原文可看，没有提示。它是稳定的：换了说话的人，换了口音，它还在。它是整体的：三句话自己连成了一件事，有先后，有轻重。它是独立的：离了真题书，离

了那间宿舍，它也立住了。这一次，不是绿进度条涨了一格。是一个能带走的东西，在她身上结成了。

本书在这里守一条主语纪律，不写“她终于学会了”。更准确的写法是：这两个多月的折腾，显出了一个能在别人的口音里接住一句交班话的她。还要老实补一句：这一下不等于她的英语“好了”。别的场景，别的口音，她还会接不住。粒子化是一块一块发生的，不是一次办完的。下一次接不住，旧的那一块也许还得熔开，重新长。

◆ 九、放回日子里

回到你自己的书桌上。你手边多半也有一条“绿进度条”：背单词软件的掌握率，刷题软件的正确率，网课的完成度，笔记本上整整齐齐的荧光色。它们大多在量提取强度，量此刻、在线索齐全的时候，你够不够得着。这条进度条不是坏东西。它如实告诉你此刻的情况。只是别把它当成学会的证明。

下次学一样东西觉得特别顺，停下来问一句：这份顺，是因为我已经接上了，还是因为线索都摆在眼前？下次觉得特别难，也问一句：这笔账，付在了对的方向上吗？我付得起吗？有没有人托着？付得起，方向对，有人托着，难就是在学。付不起，或者方向错了，或者一个人硬扛，难就只是累。

如果你是老师或家长，这几句可以换一个方向用。孩子说“这次好难”，先别急着把难拿走；先看一眼，这份难是落在该拆该接的地方，还是落在抄写和排版上。孩子说“这次好顺”，也先别急着高兴；撤掉课本，换一个问法，再问一次。

认知科学告诉了你，什么样的难是好的。本书在这上面多加一句：好的难，最后要结出一个能带走的东西。检验它的办法，是换一个情境，撤掉提示，离开原来的书，看它还在不在。

带 走 的 话

难度是动能的账单，牢度是连接的多少；记得住只是维持，换了情境还用得出，才是结晶。

小　账

认知科学把“顺手”和“学会”分开，把维持讲到了最细，却把学会关在“记忆强度”这扇门里；本书打开的是另一扇：迁移是粒子化，要单独记账。

发生被收回为发现的那一下，在“存储强度”把一次次拆开重接，写成了一个项目自带的属性，好像东西早已存在那里，只等你去取。

想 一 想

1. 你手上有没有一条“绿进度条”？它量的是此刻想得起，还是连接接得多？
2. 你最近一次觉得“学得特别难”，那笔动能付在了哪个方向？有没有人托着你？
3. 有什么东西，你记得很牢，换一个场合却用不出来？它停在了哪一段？

◆



第　三　编

三段账：学习、记忆、学会

导　语

前两编看的是现场与前人，这一编把全书的三句定义一段一段讲清。第 7 章讲学习：看懂是特征挨在一起，学习是它们被拆开、重新咬住；课本、实验和“我是学数学的人”构成教室里的三角，任两类对不上，逼第三类发生。第 8 章讲记忆：遗忘不是丢了，是纠缠松了，没断；维持靠连接度、再用和场，靠外力撑住的那一种，一撤就松。第 9 章讲学会：纠缠结成粒子，一个符号在人身上发生，三判据就是粒子的三个性质，活的会还要熔得开。三段是同一条纠缠的三段，不是三件事；三种假会也在这里收拢成一张总表。

07

第 7 章

学习：纠缠是怎样建起来的

这一章的问题

作业二十道全对，奶奶指着三张饼问“每人半张够几个人吃”，孩子却脱口说“一点五个人”——他到底学会了什么？

◆ 一、三张饼，分给几个人

郑雨桐十一岁，在杭州读小学五年级。那个星期二，数学课学的是分数除法。柳老师在黑板上写了一行字：除以一个不为零的数，等于乘这个数的倒数。下面是三道例题，一道比一道长。晚上的作业是二十道计算题。雨桐二十五分钟就做完了，对着书后的答案一核，全对。她把作业本往桌角一推，去客厅看奶奶烙饼。

奶奶烙的是葱油饼，一共三张，摊在大盘子里。奶奶拿刀把每张饼从中间切开，说：“一人半张，正好。你算算，够几个人吃？”雨桐想都没想：“分饼就是除法嘛。三张饼，每人二分之一……那就是三除以二，一点五个人。”奶奶笑了：“一点五个人，那半个人是谁？”

爸爸郑立新在旁边剥毛豆，探头看了一眼她摊在桌角的作业本：“你本子上第七题，不就是三除以二分之一吗？你写的是六。”雨桐愣住了。本子上写着六，嘴里说的是一点五。两个答案，都是她自己给的。

她不服气：“可是除法会让数变小呀。三除以什么，怎么会比三还大？”爸爸张了张嘴，想讲。奶奶把他手里的毛豆碗往前一推：“你剥你的。让她自己数。”

雨桐低头看盘子。三张饼，切成了一块块半圆。她一块一块数过去：一、二、三、四、五、六。六个半张。六个人。她又看看作业本上那个“6”。这个数她二十五分钟前就写下了。那时候它只是“颠倒相乘”之后得出来的东西，跟饼、跟人、跟“除法会变小”都没有关系。现在它从盘子里冒出来，和她心里那句“除法会变小”，正面撞上了。

她没说话，回房间去了。爸爸后来说，那天晚上她房间的灯，比平时晚关了半个钟头。这一晚，就是本章要讲的事。二十道题全对，是一件事。盘子里数出六个半张，又是另一件事。前一件，本书叫它“在场”；后一件，才开始“建立”。本书的说法是：学习，就是特征纠缠的建立。这一章把这句话从头讲清楚。

先说一句为什么要这么麻烦。日常里，“学习”这个词太熟了，熟到没有人问它是什么。可是只要你问一句“学到的东西在哪里”，答案就会分成两路。一路说：学到的东西在脑子里，像存进仓库的货。学习就是往里搬，搬得越多越好。一路说：学到的东西不在哪一个人的脑子里，在一群人一起做事的样子里。学习就是慢慢成为那群人中的一员。

教育学里有一篇文章，把这两路讲得很清楚。1998 年，以色列学者 Anna Sfard 在《教育研究者》上发表了《论学习的两种隐喻，以及只选其一的危险》。她把第一路叫“获得隐喻”：知识是一种可以拥有、可以积累的东西，学习就是把它拿到手。第二路叫“参与隐喻”：学习是加入一种做事的方式，成为一个共同体的成员。她的结论不是二选一。她说一种隐喻不够，只认一种，就会在理论上走偏，在做法上出错。

这篇文章对在哪里？它让很多教书的人意识到：“获得”只是一种比方，不是事情本身。说“学生掌握了知识”，就像说“学生拿到了一件东西”，这句话把很多东西预先定了下来：知识在学生之外先存在，学生只要去拿。它停在哪里？停在两个比方之间。两个比方都没有回答：在学的人身上，到底是什么东西变了？变的时候要付什么？

本书不另选一个比方，而是去问那个变的东西本身。答案是：特征之间的咬合。获得隐喻看见了“留在人身上”的那一面，参与隐喻看见了“一群人托着”的那一面。本书把前一面叫建立，把后一面叫场，再加上让建立动起来的那样东西：对不上。

◆ 二、看懂，是特征挨在一起

先说“在场”。那天的数学课上，雨桐听得很认真。柳老师用一张图讲“为什么要颠倒”，她看懂了。例题一道道讲下来，她也都看懂了。晚上的二十道题，她一道没错。这些都是真的，不是装的。

可是在那个时刻，她身上有什么？有“除号”，有“分数”，有“倒数”这个新词，有“颠倒相乘”这个口诀，还有“乘法”这个老朋友。这几样东西，那一晚确实都在她手边，而且挨得很近。把它们串在一起的，是什么？是老师的讲解，是例题的步骤，是书上那一行加粗的字。用本书的话说：特征都在场了，是被外面的解答串着的。

这就是“看懂”。它排在建立、维持、粒子化这三段之前，还不算其中任何一段。它像一桌备好的菜：葱切好了，面和好了，油烧热了，可是饼还没有烙。所以“看懂”有一个很好认的特点：解答一撤，它就散。

雨桐在作业本上能写出六，是因为那一页上方印着例题，她手上握着口诀。到了客厅，没有例题，没有口诀，只有三张饼和奶奶的一句问话，她嘴里出来

的，就成了一点五。这不是她粗心。是串着那几样东西的线，留在了作业本上，没跟着她走进客厅。

不妨再设想一下。那天晚上，如果雨桐拿起手机，把奶奶的问题拍下来问AI，十秒钟之内，屏幕上就会出现一段漂亮的解答。三除以二分之一，等于三乘二，等于六，所以够六个人吃。也许还附一张图。她会看懂。然后，她身上又多了一条被外面的解答串起来的线。盘子里那六个半张，就不用她自己数了。

关于“看懂”的这种感觉，第1章讲过Rozenblit与Keil 2002年提出的“解释深度错觉”。人对拉链、抽水马桶这类东西的理解，一动笔写它怎么工作，自己打的分就掉了下来。这项研究对在哪里？它把“觉得懂”和“能说出来”拆开了，而且拆的办法很简单：让你自己说一遍。本书识别看懂型假会的办法，“撤掉解答，让他从头说一遍”（见导读与第1章），和这个实验是同一个思路。

它停在哪里？停在“错觉”两个字上。“错觉”的意思是：你判断错了，你以为你懂，其实你不懂。好像只要把判断纠正过来，事情就清楚了。可是本书要说的多一层：那个“以为懂”的时刻，并不是什么都没有。特征确实在场了，确实挨在一起了，那是一个真实的状态，只是它还不是学习。它是学习之前的那一段。看懂不是假的。

看懂是还没开始。

还有一项研究，从另一头把“在场”和“建立”分开过。2014年，Michelene Chi与Ruth Wylie在《教育心理学家》上提出了一个四分法，取四个英文词的首字母，叫ICAP。它按学生在课上外显的行为分四档。只听、只看，是“被动”。划线、照抄、把视频倒回去再看，是“主动”。用自己的话做

笔记、画概念图、提出书上没写的问题，是“建构”。几个人互相接着对方的想法往下推，是“互动”。他们的预测是：被动不如主动，主动不如建构，建构不如互动。

这个框架对在哪里？它给老师一把很好用的尺子，而且有大量研究支撑：学生越是自己生出书上没有的东西，学到的越多。它也把“看了”“抄了”和“想出来了”分开了，这和本书分在场与建立，方向一致。

它停在哪里？它看的是外面的动作。同样是“用自己的话做笔记”，一个学生可能是真把两样东西接上了。另一个学生，可能只是把老师的话换了几个词。同样是“小组讨论”，可能是几个人互相把对方原有的想法撞出了缝，也可能是几个人轮流复述一遍标准答案。动作一样，身上发生的事完全不同。

ICAP 回答了“学生在做什么”。本书要回答的是“学生身上有没有东西被拆开、接上”，以及“是什么逼它拆、逼它接”。这两句话的差别，在教室里很要紧。如果“看懂”只是一种错觉，老师要做的就是戳破它。如果“看懂”是学习之前的一段，老师要做的就是接着往下走：特征已经摆上桌了，接下来，让它们被拆开、被重接。

◆ 三、建立，是拆开再接上

现在说“建立”。本书把学的东西身上那些可以分辨的小片，叫作特征。“除号”是一个特征，“分数”是一个，“把一样东西平均分成几份”是一个，“倒数”是一个，“半张饼”也是一个。特征和特征之间，可以松松地挨着，也可以牢牢地咬在一起。咬在一起的那种，本书叫它土（特征纠缠）。

为什么叫“土”？想一想一把干沙和一块湿黏土的差别。干沙里的颗粒也挨得很近，可是一捧就散；黏土里的颗粒彼此咬住了，能捏成形，能留下指印。看懂，是一把干沙。建立，是把沙和成了泥。

本书的定义是：学习，就是特征纠缠的建立。

建立不是往空地上添东西。学的人身上，早就有一大片土了。雨桐五年级，她身上关于“除法”的那片土，从二年级就开始长：十个苹果分给五个小朋友，每人两个；二十块糖分成四份，每份五块。三年下来，“除”和“平均分”和“变少”咬得很紧。这片旧土没有错。在整数里，它一直管用。

可是到了“三除以二分之一”，它接不住了。要接住，就得先把“除”和“变少”之间那道咬合松开，再把“除”和另一个意思接上：一个数里，有几个另一个数。三张饼里，有几个半张？先拆，后接。拆的是旧的咬合，接的是新的咬合。这一拆一接，就是建立。所以建立不是加法。

如果学习只是往仓库里多放一件货，那么新课讲完，“除以分数”这件货就放进去了。它和“平均分”那件货并排摆着，互不打扰。可是雨桐身上不是这样。新规则放进去了，旧土没挪窝；一到要用的时候，先伸出手来的，是咬得更牢的那一片。

旧土咬得越牢，新的越难接。这一条在大人身上更明显：一个做了二十年手工账的会计，学新的财务软件，难的不是记住按钮，是先把手上那套二十年的顺序松开。（成人的这一段，第 17 章细讲。）

关于那片旧土，教育研究里早有人看得很清楚。1985 年，以色列学者 Fischbein 与几位意大利同事在《数学教育研究》期刊上发表了一项研究。他们在比萨的十几所学校里，请六百多名五年级、七年级、九年级的学生做乘除法的应用题。他们要看的是，学生怎样选算法。

他们发现，学生选算法的时候，背后起作用的，常常不是课上学过的正式定义，而是很早就扎下根的“原始模型”。乘法就是“几个几相加”；除法就

是“平均分”，或者“一个里面装得下几个”。这些模型在学生学过正式知识之后，还在暗中左右他们的判断。题目里的数一换成小数、分数，“平均分”这个模型就出岔子，学生就选错算法。哪怕他们会算。

这项研究对在哪里？它把旧土找到了，而且证明旧土不会因为新课讲过就自动退场。Fischbein 后来说得更透：这类直觉模型去不掉，教学不能假装它不在，要让学生看见它、学会管住它。它还给后来的老师留下了一件实用的东西：上课之前，就能写出学生身上大概长着什么样的旧模型。

它停在哪里？它多半把旧模型当成要防着、要管住的东西：一个藏在脑子里、会把人带偏的错误来源。旧模型被找到了，也被正视了，可它在账上记的，仍是一笔风险。

本书多看一步：旧土不只是障碍，还是建立的本钱。没有“除法会变小”这片旧土，雨桐在饼盘前面就不会愣住；不愣住，就没有那一晚。新的咬合，正是从旧咬合裂开的那道缝里长出来的。

再看一项研究，把“会算”和“建立”拆得更开。1999 年，在美国做研究的马立平出版了一本英文书，书名直译是《小学数学的知与教》。她请两国的小学数学教师做同一道题：一又四分之三，除以二分之一，等于多少？再请他们编一个生活里的故事，让这个算式有意思。

七十二位中国教师，算得都对。二十三位美国教师，算对的不到一半。编故事的结果，差得更远。二十三位美国教师里，只有一位编出了真正对应这个算式的故事。中国教师中，有六十五位编出了八十多个故事，用的是除法的不同意思：有的问“里面有几个二分之一”，有的问“已知一半是多少，求整体”。

马立平这本书，常被人拿去比国家高下。这样读是读窄了。她真正关心的，是一位教师身上的知识，是一个个孤立的步骤，还是连成了片。用本书的话说：

算对，可以只靠一条口诀把几样东西串着；编得出故事，要“除法”“分数”“倒数”“里面有几个”这几样东西，在这个人身上真的咬在了一起。前一种是在场加熟练，后一种才是建立。

◆ 四、教室里的三角

说到这里，还有一个问题没回答：拆开与重接，是被什么推动的？本书的回答是：对不上。要讲清对不上，得先把教室里的东西分一分类。书二第 10—12 章讲过，符号有三界：理念符号、现实符号、自我符号。一间教室里，三界都有。

理念符号：课本上的定义，黑板上的公式，口诀，标准答案，老师讲的道理。它们写在纸上、说在嘴上，可以抄，可以背，可以一键生成，也可以原样传给下一个人。

现实符号：做出来的东西，留下的痕迹。实验的结果，剪开的纸条，画出来的数轴，一件手工作品，作业本上被红笔圈过的那道错题。它们是在世界里立住的，不需要谁去解释，也摆在那里。批改过的错题要多说一句。它不只是一道题。那个红圈，是“你在这里做过、在这里错过、错得有后果”的一道刻痕。它和课本上那道干干净净的例题，不在同一界。

今天很多作业由软件批改，屏幕上一闪“错误”，下一秒就跳出正确答案和解析。这一闪，刻痕还没留下就被抹平了。错得没有后果，错题就退回成了一道例题，又回到理念那一界。

自我符号：长在学的人身上的东西。握笔的姿势，一看见分数就发紧的那一下，做题时先画图的习惯，“我是会算的人”“我一碰应用题就晕”这样的话。它们不写在纸上，却比纸上的东西更难改。

三界的分法，不只属于数学课。一堂语文课上，课文里的“借景抒情”四个字是理念符号。学生自己写出来的那篇周记，连同老师在旁边批的一句“这里的雨，写的是你的心情吗”，是现实符号。读到一个好句子时心里一动的那种语感，还有“我写不出东西”的那句老话，是自我符号。

一堂科学课上，课本上的浮力公式是理念符号。水槽里那条用橡皮泥捏成、终于浮起来的小船，是现实符号。一个孩子捏船时手上的分寸，和他嘴里那句“我手笨”，是自我符号。

三界各有各的稳法。理念符号稳在可传：抄一遍，它还是它。现实符号稳在摆着：橡皮泥船浮在水上，谁说它沉都没用。自我符号稳在长着：它长在人身上，一天两天改不了。正因为三界各有各的稳法，它们才会对不上。理念说一套，水槽里浮起来的是另一套，手上的习惯又是第三套。把那一晚放进这三界里，是这样一张表。

教室里的东西	属于哪一界	它稳在哪里	在雨桐的那一晚
课本上“乘它的倒数”那一行字	理念符号	写在纸上，可抄可背	她背得出，做对了二十题
柳老师讲解时画的图	理念符号	在老师的讲解里	课上看懂了，晚上没想起来
盘子里切开的六个半张饼	现实符号	在世界里摆着	一块块数出来，数出了六
作业本上那个写出来的“6”	现实符号	留在本子上的痕迹	先是一个空数，后来和饼对上了
“除法会让数变小”	自我符号	三年来长在她身上的旧土	嘴里说出一点五的那股力
“我是一看就会的人”	自我符号	一次次全对攒下来的	二十五分钟做完、推开本子的那份笃定

这张表里，有两处对不上。一处在现实符号和自我符号之间：盘子里明明是六个半张，她身上那句“除法会变小”偏说应该比三少。一处在理念符号和自我

符号之间：书上说“乘倒数”，她照做了，可这条规则在她身上没有接着任何东西，所以一离开作业本，旧土就接管了。这两处对不上，那天晚上同时在场。

◆ 五、三条方程，一堂课怎样走

书二第 13 章把符号三角写成三条方程：

- 理念符号 ＝ F（现实符号，自我符号）
- 现实符号 ＝ G（理念符号，自我符号）
- 自我符号 ＝ H（理念符号，现实符号）

意思是：三类符号里任两类对不上，就逼第三类发生，再回写给另外两类。三个角没有哪一个是源头。这三条式子，放在一堂课里，是看得见的。第二天，柳老师的数学课，正好三条都走了一遍。

柳婧三十四岁，教了十年数学。星期三一早批作业的时候，她发现全班几乎都做对了。她没有因此高兴，反而在备课本上写了两行字：“他们会把除以二分之一当成除以二。他们心里还认为，除法一定会让数变小。”这两行字，是上课之前写下的。这一点很要紧，后面还会说到。

星期三上课，她没有讲新题。她给每个小组发了三根一米长的纸条，问：“每二分之一米剪一段，一共能剪几段？先别剪，把你猜的数写在纸上。”

第一条：理念 ＝ F（现实，自我）。 各组写下的猜测里，有“一点五”，有“六”，还有一组写了“三”。写“三”的那一组，理由很有意思：“每根纸条从中间剪一刀，一刀就是一段，三根就是三段。”他们数的是剪了几刀，不是剪出了几段。这又是另一片旧土，柳老师的备课本上没写到。她在本子边上补了一笔。

然后大家动手剪。剪完一数，每一组都是六段。纸条是现实符号，剪出来的六段摆在桌上，谁也赖不掉。“除法会变小”是自我符号，写着一点五的那几组，身上就是这片旧土。两边对不上了。

柳老师这时候才问：“那‘除以二分之一’，到底在问什么？”一个男生说：“在问，三米里面，有几个半米。”黑板上，柳老师把这句话写了下来。一个新的理念符号，就这样从现实和自我的对不上里被逼了出来：除以几分之一，就是问里面有几个几分之一。

第二条：现实 ＝ G（理念，自我）。 新说法写上黑板以后，有一个叫金浩宇的男生举手：“那三除以三分之二呢？三米里有几个三分之二米？我数不出来。”新的理念说“数一数有几个”，可是他身上的手，只会把东西切成相等的几份，三分之二米这么切不出来。理念和自我又对不上了。

这一次被逼着变的，是现实。浩宇走到黑板前，画了一条数轴，从零画到三，每三分之一画一个刻度，再两格两格地圈。圈到最后，他自己先笑了：圈出四个半。

那条数轴，是一个新做出来的现实符号。它原来不存在，是被“数一数”这个理念和“我只会平均切”这只手逼出来的。它一画出来，又反过来改写了两头：理念那一头多了一种看法，“有几个”可以在数轴上圈；浩宇那一头，手上多了一种做法。

第三条：自我 ＝ H（理念，现实）。 这一条，落在雨桐身上。那堂课上，书上的规则（理念）和纸条、数轴（现实），在答案上已经对上了：剪出来是六，乘倒数也是六。

可是在雨桐这两天的经历里，理念和现实还有一处没对上。照着规则，她二十道题全对；碰到盘子里实实在在的饼，她却算成了一点五。规则在本子上灵，

到了饼上不灵。这两头，谁也改不了谁。规则没错，饼也没错。被逼着改写的，只能是第三个角：她身上那句“我是一看就会的人”。她原来以为，一道题看懂了、做对了，就是会了。

下课前，柳老师让每人在本子上写一句“今天我发现”。雨桐写的是：“原来我做对了，不等于我想清楚了。我以后要先画一画。”这一句话不长。它说明，在那两天里，她身上有一个旧的自我符号裂开了一道缝，一个新的做法开始往里长。它还没有长牢，可是它开始了。

三条方程，在一堂课里，各走了一遍。没有哪一条是起点：纸条可以先来，问题可以先来，一个孩子的困惑也可以先来。这就是书二第 13 章说的“没有源头”。

还有一条，书二第 14 章说得更短：对得上，就没有解释。如果那天晚上奶奶没问那一句，雨桐身上的旧土和作业本上的新规则，可以各过各的。相安无事，一直到期末。对得上的时候，什么都不会发生。

◆ 六、课越顺，越没有对不上

说到这里，就能看清一件让很多老师不舒服的事：课设计得越顺，越可能没有学习。一堂“顺”的课长什么样？开头复习旧知，一两分钟。接着出示例题，老师边讲边写，每一步都有箭头。然后是“仿练”：和例题几乎一样的题，学生照着做。再然后是“变式”：数字换一换，形式变一变，难度一级一级往上爬。最后是口诀，配一句好记的话：“除以一个数，等于乘它的倒数。”

每一级台阶都提前铺好了，每一个坑都提前填平了。学生一路往上走，脚下没有一处空。这样的课，学生几乎不会卡。当堂检测，正确率很高。听课的人也满意。可是按本书的账，这样的课里，可能一次建立都没有发生。

因为每一处对不上，都在它发生之前被提前抹平了。学生身上那片“除法会变小”的旧土，从头到尾没有被碰到。新规则从上面铺过去，像在一块地上盖了一层塑料布，底下的土原样不动。

今天的工具，让这件事更容易了。一节课的动画可以把每一步都演得清清楚楚。一个讲题视频可以在学生还没开始想之前，就把思路摆好。学生拍一张题目的照片，AI 一秒钟就给出完整的解答，连“为什么颠倒”都讲得头头是道。它们讲得都对。问题在于，它们讲在了学生卡住之前。

还有一些“顺”，是被日程逼出来的。一节课四十分钟，内容是排好的；公开课要有完整的环节，要让听课的人看到“目标达成”。不少学校用导学案，课前就把每一步要填的空印好了，学生按格子填。格子填满了，课就顺了。

这些安排背后，都有说得过去的理由：进度要赶，班额要管，检查要应付。本书不怪哪一位老师。只是要把账记清楚：一份把每一步都替学生想好的学案，替学生付掉的，正是建立要付的那一笔。

这里要说句公道话。顺，本身不是罪过。讲得清楚是好事，看懂是学习的前一段，没有它，后面无从谈起。到了维持那一段，顺顺当当地再做几遍，也确实在付功（这是第 8 章的题目）。教了十年书的老师都知道，有的课就是要讲得干脆利落。

问题只在次序。顺的东西，来在对不上之前，就把对不上提前填掉了；来在对不上之后，才成了场托住落差的一种办法。同一张图，柳老师星期二在讲授时画，只让特征在场；星期三在纸条剪完、大家吵成一团之后再画，画图的那个人，就是在托住落差的场。

另一头也要防。对不上不是越大越好。如果柳老师星期三一上来就问：“三分之二除以四分之三等于多少？编一个故事。”大多数五年级的孩子会直接卡

死。落差太大，旧土和新问题之间找不到任何一条能接上的路，就成了一锅粥（混沌）。没有路可接的卡住，不会变成学习，只会变成“我数学不行”。一个好的对不上，要落在学生已经有的那片土上。它要碰到旧土，碰得出声，可是不能大到把人砸倒。

“难”和“碰到旧土”，不是一回事。把“三除以二分之一”换成“三百七十八除以十四分之九”，题目难多了，数字又大又碎。可是它碰不到“除法会变小”那片旧土：学生照着口诀，颠倒、相乘、约分，算得满头大汗，旧土原封不动。反过来，“三张饼，每人半张，够几个人吃”，数字小得不能再小，却一下子碰到了那片旧土。

难，是数字大、步骤多；碰到旧土，是让学生身上原有的那一套，第一次说不通。前一种只让人累，后一种才让人愣住。好的对不上，常常长得很简单。这就是为什么备课本上的那两行字那么要紧。

“他们心里还认为，除法一定会让数变小。”这句话，是在上课之前、在看到任何一个学生出错之前写下的。本书一直守着一道闸：对不上必须能在事前被独立指认。如果每看到一个学生学会了，就回头说“那里一定有过对不上”，这套说法就成了永远正确、因而空洞的说法。

柳老师的两行字，就是事前指认。她先写下旧土长在哪，再设计一道能碰到它的题，然后看会不会碰出声。如果全班剪纸条之前都猜六，那就说明这片旧土在这个班里没那么硬。她的预判错了，要换一个地方去找缝。预判可以错。可是要先写下来，错了才看得出来。

◆ 七、建立付动能，场托住落差

最后，算一算建立的能量账。书二第 16—18 章讲了三种能量，这里只用不证。**动能**：特征被拆开、被重接的速率和方向。建立，主要付的就是这一笔，而

且只能由学的人自己付。那天晚上，雨桐付了动能。她一块一块数饼，她回房间后对着作业本发呆，她第二天在纸条上数段数，她在本子上写下“以后要先画一画”。每一样，都是她身上那片旧土在被拆开、被重接。

二十道题全对的那二十五分钟里，她也在动，手写得飞快。可是那份快，方向是“套口诀”，一条旧连接都没拆，一条新连接也没接。速度很快，账单上几乎是零。动能的方向，比大小要紧。

还有一笔，现在付，后面省。建立时付的动能越多，接上的点越多，咬得越牢；咬得牢，维持起来就省力。雨桐用饼、用纸条、用数轴，从三个地方接上了“除以分数”；比起只靠一条口诀接在作业本上的那个“6”，它要松到够不着，得三处同时松开。这一层，是下一章的事，这里只先记一笔：建立付了多少，维持就省多少。

可是也有付不起的时候。一个连着熬了几个晚上的孩子，一个刚被骂过、心里堵着的孩子，眼前的对不上再好，他也没有力气去拆、去接。那不是不肯学，是动能见底了。这一种卡住，药不一样，第 15 章专讲。

上一章说过：难度，是动能的账单。这里可以说得更具体一点。雨桐觉得难，是在数饼的时候、在看着“6”和“一点五”发呆的时候，不是在做那二十道题的时候。难的那一刻，正是她在付钱的那一刻。

势能：同伴、教师、班级这张网对一个人的吸引与拉扯。本书叫它场。建立需要落差，落差要有人托着。那天晚上的场，是奶奶和她的一句问话，是忍住了没讲的爸爸，是围着那一盘饼的一家人。第二天的场，是发下三根纸条的柳老师，是小组里吵成一团的同学，是在黑板上画数轴的金浩宇。场托住了落差，雨桐才没有在“6”和“一点五”之间掉下去。

场不只是大人。星期三那堂课上，写“一点五”的组和写“六”的组吵了起来，写“三”的那一组也不服。吵，是同伴之间的拉扯：你的旧土和我的旧土不一样，谁也说服不了谁，只好一起去剪纸条。一个人对着作业本，旧土只会悄悄接管；几个人吵起来，旧土被拎到了桌面上。（同伴之间的场怎样搭，第 11 章细讲。）

如果那天晚上没有奶奶，只有她一个人对着作业本，“6”和“一点五”也许只会变成一句“算了，反正作业对了”。对不上还在，可是没人托着，它就被放下了。

场还有另一种失败：来得太早。爸爸那天想讲。他要是讲了，大概会讲得很好：“你看，二分之一的倒数是二，三乘二等于六，所以够六个人吃。”雨桐会点头，说“哦，懂了”。那一句“懂了”，又是在场。爸爸替她付了动能，饼也分完了，那道刚裂开的缝，被一句讲解轻轻抹平了。场来在卡住之前，就成了替代品。

奶奶那一句“让她自己数”，没有讲任何数学，却把场放对了位置：人在旁边，不抢在卡住之前；问题悬着，答案不给。桌上那盘饼，是现实符号，是场摆上桌的，它本身不叫场。场，是摆饼、问话、拦住爸爸、坐在一旁等的那几个人。把这一节的意思压成一张表，看在场与建立差在哪里。

比一比	在场（看懂）	建立（学习）
学生怎么说	“我都看懂了”	“我卡在这儿，后来这样接上的”
特征是什么样子	挨在一起，靠解答串着	被拆开，又重新咬在一起
撤掉解答以后	散了，旧土接管	还能自己说出一条路来
有没有对不上	没有，或被提前填平了	有，而且能事前写下来
谁在付动能	讲的人、写解析的人、AI	学的人自己
场在什么时候来	在卡住之前，成了替代品	在卡住之后，托住落差

比一比	在场（看懂）	建立（学习）
难不难	很顺，账单上几乎是零	难受，账单在跳
雨桐身上的例子	二十道题，二十五分钟，全对	一盘饼，六个半张，晚关了半小时的灯

这张表里，没有一栏写着“好”或“坏”。在场是建立的前一段，缺不了。只是不能把前一段当成全程。再强调一句：

答案可以转手，纠缠不能代建。

一道题的答案，可以从老师手里、爸爸手里、AI 手里，原样传给学生。这份纠缠却不能。它只能在学的人自己身上，用他自己付的动能，一处一处拆开、接上。

◆ 八、那一晚的后半段

回到星期二的晚上。雨桐回房间以后，那半个钟头发生了什么，是她后来在柳老师的“今天我发现”本子背面补写出来的。她先把作业本翻到第七题，在旁边画了三个圆，每个圆从中间画一道线。数了一遍，六。

她又试了一个本子上没有的：三除以三分之一。画三个圆，每个切成三份，数出来九。她在旁边写：“除以三分之一，就是乘三？”然后她停了很久。她在本子上写了一行字，又划掉，又写。最后留下的是这样一句：“除以二分之一，就是问一张饼里有几个半张。一张里有两个，三张就有三个两，所以乘二。”

写完这一句，她第一次觉得“颠倒相乘”不是一条从天上掉下来的规则。“倒数”两个字，忽然有了一个能摸得着的意思：一个整体里，装得下几个这么大的份。这一句，就是一次建立。“除法”“分数”“倒数”“里面有几个”，原来在她身上是四颗干沙粒，现在它们彼此咬住了一点。

可是事情没有到此为止。她想再试一个难一点的：二除以三分之二。她画了两个圆，每个切成三份，想两份两份地圈。第一个圆里圈出了一个“两份”，还剩一份，圈不满。她在纸上写：“一张饼里，有一个半三分之二？”她自己都觉得这句话很怪。

本书要请你在这里停一下。不到一个钟头前，她在客厅里说出过一个“一点五”，那时候是错的：三张饼分给“一点五个人”。现在，同一个“一点五”又出现了，这一回是对的：一张饼里，确实有一个半的三分之二。

同一个数，在一个晚上出现了两次。第一次，它是旧土的产物；第二次，它是新接上的那份纠缠的产物。从第一个一点五到第二个一点五，中间隔着的，就是她自己付掉的那半个钟头。

她没有把这道题做完。十点钟，奶奶来敲门让她睡觉。她把本子合上，问题还悬着。第二天早上吃早饭，她问爸爸：“一个东西可以有一个半吗？不是一个半人，是一个半‘三分之二’。”爸爸这回没讲，只说：“可以吧。你今天上课问问。”这句“问问”很平常。可是它把一个悬着的问题，交到了第二天的场里。

第二天上课，剪完纸条，金浩宇在黑板上为“三除以三分之二”画数轴、圈出四个半。这时候，雨桐在下面小声说了一句：“跟我昨晚那个一样。”这一下，不是柳老师教给她的，也不是浩宇教给她的。是她前一晚自己挖开的那个坑，被第二天的场接住了。

按本书的主语纪律，这里不写“她终于学会了分数除法”。更准确的写法是：这两天的经历，显出了一个在答案出来之前，会先去数一数盘子的她。还要老实说一句：到星期三下课，建立了的，只是这份纠缠的一部分。它能不能隔两

个星期还在，是另一段账；它能不能在一道没见过的题、一件生活里的事上，自己立起来，又是再往后的一段账。那两段，这一章都不抢着讲。

◆ 九、放回日子里

回到你自己的日子里。如果你是老师，下一次备课，可以先在本子上写两行字：这节课要碰的，是学生身上哪一片旧土？我凭什么认为它在那里？写下来，就是事前指认。课上碰到了，你就知道对不上从哪里来；没碰到，你就知道这一回猜错了，下回换个地方找。

然后再想一想：这节课里，哪一处是学生自己付动能的？哪一处是我替他们付的？我的讲解、我的图、我的口诀，是放在他们卡住之前，还是之后？

如果你是家长，晚上孩子说“作业都会了”，可以学一学雨桐的奶奶。不用考他，也不用讲。找一样家里摆得出来的东西，饼也好，绳子也好，一壶水也好。问一个跟作业本上同样的问题，换成日子里的说法。

孩子答对了，很好。答出一个跟作业本对不上的数，更好。那一刻，别急着讲，别急着纠正。人在旁边坐着，东西在桌上摆着，问题悬着。坐在旁边的你，就是场。

如果你是在学新东西的大人，也可以问自己一句：我说“懂了”的这一样，撤掉书、撤掉视频、撤掉那条口诀，我还能自己说出一条路来吗？说不出来，不丢人。那说明特征已经在场了，只是还没有建立。接下来要付的，是你自己的那一份动能。

如果你就是那个正在上学的人，可以给自己留一个小习惯：作业全对以后，挑一道题，合上书，用一件身边的事把它重新讲一遍。讲得通，很好；讲不通，你就找到了自己身上那片旧土。把讲不通的地方写下来，第二天带去问人。那一页写着“讲不通”的纸，比二十道全对的题更值钱。

还有最后一句，留给后面两章：建立了，还不等于留得住；留得住，也还不等于学会了。纠缠建起来之后，靠什么不散，是第 8 章的事；它什么时候结成一个能带走的东西，是第 9 章的事。

带 走 的 话

看懂是特征挨在一起，学习是它们被拆开、重新咬住；对不上推动它，学的人自己付动能，场托住那道落差。

小　账

前人看见了“觉得懂”的错觉和旧模型的顽固，却把它们当成要纠正、要防着的错误。本书把看懂算作学习前的一段，把旧土算作建立的本钱，用一个三角说清了拆开与重接从哪里来。

发生被收回为发现的那一下，在把“学习”写成“掌握了一条规则”：好像规则早就完整地放在那里，只等学生去拿。拆开与重接的那半个钟头，被一句“懂了”抹掉了。

想 一 想

1. 你最近一次说“我懂了”，是特征挨在一起，还是它们真被拆开、重新咬住了？撤掉解答，你还说得出吗？
2. 你身上有没有一片“在整数里一直管用”的旧土，碰到新情形就接不住？它是在哪一次对不上里露出来的？
3. 你帮孩子、同事或自己学东西的时候，场来得是太早、太晚，还是正好？

◆

08

第 8 章

记忆：纠缠靠什么不散

这一章的问题

十年前背得滚瓜烂熟的单词，今天盖住答案一个也说不出，重背却快得出奇——它们到底是丢了，还是没丢？

◆ 一、十年前的德语去哪了

苏州，工业园区一套两居室。周二晚上九点四十，女儿睡下了，何志强从阳台的储物箱里翻出一个蓝色硬皮本。他三十八岁，在一家做汽车零部件的公司当工程师，管装配线上的工装和检具。

本子封面贴着一张褪了色的标签，上面是他自己的字：Vokabeln，生词。这是十年前的东西。那时候他在一家德资工厂，公司派他去斯图加特附近的总部培训三个月。出国前，他上了半年德语班；回国前，为了拿一张 B1 证书，又报了一个四周的考前冲刺班，把一本题库从头背到尾。

证书拿到了。半年后他跳槽到现在这家公司，客户是国内的车厂，德语一句也用不上了。十年过去，没人再提这件事。直到今天下午，部门经理在会上说，下个月有一家德国客户派两位工程师来厂里审核，要待两个星期。他问：“谁懂一点德语，到时候帮着接一接？”有同事笑着指了指他：“何工以前在德国待过。”所以这一晚，他坐在书桌前，把蓝本子摊开了。

第一页，Schraube，螺丝。第二页，Zahnrad，齿轮。他一页页往下翻，越翻越安心：每一个词都眼熟，看一眼德文，中文意思就浮上来，看一眼中文，又觉得“对，就是这个”。翻到第三十页，他觉得底子还在，不过是生了点锈。

然后他拿一张便签纸，把德文那一列盖住，只看中文，试着自己说出德文。“发票”。他记得这个词是 R 开头，后面想不起来。“预约”。一点印象也没有。“扭矩”，他张口就来：Drehmoment。“检验”，Prüfung，也还在。“下班”，Feierabend，他甚至想起了那个车间主任每天四点五十喊这个词时的腔调。一张便签纸，把那份“都眼熟”的安心揭掉了一大半。

剩下的那一小半很怪。留下来的词，几乎都是他当年在车间里天天用、手上摸着零件说的词。消失得最干净的，是他在冲刺班里背得最熟的东西：那几篇考试范文，《我的家庭》《环境保护》，当年他能一口气背下来，今天连第一句都想不起来。还有一样东西，几乎全军覆没：名词前面的 der、die、das。哪个词是阳性，哪个是阴性，他一个也说不准了。

他又试了一个小时。把盖住的那一列一个个揭开、念几遍、再盖上、再说。奇怪的事又出现了：这些词回来的速度，比他十年前第一次背时快得多。有的词他一看就“哦”一声，像擦掉一层灰。十年前要念十遍的词，今晚念两三遍就站住了。快十一点了，他合上本子，心里冒出一个问题：这十年，这些德语到底是丢了，还是没丢？

说丢了，便签纸一盖，什么也说不出来；说没丢，它们又回来得这么快。还有，为什么有的词十年不用也还在，有的背得滚瓜烂熟，反而一个不剩？这一章，就从何志强这一晚的这几样怪事讲起。

◆ 二、一个人和两千个音节

讲记忆，绕不开一位德国人：赫尔曼·艾宾浩斯（Hermann Ebbinghaus）。1885 年，他出版了一本薄书，书名就叫《论记忆》。在他之前，记忆是哲学家坐在书房里想的事；在他之后，记忆成了可以在桌上一条条数、一格格量的事。他的办法很笨，也很硬。

他先造了两千三百多个“无意义音节”，都是“辅音—元音—辅音”三个字母拼成、什么也不指的组合。然后把它们排成一张张表，自己当唯一的被试，一

遍遍念，念到能不看表一字不差地背出一遍为止。为什么要用无意义的音节？他怕用真词会掺进旧的联想：有的词你本来就熟，有的词让你想起往事，这些都会搅乱测量。他要一种干干净净、跟什么都不沾的材料。

量的方法也有讲究。他不问“还记得多少”，而是隔一段时间后重新背同一张表，看比第一次少花多少遍。省下来的那一部分，他叫“节省”。这个办法有一个好处：哪怕你一个音节也背不出来了，只要重背时比第一次快，就说明有些东西还在。

他的结果，后来被画成一条曲线，就是有名的遗忘曲线。据他书里的数字，背过二十分钟后重背，大约能省下五成八；隔一天，大约省三成四；隔三十一天，还能省两成左右。前面掉得快，后面掉得慢，越往后越平。2015 年，荷兰的两位研究者 Murre 与 Dros 照原来的办法重做了一遍。画出来的曲线，形状大体相同。一百三十年前一个人在书桌上数出来的东西，经得起重做。

艾宾浩斯还顺手做了另一件事，后来被看得和遗忘曲线一样要紧。他比较了两种背法。一种是一天之内念六十八遍，第二天再背，要七遍才能背出；另一种是把三十八遍分散在三天里念，第四天再背，只要六遍。总遍数少了将近一半，效果反而略好。这就是后来所说的“间隔效应”：同样的功夫，摊开来做，比堆在一起做更能留得住。

一百多年里，间隔效应是记忆研究里被重复验证得最多的发现之一。Cepeda 等人 2006 年把几百个相关实验放在一起做过汇总分析，结论稳稳站住。2008 年，Cepeda 和同事又做了一个规模很大的实验，一千三百五十多人参加。学完后，隔几天到三个半月复习一次；复习后，最长隔一年再考。他们发现，最合适的间隔会随着“要记多久”变长而变长；可是按比例算，它反而在缩小。要记一星期，复习间隔大约取它的两到四成；要记一年，取它的百分之五到十就够了。

还有一项研究，和何志强的处境几乎一样。美国心理学家 Bahrick 一家四口，用九年时间，给自己做了一场外语词汇的实验。每人学三百对外语单词，分

成十三次或二十六次复习，间隔分别是十四天、二十八天和五十六天；训练结束后，隔一到五年再考。结果在 1993 年发表：间隔拉长，当时学得稍慢一点，几年后却记得明显更好。每五十六天复习一次、只复习十三次，留下来的和每十四天一次、复习二十六次的差不多。

Bahrick 更早还做过一项更出名的研究，1984 年发表。他找来几百位在中学或大学学过西班牙语的人，最长的离开课堂已经五十年，测他们还剩多少。曲线是这样的：头三到六年掉得最快；之后一大块知识就不再往下掉，稳稳地停了二十五年以上，哪怕这些人几十年没碰过西班牙语。Bahrick 给这一块起了个名字，叫“永久存储”。能留进这一块的有多少，主要看当年学到了什么程度：课上得多、学得扎实的人，留下的多；只上过一两门课的人，几乎什么也没留下。

还有一位前人，走的是和艾宾浩斯相反的一条路，也要写进来。英国心理学家巴特利特（Frederic Bartlett），1932 年出了一本书，书名就叫《记忆》。他不用无意义音节，偏用一个有情节的故事：一则北美原住民的民间故事，叫《鬼魂之战》。故事里有独木舟、有夜里的喊声、有一个人死前“嘴里出来一样黑东西”。对英国的读者来说，它处处陌生，处处不合常理。

他让人读两遍，过一阵复述，再过一阵再复述，有的人隔了很多年还被请回来再讲一次。复述出来的故事，越讲越短。那些不合常理的地方，要么被悄悄删掉，要么被改成讲得通的样子，像是讲述者自己生活里会发生的事。鬼魂的那一层，常常就没了。

巴特利特由此说：人想起一件事，不是把一份原件取出来，是拿手头已有的那一套框架，重新把它搭一遍。他把这套框架叫“图式”。巴特利特把一句话说得很正面：记忆不是一份复印件。

把这些放在一起，前人给“记忆”立下了一份很硬的账：忘，是有形状的，先快后慢；忘了的，重学会快一些；同样的功夫，摊开做比堆着做留得住；学得越扎实，越不容易掉。这份账，本书全部接下来，一条也不改。

◆ 三、“眼熟”是一种会骗人的感觉

何志强那一晚，还有一件事值得单独说：翻本子时那份“都认识”的安心。这份安心，心理学里有专门的研究，叫“学习判断”：一个人在学的时候，估计自己以后能不能记住。以色列心理学家 Koriat 1997 年提出一个说法：人做这种判断，并不是直接往脑子里看一眼“存了没有”，而是凭一些手边的线索来猜。比如这东西看着顺不顺、读起来费不费劲、眼不眼熟。线索是线索，不是答案。线索会骗人。

2005 年，Koriat 与 Bjork 专门研究了一种骗法。学的时候，题和答案同时摆在眼前，人很难假装没看见答案，于是觉得“这个我肯定记得住”。可到了考的时候，只有题、没有答案，能不能想起来，靠的是那道题自己能不能把答案勾出来。学时看的是“两个一起在场时顺不顺”，考时要的是“只给一头时能不能拉出另一头”。两件事不是一件事。

何志强翻本子，德文和中文并排印在一页上，就是这个处境。并排的时候，每一对都“顺”；盖住一列，才知道哪一对是真连着的。还有更小、更好笑的骗法。

2008 年，Rhodes 与 Castel 让人记一串单词，有的用大字号印，有的用小字号印。学完，问“你觉得自己能记住几个”。大家普遍觉得大字的更好记。可是真考下来，大字和小字记住的一样多。字印得大，看着舒服，人就把“看着舒服”当成了“记住了”。

研究者给这一类骗法起过一个统称，叫“流畅的错觉”（illusion of fluency）：东西看着顺、读着熟，这份流畅，被人当成了记住的凭据。何志强翻本子时的那份“眼熟”，就是它最家常的样子。第 6 章讲过的画家实验，也是这一回事：连着看越看越顺，真考起来，却是穿插着看、每换一幅都要愣一下的那一组认得更准。偏偏是那一下“愣”，在干活。

这类研究还有很多，第 6 章讲 Bjork 的“合意困难”时已经细讲过。这里只取一句：看着顺、读着熟，是一种感觉；记住没有，是另一回事。两者经常不同步。

教室里最常听到的一句问话，就落在这个缝里。老师讲完一道题，问：“听懂了吗？”全班说：“听懂了。”这一问一答，问的是感觉，答的也是感觉。题和讲解刚刚并排摆在黑板上，每一步都顺，学生说“懂了”并没有说谎。可是这一声“懂了”，和下周能不能自己拉出来，几乎没有关系。

换一种问法，账就实了：“把黑板擦掉，谁能从第一步重新说一遍？”或者，下节课开头，不打招呼，先让大家把上节课那道题自己写一遍。前一种问法测的是并排时顺不顺，后一种测的才是只给一头时拉不拉得出。这句话放进日子里，你一定碰到过。考前把笔记从头翻一遍，每一页都“嗯，这个我知道”，进了考场却想不起来。手机里存着家人的号码，每天在屏幕上看到，真要你不看手机说出来，说不出来。

◆ 四、他们停下的地方

先把前人对在哪里写足。艾宾浩斯把记忆从书房搬上了桌面，让它第一次可以被量、被重做、被反驳。“节省”这个量法尤其聪明：它承认了一件常识说不清的事，忘了的东西并没有归零。

间隔效应把“怎样复习”从经验变成了有账可查的东西，今天几乎所有背单词软件的复习排程，都站在它上面。Bahrick 用几十年的时间尺度，告诉人们学得扎实的东西可以留一辈子。学习判断的研究，把“自我感觉良好”从一句玩笑，变成了一个可以测出来的偏差。这些都是硬功夫。

它们停下的地方，在一个词上：存。一百多年来，记忆研究最常用的图景，是一座仓库：学，是把东西放进去；记，是它在里面待着。忘，是它在里面变淡、找不着了，或者被别的东西挡住了；想起来，是去仓库里把它取出来。研究者说“存储”“提取”“痕迹”“强度”，都是这座仓库里的词。

这个图景很好用，可它留下了一个问题没有问：仓库里放着的那个“东西”，到底是什么？如果它是一件东西，那它为什么会“变淡”？一本书放在书架上十年，书不会变淡。如果它会变淡，那它就不像一件东西，更像一种被什么拉着、托着的状态。

还有一处更细的地方，藏在艾宾浩斯自己的方法里。他之所以选无意义音节，正是为了把一切旧联系都剥掉。换句话说，他刻意挑了一种几乎跟什么都不连着的材料。所以那条有名的曲线，说的其实是一件很特别的事：一样跟什么都不连着的东西，是怎样散掉的。这不是他的错，这是他做实验的前提。可是一旦把这条曲线当成“人的记忆就是这样忘的”，就把最松的那一种情形，当成了所有情形。

何志强的蓝本子正好说明这一点。der、die、das 忘得最快，因为一个德语名词的阴阳性，大多没有道理可讲，跟什么都不连着，最像无意义音节。Drehmoment 十年都在，因为它连着扭力扳手的手感、连着装配线上的那一声“咔”、连着那位德国师傅的口音。同样是十年，两种东西走了两条完全不同的曲线。差别不在“存得深浅”，在连着的东西有多少。

巴特利特离这一步最近。他看见了：一个故事被记住的样子，是被记的人身上已有的那张网改过的。陌生的、接不上的地方先掉，接得上的地方留下，还被改得更顺。这几乎就是在说“连着什么，才留得下什么”。可是他把那张网叫作“图式”，当成脑子里的一套认知框架来讲，讲它怎样改写故事。至于这张网自己靠什么撑着、为什么有时候撑得住几十年、有时候四个星期就散，他没有往下算。

还有第二处停下的地方：前人大多把“记住”当成学习的终点。考得出来，就算学到了。Bahrick 的西班牙语研究，测的主要是认词、懂语法、读一段话。那一大块“永久存储”是真的。可是一位五十年前学过西班牙语、今天还认得很多词的人，走进一家西班牙餐馆，能不能开口点菜？那是另一个问题，前人没有把它和“还记得多少”分开问。本书的说法，就从这两处接着走。

◆ 五、忘，是纠缠松了

先说本书的第一句：

记忆，是特征纠缠的维持。

特征纠缠，就是本套书的大白话词“土”，正文多简称“纠缠”，第 7 章已经细讲过。学的时候，几样原来散着的特征被拆开、重新接起来，接成彼此牵连、动一处就牵动别处的样子。学习，是这条纠缠被建起来；记忆，是它建起来以后，不散。所以本书不说“存”，说“维持”。存，是放进去就不用管了；维持，是一直要有什么在拉着、托着。由此，第二句：

遗忘，不是东西丢了，是纠缠松了。

松了，没断。拿你家的钥匙打个比方。钥匙丢了，是真找不着了，翻遍家里也没有。钥匙忘在哪了，是它其实就在家里，只是连着它的那几样东西，“我进门先换鞋”“换鞋时手上拿着快递”，一时没接上。等你想起“刚才拿着快递”，钥匙就出来了。记忆里的遗忘，是后一种。

前人的硬数据，正好都站在“松了”这一边。第一样，“节省”。何志强那一晚，十年前要念十遍的词，今晚两三遍就站住了。艾宾浩斯一百多年前量的，就是这个。东西要是真丢了，重学应该和第一次一样慢。重学变快，说明纠缠还在，只是松了，拉一拉就紧。

第二样，“话到嘴边”。1966 年，Brown 与 McNeill 做过一个有名的研究：念一个不常见的词的意思给人听，让他说出这个词。很多人卡在“就在嘴边，说不出来”的状态里。可是这时候问他们，这个词大概几个音节、第一个字

母是什么，他们常常说得出。一个词说不出来，它的一部分却还在。这不像丢了，像一张网松了几个结。

第三样，认得比想得起来容易。何志强看到 Schraube 马上知道是螺丝，盖住德文却说不出来。认，是给了你一头，你只要把另一头对上；想，是只给一头，要你自己把整条拉出来。拉得出来，要连得紧；对得上，松一点也行。

第四样，提示一来，就回来了。同学聚会，一个二十年没见的老同学走过来，你叫不出名字。旁边有人说一句“就是当年坐你后面、借你橡皮从来不还的那个”，名字一下就出来了。名字没丢，只是缺了一根线把它拉上来。这些合起来，说的是同一件事：忘了的东西，连接还在，只是松了，一时拉不上来。

第 6 章讲过 Bjork 夫妇的说法：存储强度大体只增不减，忘掉的是此刻想不想得起。本书在这里和他们站在一边。连接度，就是那一份只增不减的东西；松的，是此刻够不够得着的那一头。

这么说，并不是安慰人“你都没忘”。Bahrick 那些只上过一两门西班牙语课的人，几十年后几乎什么也没留下，重学也省不了多少。那不是接牢了又断了，是当初就没接上几处。连接度本来就低，一松到底，够也够不着，和没学过差不多。所以要分清两种“想不起来”。当初接上了的，松了，拉一拉就回来；当初就没接上几处的，谈不上拉回，只能从头建立。把“存”和“维持”两种说法并排放，差别就看得更清楚。

问题	仓库的说法：“存”	本书的说法：“维持”
记住的是什么	一件放进去的东西，一道痕迹	一条还连着、还绷着的纠缠
为什么会忘	痕迹变淡了，或者被挡住、找不着了	拉着它的连接松了，或者场撤了
忘了以后	要么取得出来，要么取不出来	连接度还在，松紧在变，一时够不着
为什么重学变快	痕迹还剩一些	纠缠还在，拉一拉就紧
为什么有的东西忘得慢	存得深	接点多，常有人一起用

问题	仓库的说法：“存”	本书的说法：“维持”
怎样记得牢	多存几遍，存得深一些	多接几个点，隔一阵自己拉一次，找一张场托着

仓库的说法不是错的，它在很多地方好用。只是它让人只盯着“放进去几遍”，看不见“连着什么”“谁在拉”。

◆ 六、靠三样东西不散

那么纠缠靠什么不散？本书的回答是三样：连接度，再用，场。

第一样，连接度。 连接度，就是要拆开它有多难。本书在能量账里叫它“内能”（见书二第 16 章）：一样东西连着的点越多、连得越紧，要把它拆散就越费劲，它就越不容易松。连接度不是凭空来的，它是建立时付出的动能留下的。第 7 章讲过，建立是拆开、重接；当初拆得越多、接的点越多，留下来的连接度就越高。所以本书要说一句：建立时付了多少，维持时就省多少。

何志强的两类德语，就是这样分开的。Drehmoment 在他身上连着的点很多：手里扳手的分量，扭力表上的读数，德国师傅弯腰示范的样子，第一次拧过头被骂的那个下午。这些点是他在车间里一样样付出去的。冲刺班里背的范文，连着的只有“考试那天要写”这一个点。一条有七八个接点的纠缠，和一条只有一个接点的纠缠，过十年，不会是同一个样子。

为什么手上的本事忘得慢，单词忘得快？也在这里。二十世纪六十年代，Fleishman 与 Parker 测过一种复杂的追踪操作。它像是一边看仪表、一边连续调整操纵杆的那种。隔了一个月、五个月，一直到两年，保持得都非常好，十四个月以后才开始往下走一些。保持多少，主要看当初练到了什么程度。

可是航天模拟训练里也有研究发现，一长串按步骤操作的程序一个月不练，就明显退步。那种程序像“先拨这个开关、再查那个读数、再按那个按钮”。同样是“手上的事”，连续的操作，每一刻都有眼睛、手、身体的感觉在互相对账，接点又多又密。一串步骤，一步和下一步之间，常常只靠“规定就是这

样”一根线连着，接点少。前者像一张织密的网，后者像一串挂在一根绳上的钥匙。

单词更是如此。一个外语单词，如果只连着它的中文意思，就只有一个接点。为什么骑车、游泳几十年不忘，第 9 章会专门讲；这里先记住一句：忘得快慢，看接点多少。日常里，你也能看见这条账。你小时候住过的那条街，街口卖什么、哪家狗凶、下雨哪里积水，二十年后回去一走就全想起来；上周开会记下的五个待办事项，周五已经忘了两个。街是你用脚、鼻子、眼睛、膝盖上的伤一点点接起来的；待办事项只连着一张纸。

第二样，再用。 纠缠不会自己永远绷着。不碰它，它就慢慢松，这是遗忘曲线说的事。每用一次，就是往回拉一下。本书把这个叫作“维持付的功”。建立付的是动能，维持也要付，只是付法不同：不是拆开重接，是把已经接好的东西，再拉一次、再走一遍。这里有两个讲究，前人的研究都替本书量过了。

第一个讲究：自己拉出来，比别人递给你更管用。把盖住的那一列自己说出来，比把并排的两列再看一遍，付的功多得多。第 2 章讲刷题时提过的“提取练习”，就是这个意思。拉的时候费劲，正是这一下费劲在付功。

第二个讲究：隔一段再拉，比连着拉更管用。这就是间隔效应。为什么隔开更好？用本书的话说：刚建好的纠缠还很紧，马上再拉，它本来就紧，拉了也没多做什么功；隔一阵，它松了一些，这时候再把它拉回来，才是真做了一回功。第 6 章说过，越是快要想不起来，这一次费力的提取，给存储强度添得越多。用本书的话说：每从松处拉回一次，连接度还会再涨一点。

所以再用的时机，不是越早越好，是在“有点松了、还拉得回来”的时候。Cepeda 那个“要记得越久，间隔就越长”的结论，用这句话一说就明白了：要它绷得久，就让它多松几回、多拉几回。放进日子里：你学会了一道菜，第二天再做一次，觉得很顺；隔了三个星期再做，手忙脚乱，查了两回菜谱，做完反倒记得更牢。那一次手忙脚乱，就是一次结结实实的维持。

放进教室里，这条账也很具体。一节课讲完，当天晚上的作业把同样的题再做十道，看着很勤，其实是趁着纠缠还紧的时候拉，拉得多，做的功少。把其中三道留到下周一的课堂开头，不看笔记先写，写不出来的再翻书，这三道题做的功，可能比那十道还多。第 18 章重排一节课时，会把“下一节课开头再用一次”写进课的结构里。第 19 章讲 AI 时，会说它最能帮上忙的地方之一，正是替学生记着“哪样东西该在哪一天再拉一次”。

第三样，场。 场，就是周围那张网的吸引和拉扯，本书在能量账里叫“势能”（见书二第 17 章）。在维持这一段，场的意思很具体：有没有人和你一起用这样东西，身边有没有人让这样东西天天被叫出来。

何志强当年在斯图加特，德语是被场托着的。车间里的人都说德语，食堂的菜单是德文，下班时主任喊 Feierabend。他不用刻意复习，每天都有人替他把那些词拉一遍。回国后，场没了。苏州的车间里没人说 Schraube，没人喊 Feierabend。他身上那些德语，从那天起只剩下连接度在撑。撑得住的，就是连接度高的那几个；撑不住的，就是只靠场托着、自己连接度低的那一大片。

这里要防一个望文生义。说到“场”，有人会想起一个著名的实验。1975 年，Godden 与 Baddeley 请一批潜水员记单词，有的在岸上记，有的在水下记；考的时候，也分岸上考和水下考。结果是：在哪里记的，回到哪里考，想起来的多一些。这个实验后来常被拿来说明“环境是记忆的线索”。可是 2021 年，Murre 照原样重做了一遍，没有找到这个差别。

这件事提醒两点。第一，前人的单个实验，再有名，也要看它经不经得起重做。第二，本书说的场，不是“当时屋里是什么样子、水有多深”这一类背景，是一张网：一群人，一个天天要用到这样东西的地方。网里的人一遍遍把它叫出来，它才被拉着。屋子换没换，是小事；用它的人还在不在，是大事。

场的作用，你在日子里也见过。一家人搬到新加坡，孩子在学校天天说英语，回家跟爷爷奶奶说方言。几年后爷爷奶奶回了老家，家里没人再说方言，孩

子的方言就一点点松了。不是孩子不用功，是拉着它的那张网撤了。这三样，可以排成一张表。

维持靠什么	大白话	能量账	何志强的德语	日子里的例子
连接度	连着的点多不多、紧不紧	内能	Drehmoment 连着扳手、读数、师傅、被骂的那个下午	小时候住过的那条街，二十年后一走全想起来
再用	隔一阵自己拉一次	维持付的功	十年没拉过一次，靠的全是老底子	隔三周再做一次那道菜，手忙脚乱却记得更牢
场	有没有人和你一起用	势能	斯图加特车间人人说德语，回国后场撤了	爷爷奶奶回老家后，孩子的方言慢慢松了
三样都缺	只连着一个点，没人用，也不拉	只剩一点内能	der、die、das，冲刺班里的范文	上周会上记下的待办事项
三样都在	接点多、常拉、有人一起用	内能高，功常付，势能托着	当年三个月里的车间德语	天天讲的母语

这张表里，三样是互相补的。连接度高，能省一些再用；场在，能省一些自己拉的功；连接度低、又没有场，只能靠一遍遍地自己拉，拉一停，就松。

◆ 七、背住型假会：外力一撤就松

现在可以说一说第一编里讲过的那种假会了：背住型。第 3 章在考场上见过它：学生会算牛顿第二定律的题，换一个问法就答不上；考前背得滚瓜烂熟，两周后再问，干干净净。这里从维持这一段，把它的账算清。何志强的那几篇范文，是一个完整的标本。

四周冲刺班，老师发一本题库，里面有十几篇“万能范文”。每天晚上背一篇，第二天课上默写，错一个词抄十遍。考前那几天，他能从任何一篇的任何一句接着往下背。考试那天写作题是《描述你的家庭》，他几乎原封不动地默了出

来，拿了不错的分。那时候的他，确实“记住了”。可是这份记住，是怎样维持的？

接点只有一个：考试。拉着它的力，也不是他自己付的再用，是外面压下来的：每天的默写，抄十遍的罚，越来越近的考试日子。这些力很大，大到可以把一条只有一个接点的纠缠，硬撑着一字不差地绷住四个星期。考完那天，力撤了。接下来发生的事，前面已经看到了：十年后，一句也不剩。

那几篇范文未必断了。真要重背，多半也比当年快一些。可是它们只有一个接点，力一撤，就松到了够不着的地方。所以本书说：

背住型假会，是靠外力维持的纠缠，撤力就松。

它和真正维持住的东西，差在维持的力从哪来。真维持住的，力在里面：连接度高，自己会时不时去用，身边有人一起用。背住的，力在外面：考试、检查、罚抄、家长盯着。外面的力不是坏东西。考试逼人去拉一遍，罚抄逼人多拉几遍，这些都是实打实的功。问题在于它只拉，不接。四个星期里，何志强把同一根线拉了几十遍，却一个新的接点也没有接上去。线拉得再紧，还是一根线。

你家里多半也有这样的标本。孩子背课文，家长拿着书在旁边对，错一个字重来，背了一晚上，第二天默写全对；一个月后单元测验，再问那篇课文讲了什么，孩子只记得开头两句。家长那一晚付出的力，是真的力；可它是从外面拉的，孩子那一边，那篇课文只连着“明天要默写”一个点。何志强自己家里，就有一个现成的对照。

他女儿何悦九岁，正读三年级上学期。上个月班上的课外古诗打卡，要背一首杜甫的《春夜喜雨》，妈妈拿着课本在旁边对，背了两个晚上，默写全对。这个月再问，她只剩“好雨知时节”一句，后面全接不上。可是另一首诗，她从来没有专门背过，却张口就来。那是奶奶的。每年清明前后下第一场小雨，奶奶站

在阳台上总要念一句“清明时节雨纷纷”，再接一句“路上行人欲断魂”，然后转头问她：“你说，下雨天为什么要断魂？”何悦从五岁听到九岁，每年春天听一回。

两首诗，一首是妈妈两个晚上从外面撑住的，一首是奶奶四年里每年春天拉一次的。前一首连着“明天默写”，后一首连着阳台、小雨、奶奶的口气和一个答不上来的问题。一个月后，剩下的是哪一首，一点也不奇怪。

怎样认出背住型假会？办法很简单，第 3 章和导读都提过：第一，隔两周再考。外力撤了以后，还剩多少，才是自己维持住的。第二，换一个问法。只连着原题一个点的东西，题目一变，就拉不出来。何志强那一晚，其实给自己做了这两样检验。隔了十年，比两周狠得多；便签纸一盖，就是换了一种问法。他自己做完，心里就有数了。

◆ 八、记住了，还不等于学会

说到这里，要防一个误会。如果“维持”做得很好，连接度高，常常再用，又有场，那是不是就“会了”？还不是。记住了，是纠缠没散；学会了，是纠缠结成了一颗粒子。这是两段，不是一段的两个程度。

先看一个日子里的例子。很多人能把交通法规的题库背得很熟，笔试拿高分，那是维持住了。可是第一次上路，坐在驾驶座上，手心出汗，转弯忘了打灯。法规题里的每一条都“记得”，可那些东西还没在他身上结成一个“会开车的人”。

再看何志强。那一晚他发现，Drehmoment、Prüfung、Schraube 都还在，连接度很高。可是他试着在脑子里跟德国工程师说一段完整的话：“这批检具的扭力复测结果，下午三点可以给你们看。”他卡住了。词都在，句子出不来；就算拼出来，他也不敢肯定对方能不能听懂。这些词被维持住了，可它们没有在他身上结成一种“我能用德语跟人把一件事说清楚”的东西。

Bahrick 的“永久存储”也是这样。几十年不掉的那一块，是真的；可它说的是“还认得多少、还懂多少”，没有说“还能不能拿它去做一件事”。认得一千个词，和能在餐馆里点一顿饭，中间还隔着一段。本书把这一段叫粒子化，下一章专门讲。这里只先把边界划清：维持，回答的是“它散没散”；粒子化，回答的是“它在不在你身上立成了一样东西”。

一个维持得很好、却没有粒子化的纠缠，有一个特征：它离不开当初的那个样子。换一种问法、换一个场合、撤掉提示，它就出不来，或者出来了也用不上。课堂里也常见这样的学生。一个初三学生把勾股定理背得极熟，两周后的延迟测验照样全对，“维持”这一关过得漂漂亮亮。可是数学老师在课上问一句：“家里新买的电视说是五十五英寸，那五十五英寸量的是哪一段？”他愣住了。直角三角形的三条边，在纸上他认得；在一块电视屏幕上，他没认出来。

他记住了，记得也牢。可那条定理还待在作业本上，没有走到电视屏幕前面来。这也是第 21 章要立的一条检验。如果“保持得好”和“迁移得好”在数据上永远绑在一起，保持好的一定迁移好，那么本书把维持和粒子化分成两段的做法，就站不住。本书押的是：它们可以分开，这个初三学生就是分开的样子。

所以评价学生时，第 20 章会把两样分开测：维持，用延迟测验，隔两周再考同样的东西；粒子化，用迁移和撤提示，换一个情境看它还在不在。只测前一样，就会把“记得住”当成“会了”。

◆ 九、一个月，三样一起补

回到何志强。离德国客户来还有四个星期。那一晚之后，他没有再把蓝本子从头背一遍。原因很简单：他刚刚亲眼看到，从头背过一遍的东西，十年后是什么样子。他做的事，是另一种样子。

第一件，接点。他把客户这次审核要用到的东西列出来：检具、扭力、复测、批次、偏差、整改。每查到一个德文词，就拿到车间去，对着那件实物说一

遍，再写进他自己每天要填的点检表的边上。一个词，连上一件摸得到的东西、一张每天要看的表、一个具体的场面。

第二件，再用。他不再一口气背，而是每天早上通勤的二十分钟，把前几天的词盖住说一遍。说不出来的，划个记号，过两天再说；说得出来的，隔一个星期再碰。第一个星期很别扭，每天都有一半说不出来。到第三个星期，说不出来的少了。

第三件，场。他在公司里打听到，采购部有一位同事在德国读过书。两人约好，每周二、周四午饭时只说德语，说错了也不停。头一回吃饭，十五分钟里他说了不到五句话。这四个星期，没有让他变成一个德语很好的人。审核那两周，大部分正式沟通，还是公司请的翻译在做。

可是第一天下午，在装配线旁边，一位德国工程师指着一台检具问了句什么。翻译还没开口，何志强已经把扭力复测的记录本递了过去，说了一句：Das ist das Prüfprotokoll von gestern。这是昨天的检验记录。句子很短，语法未必全对，对方点了点头，接过去看了。

这一下，不是十年前那本题库给的，也不是那一个月“背”出来的。那一个月里，几样原来散着、松着的东西，被重新接上，被一次次拉过，被一张小小的饭桌托着。到这一刻，它们在一个具体的场面里，第一次被他自己用出来了。这一段经历，显出了一个能用德语把一件小事办成的何志强。

它还只是一小颗。离一整个“会德语”，还远。它能不能长大、能不能离开那条装配线也站得住，是下一章要讲的事。

◆ 十、放回日子里

你一定有一样“以前会、现在忘了”的东西：一门外语，一种乐器，一套解题方法，高中时背过的化学方程式。先别急着说“全丢了”。拿一张纸盖住答案，试一试；再给自己一个提示，看它回不回来；然后重学一个小时，看它是不是比第一次快。多半你会发现，它没丢，只是松了。

然后再问三件事：它当初连着几个点？这些年有没有人和你一起用它？你最后一次自己把它拉出来，是什么时候？三个问题的答案，就是它今天这副样子的来历。

如果你是家长，下次孩子说“我背过了”，别急着夸，也别急着骂。隔两周，换一种问法，问一次。拉得出来，是他自己维持住了；拉不出来，说明那一晚撑着它的力，是你的，不是他的。那时候要补的，不是再盯一晚，是给它多接几个点，多留几次让他自己拉的机会，再给他找一个一起用的人。

带走的话

记忆不是把东西存进去，是让纠缠不散；它靠连接度、再用和场，外力撑住的那种，一撤就松。

小　账

艾宾浩斯和后来的研究把“忘”量成了一条曲线，关上的是“存储”那扇门；本书打开的是“维持”：忘不是丢，是松，松有来历，可以拉回。

发生被收回为发现的那一下，在“存进去、取出来”这个说法里：纠缠被当成一件躺在仓库里的东西。它要靠连接、再用和场一刻不停地撑着，这件事就看不见了。

想一想

1. 你有没有一样东西，十年不用也还在？它当初在你身上连着哪几个点？
2. 你最近一次“背得很熟、考完就忘”，拉着它的力是从哪里来的？
3. 你身边有没有一张“场”，正在悄悄替你维持着某样东西？如果它撤了，什么会先松？

◆

09

第 9 章

学会：纠缠结成粒子

这一章的问题

照着抄得一字不差的方子做了十几锅，锅锅不对——方子明明到了手，那道菜为什么还不在你身上？

◆ 一、吃到了，没学会

新加坡，大巴窑一座小贩中心。晚上九点，林家豪把最后一锅红烧肉从炉上端下来，揭开盖子，用筷子戳了戳，点点头。他三十四岁，守着一个杂菜饭档口。十二道菜轮着换，只有红烧肉天天有。熟客来了，不看菜牌，先问一句：“今天肉还有吗？”

这个档口原本是他舅舅的。九年前，舅舅腰不好，说再做两年就收档。林家豪那时二十五岁，在物流仓库开叉车，一个月几次夜班，做得心灰。舅舅问他要不要来试试，他就来了。

来的第一个星期，隔壁卖卤鸭的梁秀珠端过来一碗红烧肉。梁阿姨六十出头，在这个小贩中心做了三十年，嘴硬心软。她说：“新来的，尝尝。你舅舅的肉，有一半是跟我学的。”那碗肉他到今天还记得。肥的那一层透明得发亮，瘦的那一层一夹就松，汁挂在肉上，甜里带一点焦香，咸味压在最后。他坐在档口后面的小凳上，一口气吃完了。他吃到了。吃完他问：“阿姨，这个怎么做？”

梁阿姨没有藏。她一边擦手一边说：五花肉切大块，冷水下锅焯一遍；锅里少许油，冰糖小火炒出糖色，炒到枣红色就下肉。肉翻匀了，沿锅边淋一圈绍兴酒，再下老抽、八角、桂皮、两片姜；加热水没过肉，大火烧开，转最小的火，

盖上盖，一个半钟头；最后开盖收汁。林家豪找来一本收据本，在背面一条条记下来。他记得很全，连“沿锅边”三个字都记了。那天晚上收档以后，他照着收据本，做了第一锅。

糖色炒焦了，一股苦味；肉下得急，皮粘在锅底；老抽多了，颜色黑得像墨；一个半钟头以后，瘦肉柴得塞牙。舅舅尝了一块，没说话，把那锅肉倒了。第二锅，糖色不敢炒久，下肉时还是淡黄，做出来甜得发腻、颜色发白。第三锅，火小了，一个半钟头肉还硬。那几个月里，他一共倒掉了十几锅。

每一次失败，他都回去看收据本。本子上的每一条，他都照做了。冰糖、老抽、八角、一个半钟头，一样不少。可是做出来的，就是不对。他吃到了梁阿姨的红烧肉，也拿到了梁阿姨的方子。东西吃进了肚子，方子抄进了本子。可是红烧肉，没有在他身上。这一章要讲的，就是这中间差的那一样东西。

◆ 二、前人怎样说“会”

“会”这件事，前人想得很深。先把他们对在哪里写足。

第一位，英国哲学家赖尔（Gilbert Ryle）。 1949 年，赖尔在《心的概念》里分了两种“知道”：一种是“知道那个”，比如知道红烧肉要放冰糖；一种是“知道怎样”，比如知道怎样把糖色炒到刚好。

他说，后一种不能还原成前一种。一个人可以把所有“知道那个”都背下来，仍然不知道怎样。反过来，一位老厨师说不出几条规则，手上却全对。赖尔把“会”从“知道一堆命题”里解放了出来。林家豪那本收据本，记的全是“知道那个”；他缺的，是“知道怎样”。

第二位，匈牙利裔英国学者波兰尼（Michael Polanyi）。 1966 年，他在《默会的维度》里写下一句后来常被引用的话：“我们知道的多于我们能说出的。”他举的例子很家常：你能在一千张脸里认出一张熟人的脸，却说不清自己

是凭什么认出来的。他在更早的《个人知识》里还举过骑车的人：保持平衡靠的是一套调整，骑车的人自己说不出来。

波兰尼看到了一件要紧的事：会的东西，有一大块不在话里。梁阿姨把方子说得再全，“枣红色”三个字也装不下她手上那份分寸。

第三组，十九世纪末研究电报员的两位美国心理学家，Bryan 与 Harter。 1897 年和 1899 年，他们跟踪电报员学收发报，把每周的速度画成曲线。他们发现，曲线不是一路平滑往上走的：往往先涨一段，再平上很久，像一块高原，然后又突然往上一跳。

他们的解释是：一开始，学员一个字母一个字母地听；练到一定时候，耳朵开始成整个词地听；再往后，成整句话地听。每一跳，都是听的“单位”变大了一级。他们管这叫“习惯的层级”。后来也有研究者指出，平台期并不是人人都有、处处都有〔待核〕。可是“单位会突然变大”这件事，留了下来。

第四组，Chase 与 Simon。 1973 年，他们让国际象棋大师和新手看一盘真实对局里的局面。只看几秒，然后凭记忆把棋子摆回去。大师摆得远比新手准。可是把棋子随便乱摆、不是真实对局，再让他们看几秒，大师的优势就几乎没了。大师不是记性好。他们看见的不是二十几个单独的棋子，是几块“一眼就认得的阵形”。研究者把这种一块块的东西叫“组块”。

第五组，英国教育学者 Meyer 与 Land。 2003 年起，他们提出“门槛概念”：每门学科里都有几个这样的概念，一旦真懂了，看整门学科的眼光就变了，而且回不去。经济学里的“机会成本”是常举的例子。他们说这样的概念有几个特征：改变人的看法，不可逆，把原来散着的东西连成一片，学起来让人难受。在跨过去之前，学的人会在一段“门槛地带”里来回挣扎。

这五家合在一起，前人已经替本书说出了很多：会，不等于知道一堆话；会的东西，有一大块说不出来；会，往往是一下子跳上去的，单位变大了；会了的

人，看见的是一整块，不是一粒粒；真懂了一个概念，人就变了，而且回不去。这些，本书全部接下来。

◆ 三、他们停在哪里

它们各自停下的地方，正好是接着要走的一步。赖尔分出了两种知道，可他把它们当成并排的两个格子：这一格放“知道那个”，那一格放“知道怎样”。至于一个人怎样从只有前一格，走到后一格也满了，中间发生了什么，他没有讲。林家豪不是先有一格、再去另一个仓库领另一格。他手里那本收据本，和后来手上那份分寸，是同一团东西走到了不同的地方。

波兰尼说出了“说不出”，却也停在了“说不出”。既然说不出，那它是怎样长出来的？要什么条件？为什么有人练三年长出来了，有人练十年没长出来？默会知识在他那里，像一块深色的玻璃，看得见它在，看不清它怎么来。

电报员和棋手的研究，看见了“单位变大”，看见了“一整块”。可是它们把这一整块叫“组块”，当成记忆里一个更大的格子：原来一个格子放一个字母，现在一个格子放一个词。格子变大了，仍然是格子。为什么有的组块换了场合还在，有的一换就散？为什么有的组块能拆开重组，有的拆不开？它们没有往下问。

门槛概念离本书最近。它说“会”是一道门槛、一跨就变，几乎已经在说“会”是一件事，而不是一个程度。可是它有一个特征，本书不能照收：“不可逆”。跨过去回不去，有时候是好事，有时候恰恰是麻烦。后面会看到：一个熔不开的会，正是固化的开端。真正活着的会，下一次碰到对不上时，要能熔开、重新长一次。还有一处，五家都没有碰：这样一个“会”，落在谁身上？它和学的那个人自己，是什么关系？

◆ 四、“会”是一件事，不是一个程度

现在说本书的定义。前两章已经铺好了路：

学习，是特征纠缠的建立；记忆，是特征纠缠的维持；学会，是特征纠缠的粒子化，即符号发生。

粒子化，就是这条建起来、又维持住的纠缠，结成了一颗粒子：它稳定，换个场合还在；它整体，自己就是一整件事；它独立，离了书和老师也立得住。到这一步，一个符号在学的人身上发生了。所以，本书的第一个判断：学会，就是一个符号在你身上发生。第二个判断随之而来：“会”是一个事件，不是一个程度。

日常里人们常说“会了七成”“差不多会了”“还不太会”。这样说并不错，只是说的不是同一段。建立可以有多有少，维持可以有松有紧，这两段都是程度。可是粒子结没结成，是一件事，发生了，或者没发生。

你一定见过这样的事。孩子学骑自行车，爸爸在后面扶着车座跑，跑了一个下午，孩子一直歪。某一刻爸爸悄悄松了手，孩子往前骑了十几米才发现后面没人，一回头，车倒了。可是从那一刻起，他会骑了。前一刻还不会，后一刻会了。没有“会了六成”的骑车。

学游泳也一样。在水里扑腾了几个星期，某一下，身体忽然浮住了，不再往下沉。那一下以后，他是一个会浮的人。煮糖的人都知道，冰糖在锅里加热，很久都是一锅透明的糖水，看不出变化；到了某一刻，颜色一下子转了，几秒钟之内从浅黄到琥珀。前面那很久，是在攒；转色的那一下，是发生。林家豪的红烧肉，也有这样一个晚上。后面会讲。

这样说，并不是说前面那些努力不算数。正好相反：没有前面一锅锅地倒、一天天地做，就不会有后面那一下。建立和维持是攒，粒子化是转。攒是程度，转是事件。把“会”当成程度，会出一个很常见的毛病：觉得多练几遍、多攒一

点，自然就“更会”了。可是攒得再多，没有转，就还是一锅糖水。很多学生刷了几百道题、背了一整本笔记，攒了很多，就是没有转。

教室里也有这样的“一下”。一个初一的学生学有理数，“减去一个负数，等于加上它的相反数”，规则背了，题也做了二十道，心里一直别扭：减怎么会变成加？有一天老师没讲规则，只问了一句：“你欠同学十块钱，同学说这笔账不用还了，你是多了钱还是少了钱？”他想了几秒，说：“多了。”老师说：“那就是减去一个负十。”他“哦”了一声。那一声以后，减负数在他身上不再是一条要背的规则，是一件自己讲得通的事。前面那二十道题是攒，那一声“哦”是转。

这里还要拆穿一个常见的错觉：分数让“会”看起来像程度。一张十道题的小测，对了七道，常被说成“会了七成”。可是这七道，可能是七次碰巧在场、七次凭印象套对，一颗粒子也没有。也可能是一颗粒子结成了，覆盖了七道题里的那一类，剩下三道是另一类，还完全没开始。两种情形分数一样，身上的东西完全不同。

分数是把一件件“发生了／没发生”的事，摊平成了一个百分比。摊平以后，事件就看不见了。第 20 章讲评价时，会把这一层重新拆开：不问“会了几成”，问“哪几颗结成了，哪几颗还没有”。

◆ 五、三判据，就是粒子的三个样子

既然会是一件事，就要能认出它发生了没有。本书用三判据来认：稳定、整体、独立。这三条不是本书另外发明的考核标准。它们就是粒子本来的三个性质（见书二第 7 章）。一样东西结成了粒子，它自然就有这三个样子；没结成，三条里总有一条过不去。

稳定：换个场合，它还在吗？　林家豪真正会了以后，有一回煤气罐快用完了，火比平常小；又有一回猪肉换了供应商，从马来西亚来的变成了冷冻的澳洲

肉，肥瘦不一样。还有一年中秋前，熟客订了五十份，他第一次用大锅一次做。三回场合都变了，三回做出来，都还是那个味。稳定，不是每次都做得一模一样，是条件变了，它还认得出自己。

课堂上，测稳定最简单的办法，是换一个问法，换一个情境。第 3 章讲过那道有名的题：会算牛顿第二定律的学生，问他“球抛上去以后受几个力”，答错了。牛顿第二定律在他身上，换了一个问法就不在了。

整体：不靠提示，它能自己成一件事吗？ 会了以后，林家豪能不看收据本，从头到尾把一锅红烧肉讲出来，讲成一件事，而不是一张清单：“糖色不是看颜色，是听泡。泡一变细，香味一转，肉就要下去；酒要沿锅边，让它先在热锅边上冒一下；火小到汤面只冒小泡；筷子插得进，才算到。”

更要紧的是，你从中间任何一步打断他，问“为什么”，他都接得上，而且接上的是别的步骤。为什么酒要沿锅边？因为糖色那一步把锅烧得很热，酒碰热锅边才出香。每一步都牵着别的步骤，拆开就不是它了。

1981 年，Chi、Feltovich 与 Glaser 做过一个研究，正好说明整体和不整体的差别。他们请物理学博士生和刚学完一学期力学的本科生，把二十四道力学题分类。本科生按表面分：这几道有斜面，那几道有弹簧。博士生按原理分：这几道是能量守恒，那几道是牛顿第二定律。本科生手里也是一堆东西，可那是一堆按样子摆放的零件；博士生手里，是几颗各自成一整件事的东西。

独立：离开书、离开老师，它立得住吗？ 林家豪会了以后第二年，舅舅收了档，回马来西亚老家养老。又过一年，梁阿姨的女儿接她去澳洲住，卤鸭档也关了。教他的两个人都走了。那一年过年，他在家里给妈妈做红烧肉，用的是家里那个小小的电磁炉，锅也是一口薄底锅。做出来，妈妈吃了一块，说：“跟你舅舅的一样。”

独立，就是教你的人走了，那本书合上了，它还在你身上，还能被你带到一个从来没去过的地方。

在这一条上，有一个研究常被拿来提醒人们，独立有多难。1980 年，Gick 与 Holyoak 先给人读一个故事：一位将军要攻打一座四面有路的堡垒，每条路都埋了地雷，大军一走就炸。他把军队分成小队，从四面同时进攻，在堡垒会合。读完以后，再给他们一道看起来毫不相干的医学难题：一束强射线能杀死肿瘤，也会烧伤沿途的好组织，怎么办？

答案和故事是一个道理：分成几束弱射线，从不同方向照，在肿瘤处会合。可是大多数人没有想到用刚读过的那个故事。只要提示一句“前面那个故事也许有用”，大多数人马上就解出来了。那个故事他们读懂了，也记住了。可它还贴在“将军和堡垒”上，没有离开它出生的地方。三判据可以排成一张表。

判据	粒子的哪个性质	一句话怎么测	林家豪的红烧肉	课堂上	过不去时的样子
稳定	不随一次场合散掉	换个问法、换个情境，它还在吗	火小了、肉换了、一次做五十份，还是那个味	换一道生活里的题，看它还认不认得	换个说法就不会了
整体	拆开就不再是它	不靠提示，能说成一整件事吗；从中间打断，接得上吗	不看本子讲完一锅肉，问哪一步都能牵出别的步骤	撤掉提示，让他从头讲一遍思路	只剩一张清单，问“为什么”就断
独立	能离开发生地，带去别处	离了书和老师，立得住吗	舅舅、梁阿姨都走了，在家用电磁炉照样做出来	隔一段，换个老师、换个场合再考	要等人提示一句才想得起来
三条都过	一颗粒子结成了	三问都答得上	会做红烧肉	会了这一类题	
三条都不过	还是一团在场的特征	三问都答不上	吃到了、拿到了方子	看懂了	解答一撤就散

◆ 六、骑车、游泳、母语，为什么忘不掉

上一章留了一个问题：为什么骑车、游泳几十年不碰，一上手就回来；一门外语，像何志强的德语，十年就松了一大半？本书的回答是：骑车和游泳，走到了粒子化；何志强的大部分德语，停在了维持。

维持住的纠缠，连接度再高，也还要再用和场一直拉着；拉的力一减，它就松。松了，没断：此刻够不着，重学时却快得多，第 8 章的“节省”量的就是这个。可是一旦结成了粒子，情形就变了：它的连接不再只靠外面拉着，而是由身体自己托住。

骑车的那颗粒子，连着的点多得数不清：眼睛看路的余光，屁股感到的车座倾斜，手腕下意识的一转，脚踩下去的节奏，风从哪边来。这些点不是一条条排着的，是互相牵着的，一处偏了，别处自己补上。这样一团东西，要把它拆散，太难了。用前一章的话说，它的连接度极高；用书二的话说，内能大。所以几十年不骑，人还会生疏，前几分钟车把有点晃；可是不用重学，晃几下就回来了。生疏的是维持那一层，粒子本身还在。

有一个病例，把这件事显得格外清楚。二十世纪五十年代，一位后来在文献里被称作 H.M. 的病人，因为手术失去了形成新记忆的能力。心理学家 Milner 请他练“镜画”：只看镜子里的倒影，沿着一个星形描线。这很难，一开始描得歪歪扭扭。他连练了三天，一天比一天描得好。可是每一天，他都说自己从来没做过这件事。

手上那份本事一天天在长，而“我练过这个”的那一层，一点也没有留下。他手上学到的东西，离开了“记得学过”，自己立住了。本章说独立，是离开书和老师还立得住。H.M. 身上离开的，比书和老师更近一层：连“我学过”这份记忆都不在了，手上的东西照样在。这是独立最极端的样子。

语言也一样，只是要分清是哪一种语言。林家豪从小在家听外婆说福建话，在学校说华语和英语，在巴刹跟卖菜的阿姨讲几句马来话。福建话他一天课也没

上过，到今天，舅舅从马来西亚打电话来，他一开口就是。福建话在他身上，是从小和一家人的饭桌、外婆的骂声、过年的拜拜一起长出来的，早就结成了粒子。

何志强的德语，是另一种样子。大部分词只连着中文意思一个点，从来没结成一颗能自己立住的东西，只能靠场和再用撑着。场一撤，就松了。少数几个词，像那个“扭矩”，在车间里连上了扳手和读数，才有了点粒子的样子，所以留了下来。

所以，“忘不掉”不是因为骑车、游泳、母语这几样东西天生特别，是因为它们走完了粒子化这一段。哪一样东西走完了这一段，哪一样东西就会变成“忘不掉”的那一类。

◆ 七、红烧肉在三界里走了一遍

那么，林家豪的红烧肉，是怎样从收据本上，走到他身上的？用本书三界符号的说法（见书二第 10—12 章）：收据本上那几行字，是理念符号，是一套说法。那一锅锅做出来的肉，包括倒掉的那十几锅，是现实符号，是做出来、摆在那里、错了有后果的东西；“我会做红烧肉”，是自我符号，是长在他身上的那一份。

学会，就是一样东西从理念走到现实，再从现实走到自我。每走一步，都要付能量。先放一个课堂里的同样走法，好对照着看。

初二物理讲浮力。课本上的“浮力等于排开液体的重力”，是理念符号；学生背得出，题也会代。老师发给每组一张锡纸，让他们折一条小船，往上放硬币，看谁的船载得多。很多组的船，硬币一放偏就翻了，一放多就沉了。这一条条翻掉、沉掉的船，是现实符号，错得有后果。

学生得回头去想：船底为什么要宽？边为什么要立起来？硬币为什么要摆在中间？几轮下来，有的学生不看课本也能说出“船要多排开一些水”，还会动手

改一条别人的船。到这时，“我能自己弄出一个浮得住的东西”在他身上冒了头，这是自我符号。课本那一句话，从纸上走到锡纸船上，再走到学生自己身上，每一步都要付力气。只停在第一步的，是会代公式；走完三步的，才是会了浮力。

第一步，从理念到现实，是那十几锅。收据本上写着“炒到枣红色”。这四个字，在梁阿姨身上连着几十年的手感；在林家豪这里，只是四个字。他第一次照做，就撞上了对不上。

这里要先把那条缝事前指认清楚。不是事后说“他一定在哪里卡住过”，而是当时就找得到。小贩中心的灯是偏黄的日光灯，锅是黑的，在那盏灯底下看锅里的糖，颜色和白天在家里看不一样。他眼睛里看到“枣红”的那一刻，糖其实已经过了，下肉时就苦了。他看到“还没到枣红”、早一点下，又甜得发腻。收据本上的那个“枣红色”，和那口锅在那盏灯下的样子，对不上。

这条缝，是梁阿姨替他点破的。有一天她站在档口外面看他炒糖，忽然说：“你别看颜色了，你听。”他愣了一下。“听什么？”“听泡。一开始是大泡，哗哗的；快好的时候，泡变细，声音变沙；还有闻，甜味里出来一点焦香，就是那一下。”

那天晚上，他炒糖时第一次没盯着颜色，竖着耳朵听，鼻子凑过去闻。那一锅糖色，没有苦。梁阿姨那一句话，没有替他炒，只是在他卡住的地方托了一把。卡住是他的，力气也是他的。这三样都有了：对不上、场、他自己付的动能。

可是这一锅，还不是“会了”。那以后的几个月，他又倒过几锅：有时候糖色对了，火候又不对；有时候火候对了，酒下早了。他在一点点把听泡、闻香、火的大小、肉的软硬、时间的长短，一样样接起来。这是建立。他每天收档做一锅，一天也没断，这是维持。

第二步，从现实到自我，是那个下雨的晚上。大约在他来档口的第二年，有一晚下大雨，小贩中心里没几个人。煤气罐快空了，火比平时小。他没多想，糖多炒了一会儿，等泡变细；肉下去以后，小火多焖了二十分钟；收汁时，他用筷子戳了几下，觉得还差一点，又多等了一会儿。

那一锅，他自己也说不出和平时有什么不同。第二天中午，常来的郭伯吃了一块，放下筷子说：“今天这个对了。”郭伯七十多岁，吃了舅舅这锅肉二十年。他说“对了”，不是“好吃”，是“对了”。

林家豪后来回想，那一晚手上做的，正是前面一年里一点点接起来的那些东西。只是这一回，它们不靠他一样样去想，自己合成了一件事。火小了，它自己知道要多炒一会儿；肉还差，它自己知道要多等。那一锅以后，他不再看收据本了。这一段经历，显出了一个会做红烧肉的林家豪。

◆ 八、答案能转手，纠缠不能代建

现在可以说本书最不留余地的一句话了：

答案可以转手，纠缠不能代建。

梁阿姨的方子，第一个星期就完整地转到了林家豪手里，一个字没漏。这是答案的转手，它几乎不花力气，一张收据本就装下了。可是方子到手的那一天，红烧肉并没有在他身上。在他身上长出红烧肉的，是那十几锅倒掉的肉、那一句“你听”、那一年天天收档后的一锅、那个下雨的晚上。这些，梁阿姨给不了，舅舅也给不了，谁也给不了。

这不是因为梁阿姨藏了什么。是纠缠这样东西，只能在付了动能的那个人身上建起来。别人付的动能，建的是别人身上的纠缠。教室里，这样的转手天天在发生，而且常常转得很漂亮。

一位老师把一道难题讲得清清楚楚，每一步都有来由，板书工整，学生频频点头。这是一次高质量的答案转手。可是下课铃响的那一刻，讲台上那条纠缠，是老师身上的；它是老师当年一道道题做出来、一届届学生问出来的。学生拿走的，是它的一张拓片。

拓片不是没用。拓片能让学生知道“原来是这个形状”，能让几样特征先到场。可是拓片要在学生身上长成东西，得有学生自己的一次卡住、自己的一次重接。讲得越清楚，越容易让人误以为拓片就是那样东西本身。

今天，答案转手比当年更容易了。档口去年来了一个帮工，陈启明，十九岁。他第一天就跟林家豪说，红烧肉不用教，他在手机上问过 AI 了，还看了好几个视频。AI 给的方子比梁阿姨那张还细：五花肉多少克，冰糖多少克，油温多少度，焖多少分钟，连“糖色起小泡时转小火”都写了。

陈启明照着做了第一锅，挺像样，比林家豪当年的第一锅强多了。可是第二个星期，煤气罐换了一个新的，火一下子变大，他按方子上的分钟数做，糖色焦了。他拿出手机重新问，AI 也很耐心，告诉他“火力不同时请适当调整时间”。他问：“调多少？”这一问，没有一个方子答得上。

AI 给他的，是一份比收据本更好的理念符号；视频给他的，是一锅锅别人做出来的现实符号。他两样都看懂了，也都记住了。可是“火大了要怎样”，要靠一颗在他身上结成的粒子去应对，而这颗粒子，只能由他自己一锅锅付出去。书二第 25 章讲的正是这件事：免费的符号不结晶。这里换成厨房里的话，就是：方子可以抄，手不能借。

这不是说 AI 没用。陈启明的第一锅之所以比林家豪当年像样，正是因为 AI 把很多弯路先替他排掉了。它像一个随叫随到的梁阿姨，能在他卡住时托一把，能提醒他“下周三再做一次”。它是一张极大的场。建立时，它能托住他的卡住；维持时，它能帮着付功。它不能替他付动能，也不能替他粒子化。

林家豪后来带陈启明，用的是梁阿姨当年对他的办法。他不再拿手机给陈启明看方子，而是让他炒糖时把手机收起来，站在旁边，等他快炒过头了，说一句：“你听。”陈启明炒焦了两锅。第三锅，他抬起头说：“好像变细了。”那一下，林家豪没说对也没说错。他知道，那是陈启明自己的那条缝，刚刚裂开。

◆ 九、活的会，熔得开

讲到这里，还差最后一段：会了，是不是就到头了？还没有。前年，郭伯来吃饭，说医生让他少吃糖。他说：“你的肉，我以后只能闻闻了。”林家豪的第一个念头是：“少了糖，就不是红烧肉了。”这句话很要紧。它说的是：我身上这颗粒子，就是这个样子，不能动。

如果这个念头一直不松，那颗粒子就开始固化了。它还稳定、还整体、还独立，三判据一条不少，只是它再也熔不开了。凝在对象那一端，“红烧肉就该是这个配方”，配方成了偶像；凝在自我那一端，“我就是做这一种肉的人”，这就是石心（见书二第 19 章）。

心理学里有一个老实验，把固化的样子显得很清楚。1942 年，Luchins 给人出一组用水罐量水的题：三个容量不同的罐子，要量出一定的水。前面几道题，都用同一个比较绕的公式解。做熟了以后，再给一道题，用那个绕的公式也能解，可是有一个简单得多的解法。没做过前面那几道题的人，一眼就看到了简单的；做熟了的人，大多还在用那个绕的公式。有一道题那个公式根本解不出来，不少做熟了的人就卡在那里。

那个绕的公式，在他们身上已经结成了一颗粒子，稳定得很。可是它熔不开了。第 2 章讲的刷熟型假会，就是这个样子。刷出来的也是粒子，“见到这种题型就套这个公式”，相当稳。可是它只结在理念一界，碰到一道换了情境的题、一个反例，它松不开，只能硬套。所以本书在“学会”后面，还要加一句：

活的会，下一次对不上时熔得开，能再结晶。

林家豪那颗粒子，后来熔开了。不是一个晚上的事。他先试着把冰糖减掉一半，做出来颜色淡、味道薄，郭伯吃了说“不是那个味”。他又试了加红枣和洋葱，靠它们出甜味；试了让肉在锅里多煎一会儿，靠肉自己煎出焦香和颜色，糖色只做个底。他听泡、闻香、看颜色的那一整套，被拆开了一部分：原来“甜里带焦香”大半靠糖色，现在要从三个地方凑。前后试了一个多月，倒了五六锅。

后来档口的菜牌上多了一行小字：“少甜红烧肉，可选”。郭伯吃了，说：“还是那个味，淡一点。”这一个多月，就是熔开与再结晶（见书二第 20 章）。旧的那颗粒子没有被扔掉，它被熔开，一部分接到了新的东西上，再结成一颗新的。新的那颗，也稳定、也整体、也独立，而且它比原来那颗多了一样东西：它知道自己是可以被熔开的。

课堂上，熔开也有它的样子。小学高年级的学生，很多人身上结着一颗很稳的粒子：“一个图形面积越大，周长就越长。”平时做题，它几乎从不出错，因为课本上的长方形大多是这样的。有一天老师发下两张图：一个细长的长方形，周长二十四，面积十一；一个正方形，周长也是二十四，面积三十六。再问：“还有没有周长更长、面积反而更小的？”

有的学生盯着两张图，说“老师你画错了”。这是那颗粒子在顶着。有的学生愣了一会儿，开始在格子纸上自己画，画了五六个，忽然说：“周长和面积不是一回事。”这一句话，是那颗旧粒子熔开了，又长出了一颗更大的：周长管的是边有多长，面积管的是里面有多大，两样各走各的。

同样一颗稳稳的粒子，碰到同一个反例，有的顶回去，有的熔开。看的不是谁更聪明，是那颗粒子还活不活。熔得开，不是说会得不牢。正好相反，一颗结

得不牢的东西，连熔开的资格都没有，它一碰就散。只有结得牢的，才谈得上熔开再长。

◆ 十、收账，收到你自己身上

全书第一编讲了三种假会。到这一章，五段账走完了，可以把它们放在一张表里收账。

	停在哪一段	三判据哪条先不过	红烧肉的样子	课堂上的样子	要的药
看懂型	○ 在场，没有建立	三条都不过；解答一撤就散	看梁阿姨做一遍、看几个视频，“我都看懂了”	AI 给步骤，读一遍，点头	留一处对不上，让他自己卡住（第 1、7、10 章）
背住型	二 维持，靠外力撑着	稳定不过；隔两周、换个问法就够不着了	把方子背得一字不差，考你“冰糖几克”全对	考前背熟公式，两周后就松了，想不起来	多接几个点，隔一阵自己拉，给他一张场（第 3、8 章）
刷熟型	三—四 粒子只结在理念一界，熔不开	三条在同类题里都过；一换到现实情境、一给反例就卡	同一口锅、同一个火、同一家肉，做一百锅都对，换了煤气罐就焦	这种题闭眼都会，换一种问法就不会	给反例、换情境，让粒子熔开再长（第 2、20 章）

停在哪一段		三判据哪条先不过	红烧肉的样子	课堂上的样子	要的药
会了，却熔不开	三 粒子化，开始固化	三条都过，只是碰到新的对不上时松不开	“少了糖就不是红烧肉”	“这类题就该这样做”，不肯换路	新的对不上，加上还没耗尽的动能
活的会	四 熔开再结晶	三条都过，而且熔得开	减了糖，从三个地方重新凑出那个味	碰到反例，松开旧做法，重新长出一个更大的	这就是教育要的产品

三种假会都不是“没努力”。看懂型的孩子花了一个半小时读解答；背住型的孩子背到半夜；刷熟型的孩子刷了几百道题。他们都付了力气，只是付在了不同的段上，又各自停在了不同的段上。所以药也不同。给看懂型的孩子加题量，他会变成刷熟型；给刷熟型的孩子讲解答，等于再给他一次在场。先看清他停在哪一段，再下药。

这张账还差最后一笔。回到一个前人五家都没有碰的问题：这颗粒子，落在谁身上？本书的回答是：学会的落点，是自我符号（见书二第 12、26 章）。林家豪会了红烧肉以后，身上多了的，不只是一道菜。

舅舅收档那年，档口要不要续租，家里人意见不一。他妈妈担心他一个人撑不住。那一次，他没有多说什么，只说了一句：“肉我会做。”这一句“肉我会做”，说的已经不只是红烧肉了。它底下压着的，是一个更大的东西：“我是一个能把一样东西从做不对，一锅锅做到对的人。”这样东西不在收据本上，不在任何一口锅里，在他身上。

后来他学做别的菜，学修档口的抽油烟机，学用平板电脑记账，碰到做不对的时候，这样东西都在。它不告诉他每一样该怎么做，它只让他知道：做不对，是还没到那个下雨的晚上。一颗理念界的粒子，走到了现实界，又在自我界落了地。到这一步，学会才走完了。

学生身上也一样。一个孩子真正会了分数除法，留下的不只是“颠倒相乘”这一条规则，还有一个小小的自我符号：“我是能把一件弄不懂的事弄懂的人。”一个孩子背熟了一百条规则、刷熟了一千道题，却一次也没有经历过“做不对，再做，做对了”。他身上落下的自我符号，可能是另一句：“我是靠背才能过关的人。”或者更糟：“我是学不会的人。”

这几句话，都是自我符号；都稳定、整体、独立。区别只在于，第一句是从对不上里长出来的，熔得开；后两句是从一次次没有发生里沉下来的，最容易变成石心。

陈启明身上，这样东西也刚刚冒头。那天他第三锅糖色没焦。收档以后，他没像往常一样马上掏手机，而是在档口后面又站了一会儿，问林家豪：“老板，下次火小一点的时候，是不是要多等一下？”这一问还很小，答案也还要他自己一锅锅去试。可是问的方式变了：以前他问的是手机“要几分钟”，这一回他问的是自己手上的下一锅。一个“能从自己的锅里问出问题来的陈启明”，在那一晚显出了一点点样子。教育交到一个孩子手里的，最后是这一颗。

◆ 十一、放回日子里

想一样你自己“真会”的东西：一道拿手菜，一种乐器，一门手艺，开车，或者某一类工作上的事。试着找一找那个“下雨的晚上”：它是哪一天，从不会变成会的？那之前，你倒掉过几锅？谁在你卡住的时候说过一句“你听”？

再想一样你“以为会”的东西。拿三判据问它：换一个场合，它还在吗？不看任何东西，你能把它从头讲成一件事吗？教你的人不在了，书合上了，它立得

住吗？最后问一句最难的：碰到一个新的对不上，比如你的那道拿手菜要少盐、要换锅、要做给一个口味完全不同的人吃，你那颗粒子，熔得开吗？

如果你是家长或老师，下一次孩子说“我会了”，别只问“你会了吗”，问三句：换个题你还会吗？不看书你能讲给我听吗？要是这道题变了一下，你会怎么办？三句都答得上，再问第四句：你是从哪一步卡住，又怎样接上的？能答出这一句的孩子，身上多半已经有了一颗自己的粒子。

带 走 的 话

学会是纠缠结成粒子、一个符号在你身上发生；答案可以转手，纠缠不能代建，活的会还要熔得开。

小　账

赖尔分出了“知道怎样”，波兰尼看见了“说不出”，门槛概念看见了“一跨就变”；可是“会”怎样长出来、落在谁身上、跨过去还熔不熔得开，门都关着。本书打开的是“会是一次发生”：它有条件、有三判据、要付能量，还要熔得开。发生被收回为发现的那一下，在“把方子传给他”这句话里：仿佛会就装在方子里，拿到了就有了；可是方子到手那天，红烧肉还没有在他身上发生。

想 一 想

1. 你身上哪一样本事，是在某一个具体的晚上、某一下子会的？那之前你攒了多久？
2. 你有没有一样“会了”却熔不开的东西？碰到要改的时候，你心里冒出的第一句话是什么？
3. 你今天抄到手、收藏起来的那些“方子”里，有哪一个，你愿意为它倒掉几锅？

◆



第　四　编

建立的三个条件，逐条讲

导　语

学习是纠缠的建立，建立要三样东西同时在。这一编一章讲一样。第 10 章讲对不上：许文静只多发了一张写预测的纸条，演示就不再只换来一声“哇”；写下来才算押上，对不上要能事前独立指认，落差还要不大不小。第 11 章讲场：投票之后的三分钟讨论托住了多数孩子，却没托住独坐的那一个；场不是气氛，是能回应、能拉扯的网，要排在卡住之后。第 12 章讲动能：会算不等于说得出为什么，力气必须由学的人自己付，方向比大小要紧，建立付了多少，维持就省多少。三个条件讲清了，下一编转过来看，学不进的人缺的是哪一样。

10

第 10 章

对不上：卡住是怎样被设计出来的

这一章的问题

老师的演示让全班“哇”了一声，人人点头，一个月后的考卷上却又写回了老想法——那一声“哇”为什么什么也没留下？

南京，十一月的一个周二下午，第七节课。许文静三十五岁，在一所初中教物理，教了十一年。这节课是八年级的“流体压强与流速”。

去年同一节课，她是这样上的。拿两张 A4 纸，竖着垂在面前，对着两张纸中间用力一吹。两张纸没有分开，反而贴到了一起。教室里“哇”了一声，有人拍桌子。她接着讲：流速大的地方压强小，外面的空气把纸压到了一起。学生点头，抄笔记，下课。

一个月后单元测，有一道题：两只小船并排停着，中间的水流得快，船会怎样？全班四十六个人，二十来个写“被水冲开”。她把那摞卷子翻来覆去看了一晚上。那一声“哇”是真的，点头也是真的。可是一个月后，学生手上写出来的，还是进教室之前的那个想法：吹气，就是把东西推开。

今年她只改了一个小地方。纸还没拿出来，先发一张小纸条，上面只有一行字：“两张纸垂着，往中间吹气，会怎样？为什么？写下来，写上名字，三分钟。”多出来的只是三分钟。这三分钟里发生了什么，就是这一章要讲的。

◆ 一、看过的演示，为什么留不下

许文静的困惑，不是她一个人的。第 3 章那位被一次测验逼着改了教法的 Mazur，后来和同事做过一个很朴素的研究。论文 2004 年发表在《美国物理学杂志》上，作者是 Crouch、Fagen、Callan、Mazur。一门面向医学预科生的物理课，一个学期放七个课堂演示。同一个演示，不同的小班用不同的方式看。

有的班只看，然后听老师解释。有的班先写下预测，再看，再听解释。有的班写预测、看、和旁边的同学讨论，再听解释。还有一组对照，根本没看这个演示。到了期末，出一道和演示情境一模一样的题：会发生什么？为什么？

结果是这样的。没看过演示的，结果答对约六成一，解释答对约两成二。只看过演示的，结果答对七成，解释答对约两成四。先写预测再看的，结果答对七成七，解释答对三成。写预测、看、再讨论的，结果答对八成二，解释答对三成二。

这组数字里最扎眼的是第二行。演示做了，老师讲了，学生也看了。到了期末，解释的正确率和没看过的人只差两个百分点，统计上站不住。作者说得很直白：学生从传统的课堂演示里，学到的很少。

先写预测，只多花了两分钟左右。这两分钟换来的，是解释正确率从两成出头到三成。数字不算惊天动地，作者也老实承认，解释的正确率整体都不高。可是方向是清楚的：同一个演示，同一位老师，同一段讲解，差别只在学生在看之前，有没有把自己的想法押在纸上。

这个研究的题目本身就是一个问题：课堂演示，是学习的工具，还是一场表演？演示越精彩，越容易成为表演。烟雾、火花、爆裂声，学生记住的是那一下的热闹，不是热闹背后那条要重接的连接。

讨论那一组又多花了八分钟，解释的正确率只多出两个百分点。这一点留到下一章再说：场有用，可是它的用处排在对不上之后。

看，是在场；先押上一个想法再看，才可能是建立。

用本书的五段账说。只看演示的学生，“吹气”“纸”“靠拢”“流速”“压强”这些特征同时在场，被老师的解释串着，挨在一起。下课铃一响，解释一撤，它们各回各家。期末写出来的，是那个比演示更老、连接更多的旧想法。先写预测的学生，多做了一件事：把旧想法摆到了桌面上。纸靠拢的那一下，砸在自己写下的那一行字上。

◆ 二、前人早就把卡住摆上了桌

把预测放在观察前面，不是本书的发明。前人在这条路上走了很远，要先写足。

第一家：预测—观察—解释。 澳大利亚的两位科学教育学者 White 与 Gunstone，1992 年出版了《探查理解》（Probing Understanding）。书里把这件事整理成了一套可以照着做的办法，叫“预测—观察—解释”，英文缩写 POE。

步骤只有三步。先让每个学生各自写下会发生什么、为什么。再做演示，让学生仔细看，记下看到了什么。最后让学生对照自己的预测，修改或补充解释，然后一起讨论。这套办法后来在科学课堂里传得很广。从小学的磁铁实验，到大学的化学实验，都有人用。

它对在哪里，有三处。第一，它把“学生原来怎么想”当成了课的原料，而不是课的障碍。在它之前，课堂演示多半是老师的表演，学生的旧想法是要被纠正的东西，最好别冒出来。POE 反过来，请旧想法先冒出来，还要写在纸上。

第二，它把预测定成个人的、书面的。不是老师问一句“大家觉得会怎样”，几个快嘴的孩子抢着答。每个人都要交一张纸，最沉默的孩子也有一行字。

第三，它把解释放在观察之后，而且先是学生自己的解释。老师的讲解不是不要，是排到了学生自己试着说之后。

第二家：先要对旧概念不满意。 再往前十年，1982 年，Posner、Strike、Hewson、Gertzog 四位学者在《科学教育》杂志上提出了“概念转变”的说法。他们讲，一个学生要放下旧概念、接受新概念，要满足四个条件。先对旧概念不满意；新概念要听得懂；新概念要看起来说得通；新概念还要能带出更多的东西。

四条里，排第一的是“不满意”。这已经很接近本书说的“对不上”了。旧概念用得好好的，人不会去换它。要换，先得让它在某一处卡一下。

更早，美国心理学家 Ausubel 在 1968 年的教育心理学教科书扉页上写过一句很有名的话。大意是：影响学习的最重要因素，是学的人已经知道了什么；先弄清这个，再照着去教。这句话是这一整条路的起点。

七八十年代，英国学者 Driver 和法国同行 Guesne、Tiberghien 等人做了大量访谈。他们把孩子们进教室之前对自然的想法一条条记下来。1985 年，这些记录编成了《儿童的科学观念》（Children's Ideas in Science）一书。“东西要一直推才会一直动”“热是一种会流来流去的东西”“植物从土里吃饭”，这些想法不是胡说。它们是孩子从日子里一点点攒出来的，很结实，也很难改。

这一路研究给教师留下一句朴素的话：学生不是空着脑袋进教室的。他们带着一整套用了很多年的想法，而且这些想法在日子里大多是好用的。

第三家：人有很多办法躲开对不上。 1993 年，Chinn 与 Brewer 在《教育研究评论》上发表了一篇长文，专门问一个问题：学生，还有科学家，遇到和自己想法不符的数据，会怎么办？

他们归纳出七种反应：不理它；说数据不可靠；说这事不归我的理论管；先放一边，以后再说。重新解读数据，让旧理论原封不动；重新解读数据，旧理论小修小补；接受数据，改掉自己的理论。七种里，只有最后一种是真改。

这篇文章的价值，在于把教师常有体会、却说不清的一件事说清了：对不上出现了，不等于学生会学。前六种反应，都在保护旧想法。把这七种放回教室里，听上去是这样的：

Chinn 与 Brewer 的反应	教室里听到的话	旧想法的下场
不理它	（低头写别的作业）	原封不动
说数据不可靠	“老师，你纸没拿好吧”	原封不动
说不归我管	“这个考试又不考”	原封不动
先放一边	“反正老师会讲的”	原封不动，等着被一个答案盖上
重新解读，保住旧理论	“是我吹歪了，气从旁边绕过去推的”	原封不动，还加了一层保护
重新解读，小修小补	“吹气一般推开东西，这次例外”	旧的还在，旁边多了一条例外
接受数据，改理论	“那吹气不一定是推，可能是别的”	熔开，开始重接

三家合起来，前人已经说清了三件事：要先把旧想法摆出来；要先让人对旧想法不满意；而对不上出现以后，人有很多办法躲开它。

◆ 三、它们停下的地方

可是三家都停在了同一道门口。POE 告诉你怎么做，没告诉你为什么非要“先写下来”。在很多用它的课堂里，预测这一步被理解成“激发兴趣”“调动积极性”。于是有的老师改成口头问一句“大家猜猜看”，觉得效果差不多。

Crouch 等的数据说明，先押上一个想法再看，和只看不一样。口头“猜猜看”，他们没有单独测；按本书的账，它押不住：说出口的猜测，结果一出来就能悄悄改口，第四节会讲为什么。

Posner 等讲“不满意”，讲的是一种心理状态。不满意从哪里来，要多大才够，什么时候变成放弃，四条件里没有账可查。一个学生对旧概念“不满意”，可能是因为他真的卡住了。也可能只是因为老师说了一句“你这个想法是错的”。后一种不满意，只换来了一句新的标准答案，旧的那条连接在身上一点没动。

Chinn 与 Brewer 把七种躲法列得很细，也提到了旧理论扎得深、新理论不好懂、数据不够硬，都让人更容易躲。这些是对的。可是“什么条件下人才会走到第七种”，没有写成一张可以设计的单子。还缺两样：有没有人托住这次卡住，学的人有没有力气去拆、去接。这两样，就是下面两章的场和动能。

还有一处更要紧的地方，三家都没有守住：对不上，由谁说了算？一节课上完，学生学会了，老师回头说：“那个演示制造了认知冲突。”学生没学会，老师又说：“冲突不够强烈。”怎么说都通。一个怎么说都通的解释，就什么也没说。

书二第 14 章立过一道闸：对不上必须能在事前被独立指认。本章要做的，是把这道闸落到一张三分钟的纸条上。

◆ 四、写下来，才算押上了

先把本书的说法摆出来。对不上，是学的人身上已有的一条纠缠，和摆在面前的东西，在同一处往两个方向拉。许文静的学生身上，“吹”和“推开”之间有一条很结实的连接。吹蜡烛，火苗往外倒；吹蒲公英，绒毛飞走；吹桌上的橡皮屑，屑往外跑。几百次、几千次，这条连接被日子一遍遍踩实了。

它属于自我符号那一角。不用想，嘴和手就知道。两张纸往里靠的那一下，属于现实符号那一角。它就在眼前，谁都看得见。课本上那句“流速大的地方压强小”，属于理念符号那一角。

三个角里，自我和现实对不上，才逼出理念那一角的重写。按书二的三角方程，这就是：理念＝F（现实，自我）。理念符号不是老师递过来的一句话，是两角拉扯之后，学生自己重接出来的那条连接。那么，那张纸条起了什么作用？

写下来的预测，就是对不上的事前独立指认。

它做了三件事。第一件，把旧纠缠从身上请到了纸上。“吹气会把纸吹开，因为气把纸推出去了。”这一行字，就是那条“吹＝推开”的连接第一次被看见，被写成了句子。没写之前，它藏在手感里，学生自己都不知道自己是这样想的。

第二件，给落差一个刻度。写“吹开”的学生看到纸靠拢，落差是满的。写“不动”的学生，落差是半个。写“靠拢，可是不知道为什么”的学生，落差落在“为什么”上，不在“会怎样”上。三种人，三种卡法，老师在演示之前就分得出来。

第三件，堵住事后的“我早就想到了”。心理学里有一个老发现，叫“后见之明偏差”。Fischhoff 在 1975 年做过一组实验：先告诉人们某件事的结果，

再让他们估计各种结果的可能性。知道了结果的人，会把那个结果估计得更可能，也更容易觉得自己原来就这么想。同年，他和 Beyth 还做过一个研究：请人们在事前估计一次外交访问的各种结局，事后再请他们回忆当初的估计。已经发生的那几种结局，被记成了当初就看好的。

课堂里也一样。纸靠拢以后，再问“你们原来怎么想的”，会有不少人说：“我觉得会靠拢。”不是撒谎，是记忆被结果改写了。纸条上那一行字，改不了。

所以，预测必须是事前的、个人的、书面的，三样缺一不可。事前，才不被结果改写；个人，才不被抢答的同学带走；书面，才不被记忆悄悄修正。第 21 章第九节检验本书自己时，守的是同一道闸，只是再加上封存和旁人核对。

还有一件事要说清：预测不打分，也不该打分。一打分，学生就会去猜“老师想要的答案”，不再写自己原来的想法。猜中了，纸条上写的就不是旧纠缠，是一个应付出来的句子。对不上就落空了，砸下来的那一下，砸在一个本来就不属于他的句子上。

还有一层更深的原因。纸条写错了，砸下来的那一下，应当砸在那条连接上，不应当砸在人身上。一个孩子写了“吹开”，看到纸靠拢，心里冒出来的可以是“原来气不是这样走的”，也可以是“我又错了，我就不是学物理的料”。前一种，被拉扯的是一条关于空气的连接；后一种，被拉扯的是一个关于自己的自我符号。后一种一旦被反复砸中，会慢慢结成第 2 章讲过的那种石心：“我是学渣。”

所以许文静发纸条时，会加一句：“今天写错的人，收获最大。”这不是客气话。它把落差从人身上挪回了连接上。

AI 时代还要多加一句：预测这三分钟，手机收起来。一搜就有答案，预测就成了抄答案。这和第 1 章讲的看懂型假会是同一条来路：落差在形成之前，就

被填平了。纸条上写着“流速大压强小，所以靠拢”，字是对的，身上那条“吹＝推开”一点没动，只是这一次没被请出来。

AI 倒是可以在另一头帮上忙：备课的时候，老师可以请它列出学生在某个知识点上常见的错误想法，当作猜测的清单。可是清单只是清单。哪些想法真的长在自己班上这些孩子身上，只有纸条说了算。

◆ 五、三个角，三种对不上

把对不上放回三角里看，设计的路就多了。第 7 章讲过三角的总规矩：任两类对不上，逼第三类发生，再回写给另外两类。三角有三条边，每一条边上都能起对不上。前面吹纸的例子，是现实和自我对不上，逼出理念。另外两条边，一样可以设计。下面提到的绳子、桃花源、反问句、超导这几个课例，第六、七节会细讲。

第一种，现实和自我对不上，逼出理念。 理念＝F（现实，自我）。手感说一套，眼前的事是另一套。吹纸、小船、站台安全线，都是这一种。老师要准备的，是一个学生自己看得见的现象。

第二种，理念和自我对不上，逼出现实。 现实＝G（理念，自我）。书上的道理说一套，学生心里的直觉说另一套，谁也说服不了谁，只好去做一件事、造一个东西、算一遍，让现实来裁判。绕地球的绳子就是这一种：公式在那里，直觉不服，只好动手算，算出来的那一行式子，就是一个新的现实符号。老师要准备的，是一个让学生非动手不可的问题。

第三种，理念和现实对不上，逼出自我。 自我＝H（理念，现实）。课本上的规则说一套，真实世界里的人做的是另一套，被改写的是学的人自己的习惯。英语反问句就是这一种：语法书上也许写过，可是学生一张嘴还是“Yes，I

don't”。录音里那一句 No，让规则和真实用法对上了号，要改的是学生嘴上那个习惯。老师要准备的，是一段真实的、学生能听到的用法。

哪条边对不上	方程	逼出哪一角	课堂里的样子	老师要准备什么
现实与自我	理念＝F（现实，自我）	新的理念	吹纸、小船、站台安全线	一个看得见的现象
理念与自我	现实＝G（理念，自我）	新的现实：算出、做出、造出	绕地球的绳子	一个非动手不可的问题
理念与现实	自我＝H（理念，现实）	新的自我：习惯、语感、手感	英语反问句的回答	一段真实的用法
三边都没起	对得上	什么也不逼	讲得很顺的课	这节课可以当维持，不当建立
落差没落在已有纠缠上	无从谈起	只有惊奇	超导悬浮视频	先找一个更近的现象

这张表的用处，是让老师在备课时多问一句：这一课的对不上，起在哪条边？三条边都找不到，就老实承认这一节课不是建立课，是维持课或者练习课。这没有什么不好。不好的是假装它在建立。

语文课里桃花源的“妻子”，算哪一种？课本注释（理念）和学生的现代汉语语感（自我）对不上，学生回到原文里去找证据，原文的上下文就是被“做出来”的那一份现实。它更像第二种，也带着第三种：最后被改写的，是学生读文言时的那个默认习惯。三条边常常一起起作用，这不要紧。要紧的是在事前说得出主要是哪一条。

◆ 六、落差太大，太小，刚好

对不上不是越大越好。第 4 章讲过孔子的“愤”“悱”，第 5 章讲过维果茨基的最近发展区，“够得着”的道理那里已经讲足了。这里只用能量的话补一

句。对不上是一个落差，像水位差。有落差才能做功。可是落差的大小，要和学的人身上已有的纠缠对得上号。

许文静自己，两头的坑都踩过。有一年她想给八年级“拔高”，找来一个超导悬浮的视频，让学生先预测：一块冷却后的黑色圆片放在磁铁上方，会怎样？

纸条收上来，五花八门：会掉下去；会弹起来；会冒烟；会变色；会转圈。看完视频，学生“哇”得比吹纸那次还响。可是到了解释那一步，全班没有一个人接得上。没有一张纸条上的东西，和这个现象背后的道理有任何连接。这是落差太大。

学生身上没有一条已有的纠缠被这个现象拉扯，纸条上的预测只是乱猜。乱猜的预测被推翻了，也不疼，它本来就不是谁的想法。剩下的只有惊奇。惊奇是好东西，可是惊奇不是建立。这时候的课堂，是一锅粥（混沌）。

另一头，她也试过让学生预测：松开手，粉笔会往下掉还是往上飘？全班都写“往下掉”。松手，确实往下掉。没有一个人卡住。这是落差太小。旧纠缠和现象对得上，对得上就没有解释，也就没有功可做。课很顺，顺得什么也没留下。

刚好的落差，有一个可以检验的标志。刚好的对不上，砸在学生自己写下的那句话上，而且学生说得出是哪半句被砸了。吹纸那一次，写“吹开”的学生会说：“我以为气是推东西的，可是纸是往里走的。”这就是落在已有纠缠上的对不上：他知道疼在哪儿。把三种落差放在一起看：

	落差太小	落差刚好	落差太大
预测纸条上	几乎人人写对	分成两三派，各有理由	五花八门，多是乱猜
学生身上的旧纠缠	和现象对得上	被现象拉向另一头	没有被拉到
结果出来那一下	没感觉	“我以为……可是……”	“哇”，然后茫然
解释那一步	没东西可解释	有一条具体的缝可接	接不上，只能等老师讲

	落差太小	落差刚好	落差太大
课堂的样子	定型（秩序），顺	正在成形（介生），吵	一锅粥（混沌），热闹
留下什么	什么也没有	一次建立的起点	一次惊奇

表里“课堂的样子”一行，要提醒一句：落差刚好的课堂，往往不是最安静的，也不是最热闹的。它吵，吵的是“我原来以为”。

落差的大小，还不是一个班一个数。同一个吹纸演示，对一个从小玩纸飞机、知道“机翼上面气流快”的孩子，落差是小的；对一个从没想过空气会“压”东西的孩子，落差是满的。这就是为什么纸条要个人写：落差落在每个人身上不一样，只有纸条看得见。

落差除了大小，还有长短。同一个落差，卡五秒钟就被老师讲破，学生还没来得及拆旧连接，答案已经盖上去了，这和落差太小差不多。卡一整节课没人理，学生拆开了旧的、接不上新的，散在那里，最后多半是放弃。许文静的做法是：演示之后给学生写三行的时间，大约四五分钟；写完再讨论，再讲。卡的时间，够拆，不够散。

许文静后来摸出一个笨办法。纸条收上来，如果八成以上的人写对，这个演示今年不用当对不上，当练习。如果没有任何两张纸条的理由相近，说明落差太大，先退一步，找一个更靠近日子的现象。只有分成两三派、每派都说得出理由的时候，才是刚好。

◆ 七、四门课，四次对不上

POE 出身于科学课，很容易被误会成“只有能做实验的课才用得上”。其实，凡是学生身上已有一条连接、而面前的东西会把它拉向另一头的地方，都可以设计对不上。拿来对照的不一定是实验，可以是一行算出来的式子、一段原文

的上下文、一句母语者说出口的话。下面四个课例，物理、数学、语文、英语各一个。人物和班级都是综合的，做法可以照着上。

物理：吹两张纸。　前面讲过了。旧纠缠是“吹＝推开”；现象是纸往里靠；要重写的理念，是流速和压强的关系。许文静后来又补了一步。解释完以后，再给一个新情境让学生预测：地铁站台上为什么要有一条黄色安全线？这一步不是为了建立，是为了看刚建立的那一点，能不能换个地方站住。那是第 9 章讲的粒子化的事，这里先按下。

数学：一根绕地球的绳子。　南京另一所学校，一位数学老师，这里叫他葛老师，在九年级讲“圆”这一章时，出了一道老题。假设地球是一个光滑的大球，赤道上紧紧绕一圈绳子。现在把绳子加长，让它在赤道一周处处都离地面一米高。问：绳子要加长多少？先写预测，不许算。

纸条收上来，大多数写的是“要加很多”“几千米”“几万米”。也有人写“差不多一米”。然后算。设地球半径为 R，原来绳长是 2πR；离地一米，半径变成 R＋1，绳长是 2π（R＋1）。两者相减，等于 2π，约 6.28 米。教室里安静了几秒。

葛老师又问：如果换成一个篮球，绳子也要离篮球表面一米，要加长多少？还是约 6.28 米。这里的旧纠缠，是一条很结实的日常连接：“大的东西，变起来也大。”地球那么大，一点点变化都该是天文数字。这条连接在很多地方是对的：大房子装修花得多，大锅炒菜放盐多。可是周长随半径的增量，偏偏不跟着原来的大小走。

这次拿来对照的不是实验，是一行学生自己算出来的式子。它砸下来的，是纸条上那个“几万米”。解释这一步，葛老师让学生自己说：为什么和地球的大小没关系？

一个学生说：“因为周长和半径成正比，加的那一米只乘了 2π。”另一个学生接着说：“那就是说，成正比的时候，增出来多少，只看增了多少，不看原来有多少。”后一句，比课本上说得还好。那是他自己重接出来的。

语文：桃花源里的“妻子”。 一位初中语文老师，这里叫她邵老师，在八年级讲《桃花源记》。读到“自云先世避秦时乱，率妻子邑人来此绝境”，她先不讲，发纸条：“‘率妻子邑人’的‘妻子’，是什么意思？写下你的理解。”

大半个班写“老婆”。少数人写“妻子和孩子”，多半是预习时看过注释。她不直接给答案，让学生回到原文里找证据：“一家人带着乡亲逃进深山，一住几百年，外人来时，村里男女老少都有。如果只带了老婆，这个‘率’字带的是哪些人？”

学生回头读，读到“黄发垂髫，并怡然自乐”，有人小声说：“那孩子从哪来的？”慢慢地，学生自己发现：这里的“妻子”是两个词，“妻”和“子”，老婆和孩子。接着，她又让学生预测同一篇里的“无论魏晋”：是“不管魏晋”的意思吗？这一次，有一半学生先写了“不一定，可能和现在不一样”。

语文课里，被拉扯的旧纠缠，是学生说了十几年的现代汉语。“妻子”和“老婆”之间，是一条每天都在用的连接。原文的上下文，就是这一课的“现象”。它拉扯的不只是一个词义，是一个更深的默认：“古文里的字，就是今天的字。”第二张纸条上那一半学生写了“不一定”，说明那个更深的默认，已经松动了一点。

英语：一句反问的回答。 一位初中英语老师，这里叫她蒋老师，在课上放一段录音。一个人在咖啡店问朋友：“Don't you like coffee?”朋友其实不喜欢咖啡。她让学生先写预测：朋友会怎么回答，Yes 还是 No？

大多数学生写：“Yes, I don't like it.”意思是：是的，我不喜欢。然后放录音。朋友说的是：“No, I don't.”不少学生愣住了：明明意思是“是的，我不喜欢”，怎么说 No?

蒋老师不讲规则，又放了两段类似的对话，让学生自己找规律。学生慢慢摸出来：汉语回答反问，是在回应对方的话说得对不对。英语里，Yes 和 No 跟着后面的事实走，喜欢就是 Yes，不喜欢就是 No，不管问句是正着问还是反着问。这里的旧纠缠，是母语里“是的”和“同意对方的话”之间的连接。它在汉语里用了十几年，一张嘴就带出来了。四个课例放在一起看，有一个共同点。

对不上从来不是凭空造出来的，它是在学的人身上已有的一条连接上，找到它在这里不灵的那一处。

学科	学生身上已有的连接	预测纸条上多数人写	拿来对照的“现象”	被逼出来重写的东西
物理	吹＝推开	纸会被吹开	两张纸往里靠	流速与压强的关系
数学	大的东西变起来也大	绳子要加几千、几万米	自己算出的 2π，约 6.28 米	增量和原来的大小无关
语文	古文的字就是今天的字	“妻子”是老婆	原文上下文：几百年，男女老少	古今异义，文言多单音词
英语	“是的”＝同意对方的话	Yes, I don't like it	录音里的 No, I don't	英语的 Yes／No 跟着事实走
共同点	来自日子，用了多年，很结实	书面、个人、事前	学生自己看得见、算得出、听得到	学生先重接，老师后讲

还要补一句四门课里共有的风险。刷题刷得熟的学生，在纸条上很少写错。他们一看题就认出“这是流速压强题”“这是周长题”，直接写出标准答案。这

不是落差小，是题型把落差挡住了。第 2 章讲的刷熟型假会，在这里露出了样子：粒子结在理念界，纸条上写的是题型的答案，不是身上的想法。

对这样的学生，要换情境。不说“流速和压强”，问“两辆大货车在高速上并排开，中间那辆小轿车会怎样”；不说“圆的周长”，问“跑道外圈比内圈长多少”。题型认不出来了，身上那条真实的连接才会露出来。

◆ 八、许文静的那一节课

回到开头那个周二下午，把这一节课从头到尾走一遍。

第一步，三分钟纸条。 她说的是：“不是考试，不打分。我想知道你们现在真实的想法。今天写错的人，收获最大。”四十六张纸条收上来。她在讲台上很快分了三堆：写“吹开”的二十九张；写“靠拢”的十一张，其中有理由的四张，没理由的七张；写“不动”或“晃一下”的六张。她在黑板角上写下三个数字。有学生小声说：“我跟大多数一样。”

第二步，演示。 她请写“吹开”写得最坚定的一个男生上来吹，这里叫他严子墨。严子墨吹了一下，纸靠拢了。他不信，又吹了一下，更用力，纸贴得更紧。他站在讲台上，脸有点红，说：“这不对啊。”全班笑了。不是笑他，是笑那一下。许文静没有接话，等了几秒。

第三步，学生先解释。 她没有马上讲公式。她把纸条发回去，让每个人在自己那行字下面再写三行：“看到了什么？和我写的哪里不一样？我现在怎么想？”

严子墨写的是：“我以为气把纸推出去。可是纸往中间来，说明中间的气没在推纸，是外面的气在推。为什么外面的气推得比里面大？不知道。”许文静后来说，这是那节课她最想要的一行字。他自己把缝找准了：缝不在“会怎样”，在“为什么外面推得比里面大”。

写“靠拢”却没写理由的七个人里，有三个在第三行写：“我猜对了，可是我也说不出为什么。”许文静把这三张也挑了出来。猜对的人，落差落在“为什么”上，一点不比猜错的人小。

第四步，才讲。 讲流速和压强。讲的时候，她专门回到严子墨那一行字：“刚才有同学问，为什么外面推得比里面大。我们现在就来回答他的问题。”这时候的讲授，和去年那节课几乎一个字没变。可是听的人不一样了。去年是听一个答案，今年是听自己那个问题的答案。

第五步，换一个情境再预测。 下课前五分钟，她问：地铁站台上为什么要有黄色安全线？这一步是粒子化的试探，道理第 9 章讲过；怎样把它排进一节课，第 18 章再讲。

两周以后，她在一节习题课的开头，把那摞纸条又发了回去，不说话，让学生自己读当初写的那一行，再在背面写一句“现在我会怎么说”。有学生笑出了声：“我那时候怎么会这么想。”这一下笑，是旧连接已经松开、新连接还在的证据。这是维持的事，第 8 章讲过，这里只记下它在一张纸条上怎样接着走。

一个月后单元测，同一道小船题，四十六个人里写“被冲开”的，剩下七个。本书不打算把这个数字说成实验结果。它只是一个班、一位老师、一年的变化，没有对照组，也排除不了别的原因。它能说明的只有一件事：这节课里，对不上是在演示之前就写在纸上的，所以事后谁也改不了它。哪些人卡住了、卡在哪半句，下课以后还查得到。

还有一个细节，许文静记了下来。写“不动”的六个学生里，有两个在解释那一步什么也没写。她下课后去问。一个说：“我本来就不知道会怎样，随便写的。”另一个说：“我不太想写。”

第一个，落差落空了。她身上没有一个想法可押，纸条上是乱猜。下一次，许文静会先给她一个更近的现象，比如用吸管喝饮料，让她先有一条连接可以被拉扯。

第二个，不是落差的问题。是太累了、和同桌闹了别扭，还是根本不觉得自己属于这个班？这些，对不上回答不了。那是下一章场的事，也是第 12 章动能的事。把这节课的五步，和去年那节课并排放：

环节	去年那节课	今年这节课	差在哪一段
演示之前	直接拿纸	三分钟纸条，个人、书面、不打分	旧纠缠被请到纸上
演示	老师吹	写“吹开”最坚定的学生吹	落差砸在他自己的那行字上
演示之后	老师马上讲	学生先写三行：看到什么、哪里不一样、现在怎么想	缝被学生自己找准
讲授	讲答案	回答学生自己的问题	讲授排在落差之后
下课前	抄笔记	换情境再预测	开始走向维持和粒子化
一个月后	二十来人写“冲开”	七人写“冲开”	一个班的变化，不当实验结果

◆ 九、放回日子里

对不上可以设计，这句话听上去像是老师的事。其实它在每个人的日子里都用得上。你辅导孩子作业的时候，可以先不讲，问一句：“你觉得答案大概是多少？先写下来。”孩子写错了，别急着纠正，问他：“你是怎么想的？”那一行错的，就是他身上那条旧连接。你看见了它，才知道这一题该从哪里下手。

你自己学新东西也一样。看教程、问 AI 之前，先在本子上写一行：“我猜是这样，因为……”写完再去看。和答案对上了，别急着得意，看看自己的理由

对不对；没对上，别划掉，在下面接着写：“我以为……可是……”那一行“可是”，是这一次学习真正开始的地方。

在单位里学新东西，也是同一回事。新系统上线，培训老师演示一遍，大家都说“看懂了”。如果培训开始前先让每个人写一句“我猜这一步应该这样点”，演示时就会有人发现自己猜的路和系统的路不一样。那个不一样，比演示本身更值钱。成人学习的事，第 17 章还会细讲。给老师留一张备课时可以自问的单子。设计一次对不上，先回答五个问题：

1. 学生身上已有的哪一条连接，会被这一课拉扯？说得出它在日子里是从哪来的吗？
2. 这条连接在这一课的哪一处不灵？那一处，学生自己看得见、算得出、听得到吗？
3. 预测纸条上写什么问题？问“会怎样”，还是问“为什么”，还是两个都问？
4. 收上来的纸条，大概会分成几派？如果全对或者全乱，备用的现象是什么？
5. 砸下来以后，谁来托住？学生先跟谁说、先写什么，老师什么时候才开口？

五个问题里，前四个是本章的事，第五个是下一章的事。还有几件实务上的小事，许文静摸索过，也一并记在这里。纸条用小半张纸就够，不必印表格，表格一印，学生就当成作业。收纸条时不点评，只分堆。分堆用不了两分钟：四十几张，扫一眼关键词就够了。偶尔会有学生照抄同桌，这不必追究；下一次换成各自背对背写，或者先写再分座位。纸条留到期末，学生自己翻出来看，常常比任何总结都管用：“原来我三个月前是这样想的。”

有一个常见的误会，要在这里拦一下：设计对不上，不是故意刁难。出偏题、设陷阱、让人当众出丑，都不是设计对不上。好的对不上，砸在一个人自己写下、真心相信的那句话上，砸得刚好，砸完有人托着。

还有一个误会也要拦：对不上不是天天都要。一个学期里，真正值得设计成对不上的地方，是那些学生身上已有一条结实连接、而这条连接在这里恰好不灵的地方。其余大量的课，是在维持、在再用、在换情境。把每节课都做成“惊奇时刻”，学生很快就会麻木，纸条也会变成又一份应付的作业。没人托着的卡住，只会变成放弃。谁来托，是下一章的事。

带走的话

先写下你原来怎么想，再去看世界是怎样的；纸上那一行被砸中的字，就是学习开始的地方。

小　账

POE 与概念转变研究把“先卡住”变成了可以照做的步骤，却没说清为什么非写下来不可，预测在许多课堂里退成了激发兴趣。本书把它定为对不上的事前独立指认，并给落差立了刻度。

事后一句“那个演示制造了认知冲突”，就把学生身上的一次发生，收回成老师手里的一个发现；纸条写在前面，这一下才收不回去。

想一想

1. 你最近一次真正学会一样东西之前，有没有一个原先的想法被推翻？你当时说得出被推翻的是哪半句吗？
2. 你辅导孩子或带新同事的时候，习惯先问“你觉得呢”，还是先讲？
3. 你身上有没有一条用了很多年、很结实的连接，最近在某个地方不灵了？

◆

11

第 11 章

场：谁托得住这次卡住

这一章的问题

开会时大家七嘴八舌讨论了几分钟，你跟着点了头，回去一做还是不会——同样那几分钟，为什么有人真想通了，有人只是改了口？

新加坡，三月的一个星期四上午，第二节数学课。努尔·艾莎三十一岁，在一所邻里小学教数学，这是她教书的第七年。这一年她带小学四年级，班上三十四个孩子，华族、马来族、印度族都有，课用英文上。

这一节课讲小数的大小比较。课上到一半，她在白板上写了两个数：0.25 和 0.3。然后她问：“这两个数，哪个大？A，0.25 大；B，一样大；C，0.3 大。”每个孩子手里有一块小白板。她说：“不许商量，自己写，写完扣在桌上。”一分钟后，她说：“举起来。”

她数了数。选 A 的十九个，选 B 的三个，选 C 的十二个。她没有公布答案。她说：“转过去，找你旁边的人。你们选得不一样的，说服对方。三分钟。”

教室一下子吵起来。有人在方格纸上涂百格图，有人掰着手指数小数点后面有几位，有人拍桌子：“二十五比三大，当然是 0.25 大。”三分钟后，再举一次。选 C 的变成了二十六个。

艾莎本来很满意。可是她在教室里走了一圈，看见了靠窗那一桌。卡薇雅是这学期刚转来的女孩，坐在靠窗的位置。她的同桌杰登一转身，就加入了后面那一桌的争论。卡薇雅一个人坐着，小白板上写着 A。三分钟里，没人跟她说过一

句话，她也没跟任何人说话。第二次举板，她把 A 擦了，写了 C，抬头看了一眼别人的板子。

下一周，艾莎出了一道换了样子的题：两条丝带，一条 0.4 米，一条 0.35 米，哪条长？全班大多数做对了。卡薇雅没做对。同一个教室，同一道题，同样的三分钟讨论。对大多数孩子，那三分钟托住了一次卡住；对卡薇雅，什么也没托住。这一章要讲的，就是那三分钟里，到底是什么在托。

◆ 一、投票之后的三分钟

艾莎用的办法，有一个来历。第 3 章讲过 Mazur 为什么改教法：他的学生会算牛顿定律的题，却答不对最基本的概念题。改出来的那套做法，叫“同伴教学”。那一章讲来由，这一章只讲它里面最要紧的一步：投票之后的讨论。

Crouch 与 Mazur 在 2001 年的一篇文章里，把这套做法十年的经验写得很清楚。老师先讲一个要点，接着出一道概念题。学生有一到两分钟，各自想好答案，交给老师。然后和旁边的同学讨论，通常两到四分钟，老师在教室里走动着听。最后再投一次票，老师再讲解。

他们用一份力学概念量表在学期前后测，算出一个“标准化增益”：学期里涨的分数，占原本能涨的空间的多少。改教法之前那个学期，这个数是 0.25 左右，和当时传统讲授课的平均水平差不多。第一个用同伴教学的学期，是 0.49。到第六次用，是 0.74。

他们还给了一条经验：第一次投票时，答对的人在三成五到七成之间，讨论最管用。少于三成五，懂的人太少，讨论变成一起猜；多于七成，大多数人已经会了，讨论没多少可说的。艾莎那道小数题，第一次答对的是十二个，三十四个人里占三成五，刚好在下沿。

还有一个细节，艾莎是照着这套做法来的：第一次举板以后，她只数，不公布哪个对。一公布，讨论就没了，剩下的只是错的人向对的人看齐。不公布，每

个孩子手里的那块板，就还是一个要去辩护的想法。三十四块板，三种答案，教室里就有了三个方向的拉力。

讨论之后答对的人多了，会不会只是跟着懂的人改答案？2009 年，Smith 与同事在《科学》杂志上发表了一项研究，专门回答这个问题。他们在大学的遗传学课上，用成对的题：两道题考同一个概念，换一个说法、换一个情境。学生先单独答第一道，讨论，再答第一道；然后不讨论，单独答第二道。

结果是这样的。第一道题单独答，约五成二答对；讨论之后，约六成八答对；接着单独答第二道，约七成三答对。最难的那一类题，三个数字是一成六、三成二、五成四。

第二道题是一个人单独答的，旁边没人可抄。讨论之后，答对的人反而比讨论时还多。作者的结论是：讨论里真的发生了学习，不只是听从了旁边那个看起来懂的人。这几组数字放在一起，说的是同一件事：学生之间那几分钟的争论，不是热闹，是在做功。

◆ 二、同窗：古人知道学要有伴

学要有伴，这件事古人早就知道，而且做得很讲究。《论语·颜渊》里，曾子说：“君子以文会友，以友辅仁。”朋友是因为学问聚到一起的，聚到一起以后，又反过来帮着彼此长成。第 4 章讲过的《学记》里也有一句：“独学而无友，则孤陋而寡闻。”一个人关起门来学，看到的就少，听到的就窄。

这不是客气话，是一整套制度。宋代的书院，最有名的场面是“会讲”。南宋淳熙二年，也就是 1175 年，吕祖谦把朱熹和陆九渊、陆九龄兄弟约到信州的鹅湖寺，谈了几天。朱熹主张先广泛地学，再归于简约；陆氏兄弟主张先立住本心，再去博览。陆九渊在诗里说“易简工夫终久大”，暗指朱熹的路子“支离”。谁也没说服谁。

可是这一场没有结论的争论，后来成了书院史上最有名的一页。它的价值不在谁赢了，在于两种结实的想法，在同一张桌子上被对方拉扯了好几天。听讲的人，在旁边看着两条路怎样互相顶撞。

这场争论还有下文。鹅湖之会几年以后，朱熹重建了庐山脚下的白鹿洞书院（淳熙六年，1179 年）。后来他又请陆九渊到书院来讲《论语》“君子喻于义，小人喻于利”那一章。立场不同的两个人，一个请，一个讲；据说听的人有的感动得落泪，朱熹还请陆九渊把讲稿写下来，刻在石上。

朱熹给白鹿洞书院定的规矩里，有一条“为学之序”，取自《中庸》：“博学之，审问之，慎思之，明辨之，笃行之。”五步里，“审问”和“明辨”两步，一个人是做不成的。问，要有人可问；辨，要有人和你辩。

书院里平时的日子更要紧。同一批学生同住、同读、同问难，先生出一个题，学生之间先辩，辩不下去再去问先生。私塾里也一样，几个孩子同在一间屋子里背书、对课，大的带小的，一个背不出来，旁边的会悄悄提一个字。

手艺行当里，这张网更结实。师傅带徒弟，徒弟不是单独听师傅讲，是泡在作坊里：看师兄怎么做，帮师傅递工具，从扫地、打下手做起，一点点挪到要紧的活上。

中国的手艺与技艺传承里，这样的网到处都是。老中医带学生“跟诊”，学生坐在旁边抄方子，听老师问病人，几年下来，脉象和方子在他身上慢慢接到一起。戏班子里的孩子“坐科”，同吃同住同练功，师兄的一个身段做得好，师弟在旁边看上一百遍。所谓“口传心授”，传的不只是那几句口诀，是整张网每天在一个人身上的拉扯。

人类学家 Lave 与教育学者 Wenger 在 1991 年的《情境学习》里，把这种学法叫“合法的边缘性参与”。书里讨论了西非利比里亚的裁缝学徒、墨西哥尤卡坦的接生婆等。学徒一开始只做边上的活，比如缝扣子、熨衣服，可是他已经

在这个行当的网里了。他看得见整件衣服怎样做出来，听得见师傅们怎样议论好坏。学，就是从网的边上，一步步往中间挪。

前人对在哪里，要写足。第一，他们知道学不是一个人的事，要有一张人的网。第二，他们知道这张网有它的规矩：同窗之间先辩，辩不下去再问先生；徒弟从边上做起，不是一上来就碰最难的。第三，他们知道这张网不光帮着学新东西，也帮着不忘：天天在一起对课、问难、做活，学过的东西一直在被用。

◆ 三、它们停下的地方

可是这些做法，停在了几个地方。同伴教学的研究，把讨论当成一种“互动”、一种“参与”。数据很硬，讨论有用。可是讨论为什么有用、对谁没用，账没有算到底。卡薇雅那样的孩子，坐在讨论的教室里，却不在讨论里，这在统计里只是一个没答对的数据点。

书院与同窗，被讲成了一种德行、一种情谊。“以友辅仁”，友是帮着成德的。这是对的。可是同窗之间那种拉扯，为什么能让一个人想通原来想不通的东西，古人没有把它当成一个学习的机制去讲。

Lave 与 Wenger 把学习放进了网里，这一步走得很远。可是他们讲的是“参与”，网里的人怎样从边缘走到中心。网有多结实，往哪边拉，什么时候托住了一个人、什么时候反而压住了一个人，没有一笔账。

还有一处，三家都没有分清：场和对不上，谁在前，谁在后。一个班如果一上来就分组讨论，没有人先单独写下自己的想法，讨论就会被最快、最响的那个人带走。其他人还没来得及卡住，答案就已经到了。这时候，场不是在托住卡住，是在替代卡住。

Mazur 自己的经验里也藏着一笔账：第一次答对的人少于三成五，讨论就变成一起猜。用本书的话说，这时候不是场不够，是对不上落空了。大多数人身

上没有一条能被这道题拉扯的连接，网再热闹，也只能把一堆乱猜搅在一起。场托得住卡住，托不住乱猜。

这一层，前人的做法里其实藏着答案：Mazur 把先单独投票写进了步骤，书院里先生出题后学生先自己想。可是这个顺序为什么不能倒、倒过来场会变成什么，没有被当成一条关于场的规矩说出来。

◆ 四、势能不是气氛

先把本书的说法摆出来。场，就是势能：一张纠缠起来的网，对一个正在卡住的人的吸引与拉扯。这里说的网，是能回应、能拉扯的各方连成的网。主体是人：同桌、小组、老师、班级，回到家里还有家人。AI 用来提示、陪练，接得住一句“我不懂”的时候，也算进这张网；它摆出来的解答与材料不算。墙上贴的图、桌上摆的百格纸，是现实符号，可以由这张网摆上来，可是它们本身不叫场。书二第 17 章讲过，一个新符号能不能结晶、往哪里结晶，看周围那张网把它往哪边拉。

在建立这一段，场做两件事。第一件，托住。对不上一来，人第一反应是躲。第 10 章列过的七种反应，前六种都是躲。一个人单独卡住时，躲最容易：不理它，说“这个不考”，等老师讲。旁边有人在争、在问“你为什么选 A”，躲就难了。场把人留在那条缝里，留得够久，旧的连接才拆得开。

第二件，拉方向。卡住以后，拆开的连接要重接，往哪边接？一个人想，可能接回老样子，也可能接到一个新的错处。旁边的人说“你换成钱想想，三毛和两毛五，哪个多”，这句话就是一股拉力，把重接往一个方向拉。拉力不一定对，可是有拉力，就有方向。

在维持这一段，场还做第三件事：有人一起用。学过的东西，在一张网里被一次次提起、被别人用、被别人问，连接就一直有人拉着，不松。这是第 8 章讲过的事，这里只记一句：建立需要场，维持也需要场。

打一个比方。一个小球放在一片起伏的地面上，它往哪边滚，不全看它自己，要看地面往哪边倾。地面的起伏，就是势能。教室里，一个孩子卡住了。他那条拆开的连接往哪边接，也要看身边那片“地面”往哪边倾：同桌说的话，老师的一个追问，旁边几个人都在用的一个说法。

场还有一个容易被忽视的来源：老师自己的沉默。美国科学教育学者 Rowe 在 1974 年的一篇文章里报告过一个发现：老师提一个问题以后，平均只等不到一秒钟。然后就自己接话，或者叫人回答，或者换个说法再问。她让老师把等待拉长到三秒以上，课堂就变了样：学生的回答变长了，带理由的多了，“不知道”少了，学生之间互相回应的也多了。

三秒钟的沉默，是一股很朴素的拉力。它告诉每个孩子：这个问题是留给你的，没有人会马上替你答。老师一接话，这股拉力就断了。

维持这一段的场，在艾莎班上也看得见。那道小数题过去两周，两个孩子在食堂买饮料，一个说：“这杯 0.85 元的比 0.9 元的贵。”另一个说：“你又来了，先看第一位。”两个人笑。这句玩笑，就是那条刚接上的连接被人又拉了一下。没有人布置这个复习，是网自己在维持。

那么场和气氛有什么不同？一个四人小组，嘻嘻哈哈聊了三分钟周末去哪玩，气氛很好，场是零：没有一股力拉着任何人的那条连接。另一对同桌，一句话也没笑，一个说“0.25 后面的数多，所以大”，另一个说“你换成钱想想”，两个人都有点不高兴。这一对的场很强。

场不是热闹，是拉扯。

所以看一个教室有没有场，不看声音大不大，看两件事：一个孩子卡住的时候，有没有人注意到？他那条连接，有没有被别人的话拉着走？把场的几种样子摆在一起看：

场的样子	听上去	对卡住的人做了什么	结果
没有场	安静，或各说各的	没人注意，没人拉	躲开对不上，或放弃
热闹而无拉力	很吵，在聊别的	没有一股力碰到那条连接	卡住被冲淡
一边倒的拉力	一个人在讲，其他人听	被最响的人拉走，自己没拆	改了答案，没换连接
来回拉扯	有争、有问“为什么”	留在缝里，被拉出方向	自己重接
压住	有人嘲笑，有人说“这都不会”	把落差从连接挪到人身上	自我端结出“我不行”

场太强，也会出事。上世纪五十年代，美国心理学家 Asch 做过一个有名的实验。几个人坐在一起，看一条线，再从三条线里挑出和它一样长的那条。这个题很简单，一个人单独做，几乎不会错。可是屋里其他人都是事先安排好的，他们在一些轮次里齐声报出同一个错的答案。真正的被试排在后面说。

结果，在这些轮次里，大约三分之一的回答跟着多数人错了；大约四分之三的人至少跟错过一次。实验还有一个变式，对教室更有用：只要屋里有一个人报出正确答案，跟错的比例就从三成多降到了百分之五左右。

用本书的话说，一边倒的场，可以把一个人那条本来没错的连接，硬拉到错的地方去；而只要网里有一条和多数不同的线，那个人就有了站住的地方。

所以艾莎的教室里，第一次投票选 B 的那三个孩子很珍贵。他们错了，可是他们让“位数多就大”那一边的多数，不是铁板一块。讨论的场里，有了不同方向的拉力，才有来回拉扯，而不是一边倒。

最后一行要多说一句。场是一股力，力可以托人，也可以压人。一个说“这都不会”的同学，也是场的一部分。他的拉力不是往理念那一角拉，是往自我那一角压，压出来的是第 2 章讲过的石心：“我数学就是不行。”

◆ 五、孤立的那个孩子

回到卡薇雅。艾莎后来找她聊了一次。卡薇雅说，她在原来的学校数学很好。转来以后，同桌杰登跟后排几个男生是从一年级玩到现在的，每次讨论，他一转身就和他们说上了。她不知道该跟谁说，也不太敢说，怕说错了被笑。

那三分钟里，她不是没有卡住。她写了 A，她也看到了别人举起 C。对不上是在的，落差也在。可是没有一股力把她留在那条缝里，也没有一股力把她的重接往哪边拉。她做了最省事的那件事：擦掉 A，照着别人写 C。

这就是第 10 章那七种反应里的一种：先放一边，以后再说。她只是顺手把答案跟着别人改了。答案换了，身上那条“小数点后面的数越长，这个数就越大”的连接，一点没动。所以下一周换一个样子，她又错了。

孤立的孩子学不进，不是因为不聪明，是因为对不上来的时候，没有一张网托着他。

这件事，有研究可以对照。2011 年，美国斯坦福大学的 Walton 与 Cohen 在《科学》杂志上发表了一项研究。对象是一所大学一年级的学生，大约九十人，其中约一半是非裔学生。实验组的学生用大约一个小时，读高年级学生写的调查和短文：刚进大学时，几乎每个人都担心自己不属于这里，后来这种担心慢慢过去了。读完，他们自己写一篇文章，讲讲为什么会这样，再录成一段讲话，留给以后的新生。对照组读的是和归属感无关的材料。

几年后，实验组非裔学生的平均成绩，从大二到大四提高了近三分之一个等级，和白人学生之间的成绩差距缩小了一半左右。白人学生几乎没有受影响。作者也提醒，这不是一个能解决一切的办法。

用本书的话读这个研究：一个人如果一直在怀疑“我是不是属于这里”，他身边那张网对他的拉力，就被这份怀疑隔开了一层。同学在讨论，他听着，却不觉得那是在跟他说话。一个小时的阅读与写作，没有教任何学科知识，只是把那层隔膜拆掉了一点，网的拉力又能碰到他。后面几年，每一次卡住，他都更有可能被托住。

这个研究讲的是大学生、是种族的处境，和新加坡四年级的转学生不是一回事，不能硬套。它能说明的只是：一个人和网之间的那层东西，会实实在在地影响他能学进多少。

老师怎么知道班上谁是孤立的？有一个很老的办法：请每个孩子悄悄写两个名字，“做数学卡住了，我最想问谁”。收上来一看，有的名字被写了七八次，有的名字一次也没出现。一次也没出现的那几个，不一定学得差，可是他们卡住的时候，多半没有人会被他们问到，也没有人会去问他们。

艾莎后来在班上做了一次。卡薇雅的名字一次也没出现，她写下的两个名字，也是两个和她从没说过话的孩子：她只是挑了两个看上去数学好的人。

孤立的孩子，不只是建立时没人托，维持时也没人拉。艾莎班上每周五有一个“两分钟复述”：同桌之间互相说一遍这周学的一件事。卡薇雅的同桌那几周总是跟后排的人说，她就一个人在本子上写。一周、两周，别人的连接被同桌拉了一次又一次，她的那几条只能靠自己记着。到了月底的小测，差别就出来了。

孤立还有一种不那么显眼的样子：人在网里，线却是断的。一个孩子在小组里坐着，同学跟他说话，他也回答，可是他心里认定“我说的不会有人当回事”。他从来不先说自己的想法，只等别人说完再附和。这样的孩子，在名单上不一定是零票，可是在讨论里，他那条连接从来没被拉扯过。

还要多说一句。一个孩子长期孤立，可能有很多原因，有的是转学、换环境，有的是更深的难处。老师和家长能做的，是注意到、去问、去搭一张网。身体或心里的难处真的大了，请找医生或心理咨询师。

◆ 六、新加坡的小组，中国的大班

讲到场，很容易拿两种课堂来比：新加坡小学里常见的小组学习，中国许多课堂里常见的大班讲授。常听到的说法是：小组好，大班不好。本书不这么看。两种课堂各自托住了一些东西，也各自漏掉了一些东西。

先看新加坡。新加坡教育部 2017 年推出了《新加坡教学实践》，把教学分成四个过程、二十四个教学领域。“促进协作学习”是其中一项，和“规划关键问题”“清楚地讲解”等并列。

在小学一、二年级，一个班最多三十人；整个小学，一个班平均约三十四人（2024 年的教育统计）。课桌常常拼成四人一组，小白板、配对讨论、先自己想再和同桌说，都是常见做法。

这样的课堂，场是横着的：同学和同学之间，有很多条线互相拉。艾莎那一次投票后讨论，二十几个孩子在三分钟里改对了答案，靠的就是这些横着的线。

新加坡的学校对新来的学生，常有一个“伙伴”安排：给新生指定一位同学，带他熟悉校园、找教室、吃午饭〔待核〕。这是有意识地给一个人搭第一条线。可是这条线常常只管生活，到了课堂讨论时，各组还是按熟人转身。

它漏掉的地方，卡薇雅已经演示了：小组的线是按熟人关系长出来的。熟的几个人之间，线又多又密；新来的、内向的、口语不好的孩子，坐在小组里，身上却一条线也没有。还有一种常见的漏法：四人一组，一个最快的孩子把题做了，另外三个人抄。场是有的，是一边倒的拉力。

再看中国。许多地方的课堂人数多。国家文件把五十六人以上叫“大班额”，六十六人以上叫“超大班额”。2016 年的国务院文件提出，到 2018 年基本消除超大班额，到 2020 年基本消除大班额。即使班额降下来，四五十人一个班仍很常见。

这样的课堂，场是竖着的：老师站在中间，几十个孩子的注意力都被老师这一股力拉着。老师一个问题抛出去，全班一起想；老师一个停顿，全班一起等。这股竖着的力，很能托住一种卡住：大家一起卡在同一个地方，老师把那个地方讲透，几十个人一起往一个方向接。

中国课堂还有一张看不见的网：老师们自己的场。教研组、集体备课、听课评课，一个老师的一节课，背后常常有一组老师一起磨过。哪道题学生容易卡住、卡在哪半句，常常是这张网里一代代老师攒下来的。这是许多国家的课堂没有的势能。

大班里也不是没有横着的线。同桌互相批改，前后两桌转过来组成四人小组，小组长收作业顺便讲两句。这些做法在中国课堂里很常见，只是常常被当成“管理”，没有被当成场去设计。一个老师如果有意识地让同桌在讲之前先互相说两分钟，四十多人的大班里，也能多出二十几条横着的线。

合肥一所小学的四年级，这里叫那位老师俞老师，班上五十二个孩子。她也出了那道 0.25 和 0.3 比大小的题。以前她的做法是：问“哪个大”，等几只手举起来，叫一个孩子答，答对了，全班齐声说“对”，接着讲下一题。

后来她改了一下。先让每个孩子在练习本上写 A、B、C 和一句理由，写完就合上本子；再让同桌交换看，不一样的，互相说一分钟；然后她才问全班。五十二个人的教室，多花了不到三分钟。她说，以前齐声说“对”的时候，她以为全班都会了；现在翻本子才知道，有将近一半的孩子第一次写的是“0.25 大”。

齐声回答是大班里很常见、也很有用的一股力：它让全班跟上同一个节奏。可是它也把每个人身上那条不一样的连接，盖进了一个整齐的声音里。

它漏掉的地方也清楚。竖着的力太强，横着的线就少了。学生卡住了，第一反应是等老师讲，不是转身问同学。老师的讲解太快、太好，对不上还没在每个

人身上形成，答案就已经到了。场成了替代品。还有，四五十个人里，哪一个孩子没跟上，老师很难看见。把两边并排放：

	新加坡小学常见的小组学习	中国许多课堂常见的大班讲授
场的方向	横着：同学之间多线拉扯	竖着：老师一股强力拉全班
托得住的卡住	每个人各卡各的，各自被拉出方向	全班卡在同一处，被讲透
容易漏掉的人	小组里没有线的孩子：新来的、内向的	几十人里没跟上的那一个
容易出的毛病	最快的人做，其他人抄	讲得太早，场替代了卡住
老师那一侧的网	有专业发展的网络	教研组、集体备课，攒下“卡点”的经验
维持这一段	同学之间互相再用	统一的复习节奏、练习
各自要补的	给孤立的孩子搭线	讲之前先留出单独写、同桌说的几分钟

这张表不是在比高下。新加坡的老师可以从中国的教研组学到怎样攒卡点；中国的老师可以从新加坡的小白板学到怎样在大班里也先让每个人押上一个想法。四十六个人的教室里，也可以先写三分钟纸条，写完再讨论、再讲。第 10 章的许文静就是这样做的，并不需要拆掉讲台。

◆ 七、先卡住，再给场

场要排在对不上之后；顺序一倒过来，场就从托住卡住，变成了替代卡住。

Mazur 的做法里，学生要先单独想一到两分钟，把答案交出去，才可以讨论。这一两分钟，就是第 10 章那张纸条：每个人先押上自己的想法。押上了，讨论时被拉扯的，才是自己的那条连接。

第 10 章引过的 Crouch 等 2004 年的演示研究，也可以从这个角度再读一遍。先写预测，解释正确率从两成多升到三成；预测之后再讨论，又多了两个百分点，却多花了八分钟。讨论有用，可是它的用处，是在预测已经把对不上请出来之后，才加上去的。没有预测，讨论托住的是什么？

反过来的例子在课堂里很常见。老师说：“四人一组，讨论一下 0.25 和 0.3 哪个大。”不先单独写。讨论一开始，最快的那个孩子说：“0.3 大，0.3 就是 0.30，比 0.25 多。”另外三个人点头。三分钟后，每个小组都报出了正确答案。

这一节课，场很强，可是没有一个人卡住过。三个点头的孩子，身上那条“位数多就大”的连接，根本没有被请出来，也就没有被拉扯。这就是第 7 章讲的在场：特征都挨在一起了，被同学的解答串着，可是还没有纠缠。

讨论进行时，老师在做什么，也决定了场托住的是卡住还是答案。Mazur 的做法里，老师在讨论时走动着听。听什么？不是听谁说对了，是听各组卡在哪里、谁在说服谁、用的是什么理由。听到一个组已经一致了，不去表扬；听到一个组吵得不可开交，也不去裁判。老师此刻要做的，是记下这一轮讨论里冒出来的几种说法，等再投票之后，把它们拿出来让全班看。

老师一走过去就说“对，就是这样”，那一组的场就被老师那一股更大的力盖住了。组里还没拆开的人，会立刻停下来，等着抄老师认可的那一句。

AI 也是这样一张网，而且是迄今最大的一张。一个孩子卡住了，问 AI，它不嫌烦，不笑话人，什么时候都在。对卡薇雅那样不敢开口的孩子，它甚至可能是第一个愿意“听”她说的对象。这是它作为场的长处。可是它和那个最快的组员有同一个毛病：答案来得太快。孩子还没押上自己的想法，它已经给出了正确的解释。

所以用 AI 当场，规矩和用同学当场一样：先自己写，再去问；问的时候，先把自己的想法和理由告诉它，请它只问问题，不给答案。这一层，第 19 章讲作业时会细讲，人机分工的一般道理见书四。

◆ 八、艾莎的第二个星期四

艾莎想了一个星期，把下一节课改了三处。第一处，配对不再由学生自己转身。她事先排好了：先单独写，再按写得不一样的配成一对。卡薇雅这一次的同伴，是一个叫阿迪的马来族男孩。

第二处，讨论有一个固定的开头。她在白板上写了一句：“先说你为什么选它。选错的人先说。”第三处，讨论之后，她不马上讲答案，而是请两三对同学到前面来，说“我们刚才谁说服了谁，怎么说服的”。

这一节课的题，换成了一道新的：把 0.5、0.45、0.405 从大到小排一排，写一句理由。先单独写。卡薇雅写的是：“0.405 最大，0.45 第二，0.5 最小，因为四百零五最大。”阿迪写的是：“0.5 最大。”

按白板上的规矩，选错的人先说。卡薇雅愣了一下，小声说了自己的理由：“405 比 45 大，45 比 5 大。”阿迪没有说她错。他拿出小白板，写了三行：“0.5 元，0.45 元，0.405 元。”他说：“你想想，哪个是五毛？”卡薇雅想了一会儿：五毛，四毛五，四毛多一点点。她盯着白板看了很久，说：“那上个星期的丝带，0.4 米也比 0.35 米长。”

这一句话，是这一节课里艾莎最想听到的。在卡薇雅身上，这一次的对不上，和上一周那次接到了一起：小数比大小，不看后面有几位，要从小数点后第一位比起。上周她照着别人写的那个 C，这一次，才在她自己身上有了来历。

讨论之后上台，卡薇雅和阿迪是被叫上去的一对。阿迪说：“她一开始觉得位数多的大，我让她换成钱想，她就明白了。”卡薇雅补了一句：“而且上个星期的也是这样。”全班安静了一下。有几个孩子回头去翻上周的作业。

这一段经历，不能写成“卡薇雅变好了”。能写的是：在一张给她留了一条线的网里，那个一直被擦掉的 A，第一次被当成了讨论的材料。在它被拉扯、被拆开、被重接的过程里，显出了一个会把两道题接在一起想的卡薇雅。

这一节课，艾莎也照顾到了另一头。那几个第一次就选对、讨论时总是“说服别人”的孩子，她给了他们一个新任务：说服完以后，再写一句“我是怎么知道的”。有一个男孩写不出来。他说：“我就是知道，0.3 比较大。”

这个孩子答对了，可是他身上那条连接，也只是另一种挨在一起：他记住了“0.3 大”，却说不出为什么。艾莎让他去听卡薇雅那一对讲五毛和四毛五。他听完说：“哦，0.3 就是三毛，0.25 才两毛五。”他记住的那句话，第一次接上了一个理由。场不只托住答错的人。答对却说不出为什么的人，也在场里被拉了一把。

这一节课里还有一处细节值得停一下：阿迪那一股拉力，是从哪里来的？他没有讲十分位、百分位，他说的是“五毛”。卡薇雅身上本来就有一条很结实的连接：零花钱。在新加坡，五毛和四毛五的差别，一个四年级孩子在食堂里天天碰到。阿迪的那句话，等于把她身上另一条已有的连接拉过来，接到那条拆开的“位数多就大”上。

场的拉力，最有效的时候，不是从外面塞进一个新东西，是把学的人身上已有的另一条连接，拉到正在卡住的那一处。一张网里的人，彼此知道对方日子里有什么，才拉得准。这也是为什么同龄的同学，有时候比老师更会讲。

再过两周，艾莎出了第三道换样子的题。卡薇雅做对了，在旁边写了一行小字：“不看有几位，先看第一位。”艾莎后来说，第一个星期四那次“二十六个人改对了”，她差一点就把它当成了成功。如果她没有走到窗边，如果下一周没有出那道换样子的题，卡薇雅那一个 C，会一直被算在“会了”的那一栏里。投票的数字告诉她一个班学得怎样，却不告诉她每一个人身上发生了什么。把这两个星期四并排放：

	第一个星期四	第二个星期四
先单独押上想法	有，小白板扣着	有，小白板扣着
配对方式	学生自己转身，按熟人	老师排好，选得不一样的一对
讨论的开头	没有规矩	“选错的人先说为什么”
卡薇雅身上的线	一条也没有	有一条，和阿迪
她的那条旧连接	没被请出来，照抄改答案	被说出来、被拉扯、被重接
讨论之后	老师讲答案	学生上台说“谁说服了谁”
换样子的题	做错	做对，还写了一句自己的话

◆ 九、放回日子里

场这件事，不只在教室里。你家孩子写作业卡住的时候，屋里有没有人？不是坐在旁边盯着，是他一抬头，知道可以问一句“妈妈，你觉得这道题是什么意思”。有人可问，卡住就不那么容易变成放弃。可是记住顺序：先让他自己写下想法，再陪他说。你一上来就讲，你就成了那个最快的组员。

你自己在单位学一样新东西，也可以看看身边那张网。卡住的时候，你能跟谁说“我卡在这儿了”而不觉得丢脸？如果一个也没有，问题也许不在你学得慢，在于你身边少了一张托得住的网。找一个同事，每周花二十分钟，互相讲讲各自卡在哪里，这张网就开始长了。

你是老师，可以留意一下班上那几个讨论时总是一个人坐着的孩子。他们不一定是学得慢的，也许只是身上没有线。给他们排一个同伴，给讨论定一个“错的人先说”的规矩，往往比单独给他们补课更管用。

网上的学习群、读书会、编程社区，也是场。它们的好处是人多、什么时候都有人在；它们的毛病，和大班、和 AI 一样：答案来得太快。一个人在群里一问，三秒钟就有人贴上解法。下一次你在群里问问题之前，先写下自己卡在哪一步、原来是怎么想的。这样贴上来的回答，拉扯的才是你自己的那条连接。

场能托住卡住，可是它不能替学的人去拆、去接。网再好，拆旧连接、接新连接的那份力，还得学的人自己出。那份力从哪来、该付多少，是下一章的事。

带走的话

场不是热闹，是拉扯；它要排在卡住之后，托住那个人，而不是替他把答案带来。

小　账

同伴教学与书院同窗都证明了学要有伴，却把伴当作互动与情谊；本书把它定为势能，算清它在建立与维持里各托住什么、何时压住人。

讨论之后答案对了，就说“大家都学会了”，这是把一次在每个人身上分别发生的重接，收回成一个班的发现。卡薇雅改过来的那个 C，就是被收回的那一下。

想一想

1. 你上一次学东西卡住的时候，身边有谁？是他托住了你，还是替你把答案带来了？
2. 你家里、你单位里，有没有一个人总是一个人坐着？他身上有几条线？
3. 下一次有人来问你问题，你能不能先问他一句“你自己是怎么想的”？

◆

12

第 12 章

动能：谁来付，付多少

这一章的问题

孩子听你讲了三遍，点头说懂了，第二天换个问法又不会——那三遍讲解花掉的力气，究竟留在了谁身上？

武汉，十一月，期中考试前一周的一个晚上，十点半。宋嘉禾二十岁，在武汉一所大学读大二，学的是电气工程。宿舍四个人，这天晚上只有三个在。他刚洗完澡，坐回桌前，室友鲁一航转过椅子来，手里拿着线性代数的作业本。

“嘉禾，问你个事。为什么行列式等于零，这个矩阵就没有逆矩阵？”宋嘉禾上一次线代小测考了九十二分，是宿舍最高的。他几乎没想就说：“因为求逆矩阵的公式里，要除以行列式。行列式是零，就没法除了。”

鲁一航点点头，又问：“那为什么求逆要除以行列式？”“因为逆矩阵等于伴随矩阵除以行列式。”“那伴随矩阵又是怎么来的？为什么刚好要除以行列式？”宋嘉禾张了张嘴，开始在草稿纸上写伴随矩阵的定义，写到一半，停了。他发现自己能把公式一个字不差地写出来，也能用它算出任何一道题的答案。可是这一串东西为什么连在一起，他说不出来。

鲁一航还在等。宋嘉禾又试了一次：“行列式就是……按对角线乘起来再相减的那个数。”“那它代表什么？”宿舍里安静了好一会儿。另一个室友邓子谦戴着耳机，在床上睡着了。宋嘉禾后来说，那一晚最难受的不是答不上来，是发现自己以为会的东西，原来只是会算。

他说：“你等我一下。”接下来一个多小时，他翻课本，翻网上的讲解，在草稿纸上画坐标。快到十二点的时候，他把两支笔放在桌上，摆成一个角，叫鲁一航过来：“你看，一个二阶矩阵的两列，就是平面上的两支箭头。这两支箭头撑出一个平行四边形。行列式，就是这个平行四边形的面积。矩阵把整个平面变一下，所有图形的面积都乘上这个数。”

他把两支笔慢慢并到一条线上：“要是两支箭头倒在一条线上，平行四边形就被压扁了，面积是零。整个平面被压成了一条线。”“压扁了，就回不去了。”鲁一航说，“一条线上的点，你不知道它原来在平面的哪儿。”“对。回不去，就是没有逆。”两个人对着两支笔看了一会儿。这一个多小时里，是谁在出力？出的是什么力？这一章要算的，就是这笔账。

◆ 一、费曼也有讲不下去的时候

宋嘉禾那一晚撞上的事，有一个很有名的前例。美国物理学家费曼（Richard Feynman）晚年的同事 David Goodstein，在 1996 年和妻子合写的《费曼失落的讲义》里讲过一个故事。他有一次问费曼：自旋为二分之一的粒子，为什么服从费米—狄拉克统计？费曼想了想，说要为这个问题准备一堂给大一学生的课。几天以后，费曼回来说，大意是：他做不到，没法把它讲到大一的水平，这说明物理学界其实还没有真正理解它。

这个故事后来被传得很广，常常被压成一句“讲不清楚，就是没懂”。后来又被包装成一套“费曼学习法”：选一个概念，假装讲给一个外行听，讲不下去的地方，就是你没懂的地方，回去再学，再讲。

要说一句公道话：这套“学习法”的名字，是后人起的，不是费曼自己写下来的一套方法。可是它抓住的东西是真的。它对在哪里，要先写足。第一，它找

到了一个检测“会不会”的好办法：不是看你能不能算，是看你能不能讲给一个不懂的人。宋嘉禾能算对每一道题，一讲就露了底。

第二，它把“讲”变成了学的一部分，而不只是学完以后的展示。讲着讲着卡住，回去补，再讲，这是一个来回。

第三，它要求的听众是外行。讲给同行听，可以用术语一路滑过去；讲给外行听，每一个术语背后的“为什么”都会被追问出来。鲁一航那三个“那为什么”，就是外行的追问。

中国古人对这件事也不陌生。第 4 章引过的《学记》里，有“教然后知困”一句：教了别人，才知道自己哪里不通。旧时私塾里先生讲完书，常让学生“回讲”，把刚听的再讲回给先生听，讲不通的地方，先生再点一下。这些做法，和“费曼学习法”走的是同一条路。

再往前，朱熹的门人把他谈读书的话归成六条，后世叫“朱子读书法”：循序渐进，熟读精思，虚心涵泳，切己体察，着紧用力，居敬持志。

六条里，有两条正好落在本章上。“着紧用力”，说的是力要使足，读书不能松松垮垮；“切己体察”，说的是读到的道理要拿回自己身上来对照、来验证，不能只停在书上。前一条是动能的大小，后一条是动能的方向：往自己身上接。

古人看得很准。可是他们说的是读书人的修养和态度，没有说清这份力为什么非得自己出、别人替不了。他们也没有把“用力”和以后“记不记得住”算在一本账里。

◆ 二、教别人的人，学得更多

费曼的故事是一个故事。心理学里，有一整串研究在问同一件事：教别人，能不能让自己学得更好？

先看一个较早的发现。第 1 章讲过 Chi 与合作者 1989 年的研究：同样读物理例题，学得好的学生会一边读一边对自己解释“这一步为什么这样做”。后来这被叫作“自我解释效应”。自我解释，就是讲给自己听。

再看“讲给别人听”。2013 年，Fiorella 与 Mayer 在《当代教育心理学》上发表了一组实验。大学生学一段关于多普勒效应的材料。有的学生被告知“学完要考试”，有的被告知“学完要教别人”。要教别人的学生里，有的只是准备，有的真的对着摄像机录了一段讲课视频，讲给一个假想中不懂这个内容的学生。

结果是：刚学完马上测，准备教的学生比准备考试的学生考得好，录不录视频差别不大。过一段时间再测，真的录了讲课视频的学生考得最好。

准备去教，让人在学的时候就换了一种学法。真的去讲，又在学完之后多付了一次。前者的好处来得快，后者的好处留得久。

2014 年，Nestojko 等人在《记忆与认知》上报告过类似的结果：学同一段文章，被告知“之后要教别人”的人，比被告知“之后要考试”的人，回忆出的内容更多。回忆出来的东西也更有条理，前后组织得更好。

把这一类研究合起来看，有一篇元分析。日本学者 Kobayashi 在 2019 年汇总了多项研究，算出：只准备去教，平均效果量约为 0.35；准备之后真的去教，约为 0.56。效果量是一个衡量差别大小的数，0.5 左右在教育研究里算是不小的差别。

还有一个有意思的发现，和今天的 AI 有关。2009 年，斯坦福大学 Schwartz 团队的 Chase 等人在《科学教育与技术杂志》上报告：让中小学生在电脑上“教”一个虚拟学生。学生画出概念图，虚拟学生按这张图去回答问题、去考试。

结果，学生为了教这个虚拟学生，花在阅读、查资料上的时间，比为自己学的时候更多，学得也更好；对成绩靠后的学生，帮助更明显。作者把这叫作“门生效应”：人为了别人学，比为了自己学更肯出力。

他们还注意到一个细节：虚拟学生答错了，学生会承认“是我没教好”，回头去改，而不像自己答错时那样，急着替自己找理由。错落在“我的学生”身上，不落在“我”身上，人就更愿意去拆、去改。第 10 章讲过，落差要砸在连接上，不要砸在人身上，这里又碰上了一次。

这一串研究里，最要紧的一篇，是 Roscoe 与 Chi 在 2007 年《教育研究评论》上发表的综述。他们问的不是“教别人有没有用”，而是“教别人的时候，到底是哪一部分有用”。

他们把小老师们讲解时的话分成两类。一类叫“知识转述”：把书上、笔记上的东西照着说一遍，说得很流利，可是没有新东西。另一类叫“知识建构”：讲着讲着发现说不通，回头重新组织；把两个原来分开的点连起来；回答学生一个没想到的深问题，被迫想出新的解释。

他们发现，小老师们大多数时候在转述。真正让小老师自己学到东西的，是建构那一部分。而建构，往往是被学生的提问逼出来的，尤其是那种“为什么”“那如果……呢”的深问题。把这一节的研究摆在一张表上：

研究	学的人做了什么	发现	本书读作
Chi 等，1989	学例题时对自己解释每一步	自我解释多的学得好	自己付了重接的功
Fiorella 与 Mayer，2013	准备教；真的录视频讲	准备教，马上测更好；真讲了，延后测最好	准备是换方向，讲是再付一次
Nestojko 等，2014	学的时候以为要去教	回忆更多，更有条理	方向一换，连接接得更多更整
Kobayashi，2019	汇总多项研究	准备教约 0.35，真教约 0.56	付得多，留得多
Roscoe 与 Chi，2007	当小老师讲解	转述多，建构少；建构才让自己学到	大小不等于方向

◆ 三、手写还是键盘：一场没吵完的争论

还有一场争论，看起来和“教别人”无关，其实是同一件事。2014 年，Mueller 与 Oppenheimer 在《心理科学》上发表了一篇文章，题目很抓人，大意是“笔比键盘更有力”。他们让大学生看一段演讲视频，有的用笔记，有的用笔记本电脑记。半小时后测验。

结果是：两组在事实类题目上差不多；在概念类题目上，手写组更好。他们还发现，用电脑的人记下的字多得多，而且更多是逐字照录演讲原话。他们的解释是：手写慢，记不下每一个字，只好边听边用自己的话压缩、改写，这一改写，就把内容加工了一遍。

这篇文章流传很广，不少大学老师据此在课堂上禁止用电脑记笔记。可是后来的复现，没有这么顺。2019 年，Morehead、Dunlosky 与 Rawson 在《教育心理学评论》上发表了一项严格的复现。两个实验里，手写和电脑在概念题上都没有拉开稳定的差距；两天后的延迟测验，记笔记的方式也没有影响。

2021 年，Urry 等人在《心理科学》上又做了一次直接复现，并把八项相关研究合起来做了小型元分析。结果是：电脑记的字确实更多，逐字照录的比例也确实更高，这一点和原研究一样；可是在测验成绩上，手写和打字没有显著差别。

原研究报告过，笔记里逐字照录得越多，成绩越差；复现里这一条关联也还在。可它只是相关，复现的作者没有直接去操控逐字照录，不能据此说是照抄造成了低分。

这场争论到今天也没有吵完。有研究者指出，几项研究用的多是轻松的演讲视频，换成难的课程内容，结果可能不同。

本书不在笔和键盘之间站队。这一串研究里，真正稳的发现不在“用什么记”，在“怎么记”：照着原话抄下来，和用自己的话改写一遍，是两件不同的事。

手写只是让人更难照抄，于是更可能去改写。有人用电脑也能边听边改写；有人用笔也能一字一字地抄。工具只是让某个方向更容易一点。

宋嘉禾自己的笔记就是一个例子。他上课用平板，老师的课件一页页存下来，旁边打字记老师说的话，记得又快又全。期中前翻出来，满满几十页，每一页他都“看得懂”。那一晚之后，他改了一个小习惯：每一页课件底下，只许写一句话，“这一页到底在说什么”，用自己的话，不许抄课件上的原句。

有些页，他对着屏幕想了十分钟，写不出那一句话。那十分钟，比他原来记满一整页花的力气还多。这些写不出的页，后来成了他复习时最先回去啃的地方。

◆ 四、它们停下的地方

这一串研究，证据一层比一层硬。可是它们停在了几个地方。第一，它们讲效果，不讲账。“教别人有效”“自我解释有效”“改写比照抄好”，这些结论都对。可是为什么有效？研究者给的说法各不相同：有的说“加工更深”，有的说“组织得更好”，有的说“更投入”。这些说法各管一段，接不成一笔账：学的人到底付出了什么，付在哪里，换来了什么。

第二，它们把媒介当成了变量。笔和键盘之争吵了这么多年，正是因为一开始就把“用什么工具”当成了要比的东西。真正起作用的是方向：重接，还是照搬。媒介只是让某一个方向更容易或更难。拿媒介去比，结果时有时无，并不奇怪。

第三，它们很少问：这份力能不能由别人替你付？Fiorella 与 Mayer 的实验里，几组学生读的是同一份材料，差别只在学完以后谁要去讲。结果已经指向“谁讲，谁留下”。可是“谁来付”没有被当成一条原则说出来。于是今天很多人以为，看一个讲得特别好的视频，就等于自己学过了。

第四，它们很少把建立时付的力，和以后记得牢不牢，算在同一本账上。这一处在日子里的后果很大。看一个讲得好的视频，那种“全懂了”的感觉，是非常真实的。第 8 章讲过那种会骗人的“眼熟”，也就是“流畅的错觉”：东西读起来、听起来越顺，人越觉得自己记住了，可是这种感觉和后来记不记得住，关系很弱。别人替你付了动能，你收到的，正是这种顺。顺的感觉，最容易被当成学会。

第五，它们几乎不谈学的人有没有力气付。实验室里的被试，多半是吃饱睡足、按时来做实验的大学生。这几处，正是本书要接着走的地方。

◆ 五、动能：方向比大小要紧

先把本书的说法摆出来。动能，是学的人自己把旧连接拆开、把新连接接上的那份力；它有大小，也有方向。书二第 18 章讲过，动能是纠缠沿着一条路推进的速度和方向，也就是连接被拆开、被重接的速率。放到学习里，大白话说就是：你花了多少力气，这力气花在了哪个方向上。

宋嘉禾那一晚，前半段和后半段都在出力，力气差不多大。前半段，他在背公式：伴随矩阵怎么写，逆矩阵等于什么。这是把旧连接再走一遍。力气是出了，方向是原地打转。

后半段，他把“行列式”拆开了：原来那个“按对角线乘起来相减的数”，被拆成“两支箭头撑出的面积”；“没有逆”被拆成“压扁了就回不去”。然后把两头接上：行列式是零，就是面积被压成零，就是平面被压成一条线，就是回不去。这才是重接。同样一个多小时，前半段的力气没有留下新连接，后半段的留下了。

动能有两条规矩。第一条，动能必须由学的人自己付。一个老师把一道题讲得清清楚楚，那份拆开、重接的力，是老师在备课时付的，结晶在老师身上。学生听懂了，是在场：那些特征被老师的讲解串着，挨在一起。一个讲得特别好的视频，一个 AI 一秒钟给出的完美解释，都是这样。讲得越好，听的人越省力，留在听的人身上的就越少。

别人付的动能，结晶在别人身上。

宋嘉禾讲给鲁一航的那一段两支笔的解释，结晶在宋嘉禾身上。鲁一航那一晚听懂了，可是那份力，主要是宋嘉禾付的。

替学生付动能的，常常是最爱他们的人。老师替学生付。一节课讲得滴水不漏，每一个可能卡住的地方都提前铺好了台阶，学生一路顺下来，一个坎也没碰上。课评得很高，学生说“老师讲得太清楚了”。可是老师把每一处要拆、要接的地方都替学生做了。网上的名师课也是这样，讲得越好，听的人越轻松。

家长替孩子付。孩子一卡住，家长就讲；讲不通，换个说法再讲；再不通，干脆把步骤写出来让孩子照着抄。家长累得满头汗，那一晚付动能最多的人，是家长。第 16 章会细讲饭桌上的这一幕。

AI 替学生付。一张照片拍过去，几秒钟后，一段条理清楚的解答就来了。它替你拆开、替你接上，接得比你自己接得漂亮。你看完，在场，点头，合上手机。

还有一个日子里的例子，比学习更好看清。开车用导航，十分省心，跟着声音走就到了。可是用久了，很多人发现，自己去过十几次的地方，离了导航还是不认得路。

2020 年，加拿大麦吉尔大学的 Dahmani 与 Bohbot 在《科学报告》上发表了一项研究。五十名常开车的年轻人里，平时越依赖导航的，在虚拟环境里自己找路时，越少用空间记忆，记住的路标也越少。其中十三人三年后复测，这几年导航用得越多的，空间记忆下降得越多。作者也提醒，样本小，不能下太强的因果结论。

用本书的话说，导航替你付了认路的动能。路是走到了，可是那张地图，结在导航里，没有结在你身上。

第二条，动能的方向比大小要紧。很多学生很努力。抄笔记抄得工工整整，课本读了三遍，荧光笔把书划得五颜六色。力气不小，可是方向多半是把已有的东西再走一遍。第 6 章讲过 Dunlosky 等人对十种学习技巧的评估，重读、划线

排在效用低的那一档，原因在这里就看得清：它们的动能大多不往重接的方向走。把常见的几种“用功”放在一起，看它们的大小和方向：

用功的样子	力气大小	方向	在五段账里付在哪	留下什么
逐字抄笔记、抄板书	大	照搬，原地	几乎不付	一本整齐的本子
把课本再读三遍、划线	中	再走一遍旧路	在场	“这些我都看过”的熟悉感
看解析、看讲解视频、问 AI 要答案	小	别人替你重接	在场	看懂了
背公式、背定义	中	加固一条窄连接	维持	会算，讲不出为什么
先写预测，再对答案	小	把旧连接请出来	建立的起点	一条被砸中的缝
对自己解释每一步“为什么”	中	拆开、重接	建立	一条接上的连接
讲给外行听，被追问“那为什么”	大	拆开、重接、再连到别处	建立，带向粒子化	一个讲得出、换个问法还在的东西

最后一行，力气大，方向也对。可是即使“讲给别人听”，也可能只是知识转述：照着笔记念一遍，听的人点头，讲的人什么也没多接上。Roscoe 与 Chi 的发现，就是在这里给了一条界线。讲的时候有没有被逼着重新组织，才是方向的分水岭。

所以宋嘉禾那一晚，最要紧的人其实是鲁一航。不是因为他听，是因为他问。三个“那为什么”，把宋嘉禾的力气从转述的方向，硬扳到了建构的方向。

程序员中间流传着一个办法，叫“小黄鸭调试法”，出自 1999 年的一本编程书《程序员修炼之道》。程序出了错，找不出原因，就在桌上摆一只橡皮小黄鸭，把代码一行一行讲给它听。很多时候，讲到一半，自己就发现错在哪了。

小黄鸭不会提问。光是“讲出来”这一个动作，就逼着人把脑子里含糊跳过的那几步一一摆开。这说明，讲本身就在把力往重接的方向推。

可是小黄鸭也有它到不了的地方：它不会问“那为什么”。人讲给鸭子听，讲到自己以为通了的地方，就滑过去了。鲁一航比小黄鸭多做的那一件事，是在宋嘉禾以为通了的地方，再追一句。场和动能在这里接上了：一个会追问的人，是场里最有用的那一股拉力，他把你的动能拉向对的方向，可是他不替你付。

方向还可以再说细一点：往哪一角接？用三角来看，一条拆开的连接，可以往理念那一角接，可以往现实那一角接，也可以往自我那一角接。只往理念那一角接，就是把一个公式接到另一个公式上：逆矩阵接到伴随矩阵，伴随矩阵接到代数余子式。接得再多，也是在理念界里打转，第 2 章讲的刷熟型假会，多半就是这样结出来的。

宋嘉禾那一晚的后半段，力往另外两角走了。两支笔摆在桌上，是他亲手做出来的一个现实符号：看得见、摸得着、可以拿给别人看。“压扁了，就回不去”，是一句他自己的话，带着那个宿舍、那三个问题，接在他自己身上。三角里三个角都碰到了，这条连接才接得宽。

所以问自己“今晚有没有付对方向”，可以再多问一句：“我接上的东西，有没有一样是我能做出来、画出来的？有没有一句是我自己的话？”

方向之外，还有大小，也就是“付多少”。本书说过，难度就是动能的账单。账单太小，付了也没接上什么；账单太大，付不起，也接不上。

澳大利亚教育心理学家 Sweller 在 1988 年的《认知科学》上，提出了后来叫作“认知负荷”的说法。他发现，让新手直接去解一道陌生的难题，新手会把大量脑力花在漫无目的地试路上。试来试去，解出来了，题型背后的规律却没学到多少。他和合作者的实验还发现：给新手看完整的例题、再让他做，反而学得更好。

这个发现常被拿来反对“让学生自己挣扎”。其实它和本章并不冲突。新手对着难题乱试，力气很大，方向却是散的，像在一片没有路的山里乱走，脚底板磨破了，没走出一条路。这不是付了动能，是浪费了动能。

宋嘉禾那一晚，如果手边什么资料也没有，一个人对着伴随矩阵硬想到天亮，大概也想不出“面积”那一层。他翻课本、看讲解，用的是别人铺好的几块石头；可是把石头接成路的那一步，是他自己走的。

所以，付多少的分寸是：别人可以给你石头，给你例题，给你一个提示；把它们接起来的那一步，留给你自己。账单的大小，要落在你付得起、又必须自己付的那一截上。这一截，第 5 章讲脚手架时已经从另一头讲过。

◆ 六、建立付了多少，维持就省多少

两周以后，线性代数期中考试。有一道题不是直接算行列式，而是问：一个三阶矩阵，把空间里所有的点都映射到一个平面上，它的行列式是多少？能不能求逆？

宋嘉禾几乎没有停顿。三维的情况他那一晚没有想过。可是“压扁了，体积就是零，就回不去”，这一句在他身上已经立住了，从平面挪到空间，自己就过去了。

同一张卷子上，还有一道题要用到一个分块矩阵的公式。那个公式他考前背过两遍，考场上想了五分钟，才勉强拼出来。

拿第 9 章的三判据量一下那一晚接上的东西。稳定：两周没碰，换了一个问法，还在。整体：不用看课本、不用提示，他能从“两支箭头”一路说到“没有逆”，是一整件事。独立：离开了那张草稿纸和那两支笔，挪到三维的空间里，它自己立得住。三条都过了。在行列式这件事上，宋嘉禾身上的那一点，已经不只是被维持住，开始结成粒子了。

那个分块矩阵的公式，三条里一条也过不了：换个问法就认不出，离了提示拼不完整，离了那张背过的表就想不起。同一个人、同一门课、同一次考试，两样东西在他身上的牢度差得很远。差别不在背了几遍，在建立的时候付了多少。

建立时付的动能，会变成以后的内能；建立付了多少，维持就省多少。

书二第 16 章讲过，内能就是连接度，也就是断裂的难度。一条连接，接的点越多、接得越是自己接的，要把它拆散就越难。行列式那一晚，宋嘉禾接上的不是一个点，是好几个：面积、压扁、回不去、没有逆、两支笔的样子、鲁一航那三个问题、那个快十二点的宿舍。这些点彼此拉着，哪一个松了，别的会把它拉回来。

分块矩阵的公式，他只是把一串符号接在“考试会考”上。接的点少，又不是自己接的，两周不用就开始松。

这件事，心理学里有两条老发现可以对照。1972 年，Craik 与 Lockhart 提出“加工水平”的说法：加工得越深，留得越久。后来 Craik 与 Tulving 在 1975 年用实验把它摆了出来：同样一个词，只看它是大写还是小写，记得很差。想它的读音，好一点；想它的意思、把它放进一个句子里，记得最好。

1978 年，Slamecka 与 Graf 报告了“生成效应”：同样一对词，直接读到的，不如自己根据提示补出来的记得牢。比如直接读到“热—冷”，不如看到“热—？（拼音以 l 开头）”时，自己把“冷”想出来。自己生成的那一点点力，让这个词在身上多了一个接点。

两条发现说的都是这一节的事。只是它们讲的是“记得牢”，本书要把它算成一笔账：建立的时候省下来的力，维持的时候要加倍还。宋嘉禾班上有个同学，期中考了全班前几名。他的办法是考前三天把所有题型和公式整理成一张表，一遍遍地背。到了期末，线性代数考全本，期中那张表上的东西已经松了，他得再背一大遍，后半本的内容又压上来，背不过来了。期中那三天省下的“理解”，到期末连本带利地要回来。

第 8 章讲过，维持要付间隔与检索的功。这份功付多少，很大程度上取决于建立时接得怎样。接得窄、接得是别人替你接的，就要靠一次次重背、一次次刷题去撑；接得宽、自己接的，偶尔用一次就够了。

第 6 章讲的“合意困难”，在这里也有了位置：那份“难”，就是建立时多付的动能，它是一笔预付款，换来的是以后维持时少付的利息。

很多学生的账是倒着记的。建立时图省事：看解析、看视频、背结论，觉得效率很高。到了维持时，一遍遍重背，一次次考前突击，加起来花的时间，远远多于当初多想一个小时。

◆ 七、疲惫的人付不起

这本账还有一页，常常被跳过：付动能，要有力气。宿舍里那个睡着的邓子谦，那学期在学生会做事，周末在校外做兼职，期中前那几天，每晚一两点才睡。他也听宋嘉禾讲过行列式，第二天中午在食堂，宋嘉禾又摆了一次两支筷子。邓子谦点头说懂了。期中考试，三维那道题，他没做出来。

不是他笨，是他那几天身上没有多余的力，去把“面积”“压扁”“回不去”这几样拆开、接上。宋嘉禾讲的时候，他在场；讲完以后，那些东西挨在一起，没有人去重接。

有研究可以对照。2007 年，哈佛医学院的 Walker 团队在《自然·神经科学》上报告：让一组大学生连续三十五个小时不睡，再让他们学一组新的图片，两天后测回忆。和睡足了的对照组比，熬夜组平均差了大约两成；脑成像显示，和形成新记忆有关的海马区，活动明显减弱。作者的解释是：这不只是困得注意力不集中，是大脑形成新记忆的那一部分在缺觉时出了状况。

疲惫的人不是不想付，是付不起。

用本书的话说，对一个疲惫的人，“再用点功”“多讲两遍”“多做两套题”，都是在向一个空钱包要钱。第 15 章会讲入口三：学不动了，能量耗尽了，矛盾还在，却没有动能去建立，连维持也松了。那时候的药，是先补能量，睡觉、吃饭、被看见，再谈方法。用讲道理、加补习班的办法去治，等于加重病情。

累的时候，最容易伸手去拿替付的东西。深夜十二点，作业还剩三道题，拍照问 AI，一分钟抄完，上床。这在那一刻是一个合理的选择，本书不去指责。

只是要把账记清楚：那三道题，交上去的是答案，留在身上的几乎没有。疲惫让人付不起，也让人更想找人替付；这两样加在一起，就是第 1 章那份全对的作业、空白的脑子最常见的来路。

对学生和家长，这件事有一个很实际的用法：把需要建立的事，放在精力最好的时候；把维持的事，放在零碎和疲惫的时候。一天里头脑最清楚的那一两个小时，留给新内容：读一个新概念，写预测，自己讲一遍。晚上累了，就做维持：翻一翻今天的错题，用卡片自测几个旧知识点。倒过来安排，在最累的时候硬啃新东西，在最清醒的时候抄笔记、整理错题本，这是很多认真学生的日常。它也是很多“学了没学会”的来路。

这一节只记下一条，和“谁来付”连在一起：动能必须由学的人自己付，这句话的另一面是，旁人也没法硬从他身上把动能挤出来。逼着一个累坏了的孩子“再学一会儿”，拿到的只是他坐在桌前的时间，不是他身上的重接。

还要多说一句。疲惫有很多种，有的睡一觉就好，有的拖了很久，牵连着身体和心情。身体或心里的难处真的大了，请找医生或心理咨询师。

◆ 八、谁付了，付在哪

把那一晚和后来的两周，从“谁付了动能”的角度，再走一遍。**那一晚的前半段。** 鲁一航问，宋嘉禾答。宋嘉禾在转述公式，动能不小，方向原地。鲁一航在听，几乎不付。

那一晚的后半段。 宋嘉禾在重接：翻书、画图、找到“面积”这个点，把它和“没有逆”接上。这是他身上的一次建立。鲁一航付的，是三个“那为什么”。问一个好问题，也是付动能：他得先把自己卡在哪里说清楚。

快十二点那一下。 宋嘉禾摆笔讲解，鲁一航说出“压扁了，就回不去了”。这一句很要紧。它不是宋嘉禾教给他的原话，是鲁一航自己从两支笔的样子里接出来的。那一刻，鲁一航身上也付了一笔：把“压扁”和“回不去”接在一起。所以期中那道三维的题，他也做出来了。

第二天中午。 宋嘉禾对邓子谦又讲了一遍。这一次，宋嘉禾讲得更顺了，他在维持；邓子谦点头，在场，没有付。

期中前三天。 宋嘉禾想了一个办法，请鲁一航把行列式讲给邓子谦听，自己在旁边只问，不讲。鲁一航讲到“体积”时卡住了，宋嘉禾只问了一句：“三维里压扁，是压成什么？”鲁一航想了半天：“压成一个面……或者一条线。”

这一次，付动能的是鲁一航。邓子谦那几天太累，仍然没怎么跟上。宋嘉禾没有再逼他，跟他说考完好好睡两天，回头再讲。

期中考完的那个周末，邓子谦睡了两个整觉。周一晚上，他自己拿着线代课本过来，说：“你上次讲的那个压扁，我想再弄一遍。三维的那个，我想不通。”这一次，没人讲给他听。宋嘉禾和鲁一航只问。邓子谦用三支笔在桌上摆来摆去，摆了二十分钟，说：“压成一个面，体积就没了，跟平面那个是一回事。”同一个解释，他听过两遍，都没留下。这一次，他身上有了力气，自己付了。把这几段并排放：

时间	宋嘉禾	鲁一航	邓子谦
那一晚前半段	转述公式：力大，方向原地	听，提问	睡着
那一晚后半段	重接：面积、压扁、回不去	三个“那为什么”	睡着
快十二点	讲解，又接一遍	自己说出“压扁了就回不去”	睡着
第二天中午	再讲一遍：维持	不在	点头说懂：在场
期中前三天	只问不讲	讲给别人：再一次重接，接到三维	太累，没跟上
期中三维题	做出来	做出来	没做出来

这张表不是在比谁聪明。三个人听到的解释，几乎是同一个。差别在于，每个人身上自己付了几次重接、付在哪个方向，以及那几天身上有没有力气付。

这一段经历，也不能写成“宋嘉禾学会了怎么学习”。能写的是：在鲁一航那三个问题逼出的那一个多小时里，一个原来只会算行列式的宋嘉禾，显出了一个能把行列式讲给外行听的宋嘉禾。而这件事是在他自己身上发生的，不能转手。

◆ 九、放回日子里

动能这件事，最容易在日子里算错。你辅导孩子作业，讲了三遍，孩子说懂了。这三遍，付动能的是你。下一次，换一个顺序：你只问，让他讲给你听。你装成一个什么都不懂的人，每听一句，问一句“那为什么”。他讲不下去的地方，就是他该回去补的地方。你会发现自己忍住不讲，比讲还累。那是因为这一次的力，终于付在了他身上。

你是老师，可以算一算自己一节课里，动能是谁在付。四十分钟里，你讲了三十分钟，学生听了三十分钟，这三十分钟里付力最多的人，是你。不必少讲，可以换一个顺序：讲完一个要点，停两分钟，让学生转过去，把刚才那一段用自己的话讲给同桌听，同桌只许问“那为什么”。两分钟不长，可是这两分钟里，付力的人换了。下课前再留三分钟，请每个人写一句“今天我自己接上的是哪一点”，写不出来的，就是还在场、没建立的地方。

在单位里带新人也一样。新同事跟在你身边看你做了一个月，看得很明白；轮到他自己上手，处处卡住。不如反过来：让他先做，你在旁边看，他卡住了你只问一句“你打算怎么办”。再过一阵，让他把这套流程讲给更新来的同事听。讲的那一次，他身上才真正接上了。

你自己学东西，可以留意一下自己的“用功”是哪个方向。一晚上抄完一本笔记，很累，可是问自己一句：“今晚有没有哪一条连接，是我自己拆开又接上的？”如果没有，这一晚的力气多半花在了原地。

问 AI 的时候也一样。直接要答案，是请它替你付动能。换个用法：先把自己的理解讲给它听，请它扮演那个不懂的室友，只问“那为什么”，不给答案。它问得好的时候，你就站在了宋嘉禾那一晚的位置上。这种用法，第 19 章讲作业时还会细讲。最后，别忘了那个睡着的室友。累的时候，先去睡。睡醒了，力气回来了，再付。

这一编的三章，讲完了建立的三个条件：对不上、场、动能。对不上要事前独立指认，场要排在卡住之后，动能要学的人自己付、往对的方向付。三样都在，纠缠才建得起来。可是知道了这三样，还是有人学不进。学不进，还分三种来路。下一编讲。

带走的话

别人讲得再好，那份力也结晶在讲的人身上；你自己拆开又接上的，才留在你身上，还替你省下以后的功。

小　账

“以教促学”“自我解释”与笔记之争证明了学的人自己加工有效，却把它说成加工深度与媒介之别。本书把它算成动能：谁付、往哪个方向付，付多少就省下多少维持。

看完一个讲得极好的视频就说“我学会了”，是把讲的人身上的一次发生，收回成自己手里的一个发现；那份重接，从头到尾没在你身上发生过。

想一想

1. 你最近一次“讲着讲着讲不下去”，是讲什么？你后来回去补了吗？
2. 你身边有没有一个肯问你“那为什么”的人？你是不是也常常替别人把动能付掉了？
3. 你这周最累的那一天，学进去了什么？那一天，你是不是该先去睡？

◆



第　五　编

三个入口：学不进有三种

导　语

孩子说“不想学了”，可能是三件不同的事。这一编把学不进分成三个入口，一章讲一个，药各不同。第 13 章，王子涵从南京转到新加坡，“努力就有分”碎了，越加练越糟：她缺的是新学法，同时要有人托住。第 14 章，李俊杰当年问“学这个有什么用”，直到手里的电线管要绕过一根水管，那个 1.414 才落了地：答这一问的不是道理，是一件做得出来的事。第 15 章，唐小雨一声“随便”，连原来会的也在松：先补能量，再谈方法。走错门，帮助就成了伤害，所以给药之前，先要分清是哪个入口。

13

第 13 章

入口一：旧办法碎了

这一章的问题

换了新学校、新单位，你比谁都拼，结果一次比一次差——那条一直灵验的“努力就有分”，到底是在哪儿失灵的？

王子涵把成绩单压在数学课本下面，压了一个下午。她十五岁，去年夏天刚在南京读完初二。爸爸被公司派到新加坡，一家人跟过来，她进了一所国际学校，读九年级。学校用 IB 的中学项目，数学课全用英文上。

在南京，她的数学从没掉出过班里前五。每天晚上做两页练习册，周末再刷一套卷子，这个节奏她过了三年。

开学第六周，第一次单元测验发下来。一百分的卷子，她拿了四十一分。她把卷子从头翻到尾。计算题几乎全对，扣分全在后两部分。一部分要她用英文写出“你是怎样想的”。另一部分是一道生活题：比较两家电话公司的月费套餐，问哪一家更划算，要写理由。她在计算题旁边写满了式子，理由那一栏只写了一行。老师在卷子顶上用红笔写了一句：Show your reasoning. Define your variables.

晚饭时，妈妈刘慧看了卷子，说：“刚来，正常。再努力一点就上去了。”爸爸在视频里说：“闺女加油，你在南京什么题没见过。”

那天晚上她多做了三页练习册，全是从南京带来的那几本。第二次测验在两周后，她拿了三十八分。理由那一栏，她写得比上次还少：时间都花在把计算做到满分上了。

她在床上哭，说的是一句话：“我比谁都努力。”这句话是真的。她确实比谁都努力。可是努力换不来分了。这一章讲的，就是这一晚。

◆ 一、努力就有分，碎了

先看清碎的是什么。碎的不是她的数学。她的计算还在，速度还在，南京三年练出来的手感一点没丢。碎的是一条她从来没说出口、却天天在用的道理：“努力就有分。”

这条道理不是空话。在南京，它年年应验。多做一页，考试就稳一分；多刷一套，排名就靠前一点。它是一个结结实实的理念符号，背后有三年的现实托着，也早已沉成她身上的一个自我符号：“我是数学好的人。”

现在，一张四十一分的卷子摆在桌上。这是一个现实符号，硬得没法商量。理念说：“努力就有分。”现实说：“你努力了，分没有来。”两样东西对不上了。本书把这种情形叫作**入口一：现实是硬的，理念碎了**。

“碎”这个字要说准。不是理念被驳倒了，没有人跟她辩论。是现实一次、两次地撞上来，撞到这条道理再也撑不住。第一次四十一分，她还能用“刚来”解释；第二次三十八分，她用力更多、分数更低，这条道理就裂开了。

这里有一个容易漏看的地方：第二次比第一次低。如果只是“努力得不够”，多做三页应该多拿几分。她多做了，反而少了。这说明她的力气不是不够，是用错了方向。她把更多的时间压在计算上，挤掉了理由那一栏。她越努力，就越远离这份卷子要的东西。所以，这里要先说清一句：

入口一的人不缺力气，缺的是一条新的路。

用书二的三角再看一遍，会更清楚（见书二第 13 章）。三类符号互为函数，任两类对不上，就逼第三类发生，并回写到另外两类上。其中一条是：理念

符号＝F（现实符号，自我符号）。意思是，当现实和自我对不上时，被逼着发生的，是一条新理念。

子涵身上，现实是那张四十一分的卷子，自我是“我是数学好的人”。这两样在南京一直对得上：卷子上的高分，正好托着“我数学好”。到了新加坡，它们第一次对不上了：卷子说“你不行”，自我说“我行”。

两样都很硬。卷子改不了，分数就是那么多；自我一时也改不了，三年的高分不是假的。于是被夹在中间、必须变的，是理念：“努力就有分”这一条，要改写成一条能同时容下这张卷子和这个自己的新理念。这条新理念大概是这样的：“在这里，算对只是一半；把怎么想的说出来，让别人看得懂，才是另一半。”

入口一的走向，就是这样被三角定下来的：现实硬，自我也不肯垮，理念只好重写。新理念长出来以后，还要回写：回到卷子上，成了一种新写法；回到她身上，成了“我是数学好的人”里新的一层。第六节会看到这两处回写。如果自我先垮了，“我其实不行”，那么理念就用不着重写了，人会直接认输。所以托住自我，正是让理念有机会重写的前提。这一点，第七节还会回来。

◆ 二、古人早就见过“碎”

旧办法在新地方失灵，这件事古人看得很清楚，也留下了几个人人都会背的故事。第一个是刻舟求剑，出自《吕氏春秋·察今》。楚国人过江，剑掉进水里，他在船舷上刻一道记号，说剑是从这里掉下去的。船停了，他从刻记号的地方下水去找。书里的评语是：“舟已行矣，而剑不行，求剑若此，不亦惑乎？”

这个故事常被讲成“笨”。可是《察今》写它，不是为了笑人笨，是为了讲一个道理：“世易时移，变法宜矣。”船在走，水在流，刻在船上的记号已经指不到剑了。旧记号本身没错，错在拿它去对一个已经变了的现实。

子涵手里的“努力就有分”，就是那道刻痕。它在南京那条船上刻得很准。船开到新加坡，水换了，记号还在原处，剑已经不在下面了。

第二个是邯郸学步，出自《庄子·秋水》。燕国寿陵的一个少年，到赵国邯郸去学那里人走路的样子。结果是：“未得国能，又失其故行矣，直匍匐而归耳。”新的步法没学会，自己原来怎么走也忘了，最后只能爬着回家。

这个故事比刻舟求剑更狠。刻舟求剑是旧办法不肯碎；邯郸学步是旧办法碎了，新办法没长出来，人掉在中间，什么都没剩下。

子涵站的地方，正在这两个故事之间。她不肯放下南京的办法，这是刻舟；如果她一下子把南京的东西全扔了，去学一种她还看不懂的新办法，就可能是邯郸学步。

第三个更早。《周易·系辞下》说：“穷则变，变则通，通则久。”路走到头了，才会变；变了，才走得通。这句话把“碎”放在了一个更大的过程里：碎不是终点，是变的起点。

这几位古人对在哪里，要先写足。他们看见了旧办法在新地方会失灵。他们看见了记号会过期，船会走，世会移。他们甚至看见了最坏的结局：旧的丢了、新的没来，人只能爬回去。他们还看见了“穷”和“变”之间的那层关系：不到走投无路，人不会换路。

还有一句常被拿来讲学习的老话，也要放在这里。《论语·为政》：“温故而知新，可以为师矣。”新是从故里长出来的，不是从空地上长出来的。孔子这一句，正好替邯郸学步那个少年补上了他缺的一课：学新步法之前，别先把自己的故步扔了。

它们停下的地方，正好是接着要走的一步。刻舟求剑只说“该变”，没有说变成什么、谁来教那个楚国人新的找法。邯郸学步把那个少年写成笑话，却没有问：他在邯郸学步的那些天，身边有没有一个人告诉他，新步法是怎样一节一节

长出来的？他爬回家，是因为他笨，还是因为没有人托住他？“穷则变”说得很大，可是一个十五岁的女孩子在床上哭的那一晚，“变”要从哪一步开始，书里没有写。

◆ 三、近人把“碎”讲得更细

二十世纪以后，研究者把“到了新地方，旧办法不灵”这件事拆得更细了。下面几条，各自看见了一块。

文化冲击。 人类学家 Kalervo Oberg 1954 年在巴西里约热内卢的一次讲话里，讲到了“文化冲击”（culture shock）。这篇讲话 1960 年又在《实用人类学》上重刊。他说，人到了一个新文化里，会失去所有熟悉的信号和符号，一时不知道怎么做才对，这本身就会让人焦虑。

比这次重刊更早，1955 年，挪威学者 Sverre Lysgaard 调查过约两百名挪威富布赖特学者，他们都在美国待过。他提出，适应的过程像一个 U 字：先是新鲜，然后跌到谷底，再慢慢爬上来。

这两位对在哪里？他们看见了：碎是一个过程，不是一个瞬间；碎的不只是语言，是一整套“怎样做才对”的信号。子涵卷子上那句 Show your reasoning，就是一个她不认识的信号。

中国学习者的悖论。 1996 年，在香港大学任教的 David Watkins 和 John Biggs 合编了一本书。书名叫《中国学习者》（The Chinese Learner）。书里讨论了一个让西方研究者困惑的现象：中国学生看上去很依赖记诵，成绩却常常比西方学生好。

这本书的看法是，在中国学生那里，记诵和理解常常是缠在一起的，反复做、反复记，本身就可能是走向理解的一条路。书里也说，西方对中国学生“只会死记”的印象多半站不住。

这一条要特别写出来，因为它替子涵的旧办法说了公道话。她南京三年的刷题，不是死记硬背，那里面有真的理解。她算得快、算得准，是因为那些式子在她身上真的结成了东西。这份东西没有错，也不该扔。

语言这一层。 2001 年，美国的 Jamal Abedi 和 Carol Lord 发表过一篇研究。题目就叫《数学测验里的语言因素》。他们的发现简单说是：英语还没学好的学生，在标准化数学测验上分数偏低；把题目的英文改写得更直白，这一部分学生的分数就会上来一些。数学卷子从来不只是数学，它也是一份语言卷子。子涵的卷子上，生活题和理由栏都要用英文写。这一条研究提醒人：她丢的分，有一部分是英语的账。

努力本身不够。 斯坦福的心理学家 Carol Dweck 以“成长型思维”出名。2015 年她在《教育周刊》上写过一篇回顾，专门纠正一种常见的误用：只夸孩子“你很努力”，却不帮他学到东西。她的意思是，卡住的时候光靠使劲不够，要试新的策略，也要去找别人的意见。

这一条对子涵最要紧。她爸爸说“加油”，妈妈说“再努力一点”，都是好心，可这正是 Dweck 提醒过的那种话：它让人此刻好受一点，却没有给出下一步。

再往前追一步，美国心理学家 Bernard Weiner 的归因研究早就讲过：一个人把成败归到哪里，会改变他下一步怎么做。他的成就归因理论，1985 年在《心理学评论》上系统提出。“努力就有分”是一种归因，它把成绩归到自己管得着的那一样上，所以它让人踏实、肯下力气。子涵三年的踏实，就是从这里来的。

迁移的老问题。 再往前，1901 年，美国心理学家桑代克（Edward Thorndike）和伍德沃思（Robert Woodworth）做过一组实验。他们问的是：在一件事上练好了，会不会自动带到另一件事上？他们的回答很冷静：带得

过去的，多半是两件事里相同的那些成分；不同的那部分，不会自己跟过去。后人管这叫“相同要素说”。

这条老结论落到子涵身上，正好解释了卷子上的分布。计算题和南京的题有大量相同的成分，所以她的本事全带过来了，几乎满分。理由栏和生活题，跟南京的卷子几乎没有相同的成分，所以三年的功夫一分也带不过来。不是她的本事丢了，是新卷子里能接住这份本事的地方太少。

皮亚杰的“顺应”。 第 5 章讲过皮亚杰。他把孩子碰到新东西时的两种反应分开：一种是把新东西塞进旧框子里，叫“同化”；一种是旧框子装不下，只好改框子，叫“顺应”。

子涵头两周做的，是同化：把“写理由”也当成一道计算题，压到最短。新卷子不让她同化，逼她顺应。皮亚杰看见了这一步的必然，却没有替这一步记能量的账，也没有问顺应的那段时间，谁在旁边。

这几条合起来，前人对的地方已经很多了：碎是一个过程；碎的是一整套信号。旧办法里有真的理解，不该一扔了之；语言会吃掉一部分分数；光靠努力不够，要换策略、找人帮。

它们停在哪里？文化冲击和 U 形曲线，把碎写成了一条时间线：熬过谷底，自然会爬上来。可是谷底那一段，谁在做什么、什么东西在松开、什么东西在长，曲线上看不见。有人熬上来了，有人没熬上来，曲线不负责解释这个差别。

语言的研究把一部分账算清了，可是子涵的卷子不只是英语的问题。就算把题目全翻成中文，“写出你是怎样想的”这一栏，她在南京也没练过。

Dweck 说“换策略”，说得对。可是策略从哪里来？一个十五岁的孩子在一种她还不认识的评分规则面前，自己想得出新策略吗？换策略要付的那份力气，谁来付，怎么付？

◆ 四、碎的是五段账里的哪一段

现在用本书的五段账来看子涵。本书把学一样东西分成五段：〇　在场（看懂了）；一 建立（学习）；二 维持（记忆）；三 粒子化（学会）；四 熔开再结晶（活的会）。前面几章已经一段段讲过（见第 7—9 章）。

子涵在南京的数学，走到了第几段？走得很远。看懂了，建立了，维持住了，也结成了粒子。“见到这类题，用这个办法，写出这个答案”，在她身上稳定、整体、独立：换个数字还在，不看书能一口气做完，离开老师也立得住。这是一颗真的粒子。

可是它结在哪一界？主要结在理念一界。它是“题目—办法—答案”这一套，活在练习册和试卷上。它也沉成了一个自我符号：“我是数学好的人。”它很少碰现实：电话套餐、手机流量、真要做的选择，在南京的卷子上不常出现。

新加坡的卷子把现实搬了进来，还要求她把粒子里的东西用话说出来。一颗只在理念界结得很牢的粒子，碰上了现实，又被要求拆开给人看。这就是五段账里的第四段：**熔开再结晶**。

入口一卡的，正是这一段。旧粒子被现实撞得熔开了，可是熔开不是她自己要的，是被撞开的。熔开以后，新的东西要从第一段“建立”重新长起，而建立需要的东西，她手里一样都没有：她不知道新的规则要什么，也没有人托着她。

所以入口一的账要这样记：**旧粒子在第四段被撞开了，新的纠缠还没在第一段建起来。人掉在两段中间。**邯郸学步那个少年，就掉在这里。

还有一道闸要守住。本书一路都在说：用“对不上”解释一次学会，先要在事前独立指出那条缝，不能事后说“那里一定有过对不上”（见书二第 14 章）。子涵这条缝，事前指得出来吗？

指得出来。她入学第一周，学校就发了一张数学评分说明。这所学校用 IB 中学项目的四条评分标准：A 知识与理解，B 探究规律，C 交流表达，D 在真实

情境里用数学，每一条按 0 到 8 分评。只要把这张说明和她南京的做法放在一起，在第一次测验之前，就能写出下面这张表。

评分标准	这一条要什么	子涵南京的做法	事前能不能预测
A 知识与理解	算得对、用得对	三年刷题，最强的一项	预测：几乎满分
B 探究规律	从几个例子里找出规律，说出来，验证它	规律是老师给的，她负责套	预测：会卡住
C 交流表达	定义变量、写清步骤、让别人看得懂	只写式子，过程越短越好	预测：大量丢分
D 真实情境	把一件生活里的事变成数学，再回到生活里下结论	练习册里的“应用题”已经替她变好了	预测：不会起头
语言	以上全部用英文	英语够日常，不够写推理	预测：放大 B、C、D 的失分

这张表是在考试之前就写得出来的。第一次测验的四十一分，落在了表里预测的地方：A 几乎满分，后面几栏大面积丢分。这就是事前独立指认。缝不是事后编的，是写在评分说明里、写在她的旧习惯里的。

◆ 五、为什么“再努力一点”是错药

缝找到了，下一步是药。本书承重命题里有一条：**三个入口，三种药。** 入口一要的是新理念，入口二要的是直面现实、做出东西，入口三要的是先被托住（见书二第 22 章）。

子涵是入口一。她要的是新理念。这里的“新理念”不是一句新口号，是一套新的“怎样学”：这张卷子在要什么，什么样的答案在这里才算好，一道题做到哪里才算做完。在南京，一道题写出答案就做完了；在这里，写出答案才做了一半，还要让一个没学过的人看得懂你为什么这样写。

可是子涵那一晚收到的，是三种别的药。第一种是鼓励：“再努力一点。”“加油。”鼓励给的是力气。本书把这份力气叫作动能：特征纠缠被拆

开、重接的速率与方向（见书二第 18 章）。第 12 章说过，动能的方向比大小要紧。子涵的动能一点都不少，方向错了。鼓励没有改方向，只是把油门踩得更深。她就在旧方向上跑得更快，离卷子要的东西更远。第二次测验比第一次还低，就是这样来的。

第二种是加练：“从南京带的练习册再做几本。”加练是拿旧理念加倍。旧理念说“多做就有分”，加练就是“更多地做”。这是刻舟求剑：剑已经不在记号下面了，还在记号下面潜得更深。

第三种是讲道理：“数学很有用，你要重视。”这句道理常被当成入口二的药，其实连入口二也治不好。入口二的人觉得书上的东西跟日子不相干，他要的是直面现实、亲手做出东西，不是再听一遍“有用”。子涵更不是这样。她从来没觉得数学没用，她比谁都重视。拿这句道理给她，等于对一个找不到路的人说“这条路很值得走”。

还有第四种，不算药，是等：“刚来都这样，过段时间就好了。”这句话背后，有 U 形曲线撑腰，也不全错。很多转学生过一两个学期，确实慢慢好起来。可是曲线画的是一群人的平均，不是一个人的路。平均线往上走，不等于每个人都在往上走；有人在谷底被拉了一把，有人在谷底一直坐着。“等”把谷底里最要紧的那件事，也就是有没有人托，交给了运气。三种药加上一种等，都出于好心，都对不上她的病。

常见的说法	这是哪一种药	它给了什么	子涵缺的是什么	结果
“再努力一点就上去了”	给动能	更多力气，方向不变	新方向	在旧方向上跑得更快
“把南京的练习册再做几本”	旧理念加倍	更多旧办法	新办法	越做越远离评分要的东西
“数学很重要，要重视”	讲道理（常被当成入口二的药）	讲意义	她不缺意义	多一份压力，没多一步路
“刚来都这样，过段时间就好”	等时间	等曲线自己爬上来	谷底里有人托	有人爬上来，有人滑下去
“这一栏要你写什么，我们拿一道题一起拆”	新理念＋场	新的“怎样学”，有人陪着走第一步	正是这个	旧粒子熔开，新的开始建立

最后一行，是这一章要讲的药。它有两半。前一半是新理念：把新规则讲清楚，讲到她手上做得出来。后一半是场：有人在旁边，托着她走第一步。

两半缺一不可。只有新理念没有场，就是把评分说明翻译成中文塞给她，让她自己去悟。这样的“新理念”仍然只是一张纸，她仍然掉在两段之间。只有场没有新理念，就是陪着她哭，陪完了第二天照旧做练习册。

◆ 六、一个完整的例子：子涵的六个星期

子涵的数学老师叫普丽娅·拉奥（Priya Rao），在这所学校教了九年书，见过很多从中国、韩国、日本转来的学生。第二次测验以后，她把子涵留下来谈了二十分钟。

她没有说“加油”。她把第一次测验的卷子摊开，指着 A 那一栏说：“这一部分，你是全班最好的。”然后指着 C 那一栏说：“这一部分，你不是不会，是没人教过你这样写。我们从这里开始。”

这两句话，一句是场，一句是新理念。前一句告诉子涵：你原来的东西是真的，不用扔。后一句告诉她：缺的不是力气，是一种你还没见过的写法。

她给子涵留了一份很特别的作业，叫“两栏作业”。每道题，左边一栏照南京的办法写，怎么快怎么写；右边一栏写给一个“没上过这节课的同学”看，要让他读完就能自己做出来。

这份作业看着简单，用本书的账一拆，三个条件和五段都在里面（能量账见书二第 16—18 章；第 19 章那张作业设计单，问的也是这几样）。

左边一栏，付的是维持的功。南京那颗粒子的连接度很高，也就是内能足；这一栏让它照旧被用，不至于因为“新学校不要这个”就被冷落、松掉。

右边一栏，是对不上露出来的地方，也是动能换方向的地方。左栏一口气写完，右栏写不出理由，缝就摆在纸上。同样一道题，力气不再往“更快”那边使，改往“说清楚”那边使。力气的大小没变，方向换了。

“写给一个没上过课的同学看”，这个读者起先只是想象出来的。他给右栏的力气定了方向，可他还不是场。一个想象出来的读者不会回应，场要能回应：要等有人坐下来，真的读这一栏，真的说一句“我看不懂”。

一张纸，两栏：左栏落在维持，右栏落在熔开再结晶，新的那一层要从建立长起；对不上和动能写在纸上，场留给真来读这一栏的人来补。这是这份作业比“多做三页”强的地方。

第一周，子涵的右边一栏写得很痛苦。她发现，很多步骤她写不出理由。不是她不会做，是她从来没被问过“为什么”。

第二周，老师把她和本地学生伊森·吴（Ethan Goh）排成一组。伊森计算常常出错，可是很会讲。两个人互相看对方的右边一栏。子涵指出伊森算错的地方，伊森指出子涵“跳步”的地方。

这就是场。本书说的场，不是气氛，是一张网的吸引与拉扯（见第 11 章，书二第 17 章）。伊森的“我看不懂你这一步”，把子涵往“说清楚”那边拉；子涵的“你这里算错了”，把伊森往“算准”那边拉。两个人各有一半，网就托住了两个人的落差。

第三周，出了一件事。那一周的探究题是握手问题：一个房间里有若干人，每两人握一次手，一共握多少次？要从两人、三人、四人的例子里找出规律，再说明规律为什么成立。

子涵在南京早学过这个，左边一栏她一秒钟就写出了公式：n 乘以 n 减一，再除以二。右边一栏，她卡住了。为什么要除以二？她记得“要除以二”，却说不出为什么。

她坐在那里想了很久。伊森在旁边说：“你先别写公式，你就画四个人，一条条连线，数一数。”她画了。四个点，连线。她一边连一边数，连完最后一

条，停了下来。她发现自己一直在用“每个人都要跟其余的人握手”去数，四个人，每人三次，四乘三是十二；可是纸上的线只有六条。

十二和六，对不上。就是在这个对不上里，一样东西显了出来：每一次握手，被两个人各数了一遍。“除以二”这个她背了两年的步骤，在这一刻熔开了，又重新长成一个整的东西：不是“公式里有个除以二”，是“每条线有两头”。

她在右边一栏写下：“每个人跟其他 n−1 个人握手，所以是 n(n−1)。可是 A 跟 B 握手，和 B 跟 A 握手是同一次，每次都被数了两遍，所以要除以 2。”

这一行字，用的是她刚学会的那种英文，有两个语法错误。老师在旁边打了一个勾，写：This is what I mean by reasoning.

这一小段值得慢下来看。南京的那颗粒子“n(n−1)/2”一直在，它稳定、能用，只是它的“整体”是靠背的，拆开就散。这一次，它被一个现实的对不上（十二和六）撞开了，在伊森托着的场里，重新结晶成了一颗更整的粒子。这一次结晶，用的是她自己付的动能：她自己画、自己数、自己停下来。这就是第四段“熔开再结晶”本来的样子。

熔开不是坏事，熔开以后没有人托、没有新理念，才是坏事。

第四周和第五周，她把右边一栏越写越长。妈妈刘慧也换了做法。她不再买练习册，晚饭时问的话变了，不问“今天考了几分”，问“你今天给伊森讲了什么”。子涵讲着讲着，有时候讲不下去，就回房间去重写那一栏。这是她第一次在饭桌上讲数学。在南京，数学是关起门来做的。

刘慧自己也在换一套办法。她在南京是一家企业的财务主管，到新加坡后暂时没有工作。头几个月她也不习惯：以前每天有人找她签字，现在每天在等丈夫下班。有一天饭后她对子涵说：“妈妈也在学怎么在这里过日子。”这句话没有

教子涵任何数学，可是它让子涵知道，掉在两段之间的不只她一个人。家里的人托住她，有时候就靠这样一句话。

第五周，拉奥老师让她回头重做第一次测验里那道电话套餐题。题目是这样的：甲公司每月固定收二十新元，每分钟通话另收一角；乙公司每月固定收三十五新元，通话不限。问：哪一家更划算？

第一次，她只写了一行：“乙更划算，因为不限时。”那是一个南京式的答案：找到关键词，给出结论。

这一次，她先按右边一栏的写法定义变量：设每月通话 t 分钟。甲的月费是 20＋0.1t，乙的月费是 35。两条线什么时候一样？20＋0.1t＝35，t＝150。她写下结论：每月打电话少于一百五十分钟，甲便宜；多于一百五十分钟，乙便宜。

写到这里，她停下来，拿出自己的手机看了一眼通话记录。上个月，她只打了四十多分钟电话，大部分时间用的是聊天软件。她愣了一下。按她第一次的答案，她自己应该选乙；按她刚算出来的，她应该选甲。

这又是一个对不上，这一次是在她自己的日子里。数学算出来的结论，和她第一次凭“关键词”给出的结论，在她自己的手机上分出了对错。她在卷子最后加了一句：“所以要先知道自己打多少电话，才能说哪一家划算。我上个月只打了四十多分钟，我应该选甲。”拉奥老师在这一句下面画了一条线，写：This is criterion D.

这一句话很短，可是它走完了一条完整的路：从生活里的一件事，到一条式子，再回到生活里的一个选择。本书第 9 章说，粒子化要跨界：从理念到现实，再到自我。子涵的“两条线的交点”，原来只活在练习册里；这一次，它落进了她的手机，又落进了一句“我应该选甲”。D 那一栏，她只摸到了一次门边。可是那一次是真的。

第六周的单元测验，她拿了六十七分。A 那一栏仍然几乎满分，C 那一栏从二分升到五分，D 那一栏仍然很弱。这不是一个“她变好了”的故事。六十七分不算高，D 那一栏她还没找到门。英文写推理，她还是慢。

可是这六个星期，显出了一个新的她：一个会把算式说成话的人。在南京，“我是数学好的人”这个自我符号，指的是“我算得又快又准”；现在，同一句话里多了一层，“我能让别人看懂我为什么这样算”。旧的那一层没有被扔掉，新的一层长在它上面。

◆ 七、碎的时候，要有人托住

子涵的故事里，有一件事很容易被当作背景略过：拉奥老师在第二次测验以后就出现了。如果没有出现呢？那样的话，子涵很可能会按照“努力就有分”再撑一个月。第三次测验，她可能多做五页练习册，分数可能更低。到那时，碎掉的就不只是“努力就有分”这条道理，还有“我是数学好的人”这个自我符号。

一个自我符号碎了，又没有新的来接，会怎么样？人会开始怀疑自己整个人。“原来我不行。”“南京的成绩都是假的。”“我到这里来就是个错误。”这时候，她缺的就不再是新理念了。她缺的是力气，连听新理念的力气都没有了。这就从入口一，滑进了入口三。本书第 15 章专讲入口三。这里只先说一句：

入口一拖久了，没人托，就会变成入口三。

所以入口一的药，前一半是新理念，后一半是场，而且场要来得早。邯郸学步那个少年，旧步法丢了、新步法没来，他还有力气“匍匐而归”。现实里有些孩子，连爬回去的力气都没有了。

这里还要分清两个词：熔开和打碎。熔开，是一颗粒子松开成纠缠，那些连接还在，只是不再锁死成原来的形状，所以能重新结晶。子涵的“n(n−1)/2”熔开时，乘法还在，减一还在，除以二也还在，它们只是换了一种接法。

打碎，是人不再认这份纠缠了。一个人如果被连续几次的失败说服了“我根本不是学数学的料”，那么他南京三年的东西不是熔开，是被他自己一块块推开了。东西未必真丢，连接也还在，可他不再去够它、不再用它。不肯用的东西，不会参加下一次结晶。

入口一的危险，就在熔开滑向打碎的那一段。场的用处，就是让熔开停在熔开，不至于变成打碎。

还有几个信号，可以帮人在滑下去之前看出来。一是分数的样子。入口一的分数，常常是一栏极好、一栏极差，中间断开。入口三的分数，常常是每一栏都在慢慢往下掉。

二是时间的去向。入口一的孩子，时间多半还在往书桌上压，只是压错了地方；入口三的孩子，时间开始从书桌上流走，坐着也做不进去。

三是说话的口气。入口一的孩子说“我比谁都努力”，那是一句委屈的话，里面还有不服；入口三的孩子说“随便吧”，那里面连不服都没有了。

这三个信号都不是诊断，只是提醒：同样是成绩往下掉，掉的地方不一样，接的手也不一样。

“托住”这两个字也要说准。托住不是安慰。安慰是“别难过，没关系”，它让人此刻好受，可是第二天她还是一个人面对那张评分说明。

托住也不是替她做。替她把右边一栏写好，她就又回到了在场：看懂了，没有建立（见第 1、7 章）。

托住是：在她的旧粒子熔开、新纠缠还没建起来的那段时间里，有人站在旁边，陪她走第一步，让这个落差不至于把她冲走。拉奥老师那句“这一部分你是

全班最好的”，在托；伊森那句“你先画四个人”，也在托。他们都没有替她走那一步，可是她走那一步时，脚底下是有东西的。

成年人也一样会走进入口一。一个在国内做了十五年会计的人，到新加坡换了一家用另一套准则的公司；一个干了二十年的老师，突然要用一套全新的评分方式上课。旧办法在他们身上结得很牢，碎起来也很疼。成人这一面，第 17 章还会细讲。这里只提一句：旧办法用得越久，旧粒子的连接度越高，熔开越费力，托住就越要紧。

◆ 八、本书的说法，压成几句

把这一章压成几句话：**入口一，是现实硬、理念碎。** 子涵的四十一分是现实，“努力就有分”是理念，两样对不上，理念先撑不住。

它卡在五段账的第四段。 旧粒子被撞得熔开了，新的纠缠还要从第一段建起。人掉在两段中间。

它的药是新理念加场。 新理念给的是新的“怎样学”，场给的是熔开那段时间的托底。只给鼓励，是把错方向的油门踩深；只给加练，是刻舟求剑；只讲意义，是拿一句连入口二也治不好的道理去治入口一。

它的缝事前指得出来。 把新规则和旧办法并排放，在考试之前就能写出“哪里会对不上”。找不到这条缝，就不要轻易说孩子是入口一。**它有时限。** 托住来得晚，入口一会滑成入口三。

还有一句要放在最后，因为它最容易被忘：**旧粒子不该扔。** 子涵南京三年的计算，是真的。新的东西是长在旧的上面的，不是换掉旧的。刻舟求剑的错，是不肯熔开；邯郸学步的错，是熔得一点不剩。活的会，是熔得开，也接得上（见第 9 章，书二第 20 章）。

◆ 九、放回日子里

如果你是家长，孩子换了学校、换了国家、换了老师，成绩突然往下掉，先别急着说“再努力一点”。先问三个问题。第一，他的力气少了吗？如果他每天学到很晚，比以前还拼，那缺的多半不是力气。

第二，新地方的规则，和他原来的办法，有没有一张能并排放的表？找来新的评分说明、作业要求、老师的批语，一条条对照。你多半能在考试之前就看见哪里会对不上。

第三，在他旧办法碎掉的这段时间里，身边有没有一个懂新规则的人？可以是老师，可以是同学，可以是早来一两年的学长。如果没有，去找一个。这比买十本练习册有用。

如果你是老师，班上来了一个转学生，前几次考得很差，不妨先看一眼他丢分的地方。如果他在一栏几乎满分，在另一栏几乎零分，那多半不是他不行，是他手里那套旧办法，正好对不上你这一栏。告诉他哪一栏他已经很好，再陪他拆一道他不会写的题。

如果你自己就是那个学生，刚换了学校，刚换了语言，成绩一落千丈，这里有几件你今晚就能做的小事。找出新学校的评分说明，或者老师批改时最常写的那几句话，抄在一张纸的左边。在右边写下你原来的做法。一条一条对着看，哪一条你原来根本没练过，圈出来。别把原来的本事扔掉。原来练得好的那一栏，照样每天用一点。它是你脚下最结实的那块地方。

挑一道你圈出来的那一类题，只挑一道，写给一个没上过课的同学看。写不下去的地方，就是你要学的地方。那不是你笨，那是新路的第一步。

然后去找一个人。可以是老师，可以是一个比你早来一年的同学，也可以是一个跟你正好相反、算得慢却说得清的同学。把你写不下去的那一行拿给他看。

这几件事都不需要你更拼命。它们只需要你换一个方向使劲，再找一个人站在旁边。

如果你是大人，自己换了工作、换了行业，忽然发现以前那套办法不灵了，越使劲越糟，也可以停下来问一问：我是不是在一条已经开走的船上刻记号？

带走的话

旧办法碎了，缺的不是力气，是新的路；新的路要有人陪着走第一步，否则碎会变成垮。

小　账

刻舟求剑和邯郸学步看见了旧办法会失灵，U 形曲线看见了碎是一段过程。本书打开的是那段谷底：旧粒子在第四段熔开，新纠缠要从第一段重建，中间要有场托住。

把“碎”说成“适应期，熬过去就好”，把“再努力一点”当成药，都是把一次正在发生的熔开与重建，收回成一个只需等待的结果。

想一想

1. 你有没有过一段“越努力越糟”的日子？那时候碎掉的，是哪一条你从来没说出口的道理？
2. 回头看，那段时间身边有没有一个人托住了你？如果有，他做的是安慰、替你做，还是陪你走第一步？
3. 你的孩子、学生或同事，眼下有没有人正掉在“旧的熔了、新的没来”的中间？你能为他找来一张新规则与旧办法并排的表吗？

◆

14

第 14 章

入口二：书上很硬，日子塞不进

这一章的问题

孩子在作业本上写“学这个有什么用”，你回他一句“考试要考”——那块书上的东西，在他的日子里到底有没有位置？

李俊杰手里拿着一根三米长的电线管，站在车间里，盯着一根横在墙上的水管发愣。他十七岁，今年一月进了新加坡工艺教育学院（ITE），读电气方向的三年制高级工艺教育证书课程。这是他入学后的第三个月，车间实作课。

讲师翁先生（Mr. Ong Boon Kiat）给每个人的任务一样：沿着墙面走一段管，中途有一根水管挡着。要让电线管先拐两个弯，从墙面往外让出十厘米，从水管外侧跨过去；过了水管，再用同样的两个弯贴回墙面。水管凸出墙面十厘米。每个弯都弯三十度。

翁先生在白板上写了一行字：两个弯之间的距离，等于十厘米乘以二，二十厘米。俊杰举手：“为什么是乘二？”翁先生说：“三十度的倍数是二。四十五度是一点四一四。你记住就行。”

俊杰没有记住。他盯着那个“一点四一四”看了很久。这个数他见过。中学二年级，数学老师在黑板上写过根号二等于一点四一四。老师还写过一个口诀，叫 SOH-CAH-TOA：正弦等于对边比斜边，余弦等于邻边比斜边，正切等于对边比邻边。

那一年，他在作业本上写过一句话，后来被老师拿出来在班上念：“学这个有什么用？我又不去量金字塔。”那天晚上回家，他问爸爸李永福。爸爸开了二十年罗厘，听完说：“有什么用？考 N 水准要考，考不过你就没书读。”

俊杰后来考过了。三角函数那一题他拿了一半分，靠的是背下来的口诀。考完以后，这个口诀就像一张用过的车票，被他扔在了脑后。现在，三年过去了，他站在一根水管前面，手里拿着一根管，那个口诀又回来了。只是这一次，它不在试卷上，在他手上。

◆ 一、“学这个有什么用”不是偷懒

先替三年前那个写“有什么用”的少年说一句话。这句话常被大人听成偷懒，或者顶嘴。老师念出来，班上一阵笑，老师说“别贫嘴，好好学”。爸爸听了，回一句“考试要考”。可是这句话其实很准。它报告的是一个真实的情况：书上的东西是硬的，日子塞不进去。

三角函数在课本上是一套规则，结结实实：对边、邻边、斜边，三个比值，一张表，一套口诀。它是一个理念符号，稳定、整体，能离开老师在考卷上独立地用。

可是俊杰的日子里没有它的位置。他每天坐巴士上学，放学去组屋楼下打球，周末帮妈妈搬东西。他的日子里，没有一处需要知道一个角的正弦是多少。理念很硬，现实塞不进。两样对不上。本书把这种情形叫作**入口二：理念是硬的，现实塞不进去**。

它和入口一正好相反。上一章的王子涵是现实硬：一张卷子撞上来，她的旧理念碎了。俊杰是理念硬：课本上的东西一点没碎，好好地立在那里，碎不了，也用不上。它像一块硬糖，含在嘴里化不开，咽也咽不下。所以这一问要这样听：

“有什么用”这一问，是理念硬、现实塞不进时，人身上发出的声音。它不是病，是症状。 听见这一问，该做的不是把它压下去，是听清楚：这个孩子的哪一块理念，在他的日子里找不到落脚的地方。

再回头看俊杰的爸爸。李永福开了二十年罗厘，倒车进窄巷，一把方向就能把车尾贴到离墙一掌宽的地方。装货时，哪一箱压在下面、车斜着停在坡上货会不会滑，他心里都有数。这些事里，满是角度、力和比例。他每天都在用三角，只是从来没有人告诉他，那就是三角。

所以儿子问他“有什么用”，他答不出来。他手上的东西没有回到理念，书上的东西也从来没落到他手上。他自己身上，就有一道没跨过去的门。“考 N 水准要考”，是一个站在门这一边的人，能给出的最诚实的回答。这不怪他。可是这也说明了一件事：入口二常常是一家人一起卡住的。父母没跨过那道门，就很难带孩子跨过去。

◆ 二、纸上得来终觉浅

“书上的东西用不上”，这件事中国古人说得很多，也说得很好。荀子在《儒效》篇里排过一个次序：“不闻不若闻之，闻之不若见之，见之不若知之，知之不若行之。学至于行之而止矣。”没听过不如听过，听过不如见过，见过不如懂了，懂了不如做了。学，要到做了才算到头。

荀子这个次序，几乎就是一张五段账的草图。“闻之”像是在场，“知之”像是建立和维持，“行之”才落到了现实。他已经看见：学，不在知道那里停下，要一直走到手上。第 1 章引过陆游的“纸上得来终觉浅，绝知此事要躬行”，这里只取后一半：真要懂透，得自己去做。

战国末年的赵括，是这句诗的反面教材。他从小读他父亲赵奢的兵书，谈起兵法来连父亲都难不倒他。秦赵长平之战，赵王用他替下廉颇。蔺相如劝阻，《史记·廉颇蔺相如列传》记下的话是：“括徒能读其父书传，不知合变

也。”赵括只会读他父亲的书，不知道随实际变化去配合。结果是四十万赵军覆没。后人把这件事压成了一个词：纸上谈兵。

到了明代，王阳明把这层意思推得更深。《传习录》里有一句：“知而不行，只是未知。”知道了却不去做，那就是还不知道。在王阳明那里，“知”和“行”不是先后两件事，本来就是一件事的两面。

还有一个故事，站在另一边，也要放进来。《庄子·天道》里，齐桓公在堂上读书，堂下有个做车轮的匠人叫轮扁。轮扁放下工具问：您读的是什么？桓公说是圣人之言。轮扁说，圣人已经死了，“君之所读者，古人之糟魄已夫”，您读的不过是古人的糟粕罢了。

桓公要他说出道理，否则治罪。轮扁就讲自己砍车轮：砍得慢了，轮子松而不牢；砍得快了，紧而嵌不进去。“不徐不疾，得之于手而应于心，口不能言，有数存焉于其间。”不快不慢，手上得来，心里应着，嘴上说不出，可是那里面有一个分寸在。他教不会自己的儿子，所以七十岁了还在砍轮子。

轮扁这个故事，和赵括正好一前一后。赵括是理念很满、现实进不去；轮扁是现实很满、理念出不来。赵括的兵法活在竹简上，下不了战场；轮扁的分寸活在手上，上不了竹简，连亲儿子都传不下去。一个是入口二，一个是入口二的镜子。两个人都没有跨过那道门，只是方向相反。

这几位前人，对的地方要先写足。他们都看见了：理念停在纸上，就不算学会。他们给出了一个清楚的方向：要做，要行，要躬行。荀子甚至排出了一个从听到做的次序，比后来很多教育理论都早了两千年。赵括的故事更是把代价写得血淋淋：理念再硬，进不了现实，最后要现实来付账。

它们停在哪里？“躬行”两个字，说得对，可它本身也是一句写在纸上的话。对一个在作业本上写“有什么用”的十四岁孩子说“纸上得来终觉浅”，他会点点头，然后什么都不会变。这是用一句理念去治理念的病。

前人告诉人“要去做”，可是没有告诉人“做什么、在哪里做、做到什么程度才算从纸上落到了手上”。荀子的次序里，“知之”到“行之”中间那一步怎么跨，他没有写。王阳明说知行本是一件事，可是对于一个知行已经分家的少年，怎么把它们重新接上，他也没有给出一套课堂上能用的办法。还有一层：古人讲“躬行”，多半是在讲做人、做官、带兵。他们关心的是德行和事功，不太关心一个孩子怎样学会一个三角函数。这不是他们的错，是他们的题目不一样。

◆ 三、做中学，以及“别讲道理”的实验

到了现代，“要做”这层意思被写进了学校。美国哲学家杜威（John Dewey）1896 年在芝加哥大学办了一所实验学校。孩子们在那里种菜、做饭、织布、做木工，算术和读写就从这些活计里长出来。他 1916 年出版的《民主与教育》，把这套想法说成了一整套教育哲学。经验是学习的来路，学校应当是一个让孩子在做事中长大的地方。人们后来常把他的主张压成三个字：做中学。

1918 年，杜威在哥伦比亚大学的同事克伯屈（William Heard Kilpatrick），在《师范学院学报》上发表了一篇文章。题目就叫《设计教学法》（The Project Method）。他说，一个好的“设计”，是一件全心全意、有目的的事，在一群人中间完成。今天学校里流行的“项目式学习”，很多就从这里来。

近二十年，心理学家又往前走了一步，用实验去量“有什么用”这一问。研究动机的人有一个说法，叫“效用价值”：学生觉得一样东西对自己有没有用。2009 年，美国心理学家 Chris Hulleman 和 Judith Harackiewicz，在《科学》杂志上发表了一项实地实验。地点是高中理科课堂，做法是让学生自己写一写，课上学的东西跟自己的生活有什么关系。结果是，那些原本对理科没信心的学生，兴趣和成绩都上来了；原本就有信心的学生，变化不大。

2015 年，Elizabeth Canning 和 Harackiewicz 又做了一组实验，被试是大学生。论文的题目起得很直白：《去教它，别去说教它》（Teach It, Don't Preach It）。

他们比较了两种做法：一种是老师直接告诉学生“这个有用”，一种是让学生自己去想“这个对我有什么用”。结果是，对数学没信心的学生，被直接告知“有用”以后，成绩和兴趣反而下降了；自己去想的，没有这个问题。把两种做法合起来，效果最好。他们还发现，老师直接讲的时候，如果举的是日常生活里的例子，而不是“将来工作要用”，没信心的学生反而更感兴趣。

这几项研究，对的地方很硬。杜威和克伯屈看见了：东西要在做事中学，不要在做事之外学。Harackiewicz 的团队更进一步，用数据说明了一件很多家长不愿意听的事：**直接告诉一个没信心的学生“这很有用”，可能会让他更差。**

它们停在哪里？做中学，常常停在“做”。很多项目课热热闹闹做了一学期，学生搭了桥、种了菜、拍了片子，可是问他“这跟你学的力、植物、光有什么关系”，他说不上来。东西做出来了，理念没有回来。这是入口二的镜像：理念进不了现实，换成了现实回不到理念。

效用价值的实验，量的是兴趣和成绩。它告诉人“自己去想有什么用”比“被告知有什么用”效果好，可是它没有说，自己去想的那一刻，学生身上到底发生了什么。为什么一个人自己写下“这个跟我有关”，比老师说一百遍有用？这个“为什么”，实验没有回答。

◆ 四、卡在理念到现实这一步

现在用本书的五段账来看俊杰。本书把学一样东西分成五段：〇 在场；一 建立；二 维持；三 粒子化；四 熔开再结晶。俊杰中学的三角函数，走到了哪一段？看懂了，算是在场。背了口诀，做了作业，考前突击了一周，算是建立了一

点、维持了一阵。考试时拿了一半分，说明当时维持得还行。考完以后，它很快就松了。可是就算在维持得最好的那一周，它也没有走到第三段。

第三段是粒子化，是学会。本书第 9 章说过，粒子化要跨界：一个只在理念界结成的东西，要迁移到现实界、再落到自我界，才算一次完整的结晶。每一步迁移都要付能量（见书二第 15 章）。俊杰的三角函数，卡在了理念到现实这一步。它从来没有进过他的手，没有碰过一样真东西。所以入口二的账要这样记：

理念界的东西也许建起来了、也维持了一阵，可是它在第三段跨界时卡住了，过不了从理念到现实那道门。

过不了门的东西，会怎样？它没有粒子化，就只能靠外力维持：考试、家长、口诀。外力一撤，它就松掉。俊杰考完 N 水准，三角函数就松了，这和第 3、8 章讲的背住型假会是同一个样子。只是在入口二，背住型假会有一个特别的来路：不是他懒得背，是背下来的东西没有地方放。

为什么“做出东西”是对的药？书二第 13 章的三角说：任两类对不上，就逼第三类发生，并回写到另外两类上。其中一条是：现实符号＝G（理念符号，自我符号）。意思是，当理念和自我对不上时，被逼着发生的，是现实：人会去改世界、造东西。

俊杰身上，理念是三角函数，自我是“我又不去量金字塔”，也就是“我是一个用不上这种东西的人”。两样对不上。按三角，出路在现实那一角：去做出一样东西，让三角函数在这样东西上长出一个现实的身体。一根被弯得刚好的电线管，就是这样一个身体。

一旦三角函数在现实里有了身体，它会回写。回写到理念：sin 不再是口诀里的一个音节，是“斜着走多长，才能从墙面让出十厘米”。回写到自我：“我

是一个手上有三角函数的人。”这就是入口二的药：**直面现实，做出东西。** 不是讲道理，是让理念在现实里长出一个身体。

这里要补一句，免得读错：入口二不只属于成绩不好的孩子。一个三角函数每次考满分的学生，也可能卡在同一道门前。让他给自家门口那三级台阶设计一条轮椅坡道，他也许算得出正切，却不知道该从哪里量起、量什么、算出来的数放回台阶上该怎么摆。他的三角函数结成了粒子，可那颗粒子只结在理念界，结得越牢，越以为自己已经会了。这就是第 2 章讲的刷熟型假会的前半截。

分数高低，量的是理念界里那颗粒子结得牢不牢；入口二问的是另一件事：它跨没跨过那道门。成绩好的孩子不常问“有什么用”，是因为分数本身已经替他回答了。可是这个回答也是一块理念，它让他不必去找那道门。

所以入口二有两种样子。一种会大声问“有什么用”，像三年前的俊杰；一种从来不问，因为分数够高，像很多被叫作“学霸”的孩子。前一种的卡住摆在明面上，后一种的卡住藏在高分下面，要等到某一天碰上一根真的水管，才露出来。

再看那句“考 N 水准要考”，就看得出它错在哪里了。它是用一块理念去回答一块理念。三角函数是硬理念，“考试要考”也是硬理念，而且是更远、更抽象的一块。孩子问“这东西在我日子里哪里”，大人答“它在另一张纸上”。日子里仍然没有它的位置，对不上一点没少，还多了一份压力。

中国家长说“将来考大学要用”，新加坡家长说“考 O 水准要用”，说的是同一句话。Harackiewicz 的团队在大学生身上量过：对没信心的学生，这种直接告知的“有用”，可能让他更差。本书把这层意思压成一句：

用理念回答“有什么用”，是在一块硬理念上，再压一块硬理念。

◆ 五、ITE 的车间里有什么

俊杰读的新加坡工艺教育学院，正好是一个“在现实里学”的地方。这里把它的几件实事摆出来，不为夸它，是因为它给入口二的药提供了一个现成的样子。ITE 成立于 1992 年 4 月，前身是职业与工业训练局。它给自己定的教育理念，是三个英文短语：“Hands-on，Minds-on，Hearts-on”。手要动，脑要动，心要动。

从 2022 学年起，ITE 开始把原来分开读的两级证书合成一个三年制课程。第一年打行业的宽基础，第二、三年读专门的模块，读完拿高级工艺教育证书。按 ITE 2023 年 12 月的公告，这套三年制结构计划在 2026 学年全面推开。三年里有两段企业实习：第二年三个月，第三年六个月，第二段接着第一段往深里做。

这几件事放在本书的账里看，意思很清楚。“Hands-on”是现实那一角：理念要落在一样真东西上。“Minds-on”是理念那一角：做的时候脑子要跟着走，做完要能说出道理。“Hearts-on”是自我那一角：做出来的东西，要成为“我是一个能做这件事的人”。三个短语，恰好落在三角的三个角上。这当然不是说 ITE 的人读过书二，只是说，一个长年在车间里教学生的地方，自己摸到了同一个三角。

企业实习更是把“现实”推到了最硬的地方。在车间里弯错一根管，可以再拿一根；在真工地上弯错，要返工，要被师傅说，要耽误别人的活。现实越硬，“对不上”就越清楚，理念就越有机会长出身体。

公道也要讲到另一面。ITE 在新加坡社会里，长年背着一个外号。2023 年 8 月，《今日报》（TODAY）有一篇长篇报道。标题是“ITE 摘掉了‘It's the end’的标签，但学生和毕业生仍遭偏见”。“It's the end”取的是 ITE 三个字母，意思是“到头了”：读到 ITE，书就读到头了。报道里写，ITE 一直想摆脱“最后的退路”那个形象。

这个外号，在本书的账里，是一块对象端的偶像，压在学生身上，就成了自我端的石心（见书二第 19 章）。一个孩子如果在中学就被说服了“我是读不来书的人”，那么就算他进了一个最适合“在现实里学”的地方，他也可能不敢让理念回来。他会在车间里做得很好，却觉得“那是手艺，不是学问”。理念在他身上，从此只剩“我读不来”这一块硬东西。

俊杰的第二年会有三个月的企业实习。到那时，弯错一根管，代价不再是被同学笑一声，是一个电工师傅要陪他返工半天。那时候的对不上，会比车间里硬得多；它逼理念长身体的力气，也大得多。

可是硬也有硬的风险：现实一下子太硬，落差太大，没有人托住，就会变成一锅粥。第 6 章讲过合意困难，第 11 章讲过场。好的实习之所以要有师傅带，道理就在这里。师傅要做的是托住。托住不是安慰、不是替做，是陪着走第一步。所以 ITE 的车间不会自动治好入口二。它提供了现实，可是理念要不要回来、自我要不要改写，还要看车间里有没有人去接那一步。

◆ 六、一个完整的例子：俊杰弯的第一根管

回到那根水管前面。翁先生说“你记住就行”，俊杰没记住，也没照做。他先按自己的感觉弯了前两个弯，又目测着弯了后两个。管子装上去，不贴墙。前后两段让出去的距离不一样，管子在水管外侧翘起来，后半截落不回墙面，悬在半空，离墙面有三四厘米。

旁边的同学阿里夫笑了一声。俊杰脸一红，把管子拆下来。这一下，是一个对不上。不是试卷上的对不上，是手上的对不上：他以为差不多就行，管子说不行。这条缝在他动手之前就指得出来：一个靠目测的人，碰上一个差三厘米就装不上的活，一定会对不上。翁先生看在眼里，也知道。

翁先生没有替他重弯，也没有再说一遍“乘二”。他递给俊杰一支笔、一张废纸，说：“你把这段管子从侧面画出来。”俊杰画了。墙是一条竖线，水管是

墙上凸出的一个小方块。电线管贴着墙走，到了水管跟前，斜着往外走一段，让到离墙十厘米，再拐回来，顺着水管外侧过去。

他看着自己画的那一段斜线，忽然觉得眼熟。斜着走的那一段，和墙面、和一条垂直于墙面的短线，围成了一个直角三角形。往外让出的距离，十厘米，是这个三角形的一条直角边，正对着那个三十度的角。斜着走的那一段，是斜边。弯的角度，三十度，就是斜边和墙面的夹角。

对边，斜边。SOH。正弦等于对边比斜边。他在纸上写：sin30°＝10÷斜边。他记得 sin30°是二分之一。所以斜边是二十厘米。“乘二”就是这么来的。

他又试着算了四十五度。sin45°是根号二分之二，大约零点七零七。十除以零点七零七，大约是十四点一。他翻到工具书的倍数表，四十五度那一格写的是一点四一四。十乘一点四一四，也是十四点一。两个数对上了。

这一刻要慢下来看。三年前的口诀，一直以背住的样子，松松地挂在他身上。它是理念界里一个没有结成粒子的东西。今天，一根翘起来的管子，把它从理念界拉到了现实界。在现实界里，它第一次有了身体：斜着走二十厘米，让出十厘米。

这一次跨界，是他自己付的能量。他自己画、自己认出三角形、自己算、自己对表。翁先生只做了两件事：没有给答案，递了一张纸。前一件让落差留在原地，后一件给了他一个能把落差摊开的地方。

他重新弯了一根。第一个弯在离起点合适的地方，量出二十厘米，打第二个弯；过了水管，后两个弯也照样量出二十厘米。装上去，贴墙，严丝合缝。翁先生走过来看了一眼，没夸他，问了一句：“二十二点五度呢？”俊杰愣了一下。倍数表上有这一格，可是翁先生用手挡住了。

他回到纸上。sin22.5°他不记得。他拿出手机上的计算器，按出来是零点三八几。十除以零点三八几，大约是二十六。翁先生把手拿开，表上那一格写的是二点六。十乘二点六，二十六。

翁先生这一问，很要紧。如果没有这一问，俊杰可能会把“三十度乘二、四十五度乘一点四一四”背成一个新口诀。那样的话，他就是在现实界里又刷熟了一个东西：手很熟，可是理念没有回来，碰上一个表上没有的角度就熄火。这和中学时只在理念界背口诀，是一个病的两面。这一问把他推回了理念：表上没有的角度，他照样能从正弦算出来。

这样，一颗粒子在他身上结成了，而且跨了两界。理念界的“正弦等于对边比斜边”，和现实界的“斜着走多长才能让出十厘米”，第一次是同一个东西。它稳定，换个角度还在；它整体，他能从画图一口气说到弯管；它独立，离开那张倍数表也立得住。

下课前十分钟，阿里夫走过来。他刚才也弯好了，用的是倍数表，可是翁先生那个“二十二点五度”他没答上来。“你怎么算的？”俊杰把那张废纸翻过来，又画了一遍：墙，水管，斜线，三角形。他一边画一边讲，讲到“对边比斜边”时卡了一下，说成了“斜边比对边”，自己又改回来。

阿里夫看了一会儿，说：“所以表上的数，其实是一除以 sin？”俊杰愣住了。他自己刚才是一步步算的，还没有想到这一层。阿里夫这一问，把他刚结成的东西又往前推了一步：表上那一整列数，原来都是一样东西。

这一段看着像是俊杰在教阿里夫，其实两个人都在付能量。俊杰讲，是在把手上的东西重新说成话，这是一次检索，也是一次维持（见第 8 章）；他讲错又改回来，是把刚结成的东西当场又核了一遍。阿里夫问，是在把俊杰拉向一个更整的说法。第 12 章讲过，教别人是付动能的好办法；第 11 章讲过，同伴是一张会拉人的网。车间里这十分钟，两样都在。

那天晚上，他回家吃饭。妈妈陈淑华在蒸包子，准备过两天给外婆送去。妹妹欣怡掰开一个，说：“怎么黄黄的，还有点苦？”妈妈说：“碱放多了吧。”俊杰本来低着头吃饭，听到这句，抬起头。他想起中学化学课上写过一条式子：碳酸氢钠受热分解，生成碳酸钠、水和二氧化碳。小苏打就是碳酸氢钠。二氧化碳让面发起来，留下的碳酸钠是碱性的，放多了，面就发黄、发苦。

他把这条式子说了出来。妹妹说：“哥你怎么突然会这个？”他自己也说不清。这条式子，他当年也是背的，也问过“有什么用”。今天它自己跑了出来，落在一个发黄的包子上。这一段不算他学会了化学。可是它显出了一件事：一个人身上，一旦有一块理念真的跨进了现实，别的那些挂着的理念，也开始找自己在日子里的位置。

这不是一个“他变好了”的故事。俊杰的数学基础仍然薄，英文报告仍然写得吃力，下学期还有一门电路原理他很怕。可是这一个下午，显出了一个新的他：一个手上有三角函数的人。三年前写“有什么用”的那个少年，没有被说服；他是被一根翘起来的管子，接到了另一边。

◆ 七、怎样回答“有什么用”

回到家长和老师最常碰到的那一刻：孩子问“学这个有什么用”。按本书的账，这一问要先分清是哪个入口发出来的。入口二的孩子问“有什么用”，口气是冲的，里面有不服，他在等一个答案，哪怕他觉得你答不出来。入口三的孩子也可能说“有什么用”，可是口气是平的，他根本不在乎你答什么。后一种，下一章专讲，这里先不谈。

对入口二的孩子，最差的回答是一句理念：“考试要考。”“将来有用。”最好的回答，往往不是回答，是一件事：给他一样能做出来的东西，让那块理念在他手上长出身体。下面这张表，列了几样常见的硬理念，和几件做得出

来的事。表里最后一栏最要紧：做完以后，要有一问，把现实推回理念。没有这一问，就会停在“做了个手工”。

学科里的硬理念	日子里塞不进的样子	一件做得出来的事	做完后把它推回理念的一问
三角函数	“我又不去量金字塔”	给书架装一块斜撑板，或在家门口量一条无障碍坡道的坡度	换一个角度，长度要怎么变？不查表能算出来吗？
化学方程式	“我又不当化学家”	蒸一锅包子，故意分三份放不同量的小苏打	为什么放多了会发黄？那条式子里哪一样留在了面里？
概率	“我又不去赌钱”	记一个月天气预报说“降雨概率 60%”的日子，看实际下了几天	60% 是什么意思？下了四天算预报错了吗？
英文语法	“说得通就行了”	给小区物业写一封真要寄出去的投诉信	对方读到哪一句会误会？换哪个时态就不会？
地理等高线	“地图上的弯弯曲曲”	周末去麦里芝走一段山路，事先在等高线图上标出最陡的一段	走到那一段时腿的感觉，和图上线挤在一起的地方对得上吗？
百分比	“超市会算的”	超市里“第二件半价”和“全场七五折”，帮家里算这周买哪一种更省	买几件时两种一样省？你家这周要买几件？

这张表不是课程方案，只是一个样子：理念要落进现实，现实要推回理念，最后落到“我能做这件事”。还有两条要守住。第一条：做出来的东西，要在孩子自己的日子里。Canning 和 Harackiewicz 的实验里，直接告知效用时，举日常生活的例子比举“将来工作”的例子更能让没信心的学生感兴趣。对一个十四岁的孩子说“将来当工程师要用”，那仍然是一块远在天边的理念；让他给自己的书架装一块撑板，那是今晚就能碰到的现实。

第二条：最好让孩子自己说出“这有什么用”，而不是大人替他说。Harackiewicz 团队的实验里，学生自己写下来的效用，没有老师告知的那种副作用，对没信心的学生更有帮助。本书的账能解释这一点：自己说出来，是他自己付的动能，那块理念在他身上被他亲手接到了现实上。别人告诉他，他什么都没付，那仍然是一块挂在外面的理念。

◆ 八、它和另外两个入口怎样分

最后，把入口二放回三个入口里，看清它的位置。

比较的地方	入口一：旧办法碎了	入口二：书上很硬，日子塞不进
哪一头是硬的	现实硬：一张卷子撞上来	理念硬：课本上的东西碎不了，也用不上
卡在五段账哪一段	第四段：旧粒子熔开，新的还没建	第三段：理念界的东西过不了跨进现实那道门
孩子常说的话	“我比谁都努力”	“学这个有什么用”
该给的药	新理念（怎样学）加场	直面现实，做出东西，再推回理念
最常见的错药	“再努力一点”	“考试要考”“将来有用”
错药的后果	在旧方向上跑得更快	在硬理念上再压一块硬理念

入口三不在这张表里，因为它不是边上的矛盾，是角上的枯竭（见书二第 22 章）。入口一、入口二，都是三角里两个角之间对不上，只是哪一头硬不同；入口三，是自我那一角自己没了力气。下一章专讲。

可是这里要先提一句：**冲着“没用”开的方子，最常被开到入口三上。** 一个已经没有力气的孩子，大人看他不学，以为他是觉得没用。于是给他讲“学这个多有用”，这句道理常被当成入口二的药，其实连入口二也治不好；或者干脆给他报一个项目课、一个实践营。对一个已经没电的人，“去做出一样东西”也是一份要付能量的活。这一味才是入口二的药，药是好药，开错了人。

◆ 九、放回日子里

如果你的孩子在作业本上写“学这个有什么用”，先别笑，也别训。先问自己一句：他问的这一块，在他的日子里，真的有位置吗？如果你自己也说不出它在他日子里的哪里，那么他的问题是对的。

然后，别急着用“考试要考”“将来有用”去回答。去找一件今晚或这个周末就能做的事，让那块理念在他手上落一次地。找不到，就去问他的老师，或者问一个用这门知识干活的人：电工、厨师、会计、护士。他们手上，多半就有你要的那件事。做完以后，别忘了那一问。问他“换一个条件，会怎样”。这一问把手上的东西推回理念，免得它变成一个新的口诀。

如果你是老师，下一次学生问“有什么用”，可以试试先不回答，换成一个邀请。你对他说：“你下课以后，去找一件生活里用得上它的事，明天告诉我。”他找不找得到，都不要紧。他去找的那一趟，就是他自己付的动能。

如果你在一所普通中学教书，没有车间，也没有企业实习，这一章的药仍然开得出来。学校里本来就有很多现成的现实：教学楼门口的轮椅坡道，可以拿来量坡度。食堂一周的剩饭，可以拿来算百分比；操场边那棵树的影子，可以拿来算树高。

要紧的不是东西大小，是三步走完。先让理念落到一样真东西上；再让学生自己说出，它和课本哪一条接上了；最后换一个条件，逼他回到课本里去算。三步里最容易省掉的是第三步。省掉了，一堂课就成了一次户外活动，热闹，好玩，学生回到教室，课本上的东西还是那块硬糖。

还有一件小事。下一次单元测验，不妨留一道题，让学生写出“这一单元的东西，我在哪一件事上用过一次”。写不出来的学生，多半就站在入口二的门口。这比任何问卷都更早告诉你，谁的理念还没有落地。

如果你是大人，自己手里也有一堆“学过却用不上”的东西，也可以挑一样，找一件事让它落一次地。你会发现，那块东西没有你以为的那样死，它只是一直没有地方放。

带 走 的 话

“学这个有什么用”不是偷懒，是理念找不到落脚处；答它的不是道理，是一件做得出来的事。

小　账

荀子与陆游说“要躬行”，杜威说“做中学”，却多半停在劝人去做；本书打开的是那道门：理念要在第三段跨进现实、长出身体，再推回理念、落到自我。

把“有什么用”当成态度问题，用“考试要考”去回答，就是把一次本该在孩子手上发生的跨界，收回成了一句挂在纸上的结论。

想 一 想

1. 你上学时最常问“有什么用”的那一门课是哪一门？后来它在你的日子里，有没有在哪一天突然落了地？
2. 你回答过孩子的“有什么用”吗？当时你给的是一句理念，还是一件事？
3. 你现在手里，有哪一块“学过却用不上”的东西？这个周末，能为它找一件做得出来的事吗？

◆

15

第 15 章

入口三：学不动了

这一章的问题

孩子对着一页英语读了二十分钟，你一句“你就是不用心”，她只回“随便”——她是不想学，还是已经没力气学了？

晚上十一点四十分，唐小雨坐在书桌前，面前摊着一篇英语阅读。这篇文章她已经读了二十分钟。每个单词都认识，每一句都读得通，读到第三段，第一段说了什么就想不起来了。她回到第一段，再读一遍，读到第三段，又想不起来了。

她十六岁，在长沙读高二。高一的时候，她在年级里排前五十，数学老师在班上念过她的解题过程。这学期开学两个月，她的名次掉到了三百名以外。她不是没在学。每天早上六点起床，晚自习到九点半，回家再写作业，常常写到十二点多。周末两天，上午补数学，下午补物理。

妈妈彭丽娟推门进来，看见那篇阅读还停在第一题，声音一下子高了：“你就是不用心。你知不知道明年就高三了？”小雨没有说话。妈妈又说：“数学物理补了，英语也得补。我明天去问问。”小雨说：“随便。”

这两个字说得很平。不是顶嘴，不是赌气，像是在说今天的天气。妈妈愣了一下，走出去，把门带上了。她在客厅坐了很久，给在广州打工的小雨爸爸发了一条语音：“这孩子不知道怎么了，跟她说什么都没反应。”

小雨那晚一点钟睡下，五点五十闹钟响。她躺在床上，睁着眼，不想起来。不是困，是一种比困更沉的东西压在身上。这一章讲的，就是这种沉。

◆ 一、矛盾还在，力气没了

先把小雨和前两章的两个孩子并排放一下。上一章的李俊杰，是书上的东西太硬，日子塞不进，他大声问“有什么用”。再上一章的王子涵，是新学校的卷子撞碎了她的旧办法，她哭着说“我比谁都努力”。

小雨两样都不像。她没有换学校，没有碰上一套新规则，没有哪一张卷子突然把她的旧办法撞碎。她也没有觉得书上的东西没用，她从小就知道高考要考什么，知道为什么要考。

她碰到的题，和高一时差不多难。那些她不会的题，现在照样不会，题和她之间的那道缝一直都在。可是高一的时候，碰到不会的题，她会皱眉、会较劲、会去问；现在，碰到不会的题，她只是看着它。矛盾还在，力气没了。本书把这种情形叫作**入口三：自我里的能量耗尽了**。

书二第 22 章讲过三个入口的分别：前两个是三角**边上**的矛盾，问的是哪一头硬，现实硬还是理念硬。第三个是三角**角上**的枯竭，问的不是哪一头硬，是那个本来要去结晶的自己，已经没有力气了。所以话要说准：

入口三的人，缺的不是路，也不是用处，是力气。

大人看见这样的孩子，最常用的一个字是“懒”。“懒”这个字，有一个暗中的前提：力气是有的，只是不肯用。一个懒的人，你给他一件他喜欢的事，他马上就有劲了。

小雨不是这样。她喜欢的事，她也提不起劲。她不是有力气不肯用，是想用也拿不出来。把她叫作“懒”，就像把一辆没油的车叫作“不肯走”。车没有不肯，是油箱空了。这个字的害处，不只是冤枉人。它会把药开错。对懒的人，药是督促、是加压；对没油的人，督促和加压，正好是在往一个空油箱上踩油门。

还要补一句：入口三不是一个晚上来的。小雨的那句“随便”，是两个月一点点攒出来的。头几周，她还会熬夜补作业，还会因为考砸了偷偷哭；后来不哭了；再后来，连熬夜也熬不动了。大人常常是在最后一步才看见，以为是突然变的。其实那条往下走的路，早就开始了。

前面那句判断，要和前两章对着读。入口一缺路，所以给新理念；入口二缺用处，所以让理念落进现实。入口三两样都不缺，缺的是走路的那双腿。给一个腿软了的人画一张更好的地图，或者告诉他前面的风景多好，他还是走不动。

◆ 二、一张一弛，勿助长

人会累到学不动，古人也知道，而且说得很早。《礼记·杂记下》记了一段孔子和子贡的对话。子贡去看年终的蜡祭，回来说，一国的人都像疯了一样，他看不出有什么乐趣。孔子说，辛苦了一百天，才换来这一天的放松，这里面的道理你不懂。接着说：“张而不弛，文武弗能也；弛而不张，文武弗为也；一张一弛，文武之道也。”

一直绷着不松，周文王、周武王也做不到；一直松着不绷，文王武王也不会这样做。一张一弛，才是文武之道。孔子这几句话说的是治国，用在一个高二学生身上，一点不隔。一根弓弦一直拉满，迟早会断，或者松掉再也拉不开。

孟子说得更具体。《孟子·公孙丑上》里有一个人人都知道的故事：宋国有个人，嫌自家的禾苗长得慢，就一棵棵往上拔。回家累得不行，对家里人说：“今日病矣，予助苗长矣。”他儿子跑去地里一看，“苗则槁矣”，苗全枯死了。

人们讲这个故事，多半只讲到“拔苗助长”为止。可是孟子讲完故事，还有一段话，更要紧：“天下之不助苗长者寡矣。以为无益而舍之者，不耘苗者也；助之长者，揠苗者也，非徒无益，而又害之。”

孟子在这里分出了两种错。一种是觉得没用，干脆扔下不管，连草也不锄，这是“不耘苗”；一种是嫌它长得慢，动手去拔，这是“揠苗”。前一种没有好处；后一种不但没有好处，还有害。

在这段话前面，孟子还说过一句：“必有事焉而勿正，心勿忘，勿助长也。”事情要一直放在心上，可是不要硬去催它；不要忘了它，也不要拔它。这句话几乎就是本书这一章要开的药方。

还有两个故事，本书系列的前几卷讲过，这里只回头指一下。书一讲过以利亚。他刚经历一场大事，独自走进旷野，累到一步也走不动了。神没有先跟他讲道理，先是差使者来，让他吃饼、喝水、睡觉，醒来再吃、再睡，之后才有那个微小的声音（王上 19 章）。经文里有一句：“因为你当走的路甚远。”（王上 19:7）路远，所以要先吃饱。

书二讲过周利槃陀伽，一个四个月记不住一首偈的人，被哥哥赶出寺门，站在门外哭。佛没有给他讲更深的道理，只递给他一块干净的白布。佛叫他拿在手里摩挲，嘴里念“除尘，除尘”（见书二第 22 章；本书取巴利《法句经》注释的说法，汉译本里另有给他扫帚、叫他扫地一说）。

这几位前人对在哪里，要写足。他们都看见了：人有绷不住的时候；绷不住的时候，硬拉只会更坏。孟子更进一步，分出了两种错：放手不管是错，拔苗催长更错。以利亚的故事给出了一个次序：先吃，先睡，后有话。周利槃陀伽的故事给出了一个做法：先给一件最简单的事。

它们停在哪里？“一张一弛”说的是节奏，可是没有说，一个人弛到什么时候才能再张，怎么知道他已经弛够了。孟子说“勿助长”，可是一个妈妈在晚上十一点四十分推开门，看见女儿对着一页阅读发呆。她怎么分辨，这是一棵该锄草的苗，还是一棵正在被拔的苗？以利亚和周利槃陀伽的故事讲了先后，可是没有讲为什么非得这样先后，为什么先讲道理就不行。前人给了方向，没有给账。

◆ 三、倦怠研究看见了什么

二十世纪以后，研究者用问卷和数据，去量这种“沉”。**职业倦怠。** 1981年，美国心理学家 Maslach 和 Jackson 发表了一份量表。它后来被叫作“Maslach 倦怠量表”。它最早是用来量医护、社工这些天天和人打交道、替人服务的职业的，后来才有了给教师和其他职业用的版本。

学生的倦怠。 2002 年，荷兰心理学家 Schaufeli 和西班牙、葡萄牙、荷兰的同行一起，把这份量表改给大学生用。他们在三个国家调查了一千六百多名学生。他们发现，学生的倦怠也有三个方面：耗竭、疏离（对学习变得冷淡、怀疑它的意义）、效能感下降（觉得自己做不成）。他们还发现，效能感和学习的劲头，跟上一学期考试通过的比例有关。

中学生的倦怠。 2009 年，芬兰心理学家 Salmela-Aro 等人发表了一份专给中学生用的“学校倦怠量表”。它把中学生的倦怠也分成三样：在学校里的耗竭、对学校意义的冷嘲、在学校里的无力感。

这三样，放在小雨身上，样样对得上。读二十分钟读不进一页，是耗竭；那一句平平的“随便”，是冷淡；从年级前五十掉到三百名以外，心里那句没说出口的“我不行了”，是无力感。

一个要守住的分寸。 2019 年，世界卫生组织把“职业倦怠”写进了新版的《国际疾病分类》（ICD-11）。可是世卫组织同时说得很清楚：它被放在“职业现象”一类里，不是一种医学上的疾病。而且这个词专指工作中的现象，不应该拿来描述生活的其他方面。

所以本书在这里说“学习倦怠”，用的是日常说法，不是诊断。小雨不是“得了倦怠”，她是累到学不动了。这两种说法差得很远：前一种把她变成一个病人，后一种只是说出了她此刻的样子。

“习得性无助”的修正。 美国心理学家 Seligman（中文常译塞利格曼）早年和 Maier 用动物做过一组著名的实验。动物反复遭受逃不掉的电击以后，后来即使能逃，也不逃了。这被叫作“习得性无助”。五十年后，2016 年，两人在《心理学评论》上发表了一篇回顾，修正了当年的解释。长时间逃不掉的刺激之后，变得被动，可能本来就是动物默认的反应；真正要“学”的，反而是“我能控制”这件事。

这项修正来自动物和脑的研究，不能直接套在一个孩子身上。可是它提醒人一件事：学不动，不一定是一个人学会了偷懒；也可能是“我做了会有用”的那份感觉，被一次次的无效消磨掉了。

“意志力像电池”站不住。 另一条线索要反过来讲。二十世纪九十年代，有一种很流行的说法：意志力像一块电池，用一点少一点。可是 2016 年，二十三个实验室按事先登记好的方案，一共两千一百多名被试，重做这类实验，测到的效应几乎是零。所以本书这一章讲的“力气”，不是“意志力电池”；它是另一种东西，下一节说。

睡眠和记住。 1924 年，美国心理学家詹金斯（John Jenkins）和达伦巴赫（Karl Dallenbach）做过一个很小的实验，被试只有两个人。他们学一串无意义的音节，有时学完就去睡觉，有时学完照常醒着，过同样长的时间再测。睡过觉的那几次，忘得少。后来一百年的研究，大体都在往这个方向补证据。

中国教育部 2021 年 3 月下发过一份通知，专讲中小学生的睡眠。通知里写，高中生每天睡眠时间应达到八小时，就寝时间一般不晚于晚上十一点。小雨那一晚，一点钟睡，五点五十起。

这几条研究，对的地方很多，要先写足。它们给了这种“沉”一个看得见的样子：耗竭、疏离、无力感，三样都能量。它们守住了一个分寸：倦怠不是病名，不要乱贴。它们修正了两个流行的说法：学不动不一定是“学会了偷懒”，力气也不是一块用一点少一点的电池。它们还把睡眠和记住连了起来。

它们停在哪里？量表量的是一个人此刻的状态：累不累，冷不冷，觉不觉得自己行。它不问，这个人身上正在学的那些东西，此刻在发生什么。耗竭的时候，新的东西建不起来，这好理解；可是为什么连旧的东西也开始松？为什么讲道理会让她更沉？为什么补习班会雪上加霜？量表给不出这一层的账。还有一处更常见的停顿：很多讲倦怠的文章，讲到最后，给的建议是“调整心态”“学会时间管理”。这两样，都是要一个已经没力气的人，再去建立一套新理念。

◆ 四、卡在哪一段：连维持也松了

现在用本书的五段账看小雨。〇 在场，一 建立，二 维持，三 粒子化，四 熔开再结晶（见第 7—9 章）。入口一卡在第四段（熔开再结晶）：旧粒子被撞开，新的没建。入口二卡在第三段（粒子化）：理念跨不进现实。入口三卡在哪里？

先看第一段，建立。本书说过，建立主要靠动能：学的人自己把旧的连接拆开、重接（见第 12 章，书二第 18 章）。那篇英语阅读，小雨读不进，就是第一段起不来：特征都在眼前，每个单词都认识，可是她拿不出力气把它们拆开、接到一起。它们只能挨在一起，停在“在场”。

再看第二段，维持。本书说过，维持主要靠内能，也就是连接度。连接度建起来了，大体只增不减；会松的，是此刻够不够得着的那一侧。要够得着，得靠再用去付功，靠一张网去拉着（见第 8 章）。

小雨这两个月里，高一学过的东西也在松。那些她曾经闭着眼都会的三角公式，现在要想一会儿才想得起来。不是她忘了怎么学，是维持也要付功：每一次再用、每一次检索，都要一点力气。她连这一点力气都拿不出来了。再加上每晚只睡五个小时，睡眠替维持付的那一份功，也被拿走了。这是松了，没断。等她缓过来，那些公式再捡起来，会比头一回学快得多；快出来的那一截，就是连接度还在的证据。

这里说的“力气”，正是第三节留下的那个问题。它不是那块“用一点少一点”的意志力电池。那块电池说的是几分钟里的自控，做完一件难事就短一截，重做的实验没有测出来。本书说的力气，是几个月的一笔账：从睡眠、饭和身边那张网里进来，耗在每一次拆开重接、每一次再用、每一次应付拉扯上。后面说“没电”，说的是这笔账见了底，不是刚做完一道题就少了一格。所以入口三的账要这样记：

入口三不是卡在某一段，是从第一段起，每一段都在缺能量。新的建不起来，连维持也松了。 这就是为什么入口三是“角上的枯竭”，不是“边上的矛盾”。边上的矛盾，卡在一处，打通那一处就行；角上的枯竭，是那个要去走五段路的自己，没有电了。

再看场。本书说，场就是势能，是身边那张网的吸引与拉扯（见书二第 17 章）。势能本来是托人的：同学一起学，老师接得住，家里有人等。可是网也会拉错方向。

小雨身边这张网，这两个月几乎全在往一个方向拉。妈妈说明年高三，老师说名次，补习班说进度，连亲戚过节打电话，问的也是“考得怎么样”。爸爸在广州，一周一个电话，电话里最后也总要问一句成绩。每一根线都在拉，没有一根在托。一张只拉不托的网，不再是势能，是负担。它不给她力气，反而每天从她身上拿走一点：每一次被问名次，她都要付一点力气去应付，去解释，去假装没事。

第 6 章讲过“合意困难”：困难要合意，学的人得付得起。第 11 章讲过，没有场的卡住，只会变成放弃。放到小雨身上，这两条合在一起：她碰到的每一个困难，原本也许是合意的；可是她付不起了，场又不托，于是每一个困难都成了一次小小的放弃。两个月攒下来，就是那一句“随便”。

还有一样东西在悄悄地变：她的自我符号。高一时，小雨身上有一个很结实的自我符号：“我是一个读得进书的人。”这两个月，它在松。如果松下去，没

有人接，它会慢慢换成另一句：“我不行了。”这一句一旦结晶，就会很硬：它稳定，换个科目还在；它整体，能把每一次失败都收进去；它独立，离开任何一次具体的考试也立得住。这就是书二第 19 章讲的石心：一个自我符号固化了，连接度极高，动能为零，不再回写。“我是学渣”就是这样一颗石心。它比任何一次考砸都难拆。

◆ 五、为什么讲道理和补习班是错药

现在可以说清楚，小雨妈妈那一晚的两句话，为什么都是错药。“你知不知道明年就高三了？”这是讲道理。讲高考多重要，讲时间多紧，讲将来的路。它想把一个人和“用处”接上，常被当成入口二的药。可是入口二要的是直面现实、做出东西，不是再听一遍用处。

可是小雨不缺用处。她比谁都知道高考多重要。给她讲道理，等于要她再接收一块理念，而接收理念、把它跟自己接上，本身就要付动能。她已经没有动能了，这一句话非但没有给她力气，还从她身上又拿走了一点。

“英语也得补。”这是加方法、加时间。补习班的意思是：你学得不够，再多学一点；你方法不对，换个老师教你新方法。这是入口一的药，或者是加倍的旧药。可是小雨不缺方法，也不缺时间压在书桌上。她缺的是能把时间变成学习的那份力气。多一个补习班，就多一块要付力气的地方。

这就是本书承重命题里说的那一句：**教育里最常见的错，是拿“学这个有什么用”的道理——常被当成入口二的药，其实连入口二也治不好——去治入口三。** 两样错药，用的是同一个逻辑：给一个已经没电的人，再加一件要用电的活。孟子的话说得最准：“非徒无益，而又害之。”下面这张表，把三个入口放在一起，最后两行，就是这一节要说的。

比较的地方	入口一：旧办法碎了	入口二：书上很硬，日子塞不进	入口三：学不动了
在三角的哪里	边上：现实硬，理念碎	边上：理念硬，现实塞不进	角上：自我的能量耗尽
卡在五段账哪一段	第四段：旧粒子熔开，新的没建	第三段：理念跨不进现实	每一段都缺能量：建不起来，连维持也松
孩子常说的话	“我比谁都努力”	“学这个有什么用”	“随便”“我不行了”
说话时的样子	委屈，里面有不服	冲，在等你答	平，不在乎你答什么
该给的药	新理念加场	直面现实，做出东西	先托住：补能量，再谈方法
最常见的错药	“再努力一点”	“考试要考”	讲道理、加补习班
错药的后果	在旧方向上跑得更快	硬理念上再压硬理念	再加一件要用电的活，把仅剩的电也耗掉

◆ 六、怎样认出入口三

入口三有一个麻烦的地方：它说出来的话，常常和入口二一模一样。小雨有时候也会说“学这个有什么意义”。倦怠研究里那个“疏离”，就是这句话。可是她说这句话的样子，和三年前的李俊杰完全不同。俊杰说“有什么用”，是一个问题，他在等你答，你答得不好他还要顶回来。小雨说“有什么意义”，不是问题，是一声叹气，你答什么她都不会接。

同一句话，入口二是问，入口三是叹。

听的人要分辨的，不是话，是话后面还有没有劲。还有几个信号，可以一起看。第一，旧的东西有没有在松。入口一的孩子，旧本事都在，只是用不上；入口二的孩子，不喜欢的那一门学不进，别的照常。入口三的孩子，连原来会的、原来喜欢的，都开始松了。

第二，喜欢的事还做不做。小雨以前每周日晚上要看一集纪录片，这学期一集也没看。不是没时间，是打开了也看不进去。入口三的沉，不只压在学习上。第三，睡眠和吃饭。睡得太少，或者睡了还累，吃饭吃得很少，或者吃什么都一样。这些不归学习管，可是学习的那份力气，就是从这里来的。

第四，“不服”还在不在。入口一的孩子考砸了，还会不服；入口二的孩子被训了，还会顶嘴。入口三的孩子，连不服都没有了。这几个信号，只是帮人看见，不是给人下判断。本书只谈理解与陪伴，不做诊断，也不给治疗的建议。一个孩子是不是“倦怠”、有没有别的难处，不是家长和老师靠几个信号能定的。

身体或心里的难处真的大了，请找医生或心理咨询师。

这句话要单独放在这里，不是客套。如果一个孩子的沉，已经压到吃不下、睡不着，或者让你心里隐隐不安，那就不要再等，也不要只靠这本书。学校里的心理老师、医院里的医生和心理咨询师，是比任何一本书都更合适的人。

◆ 七、一个完整的例子：小雨的那个秋天

先发现小雨不对劲的，是班主任欧阳玲。她注意到的不是成绩。成绩掉的学生，每个班都有几个。她注意到的是作业本：小雨的字原来很工整，这两个月越写越潦草，后来干脆有几页只写了题号。还有一件：小雨在早读课上，常常把头埋在胳膊里。欧阳老师走过去，以为她在睡，轻轻碰了一下，小雨抬起头，眼睛是睁着的。

欧阳老师给彭丽娟打了个电话，请她来学校一趟。彭丽娟来的时候，手里拿着一张英语补习班的宣传单。她说：“欧阳老师，我正想问问，这家怎么样。”欧阳老师看了一眼，说：“先别报。我们先说说她这两个月是怎么过的。”

两个人对了一下小雨的一天：六点起，晚自习到九点半，回家写到一点，周末两天补习。彭丽娟说着说着，自己停住了。她算了一下，女儿这学期没有一个完整的周末。欧阳老师说了一句彭丽娟后来一直记得的话：“她现在不是不想学，是没力气学。没力气的时候，加的每一样东西，都是在往她身上压。”

接下来的一个月，她们一起做了几件事。**第一件，减。** 周末的物理补习先停一个月，数学补习改成两周一次。英语补习班，不报。欧阳老师跟各科老师打了招呼，给小雨开了一张“最低作业单”：每科每天只交最要紧的那一份，其余的不做不追。目标只有一个：晚上十一点前睡下。

彭丽娟最怕的是“落下”。欧阳老师说：“一个月落下的，以后补得回来。一个人垮下去，要很久才缓得过来。”这一件，是孟子说的“勿助长”：不拔。

第二件，饭。 小雨的外婆从湘潭过来住了一阵。每天晚自习回来，桌上有一碗热汤，周末有一盘剁椒鱼头。彭丽娟定了一条家规：饭桌上不谈成绩、不谈学校，谈什么都行，不谈也行。头一个星期，饭桌上很安静。第二个星期，小雨开始讲班上同学养的一只猫。

本书说的场，是一张网的吸引与拉扯（见第 11 章）。这两个月里，小雨身上的那张网，几乎全在往一个方向拉：高考，名次，明年。拉得太紧，网就不是托住她，是在勒她。饭桌上不谈成绩，是把勒着她的那几根绳子松一松，让这张网重新变成托着她的东西。

第三件，被看见。 欧阳老师每周找小雨说一次话，每次不超过十分钟。她不问成绩，也不讲道理，只说她看见的事。“这两个月你一天都没缺过。”“你今天交的那份作业，字又工整了。”

“被看见”这三个字，要说准。它不是表扬，不是“你真棒”；也不是鼓励，不是“加油”。它是有一个人告诉你：你做的事，我看到了。对一个觉得自己“不行了”的人，这一句的分量，是在那颗正要结成的石心上，留一道缝，让它还没法封死。

爸爸那边也换了说法。彭丽娟把欧阳老师的话转给了他。下一次打电话，他没有问成绩，讲了自己工地上的事：哪个工友家里添了孩子，食堂哪天的菜难吃。小雨听着，偶尔笑一声。月底，他请了两天假，坐高铁回长沙，什么也没干，陪女儿去岳麓山走了一圈。山上，父女俩一句学习的话都没说。

一个在广州、一周一个电话的父亲，能给的场很薄。可是薄的场，只要是托着的，也比厚而只拉的网好。小雨还去学校的心理老师那里坐过几次。她们谈了什么，本书不写，那是她自己的事。

第四件，一件小事。 第三周，欧阳老师给小雨布置了一件事：每天只做一道数学题，挑她会的，做完就行，不用多。这一件看起来几乎没有用。一道会做的题，能学到什么？

可是它不是为了学新东西。它是为了让那条纠缠不再一天天松下去。每天一道会做的题，是一次很小的再用，付一点点维持的功。它的量刚好落在小雨此刻付得起的地方。周利槃陀伽手里的那块布，也是这个意思：不是要他擦出什么名堂，是先让一个人手上有一件做得成的事。这一件，是陪着走第一步：第一步小到她走得动，旁边有人看着她走。

第五周，出了一件小事。物理课上，老师讲一道斜面上的摩擦力题，同桌说了一个解法，小雨听着觉得不对。她没有说出来，可是下课以后，她把那道题抄在了本子上，晚上回家，自己又算了一遍。算出来，同桌是对的，她错了。

她没有沮丧，反而有点高兴。她跟外婆说：“今天有一道题，我觉得同桌错了，结果是我错了。”这件事要慢下来看。那一刻，小雨身上又出现了一个“对不上”：同桌的解法和她心里的想法对不上。更要紧的是，她对这个对不上有了反应：想弄明白，愿意花一个晚上去算。对不上，两个月前一直都在；可是两个月前，她对它没有反应。现在，她有了。这说明动能回来了一点点。不多，刚好够她自己去碰一次对不上。

这不是一个“她变好了”的故事。那个学期的期末，小雨的名次回到了两百名左右，离高一的前五十还很远。有几个晚上，她又对着一页书发呆。彭丽娟有一次没忍住，又说了一句“明年就高三了”，说完自己先后悔了。

可是这个秋天，显出了一个新的她：一个知道自己什么时候没电了、也知道该跟谁说的人。那颗快要结成的“我不行了”，没有封死；它旁边，长出了一句更小、也更真的话：“我今天只够做一道题，做完了。”

◆ 八、托住，不是放弃，也不是拔

回到孟子的那两种错。“以为无益而舍之者，不耘苗者也。”觉得没用，干脆不管。家长说“随她去吧，学不进就算了”，这是不耘。“助之长者，揠苗者也。”嫌长得慢，动手去拔。家长说“再补一门，再刷一套”，这是揠苗。托住，站在这两种错的中间。

先把这个词说定：托住不是安慰、不是替做，是陪着走第一步。欧阳老师那一道会做的题，就是那第一步。放到入口三上，托住还要和另外两样分清。托住不是放弃。小雨的“最低作业单”仍然要交，每天那一道题仍然要做。线没有断，只是放松了。托住也不是拔。小雨的物理补习停了，英语补习没报，一个月里没有人跟她提名次。

落到孟子的话上，托住就是那一句：“必有事焉而勿正，心勿忘，勿助长也。”心里一直记着这件事，可是不硬催；不忘，也不拔。落到日子里，托住有一个次序。

先是能量。睡够，吃好，被看见。这三样不归课程管，可是一切学习的力气，都从这里来。再是场。把勒着人的那几根绳子松开，让身边那张网，重新变成托着人的东西。再是对不上。等动能回来一点，让人自己碰到一个小小的对不上，就像小雨碰上那道斜面题。这时候的对不上要小，小到她付得起。最后才是方法。怎么学、学什么、补不补习，这些放在最后谈。

这个次序倒过来，就是小雨妈妈那一晚做的事：先谈方法（补英语），再谈道理（明年高三），从头到尾没有谈能量。这个次序，以利亚的故事里也有：先饼和水，先睡，后有话。本书把它压成一句：**入口三的药，是先补能量，再谈方法。顺序倒过来，药就成了毒。**

还有一层，要说给读过前两章的人听。入口一拖久了，没人托住，会滑进入口三。王子涵如果没有遇到拉奥老师，第三次、第四次测验以后，她的“我比谁都努力”，可能就变成了“随便”。入口二也一样：一个孩子年年问“有什么用”，年年被一句“考试要考”压回去，压到第五年，他可能就不问了，也不学了。所以入口三，常常是另外两个入口的终点。三个入口里，它最难，也最不该被等到。

◆ 九、没电的时候，一键答案最诱人

这一节要说一件和本书书名有关的事。一个学不动的孩子，晚上十二点对着一道不会的题，手边有一个能拍题出答案的 AI，他会怎么做？多半会拍。这一点也不奇怪。拍题不用付力气，答案一秒钟就出来，抄上去，作业交了，今晚可以睡了。对一个没电的人，这几乎是唯一一条不用电的路。

第 1 章讲过，这样交上去的作业，是看懂型假会：特征在场，挨在一起，靠答案串着，没有建立。对一个有力气的孩子，这是偷懒的问题；对一个没电的孩子，这是另一回事：他不是不想付动能，是付不起。

所以在入口三，一键答案的危险，和在别处不一样。在别处，大人可以说“别拍，自己做”，那是要他把动能付在正确的地方。可是对小雨这样的孩子说“自己做”，等于要一个没电的人去推车。她做不到，就会觉得自己更不行；或者偷偷拍，交上去，第二天小测又是一张白卷，“我不行了”又被证实了一次。

本书承重命题第十条说：AI 是迄今最大的势能之网，却不是结晶者。它能托住卡住，能出检索题帮人维持，却不能替人付动能。放在入口三，这一条要这样用：AI 可以做托的那一半，不要让它做替的那一半。

具体一点说：可以让 AI 帮小雨把今晚的作业排一个最省力的次序，把“最低作业单”上那几样挑出来。可以让它出一两道她会做的旧题，让她每天那一道题有个着落；可以让它在她卡住时问一句“你卡在哪一步”，而不是直接把答案给她。这样用，AI 是一张多出来的网，在托她。不要让它做的，是把整份作业一口气做完。那样用，今晚是轻松了，可是那条本来就在松的纠缠，又少了一次再用，又松了一点。

没电的时候，最需要的是托，最容易拿到的是替。 分清这两样，比禁不禁 AI 要紧得多。作业与 AI 的分工，第 19 章还会细讲。

◆ 十、第五编小结：三个入口，三种药

三章读完，可以把这一编压成几句话。学不进，有三种来路。一种是现实硬，旧理念碎了：王子涵的四十一分。它卡在第四段（熔开再结晶），旧的熔开、新的没建。药是新理念加场。一种是理念硬，现实塞不进：李俊杰的三角函数。它卡在第三段（粒子化），理念跨不进现实。药是直面现实，做出东西。一种是自我的能量耗尽：唐小雨的那页英语阅读。它从第一段起每一段都缺能量，连维持也松了。药是先托住，先补能量。三种来路，三种药。走错门，帮助就成了伤害。

用这三种药之前，还有一道闸要守：先分清是哪个入口，而且要在给药之前分清。入口一的缝，可以从新规则和旧办法的对照里，在考试前就看出来；入口二的缝，可以从“这一块东西在他日子里有没有一个位置”里看出来。入口三，要看的不是缝，是力气：睡了多久，旧东西松没松，喜欢的事还做不做，不服还在不在。分不清，就先别下药。先看。

◆ 十一、放回日子里

如果你是家长，某一天晚上推开孩子的房门，看见他对着一页书发呆，先别说“你就是不用心”。先看三样东西：他这一个月平均睡几个小时；他原来会的、原来喜欢的，还在不在；你跟他说话时，他是顶回来，还是什么都不接。

如果三样都往坏的方向走，那么他此刻要的，多半不是补习班，也不是一番道理。他要的是一顿热饭、一个早一点的睡觉时间、一个不谈成绩的晚上，和一句“我看见你这些天一直在撑”。然后去找他的老师谈一谈，问问学校里能不能给他减一点量。如果你心里不安，或者他的样子已经超出了“累”，去找学校的心理老师，或者带他去看医生。

如果你是老师，班上有一个学生成绩在往下掉，不妨先看他的作业本，而不是先看他的分数。字迹、空白、交没交，往往比分数更早告诉你，他还有没有力气。

如果你是老师，又想替这样的学生做点什么，可以从三件小事做起。一是开一张属于他的“最低作业单”。跟各科老师商量好，在一段时间里，每科只留最要紧的一份，其余的不做不追。单子要写清楚，也要写清楚到哪一天为止。有期限的减，孩子才知道这不是被放弃。

二是暂时别让他在人前被比。名次表、排名、当众念分数，对有力气的孩子也许是一种刺激，对没电的孩子，只是又一根勒着他的绳子。三是每周一次、十分钟以内、只说你看见的事。不评价，不鼓励，不讲道理。“你这周每天都交了。”“你今天上课抬头看了黑板。”看见是一种很省的托，几乎不花他的力气。

如果你是大人，自己也在一份工作里耗得学不进新东西，这一章同样说给你听。世界卫生组织那一份关于“职业倦怠”的说明，本来就是写给工作中的人的。公司安排了培训，你坐在那里，一个字也进不去，这不一定是培训不好，也不一定是你不上进。

第 17 章会讲成人的学习，那里说的“培训了没学会”，有一部分的来路就在这里：一个已经没电的人，被送进了一间要用电的教室。先补能量，再谈学新东西，这个次序对大人也一样。

如果你就是那个学不动的人，这一章想跟你说的只有一句：学不动，不是你坏了，是你的电用完了。电用完的时候，先充电，不丢人。今天只够做一道题，就做一道。如果这份累已经压到你吃不下、睡不着，别一个人扛。去跟一个信得过的大人说，也去找医生或心理咨询师。

带 走 的 话

学不动的人缺的不是路，也不是道理，是力气；先补能量，再谈方法，顺序倒过来，药就成了毒。

小　账

孟子分出了“不耘”与“揠苗”两种错，倦怠研究量出了耗竭、疏离、无力三样。本书打开的是那份账：入口三从第一段起处处缺能量，连维持也松了，自我符号正滑向石心。

把“学不动”读成“不用心”，再拿讲道理和补习班去治，就是把一次正在发生的耗竭与托住，收回成了一个关于态度好坏的判决。

想 一 想

1. 你有没有过一段“矛盾还在，力气没了”的日子？那时候身边的人给你的，是道理、方法，还是一顿饭？
2. 你家里或班上，有没有一个孩子说“有什么用”时，其实是在叹气，而不是在提问？
3. 如果要你给一个学不动的人开一张“最低作业单”，你会只留下哪一样？

◆



第　六　编

教室之外：家里和职场

导　语

同一本账，不只记在教室里。这一编走出学校，到两个最常见的地方。第 16 章在家里的饭桌边：一位做软件测试的父亲把栅栏讲了两遍，女儿转头就给草皮也围了一圈；家长讲一遍题，是替孩子把落差填平，换成一句“你卡在哪一步”，才把落差交还给他，家长是场，不是动能。第 17 章在银行的培训室里：三天培训全勾五分，周一照旧打开用了十二年的老模板；成年人身上有一块很实的旧土，学新先要熔旧，培训只发新东西，就只到在场。两章说明这本账不分年纪，也为下一编动手重排课堂、作业与评价备好了材料。

16

第 16 章

家里的饭桌：别替孩子把落差填平

这一章的问题

孩子作业卡住了，你坐过去讲了两遍，他点头说“懂了”，下一问照样错——你讲的那两遍，到底长在了谁身上？

三月里一个周二，晚上八点四十，北京回龙观一套两居室。孙伟四十二岁，在一家软件公司做测试主管，白天的活儿是专门找别人程序里的错。这会儿他坐在女儿书桌旁边的小板凳上，膝盖顶着桌沿，手里捏着一支红笔。

女儿孙朵朵九岁，三年级下学期，刚学面积。练习册上一道题：学校有一个长方形花坛，长 8 米，宽 5 米。第一问，沿花坛四周围一圈栅栏，栅栏长多少米？第二问，在花坛里铺满草皮，草皮有多少平方米？朵朵第一问写的是：8×5＝40（米）。

孙伟看了一眼，吸了口气，开始讲。他讲得不差。栅栏是围一圈的，一圈就是四条边加起来，长加宽再乘二，(8＋5)×2＝26，单位是米。他还在草稿纸上画了一个长方形，用红笔沿着边描了一圈，描得很用力。“懂了没有？”“懂了。”

朵朵把第一问擦掉，照着改成 26 米。然后做第二问。她低头算了一会儿，写下：(8＋5)×2＝26（平方米）。孙伟的声音一下子高了八度。“刚讲完你就……这是铺草皮，铺草皮你也围一圈？”朵朵的眼眶红了，铅笔停在半空。厨房里，妻子冯洁关了水龙头，走过来站在门口，没说话。

十分钟后，朵朵在哭，孙伟在阳台上抽烟，冯洁坐到了那张小板凳上。第二问最后是冯洁讲的，朵朵抽抽搭搭地写了 8×5＝40（平方米）。作业交上去，两问全对。这一晚，孙伟讲了两遍，冯洁讲了一遍，朵朵说了一次“懂了”。本章只问一件事：这一晚，在朵朵身上留下了什么。

◆ 一、一写作业就鸡飞狗跳

“不写作业，母慈子孝；一写作业，鸡飞狗跳。”这句话在中国家长中间流传很广，几乎成了一句俗语。社交媒体上，“辅导作业”是一个长盛不衰的题材。常见的样子是这样的：家长在镜头外拍桌子，孩子在镜头里抹眼泪；家长讲到第三遍，嗓子哑了；家长自嘲“再这样下去要被气出病来”。

这类段子之所以有人看，是因为看的人在里面认出了自己家的某个晚上。本书不去转述哪一条具体的帖子，只记下这个现象：辅导作业，在许多家庭里，是一天里最容易翻脸的那半小时。

这件事后来进了政策文件。2021 年的“双减”意见里，有一句写得很直白：“严禁给家长布置或变相布置作业，严禁要求家长检查、批改作业。”同一份文件还规定，小学一二年级不布置家庭书面作业，三至六年级书面作业平均完成时间不超过 60 分钟。“双减”的来由与得失，第 2 章已经讲过，这里只借它一句话：学校被要求把批改的担子从家长肩上拿走。可是担子拿走了，饭桌还在。许多家长照样每晚坐在孩子旁边，只是从“批改”换成了“讲一讲”。

新加坡的家庭也有自己的版本。新加坡小学数学有一套标志性的做法，叫“画模型”（model drawing）。遇到应用题，先画几根长条，把数量关系画出来，再算。不少家长自己读书时没学过这一套，他们手里有更快的办法：设一个 x，列方程。于是饭桌上常见另一种争执。家长说“设 x 多快”，孩子说“老师要我们画 model”。两边都对，又都不让步。

再看学校怎么说。新加坡不少小学在网站上贴了家庭作业指引，各校写法不一。有一所小学的指引里，小三小四每天的作业量大约是一到一个半小时。对家长的期待列了五条。给孩子一个能安心做作业的地方；看着并支持孩子的学习；鼓励好的学习习惯；留意作业和课外活动带来的压力，帮孩子排轻重；和老师配合。这份单子很朴素。读完会发现，里面没有一条是“替孩子把题讲懂”。

中国的文件说别让家长批改，新加坡的学校指引说家长管地方、管习惯、管压力。两地的说法不约而同，都在往外推同一件事：讲题。可是饭桌上，讲题恰恰是家长最想做、也最常做的事。为什么最想做的事，学校和文件都不太想让家长做？要回答这个问题，先得回到两千多年前的一段对话。

◆ 二、古人说：父子之间别教书

《孟子·离娄上》里有一段问答。学生公孙丑问：“君子之不教子，何也？”君子为什么不亲自教自己的儿子？孟子答：“势不行也。”形势上行不通。接着他把这个“势”一步步拆开：“教者必以正；以正不行，继之以怒；继之以怒，则反夷矣。”

翻成大白话：教的人一定拿正道去要求；正道讲不通，接着就发火；一发火，反倒伤了感情。孟子还替儿子说出了心里话：“夫子教我以正，夫子未出于正也。”您拿正道教我，您自己这会儿也没守正道啊。结局是“父子相夷”，父子互相伤害。所以孟子的办法是：“古者易子而教之。”古人交换儿子来教。他的理由落在最后一句：“父子之间不责善。责善则离，离则不祥莫大焉。”

这段话两千多年后读来，几乎就是孙家那个周二晚上的分镜头。“以正”是孙伟画的那个长方形；“继之以怒”是那一声高八度；“反夷”是阳台上那根烟和书桌前的眼泪。

孟子对在哪里，要先写足。第一，他看见了“怒”不是偶然的脾气，是一条会自己走下去的路：以正、不行、继之以怒、反夷。这四步有次序，次序几乎是必然的。第二，他看见了伤的不只是一道题，是父子之间的那张网。第三，他给了一个制度上的办法：换一个人来教。后世的私塾、书院、学堂，在一定意义上都是“易子而教”的放大。

孟子这条主张，在中国人的家里并不是唯一的声音。另一句话流传得更广，几乎人人会背：《三字经》开头不远就有，“养不教，父之过；教不严，师之惰。”养了孩子不教，是做父亲的过错。

这两句话放在一起，正好是中国家长心里的两股拉扯。一股说：教孩子是父母的本分，不管就是失职。另一股说：父子之间亲自教书，形势上行不通。孙伟坐上那张小板凳，是被第一股拉过去的；他在阳台上抽烟，是撞上了第二股。

两句话其实并不矛盾。《三字经》说的“教”，范围很宽，做人、规矩、习惯都在里面；孟子说的“不教”，指的是亲自坐下来传授学问、拿正道去逐条要求。一个说父母要管，一个说父母别亲自讲。把这一层分开，后面的事就好办了：家长要管的东西很多，偏偏“把题讲懂”这一件，最好少亲自动手。

现代研究走的是另一条路，却碰到了相近的地方。1997 年，美国学者 Hoover-Dempsey 与 Sandler 在《教育研究评论》上问了一个更早的问题：家长为什么要参与孩子的学业？他们的回答里有两条，和本章关系很近。

一条是“角色建构”：家长心里认定，什么是一个家长该做的事。一条是“效能感”：家长相信自己的帮忙能起作用。家长坐到孩子旁边，往往不是一时兴起，是心里有一个“好家长就该这样”的样子在拉着，还有一个“我帮得上”的把握在推着。这两条看着平常，后面会派上用场。孙伟的那一声高八度，就和这两样有关。

2008 年，美国学者 Patall、Cooper 与 Robinson 在《教育研究评论》上发表了一篇综述。他们把关于“家长参与家庭作业”的研究汇总起来看。主要发现有几条：训练家长怎样陪作业，能让孩子更多地完成作业、作业上的麻烦变少。家长参与和成绩的关系，在小学和高中是正的，到了初中反而是负的。在各种参与方式里，“给作业定规矩”（几点做、在哪做）和成绩的关系最强；整体上看，参与作业对成绩的效果很小，只在最小的孩子身上明显一些。

前一年，Pomerantz、Moorman 与 Litwack 在同一份期刊上写过一篇文章，副标题就是“多并不总是更好”。大意是：过去的研究多在数家长参与得有多少，可是参与的方式，往往才决定它有没有用。家长是支持孩子自己做主，还是替孩子做主、盯着管着，结果很不一样。

2014 年，社会学者 Robinson 与 Harris 出了一本书，叫《坏掉的指南针》。他们看了六十多项家长参与的指标，结论让很多家长不舒服：帮孩子做作业，并没有让标准化考试的分数变高。孩子上了初中以后，家长越帮，分数反而越低。

这本书也招来了批评。教育学者 Greene 在 2015 年的书评里指出：这些都是相关数据，因果可能是倒过来的。孩子本来就学得吃力，家长才会坐过去帮。本书替这条批评打个比方：不能因为病重的人住院多，就说医院伤身体。这条批评是公道的，本书照录。

Patall 等那篇综述里，还有一个容易被略过的细节：家长参与和成绩的关系，在数学上是负的，在语文类的读写上是正的。综述本身没有给出定论式的解释。本书只提一个可以检验的猜想：数学的方法，两代人之间变得最多，家长手里的办法和孩子课上的办法最容易对不上。家长一出手，往往是用自己的办法盖住孩子正在学的办法。邱家饭桌上的方程和长条，就是一个现成的例子，下面会讲到。这个猜想对不对，要等数据来说话，这里只记下。

把古今材料放在一起看，有一条线是清楚的：家长“帮”得越直接，越不一定有用；家长“管”得越有分寸，越可能有用。孟子从父子之情看到了这一点，研究者从数据里看到了这一点。

◆ 三、它们停在哪里

孟子看得准。可是他的账只记了一半。他讲清了为什么父子之间教不好：因为要“责善”，责善会伤感情。可是他没有讲：换一个先生来教，孩子就一定学会了吗？易子而教，解决的是父子相夷，不是学会。私塾先生照样可以把《论语》讲上三遍，学生照样可以点头说“懂了”。孟子的门开在“关系”这一边，没有开在“学会”这一边。

现代研究也是这样。它们分出了“控制型”和“支持型”，分出了“定规矩”和“直接讲”，证据比孟子硬得多。可是它们问的是：家长这样做，孩子的成绩、动机、情绪怎么样？它们很少问：家长讲完那一遍，孩子身上到底长出了什么，又缺了什么。“控制”和“支持”是对家长态度的描述。它们说得出家长该怎样，说不出孩子身上那条纠缠走到了哪一段。

所以家长读完这些研究，常常只得到一句“别太强势”。可是孙伟那天晚上并不强势，至少一开始不是。他讲得耐心，画得清楚，问了一句“懂了没有”。他的问题不在态度，在“讲”这个动作本身。研究停下的地方，正好是本书接着要走的一步：把镜头从家长的态度，挪到孩子身上那一段账。

◆ 四、讲一遍，就是替他填平

先回到那道花坛题，看看朵朵卡在哪里。朵朵手里有两个东西。一个是“长乘宽”，刚学的，老师讲过，例题做过，熟。另一个是“一圈”和“铺满”这两个日常说法，她九年来一直在用：跑操场一圈，被子铺满床。这两样都在她身

上，可是还没有接上。在她那里，“长乘宽”是一个见到长和宽就要做的动作，和“一圈”“铺满”没有关系。

所以第一问写 8×5，是一次很有价值的错。它露出了一条缝：她手上的算法，和题目说的那件事，对不上。第 9 章也用过周长和面积，那是更后面的一步：一颗“面积越大，周长就越长”的旧粒子，碰上反例要熔开。朵朵还在前头。周长和面积在她身上还没接上，谈不上熔。

这条缝，就是学习的起点。本书前面几章反复讲过：没有对不上，就没有建立（第 7 章）。对不上逼出重连，旧的连接被拆开，“长乘宽”要和“铺满”接到一起，“长加宽乘二”要和“一圈”接到一起。接上了，土（特征纠缠）才开始有了形状。可是这时候，孙伟开口了。

他讲的是自己身上早已结晶的东西。三十多年前，他也在某张练习册上把周长和面积搞混过，也被某个人讲过，也在某个晚上自己琢磨通了。那一次对不上是他的，那一份动能是他付的，那颗结晶长在他身上。现在他把这颗结晶的说明书念给女儿听。

说明书念得再清楚，在朵朵那里，也只是特征同时在场：长、宽、加、乘二、一圈、红笔描的边，一样一样挨在一起，被爸爸的话串着。她说“懂了”，说的是实话，她确实看懂了。这正是第 1 章讲的看懂型假会：停在“〇　　在场”，还没有建立。

证据就在第二问。爸爸的话一撤，串着的东西就散了。朵朵手里剩下的，是最近一次被讲过的那个动作：(8＋5)×2。她把它原样套到了铺草皮上。

家长讲一遍题，等于替孩子把落差填平了。

落差平了，本该由孩子付的那份动能就不必付了。拆开、重接，这两个最费力的动作，都由家长在嘴上替她做完了。孩子省了力，也就省掉了建立。

还有一层，是家长自己身上的账。孙伟那一声高八度，从哪里来？用三角看一下就清楚。孙伟心里有一个理念：“这题很简单。”眼前是一个现实：女儿刚听完就做错。两样对不上了。三角里任两类对不上，逼的是第三类发生并回写：在这里，被逼着要变的是孙伟自己。

他身上有一个自我符号：“我是一个讲得清楚的人。”他白天就是靠这个吃饭的。女儿听不懂，碰的不只是那道题，还有这个“我”。让这个“我”变一变，最费力。最省力的，是绕开自己，回头去硬改现实：让女儿立刻会。讲一遍不行就再讲一遍，再讲一遍不行就提高嗓门。所以越讲越急。孟子说的“继之以怒”，在这里有了一个更细的来历：怒，是家长自己的落差不肯落回自己身上，转头压到了孩子身上。

前面引过的“角色建构”和“效能感”，在这里对上了号。孙伟心里那个“好爸爸就该坐下来教”，是角色；那个“我讲得清楚”，是效能。两样都是他身上早已稳下来的东西。女儿一错再错，碰的正是这两样。研究者从问卷里看见了家长为什么参与；放到三角里看，同一件事还有另一面：家长身上这两样东西一旦被碰，家长自己也会急着把落差填平。

讲题还会骗家长自己。家长讲得顺，孩子点头点得顺，屋子里就有一种“进展很好”的感觉。第 8 章讲过那种会骗人的“眼熟”：看着顺、读着熟，是一种感觉；记住没有，是另一回事。这份感觉不只骗孩子，也骗讲的人。孙伟讲完第一问，听到一声“懂了”，心里是松了一口气的。正因为松了这口气，第二问的那个 26 才显得格外刺眼。

这几年，饭桌上又多了一个讲题的人：手机。拍一下题，几秒钟后屏幕上出来一份解析，步骤清楚，还配了图。不少家长自己也讲不明白新教法，干脆把手机递给孩子：“你自己看。”这比家长亲口讲还要快，填平落差的速度也更快。

第 1 章写过 AI 一键答案在学生身上的样子：作业全对，小测全空。家长递过去的那部手机，做的是同一件事，只是多了一层家长的默许。AI 本身不是问题，问题是它在缝露出来之前就到了。怎样让 AI 留在场的位置，而不去当答案，第 19 章会细讲，人机分工的一般道理见书四。

这也是为什么学校和文件都在往外推“讲题”。不是家长讲得不好，是讲题这个动作，在家里格外容易同时做错两件事：替孩子填平了她的落差，又把家长自己的落差倒在了孩子身上。

◆ 五、换一句问话：你卡在哪一步

如果不讲，家长坐在旁边做什么？本书给的第一个办法很小，只是一句话：“你卡在哪一步？”这句话有三个用处。第一，它把对不上交还给孩子。家长讲题，是家长替孩子指认缝在哪里；问“卡在哪一步”，是请孩子自己去找那条缝。本书一再强调，对不上要能被事前独立指认，否则说什么都是事后诸葛亮。在家里，最好的指认人就是孩子自己。

第二，它本身就是一次建立。孩子要回答这句话，就得把自己的做法从头看一遍：我先干了什么，然后干了什么，到哪儿就不知道了。这一看，动能就开始由她来付了。第 20 章会讲到，评价“建立”这一段，看的正是学生能不能说出自己卡在哪、怎么接上的。家里的这一问，是同一件事的家常版本。第三，它让家长闭嘴。这一点不好听，可是最要紧。一句问话说出口，接下来轮到孩子说，家长只能等。

孩子的回答，大致有四种。每一种，家长接下来做的事都不一样。一种是说得出来：“我不知道这里该乘还是该加。”这是最好的回答。缝找到了，落差的大小也刚好。家长接下来要做的，是再问一句贴着缝的话，比如“栅栏围在哪儿”，而不是给出答案。

一种是“我全都不会”。这往往说明落差太大，已经成了一锅粥（混沌）。这时候不要硬撑，往回退一步：上一道会做的题是哪一道？从那里开始，找到第一个卡住的地方。

比如孩子说花坛题“全都不会”。家长可以指着题目里的一个词问：“栅栏是什么，你见过吗？”孩子说见过，小区门口就有。“那它是一整片，还是一条？”孩子说是一条，绕着草地。问到这里，“全都不会”就缩成了“我不知道一条绕着的东西怎么算长短”。一锅粥里捞出了一根线头。落差从一堵墙，变成了一道够得着的坎。这一步退回去，退的不是难度，是起点。家长没有把题变简单，只是帮孩子找到了他身上已有的那一截，让新的东西有地方接。

一种是“我不知道”，眼神发直，声音发飘。如果已经是晚上十点，孩子从早上七点到现在没停过，这往往不是题的问题，是人没有力气了。第 15 章讲过入口三：能量耗尽的时候，再讲、再加，都是往人身上压，要先补能量。这时候最好的辅导是一杯热牛奶和一张床。身体或心里的难处真的大了，请找医生或心理咨询师。

还有一种是“你别问了，你直接告诉我”。这是孩子在讨价还价，想把动能的账单推回给家长。可以笑一笑，说“告诉你了，你明天还得来找我”，然后接着等。

问“卡在哪一步”还有一个兄弟问题，用在孩子做完之后。孩子写完一道题，常常转过头问：“对不对？”家长最顺手的回答是“对”或者“不对”。这一答，判断的那一份力气又被家长付了。换一个问法：“你怎么知道它对？”孩

子要回答，就得自己去验：把 26 米放回花坛边上走一圈，看说不说得通；把 40 平方米想成四十块一平方米的草皮，看铺不铺得满。

能自己验对错，离三条判据里的“独立”就近了一步。离了大人立得住，先得离了大人判得了对错。家长的手，最好也守一条规矩：不碰孩子的笔。一碰笔，账单就换了人付。

◆ 六、家长是场，不是动能

不讲、不碰笔，那家长坐在旁边还有什么用？用处很大。家长是场。本书说的场，就是势能：一张网对人的吸引与拉扯（见书二第 17 章）。一个九岁的孩子，独自面对一道做不出来的题，那道缝很容易变成一个坑：做不出来，就不做了，去玩别的。旁边坐着一个人，这个坑就被托住了。孩子知道有人在，知道卡住不是丢人的事，知道再坐一会儿也没关系。

场不替孩子付动能，它让孩子付得下去。

这就是托住。托住不是安慰、不是替做，是陪着走第一步。举一个新加坡的晚上。淡滨尼一间四房式组屋。邱国栋四十四岁，是地铁的维修技师；妻子苏慧玲四十岁，在一家保险公司做理赔。儿子邱乐恒十岁，小四。

那晚的题是英文的，大意是：两个人一共有 240 元，甲比乙多 36 元，乙有多少元？邱国栋瞄了一眼，三秒钟就有了答案。他拿过草稿纸，写下“设乙为 x”，列出 x＋x＋36＝240。“你看，多快。”乐恒把草稿纸推回去。“老师说要画 model，考试不画会扣分。”邱国栋说：“画什么画，方程才是正路，你以后中学都要用。”

父子俩各执一词。爸爸心里那个“方程是正路”，和儿子手上那个“老师要画图”，对不上了。可是这一次的对不上，不是长在题上，是长在两代人的办法之间。那一晚，它没有逼出谁的学习，只逼出了一场争执。

苏慧玲从客厅走过来，把方程那张纸收走了。她没讲题，问了一句：“你画到哪里卡住了？”乐恒在练习本上画了两根长条，一长一短，上下对齐。“我画了两条。可是多出来的 36 块，我不知道放哪儿。”缝露出来了：他知道甲多，可是“多”在图上长什么样，他接不上。

苏慧玲说：“我读书的时候没学过这个。你们老师怎么教的，你画给我看，教我一下。”这一句话，把局面翻了过来。妈妈不会，乐恒成了教的人。要教，就得把自己手上那团东西拆开，一步一步说出来。他指着两根长条说：“这条是乙，这条是甲，甲长一点……”说到“长一点”，他停住了。他拿铅笔在长的那条末端画了一道竖线，把多出来的一截隔开，标上 36。

“哦。”他说，“把这一截拿掉，两条就一样长了。”后面的事就快了：240 减 36 是 204，两条一样长，204 除以 2，乙是 102 元。整个过程花了快二十分钟。邱国栋在旁边看了一会儿，忍不住说了句“x 两行就完了”，被苏慧玲看了一眼，没再说下去。

这二十分钟里，苏慧玲没有付一分动能。拆开、重接，都是乐恒自己做的。她做的事只有三件：收走了一张会替儿子填平落差的纸；问了一句“卡在哪”；说了一句“教我一下”。这三件事，都是场的活儿。

邱国栋的方程并没有错。等乐恒上了中学，代数会来，那时候长条和 x 之间又会有一次对不上，那是另一次建立的好机会。可是在小四这个晚上，爸爸的方程会把孩子的缝直接盖住。家里最有用的势能，不是讲得多好，是让孩子在卡住的时候不必一个人。

场也有往下拉的时候。同样是坐在旁边，家长低头刷手机，和家长在旁边读自己的书，给孩子的拉扯不一样。前一种，孩子的眼睛会跟着屏幕走；后一种，屋子里有一种“大家都在做自己的事”的安静。

家长坐在旁边唉声叹气、不停看表，场就变成了一张往下拽的网：孩子还没卡住，先感到了家长的焦急，于是急着写一个数交差。祖辈在旁边一句“孩子还小，别逼他了”，场又会把孩子从缝里拽出来，直接去看电视。

所以说家长是场，并不是说家长坐在那里就够了。场有方向。它可以托住孩子在缝里多待一会儿，也可以把孩子从缝里拽走，或者把缝压成一个坑。一个好的场，让孩子觉得卡住是正常的、是有人等着的、是值得再试一下的。

这件事没有公式。可是有一个很简单的检验：孩子卡住的时候，是抬头看家长，还是低头看题。抬头看家长，往往是在等答案，或者在看脸色；低头看题，说明场托住了，他还在缝里。

◆ 七、饭桌上再用一次

家里还有一件事，比学校做得好。那就是维持。本书说过，记忆是纠缠的维持，靠三样：连接度、再用、场（第 8 章）。学校的再用，多半是下一次作业、下一次测验，用的还是纸上的题。家里的再用，可以发生在饭桌上、超市里、地铁上，用的是真东西。

两周后的一个周末，邱家去小贩中心吃午饭。邱国栋点了一碗虾面，乐恒点了一份鸡饭，两样一共 17 块，虾面比鸡饭贵 3 块。苏慧玲随口问：“那你的鸡饭多少钱？”乐恒愣了一下，从桌上抽了一张纸巾，用妈妈的眉笔在上面画了两根长条。

这一次再用，和作业本上的再用不一样。作业本上的题，问法是现成的；饭桌上这一问，要乐恒自己从一碗面、一份饭里认出“这是一道两根长条的题”。

这一认，就是在迁移。一个在练习本上建立的东西，被带到了一张纸巾上，带到了一顿午饭里。按三界的说法，理念符号往现实那一界走了一步。第 9 章讲过，粒子化要的正是这种跨界的迁移，每走一步都要付能量。

那张纸巾上还发生了另一件事。邱国栋凑过来看儿子画的两根长条，看了半天，忽然说：“哦，你隔开的这一截，就是我那个 x＋36 里的 36。两条一样长的那部分，就是两个 x。”乐恒没听懂爸爸在说什么，自顾自地算出了 7 块。可是邱国栋自己愣了一会儿。

他学方程学了三十年，方程在他身上是一颗很结实的结晶，结实到他一度觉得“画 model”是绕远路。那天在小贩中心，他手上那颗结晶松了一下：原来长条和 x 说的是同一件事，长条把 x 背后那个“一样长”画了出来。他嘴上没说什么，后来再陪儿子做题，没再提过“设 x 多快”。

这是家里少见的一种情形：孩子的建立，碰开了家长身上的一颗旧结晶。第 9 章说，活的会，是下一次对不上来的时候熔得开、能重新结晶。邱国栋那一下，就是一次小小的熔开。父母陪孩子做作业，最好的副产品不是孩子多对了几道题，是家长自己身上那些早已固定的东西，偶尔也被碰松一回。家里能给的，就是这样一次又一次不起眼的跨界。

这里有两个分寸。一个是别把饭桌变成考场。“再用”和“再考”不是一回事。再考，是拿练习册上的题再问一遍，孩子知道这是在考，嘴上应付，心里抗拒。再用，是生活里正好碰上了，顺手问一句，答不出也没关系。能答出当然好；答不出，下次碰上再问。

另一个是别把家长的盯，当成维持。考前一晚，家长拿着单词本一个一个抽背，孩子背得滚瓜烂熟，第二天考完，一周后一大半就想不起来了。这是第 3 章讲的背住型假会：纠缠靠外力维持，外力一撤就松。家长的盯，就是那股外力。

维持的功，要孩子自己付才算数。家长能做的，是多造几个让孩子顺手用一次的场合。家里的再用，还有一个学校很难有的好处：间隔是天然的。第 8 章讲过，隔一段时间再用一次，比连着用十次更能让纠缠不散。学校要专门排出复习的日子，家里不用排。今天在超市碰到打折，下周在地铁上碰到换乘，月底碰到交水电费，日子自己就把间隔排好了。

这样的场合并不难找。周末带孩子去菜市场，让他算三斤土豆加两斤西红柿一共多少钱；坐地铁时问他还有几站、大概几点到；装修时请他量一量窗户，算一下窗帘要多宽。每一件都是小事，每一件都是一次再用。孩子在其中用到的，不只是一个算法，还有一个判断：眼前这件事，是课本上哪一类东西。这个判断，课本上的题替孩子做好了，生活里的事不替。

一顿饭里问一句，比一晚上抽背二十个更管用。

◆ 八、孙家的第二个晚上

回到北京。那个周二之后，孙伟在公司的午休时间翻到过一句“你卡在哪一步”。他没有多想，先记在手机备忘录里了。周四晚上，练习册上又是一道面积题：教室地面长 9 米，宽 6 米。第一问，沿墙贴一圈踢脚线，要多长？第二问，地面铺满地砖，要铺多少平方米？

朵朵咬着铅笔看了很久，没动笔。孙伟坐在小板凳上，手里换了一杯茶，没拿红笔。他问：“你卡在哪一步？”朵朵说：“我不知道是乘还是加。”这一句话，让孙伟愣了一下。周二那晚，他一直以为女儿是“没听懂周长”。原来不是。女儿的缝在更前面：她分不清一道题什么时候该乘，什么时候该加。他讲了两遍“长加宽乘二”，讲的全是缝后面的事。

说来有点好笑。孙伟白天做测试，从来不替开发同事改程序。他发现一个错，写下来的是“复现步骤”：先点哪里，再输入什么，到哪一步出的问题。改，是开发自己的事。他在公司里早就是一个“只指出卡在哪、不替人改”的人，回到家里，却成了一个替女儿把每一行都改好的人。

同一个人，在两张桌子前，站在了两个位置上。公司那张桌子有规矩托着：测试不改代码，这是分工。家里那张书桌没有规矩，只有一个“好爸爸就该教”的样子在拉着。周四晚上那句“你卡在哪一步”，等于把公司那张桌子上的规矩，搬到了家里这张桌子上。

周二那晚被逼着要变的第三类，到这里才动了一下：在这张书桌前，“我是一个讲得清楚的人”让开了一点位置，给了“我是一个只指出卡在哪的人”。他忍住了要讲的那一句，换了一个问法：“踢脚线贴在哪儿？”

朵朵站起来，走到卧室墙根，蹲下来，用手指沿着墙根划了一段。“贴在这儿。”“那地砖呢？”她站到屋子中间，两只胳膊张开，在地上比画了一下。“铺在这一片。”

她站在那里，看看墙根，又看看地面，过了一会儿说：“一个是走一圈，一个是盖满。”

孙伟没有接话。他很想说“对，所以一个是周长一个是面积”，可是他喝了一口茶。朵朵回到书桌前，先在草稿纸上画了一个长方形，用铅笔沿着边描了一圈，嘴里念叨“走一圈”；又在长方形里面涂了几道斜线，念叨“盖满”。然后她写下：(9＋6)×2＝30（米）；9×6＝54（平方米）。一道题，花了二十五分钟。孙伟的腿在桌子底下抖了二十五分钟。

第二天晚饭，冯洁买回来一块新桌布，还有一卷贴桌角的防撞条。她把东西放在桌上，问朵朵：“这块桌布够不够盖住桌面？防撞条要剪多长？”朵朵去拿了卷尺，量了桌子的长和宽。她先说桌布要看“盖满”，算了一个数，和包装上

的尺寸比了比，说够。又说防撞条是“走一圈”，算出来要四米多。冯洁剪的时候，她在旁边盯着刻度。

两周后，学校单元测验，有一道题换了样子：一块长方形菜地，一边靠着墙，另外三边围篱笆。朵朵没见过这种题。她在卷子边上画了一个长方形，把靠墙那条边涂黑，在旁边写了两个字：“不围”。这一段经历，显出了一个不太一样的朵朵：她开始先画一圈手指走的路，再动笔算。也显出了一个不太一样的孙伟：他坐在旁边，手里拿的是茶杯。

本书不说朵朵从此“学会了数学”。第 9 章讲过，会不会，要用三条判据去看：换个问法还在不在，不靠提示能不能说成一整件事，离了大人立不立得住。那道靠墙的菜地题，算是第一次换问法。它在。至于她能不能把“一圈”和“盖满”讲给别人听，能不能在没人在旁边的时候自己想到画一画，还要再看。可是有一件事可以确定：那颗结晶，如果它长出来了，是长在朵朵身上的。周二那晚的三遍讲解，长在讲的人身上。

◆ 九、放回日子里

把家长在饭桌上常做的几件事排一排，看看各自落在哪一段，又各自容易造出哪种假会。

家长常做的事	落在五段账的哪一段	容易造出什么	换一种做法
孩子一卡，家长马上讲一遍	○ 在场：特征被家长的话串着	看懂型假会：“我懂了”	先问“你卡在哪一步”，等孩子说
讲不通就提高嗓门	家长自己的落差压到孩子身上	孩子把“卡住”记成“丢人”	手不碰笔，必要时换个人或明天再说
用 AI 拍题，把解析给孩子看	○ 在场：答案比缝先到	看懂型假会，而且更快	让 AI 当场不当答案，先写下自己卡在哪（见第 19 章）

家长常做的事	落在五段账的哪一段	容易造出什么	换一种做法
考前一晚拿着本子抽背	二 维持，靠外力	背住型假会：一周后松	隔几天在生活里顺手用一次
买三本练习册，同类题刷到熟	三 理念界粒子化	刷熟型假会：换个样子就不认	少做几道，换成生活里的真题
孩子晚上十点还在写，家长陪着熬	动能耗尽（入口三）	连已有的也松了	先吃饭、先睡觉，第二天再说
饭桌上碰到真事，顺口问一句	二 维持＋向三 粒子化迁移	不造假会	答不出也不追，下次再问

这张表不是一张禁令。家长当然可以讲题。孩子卡了很久、已经自己找到了缝、只差一句点拨的时候，讲一句往往正是时候。第 4 章讲过的“先卡住，再启发”，说的就是这个顺序。顺序要紧：先让孩子卡住，并且说出卡在哪，再给场；场给到了，孩子还接不上，再讲一句。顺序倒过来，讲的那一遍就成了替代品。

家长还可以问自己几个问题。今晚孩子做作业，我说的话多，还是孩子说的话多？我的手碰过孩子的笔吗？孩子说“懂了”的时候，我有没有请他用自己的话再说一遍，或者换一道题试一试？这周家里有没有一次，孩子在课本以外用上了课本里的东西？

还有一件事要说开：今天的“易子而教”。孟子那个办法，今天其实一直在用。托管班、晚托、补习老师、上门家教，都是在把孩子交给别人去教。许多家庭花钱送孩子去，图的正是孟子说的那一层：别在家里父子相夷。这一层是对的，家里的气氛往往因此好了许多。

可是换了人，不等于换了做法。如果托管班的老师也是孩子一卡就讲、讲完就让孩子照着改，那么家里的看懂型假会，只是搬到了另一张桌子上，还多了一份学费。判断一个晚托好不好，不必看它讲得多清楚，可以看一件事。孩子回家

说起今天的作业，说的是“老师讲了”，还是“我卡在某一步，后来自己想通了”。

如果这几个问题的答案都不太好看，也不必自责。孟子两千多年前就说过，父子之间教书本来就难。家长不是老师，也不必做老师。家长能做的，比讲题少，也比讲题难：坐在旁边，忍住不说，让孩子自己付那一份力气，然后在饭桌上，给他一次再用的机会。

带走的话

家长讲一遍题，是替孩子填平落差；问一句“你卡在哪一步”，才是把落差交还给他。

小　账

孟子用“易子而教”关上了父子相夷那扇门，却没打开“学会”那扇；现代研究分出了支持与控制，本书把镜头挪到孩子身上那一段账：家长是场，不是动能。

孩子说“懂了”、家长松一口气的那一下，发生被收回为发现。家长把自己身上早已结晶的东西当成现成答案递过去，孩子身上本该发生的那一次建立，就被一次“看懂”替掉了。

想一想

1. 回想你最近一次陪孩子（或被父母陪着）做作业，那一晚是谁说的话多？那道题最后留在了谁身上？
2. 你辅导时发过的火，是哪一个想法和眼前的现实对不上了？那是孩子的落差，还是你的？
3. 这一周你家的饭桌上、超市里、路上，有没有一件真事，可以让孩子顺手把课本上的东西用一次？

◆

17

第 17 章

成人的学习：培训了没学会

这一章的问题

培训三天，满意度表上全勾了五分，周一回到工位，打开的却还是那个用了十二年的老模板——那三天到底留下了什么？

周五下午五点，新加坡莱佛士坊一栋写字楼的二十六层，一间培训室里响起了掌声。钱慧敏四十岁，在一家本地银行做中小企业贷款部的经理，入行十八年。这三天，她和部门里另外十几个人一起，参加了银行统一安排的“数据分析与可视化”培训。银行这两年在推数字化，每个部门的中层都要轮一遍。

培训做得很用心。讲师是外请的，年轻、口齿清楚，幻灯片做得漂亮。第一天讲数据思维，第二天手把手教一个自助式的数据看板工具，第三天分组做练习：给一家虚构的连锁零售店做一张销售看板。数据是讲师准备好的，干干净净，一列不缺。钱慧敏那一组的看板做得最好看，还得了一个小奖。

散场前，每人填一张满意度表。五分制，钱慧敏几乎全勾了五分。在“您觉得本次培训对工作有帮助吗”一栏，她写了一句：“内容很实用，讲师讲得很清楚。”她说的是真心话。

下周一早上九点，她打开电脑，第一件事是准备月度的贷款逾期报告。这份报告她做了十二年，用的是一个 Excel 模板，里面的宏是她当年自己一点点摸出来的。她想起培训，打开那个看板工具，从银行系统里导出数据，拖进去。字段名和培训时的不一样。有几列是空的。日期的格式有两种。客户编号在一张表里是数字，在另一张表里带了字母前缀，两张表接不上。讲师演示“合并两张表”的时候，鼠标一拖就好了；她拖了三次，出来一堆报错。

十点半的部门晨会要用这份报告。快十点的时候，她关掉了看板工具，打开了那个 Excel 模板。二十分钟，报告做好了，和过去十二年一样。六周后，人力资源部发来一份回访问卷：“您在工作中使用了本次培训的内容吗？”她勾了“偶尔”。又过了一个月，人力资源部给管理层的季度汇报里，这次培训的数字很好看：满意度 4.6 分（满分 5 分），结业率 98%。

某天午饭，同事问她那个看板工具用得怎么样。钱慧敏说：“培训我都听懂了，就是回来用不上。”本章只问一件事：那三天，在钱慧敏身上留下了什么。

◆ 一、满意度很高，桌上没变

“培训了没学会”，在企业里几乎是一句老话。老到有一个专门的学问在研究它：培训评估。这门学问绕不开一个人：唐纳德·柯克帕特里克（Donald Kirkpatrick）。1959 年起，他在美国培训主管协会的会刊上连发了四篇文章（后两篇刊于 1960 年初），总题目叫“评估培训项目的技巧”。他在文章里提了四个步骤，后来人们管它们叫“四层”：

第一层，反应：学员喜不喜欢这次培训。第二层，学习：学员学到了什么知识、技能，能不能在测验里答出来。第三层，行为：学员回到岗位上，做事的方式有没有变。第四层，结果：组织的成本、质量、产量、流失率这些数字，有没有因此变化。这套框架流传了六十多年，后来写成了书，一版再版，至今仍是许多企业培训部门的基本工具。

柯克帕特里克对在哪里，要先写足。在他之前，培训做完了，大家多半只问一句“反响怎么样”。他第一次把“满意”和“学到”分开，把“学到”和“做到”分开，又把“做到”和“组织变好”分开。这四刀切下去，等于告诉所有做培训的人：学员给你打了五分，不等于他学到了；他考得出来，不等于他回去会做；他回去做了，也不等于公司因此变好。这在当年是很清醒的一句话，到今天也没有过时。

他还看见了第三层最难。人回到岗位上能不能改，不只看课上讲得好不好。他后来把条件列成四条：人得想改，得知道改什么、怎么改，回去的风气（头一个是上司）得容许，改了还得有好处。

可是在实践中，四层的命运很不一样。第一层最容易做：散场前发一张表，五分钟收齐。行内有个外号，叫“笑脸表”。第二层也还行：课末考一考。第三层要等几个月，要去岗位上看，要上司配合；第四层要把培训和公司的数字连起来，牵扯的因素太多。所以，越往上，做的机构越少。各种行业调查给出的比例不尽相同，趋势却很一致〔待核：具体调查与比例〕。

笑脸表还有一个不太显眼的毛病：讲师越会讲，分越高。演示越流畅，学员越觉得“我都懂了”。第 8 章讲过那种会骗人的“眼熟”：看着顺、读着熟，是一种感觉；记住没有，是另一回事。会不会用，离得更远。这份感觉在成年人身上一点也不比在学生身上少。一个讲得磕磕绊绊、逼着学员自己动手卡上半小时的讲师，分数往往不如一个讲得行云流水的讲师。可是哪一个在学员身上留下得更多，笑脸表答不了。

许多地方的成人学习，还停在比第一层更靠前的地方：学时。中国不少专业技术岗位，有每年必须修满的继续教育学时或学分〔待核：具体行业规定与数字〕。学时的用意是好的，逼着人每年回到课堂上。可是学时量的只是“人在不在”。人坐在那里、网课挂在那里，学时就算数。这比满意度还要靠前一步：连喜不喜欢都不问。

还有研究专门看了一个问题：一家机构在哪一层做评估，和它的培训有没有带回岗位，有什么关系？2012 年，加拿大学者 Saks 与 Burke 调查了一百五十位培训从业者。结果是：机构越常在第三、四层做评估，学员把培训用到岗位上的比例就越高，两者有中等程度的关联。只在第一、二层做评估，和培训能不能带回岗位，关联很弱。这个结果不难理解。只问“喜不喜欢”“考不考得出”的机构，眼睛盯的是培训室；肯去问“回去用了没有”的机构，眼睛已经看到了工位上。

更早还有一项汇总研究指出：学员觉得“这课真好”的那种喜欢，和他学到多少、回去用了多少，几乎没有关系。倒是学员觉得“这课对我有用”的那种判断，关系稍强一些（Alliger 等，1997）〔待核：具体效应大小〕。

放回钱慧敏身上：她勾的五分，是真实的；她写的“讲得很清楚”，也是真实的。可是这两样，量的都是培训室里的那三天。周一早上她关掉看板工具的那一下，没有任何一张表记了下来。

◆ 二、学到了，为什么带不回去

柯克帕特里克切出了四层，可是没有讲清第二层到第三层之间那道坎是什么。三十年后，有人专门去看这道坎。1988 年，Baldwin 与 Ford 在《人事心理学》上发表了一篇综述，题目就叫《培训迁移：回顾与未来研究方向》。这篇文章后来成了这个领域被引用最多的框架。

他们先给“迁移”下了一个定义：学员把培训里学到的知识、技能和态度，用到工作上。这个“用到”有两层意思：一层是推广，把课上学的用到岗位上那些和课上不完全一样的情境里；一层是保持，过了一段时间还在用。然后他们画了一张图，把影响迁移的东西分成三块“输入”：一块是学员自己：能力、动机、性格。一块是培训设计：课怎么排，用了哪些学习原理，内容和岗位贴不贴。一块是工作环境：上司和同事支不支持，回去有没有机会用。

这三块输入，先影响“培训产出”，也就是课上学到了多少、学完记住了多少；再由产出影响迁移。他们还特别画了两条直线：学员自己和工作环境，可以绕过“学到多少”，直接影响迁移。换句话说，一个人在课上学得再好，回到一个没有机会用、没人支持的岗位上，照样带不回去。

这篇综述里还转引了一个数字。1982 年，一位叫 Georgenson 的作者估计：美国企业每年在培训上花的钱高达一千亿美元。其中能转化为岗位上实际行为的，不超过一成。这个“一成”后来被转引了无数次，几乎成了培训界的常识。可是它本来只是一个估计，不是测出来的。后来有学者专门写文章追查它的

来历，把它叫作“一成的错觉”（Ford 等，2011）。本书在这里也守这份公道：不能拿“只有一成”去吓人。

可是，即便不用那个数字，Baldwin 与 Ford 指出的那道坎也是真的。钱慧敏就站在坎上。回头用他们的三块输入看她：学员这一块，她能力够、也愿意学，没有问题。培训设计这一块，练习用的是一套干净的零售数据，和她每天打交道的贷款数据，几乎没有一处相像。工作环境这一块，周一上午十点半有晨会，报告必须交。没有人给她留出“用新工具慢慢试”的那两个小时。三块里坏了两块。她带不回去，一点也不奇怪。

◆ 三、成年人不是一张白纸

还有一位前人，要放在这里讲。美国成人教育学者马尔科姆·诺尔斯（Malcolm　Knowles）1970 年出版了《成人教育的现代实践》。他在书里大力推广了一个词：成人教育学（andragogy），用来和以儿童为对象的教育学相区分。

他的几条主张，至今仍是成人培训的常识。成年人需要知道为什么要学这个；成年人有自我主张，不愿被当成孩子来教。成年人带着大量的经验来上课，这些经验是学习最丰富的资源；成年人学东西，多半是为了解决眼前的问题，而不是为了将来某一天。

诺尔斯对在哪里，很清楚。他第一次认真地说：成人不是放大了的学生。教孩子的那一套照搬到成人身上，往往不灵。尤其是“经验”这一条，把成年人带进教室的那十几二十年，从包袱变成了本钱。

他也提到过，经验有另一面。积累起来的经验，也可能成为思维上的习惯和成见，让人对新东西关上门〔待核：诺尔斯原书中的具体表述〕。可是这一面，在他的框架里是一句提醒，不是主干。主干是“经验是资源”。后来的许多培训设计，接过的也多半是这一半：请学员分享经验，结合学员的工作案例，用小组讨论代替单向讲授。

这些做法都没错。可是它们默认了一件事：经验是可以拿来用的材料，学新东西是往上加。钱慧敏的十八年，不是一堆可以随手取用的材料。那是一块很厚、很实的土（特征纠缠）。

◆ 四、它们停在哪里

三位前人放在一起看，各自守住了一块。柯克帕特里克守住了“量”：培训好不好，要分层量，别只量满意。Baldwin 与 Ford 守住了“条件”：学到的能不能带回去，看学员、设计、环境三块。诺尔斯守住了“人”：成年人不是白纸，有经验，有主张，有眼前的问题。

可是他们都用了同一个比方：搬运。柯克帕特里克的四层，是一条往外送的流水线：从培训室送到脑子里，从脑子里送到岗位上，从岗位上送到公司的报表里。Baldwin 与 Ford 用的词就叫“迁移”，英文 transfer，本义是转运；他们关心的是这件货在路上会不会掉、在哪一站掉。诺尔斯讲经验是资源，资源也是一样可以搬来搬去的东西。

搬运的比方里，学到的东西是一件现成的货。培训室把货装好，学员负责背回去。这个比方漏掉了一件事：那件货，在学员身上到底长成了没有。钱慧敏从培训室背回去的，是一张做得很漂亮的零售看板，和一句“合并两张表要鼠标一拖”。这些东西在她身上，只是一样样挨在一起，被讲师的演示串着。讲师一走，演示一撤，它们就散了。不是“在路上掉了”，是从来没有结成一件可以背走的东西。

第二件被漏掉的事，是旧的那一块土。搬运的比方里，岗位是一个空着的货架，新货运到了就往上放。可是钱慧敏的岗位上并不空。那里放着一个十二年的 Excel 模板，一套她闭着眼都能做的流程，还有一个她很看重的“我”：部门里看报表最准的那个人。新货要放上去，得先把旧的挪开。

前人停下的地方，正好是本书接着要走的一步：学到的东西不是搬过去的货，是要在这个人身上重新长成的结晶。而成年人身上，早已有一块又厚又实的旧结晶在那里。

◆ 五、学新的，先要熔旧的

本书在前面几章里反复用过一个说法：记忆是纠缠的维持，维持主要靠内能。内能就是连接度，也就是断裂的难度（第 8 章，见书二第 16 章）。

一个东西用了十二年，每个月用一次，每次都管用，每次都被晨会上的领导点头认可，它的连接度会有多高？非常高。钱慧敏的 Excel 模板，不只是一个文件。它连着她的手（哪个快捷键在哪里），连着她的眼（哪一列数字一变色就要警觉）。它还连着她的判断（逾期超过三十天的客户才要重点看），也连着她的“我”（这份报告是她的作品）。这些连接一条条交织在一起，结成了一个很结实的东西。

这就是成年人学习最根本的处境：旧纠缠的连接度高，等于内能沉积得很厚。本书管这一层东西叫土：手、眼、判断、“我”，一样样特征被十几年的日子拧在一起，拧成一块地。孩子身上的土还薄，翻一翻就松；成年人身上的土，已经被踩了十几年，踩成了路面。

孩子学新东西，像在一块松软的地上种树，挖个坑就能种。成年人学新东西，像在一块水泥地上种树：不先把水泥凿开，树根扎不下去。凿开它，要付动能。要拆一个符号，付出的动能得超过它的连接度（见书二第 19 章）。周一早上那一个小时，钱慧敏手里的动能，远远够不上那个十二年的模板。更何况十点半有晨会。最省力的出路，是退回旧的那一套。这不是懒，是能量账算下来的结果。

这件事，前人也摸到过。社会心理学家库尔特·勒温（Kurt　Lewin）1947 年前后谈过群体与组织的改变。他留下了一个流传极广的说法：先“解冻”，再改变，再“重新冻结”。意思是：一个稳定的状态，要先被松动，才谈得上变成新的样子。这个三步说法，后来被管理学教科书写成了公式。也有学者考证认为，那个整齐的三步模型，多半是后人整理勒温时加上去的。勒温本人的想法要复杂得多（Cummings 等，2016）。本书不去断这桩公案，只借它最朴素的那一层：旧的不松，新的进不来。

用本书的话说：学新先要熔旧。

熔旧，靠什么？不靠讲道理。讲“新工具效率更高”，是往旧结晶上贴一张新标签，旧的纹丝不动。熔旧，要靠一次真的对不上：旧的那一套，在某件具体的事上，被现实顶了回来。只有这样，旧的连接才会松，新的才有地方接。

成年人的对不上，还有一个特点：它往往会碰到“我”。钱慧敏那句“我是部门里看报表最准的人”，是一个自我符号。新工具对她来说，不只是一个软件，还隐隐是一个威胁：如果数据看板一拉就出来，那她十二年练出来的那双眼睛，还值什么？这一层，培训室里没有人提，她自己也未必说得出来。可是它在。它让旧的那一块土，比看上去还要硬。

放到本书的三个入口里看，成年人还有一层麻烦。成年人最常见的学习入口，是入口一：旧办法碎了（第 13 章）。新系统上线，老流程停用，原来管用的一套忽然不管用了。这时候最需要的，是一个新的理念，告诉他接下来怎么做。

可是许多培训开的药，是讲道理：反复讲“新工具有多好”“数字化是大势所趋”。这类道理常被当成入口二的药，其实连入口二也治不好。这些话是一块又一块硬理念，往一个旧办法还没碎的人身上压。第一次培训时，钱慧敏的 Excel 模板还好好的，旧办法根本没碎。课上讲得再好，也只是在一块完整的旧土上，又铺了一层新理念。

还有入口三。四十岁上下的人，上有老、下有小，白天做满八个小时，晚上还要回消息。学新东西的那一份动能，常常是从睡眠里挤出来的。第 15 章说，能量耗尽时，讲道理、加课都是错药，先要补能量。成年人的“学不进”，有不少是这一种，却常被说成“年纪大了，脑子不灵了”。

所以成人培训常见的那种尴尬，有了一个更细的来历：课上点头，回去不动。点头的是理念那一界，“新工具确实好”；不动的是自我那一界，“可是我的那一套还管用”。两界对不上，逼的是第三类发生并回写：工位上的现实，那

份报告到底用哪一套做。最省力的出路，是不让它变：把新东西留在培训室里，把旧东西带回工位上。

◆ 六、培训多半只到在场

把一次典型的企业培训，按本书的五段账走一遍，看它停在哪里。先看在场。幻灯片、讲师的讲解、流畅的演示，把一样样新东西同时摆到学员面前。学员看懂了，点头，觉得“原来如此”。这一段，大多数培训做得很好，钱慧敏那三天就做得很好。

第一段，建立。建立要对不上：学员手上已有的东西，和新东西撞一下。可是练习用的是讲师准备的干净数据，和学员每天面对的那一堆乱糟糟的真东西毫不相干。旧的那一块土，根本没被碰到。没有对不上，就没有建立（第 7 章）。

第二段，维持。维持要再用。三天培训结束，学员回到岗位，没有人安排他下周再用一次、下个月再用一次。第 8 章讲过，没有再用的纠缠，几周就松。

这一层，中国人的老话里早有。《论语》开篇第一句：“学而时习之，不亦说乎？”许慎《说文解字》解“习”字：“数飞也。”小鸟学飞，一次一次扑腾翅膀，飞起来、落下去、再飞起来。习，不是听人讲怎么飞，是自己一次一次地飞。“学”之后跟着“时习”，两千多年前就把维持放进了学习的账里。培训课只管了“学”，把“时习”留给了学员自己，而学员回到岗位，没有一棵树让他再扑腾一次。

中国的工厂里，过去有一种做法叫“传帮带”：老师傅带徒弟，不是带去课堂，是带在机床边上。徒弟每天在师傅眼皮底下做真活，做错了师傅当场看见，第二天还要接着做。这种做法有它的毛病，学得慢，看师傅的脾气。可是它有一样东西是培训室给不了的：再用天天都有，场就在身边。用本书的话说，它把建立、维持、场三样，放在了同一张工作台上。

第三段，粒子化。粒子化要跨界：从课上的理念，走到岗位上的现实，再沉到“我会做这件事”的自我那一界（第 9 章）。这一步要付最多的能量，也最没

人管。第四段，熔开再结晶。要等下一次换系统、换流程的时候才看得出来。这一段，几乎没有培训去想。

这样走一遍，结论很清楚：多数培训只做到了在场。

成年人身上也有三种假会，和学生一模一样。看懂型：散场时说“讲得很清楚”，回去打不开工具。钱慧敏就是这一种。背住型：为了拿证书，考前把题库背熟，考完通过，三个月后一大半够不着了。许多职业资格证的备考，走的是这一条。刷熟型：同一套演练做了几十遍，标准流程闭着眼都能走，碰到一个流程里没写的情况，就不会了。这种会是真的，只是结在了理念一界，熔不开。

把柯克帕特里克的四层和本书的五段账放在一起，看各自量到了哪里：

柯克帕特里克的层	它问的问题	落在五段账的哪里	它量不到什么
第一层　反应	学员喜不喜欢	在五段之外，量的是在场时的感受	看懂的顺滑和学会无关
第二层　学习	课末考得出来吗	〇 在场＋二 维持的当周一小截	分不出看懂、背住和建立
（无对应）	学员说得出自己卡在哪、怎么接上的吗	一 建立	四层里没有这一问
第三层　行为	回到岗位用了没有	二 维持＋三 粒子化的开头（迁移）	用了，是不是离了讲师也立得住
第四层　结果	组织的数字变了没有	回写到现实一界	变化是不是长在人身上
（无对应）	下一次换系统，还能不能松开重来	四 熔开再结晶	四层里没有这一问

表里两行“无对应”，是本书想补上的两问。前一问在培训室里就能问，后一问要等一两年。

◆ 七、新加坡给每个成年人一笔学费

讲成人学习，新加坡是一个绕不开的现场。2015 年，新加坡推出了一项全国性的计划，叫“技能创前程”（SkillsFuture）。用意是让终身学习成为每个人的日常，而不只是年轻时读完书就结束。第二年，一个专门的法定机构“新加坡技能创前程局”成立，归教育部管。

这项计划里，普通人最熟悉的是一笔钱：技能创前程培训补助（SkillsFuture Credit）。从 2016 年 1 月起，年满二十五岁的新加坡公民，每人户头里有 500 新元，可以用来上经过认可的课程，这笔钱不过期。2020 年疫情期间，政府又一次性加了 500 新元，那一笔已在 2025 年底到期。2024 年 5 月 1 日起，年满四十岁的公民，另外多了一笔 4,000 新元的“中年转换”额度，专门支持中年人换跑道、学新本事。

这项计划对在哪里，要先写足。第一，它把“学习不是年轻人的事”变成了一笔看得见的钱。一个四十岁的人想学新东西，最先挡在前面的，常常是“这把年纪还花这个钱”。户头里有一笔专门的额度，这道门槛就低了一截。

第二，它在一个国家的尺度上造了一个场。人人都有这笔钱，单位里、亲戚里、邻居里，常有人在聊“你那笔用了没有”“哪个课好”。学习从一个人的事，变成了一群人身边的事。本书说场就是势能，这项计划给成人学习加了一份全国性的势能。第三，它看见了中年这道坎。专门给四十岁以上的人加一笔，等于承认：越往后，换跑道越难，越需要被托一把。

可是，一笔钱能买到什么，买不到什么，也要看清楚。钱能买到的，是一门课：讲师、教室、教材、证书。换成本书的话，钱能买到的，主要是在场。钱买不到的，是另外三样：一次真的对不上，一个托得住落差的场，还有学的人自己付的那一份动能。这三样，恰恰是建立的三个条件。

钱慧敏住的那栋组屋楼下，有一位六十出头的邻居，开了三十年出租车。前两年他用户头里的补助，上了一门教人在网上开小店的课。课是周末上的，一共四次，他一次不落。课上教怎样拍商品照片、怎样写介绍、怎样定价，他记了满

满一本。上完课，他的小店一直没开起来。他跟人说：“课是听懂了，可是我卖什么呢？”

那门课教的是开店的一般办法，他手上缺的，是一件真的要卖的东西。没有那件东西，课上的每一步都没有地方落。后来他女儿在家做手工皂，想放到网上卖，父女俩一起把店开了起来。照片是他拍的，介绍是他写的，第一单退货也是他处理的。那本记满了的笔记，这才一页一页地用上了。

所以同一笔补助，可以长出完全不同的东西。一个人用它上了一门课，课上看懂了，回去没用过，那笔钱换来的就是一次在场。另一个人用同样的钱上了同样的课，却带着自己手上一件真的难事去。回来以后，他逼着自己在岗位上用，找了两个同事一起琢磨，那笔钱换来的，才有可能是一次建立。

这不是这项计划的错。一个国家能做的，是把门槛压低、把场搭大。门里面发生什么，要看每个人身上那一段账。这正是这项计划停下的地方，也是本书接着要走的一步。

计划本身也在往这个方向走。除了上课的补助，它也有一些边工作边学的安排。比如 2015 年推出的“边做边学计划”（SkillsFuture Earn and Learn Programme），让刚毕业的人在岗位上一边做事、一边受训，把学习放回岗位上去。把学习放回岗位，就是把对不上、场和再用，一起放回了人身边。

◆ 八、钱慧敏的第二次

半年后，银行要把贷款部的月度报告全部迁到新的数据平台上。这一回，躲不过去了。钱慧敏又报了一门课，还是数据分析，学费一部分是银行出的，一部分用了她自己户头里的补助。这一次的课和上一次差不多。不一样的，是她身上那一段账。

开课前一晚，她做了一件上一次没做的事。她在笔记本上写下了一个预测：如果用新数据把过去两年的逾期客户拉出来看，风险最早露头的信号，应该是“逾期超过三十天”。这是她十八年的老经验，也是她 Excel 模板里那一列红色警示的来历。她写下这一句，是为了让它被验一验。这一句写在纸上，就成了

一个可以事前指认的对不上的候选：如果数据说的和它一样，没什么可学的；如果不一样，缝就在这里。

课上，讲师让学员带自己的数据来做练习。她带去的是部门里脱敏后的一份真数据，乱，有空列，有两种日期格式，有对不上的客户编号。练习进行到一半，她又卡在了“合并两张表”。

这一次她没有关掉软件。她举手问讲师，讲师没有直接替她改，问她：“两张表里，哪一列说的是同一个客户？”她盯着屏幕看了很久，发现一张表的编号带字母前缀，另一张不带。她自己写了一个把前缀去掉的步骤，两张表接上了。那一下花了四十分钟。她后来跟人说，那四十分钟比上次三天学到的都多。

数据接上以后，她把过去两年的逾期客户拉出来，按时间排开。结果和她写下的预测对不上。许多后来出问题的客户，在逾期三十天之前好几个月，就已经有了一个共同的样子。每个月还款的日子，一次比一次晚两三天，从来没有超过宽限期，所以在她的模板里，一直是干干净净的白色。她盯着那张图看了很久。十八年的那一列红色警示，在这里松了一下。

那天晚上她没睡好。不是因为工具难，是因为那张图在说一件她不太想听的事：她那双“看报表最准”的眼睛，这些年其实漏掉了一批客户。这一下碰到的，不只是一条规则，是那个“我”。

第二周的部门会上，她把这张图拿了出来。她没有说“新工具真好”，说的是：“我那条三十天的规则，这些年漏掉了这样一批人。”会议室安静了一会儿。她的上司没有追问是谁的责任，只问了一句：“那你觉得，下个季度先看哪一批？”

这一问很要紧。如果那天会上的回应是追责，她身上那个“我”会立刻缩回去，那张图大概也就不会再拿出来了。上司那一问，托住了她这一次对不上。托住不是安慰、不是替做，是陪着走第一步：“下个季度先看哪一批”，就是那第一步。场在这里，不是一句鼓励，是身边有人接得住，她才敢把自己的旧错摆上桌。

这是一次真的对不上。它没有来自讲师的幻灯片，来自她自己写下的那一句话，和她自己部门的数据。旧的那一块土，第一次被碰到了。

回到部门，她没有一个人硬扛。她拉了两个人：一个是部门里做了五年的副手，一个是刚从大学毕业、在数据组轮岗的年轻分析员。三个人每周四下午留一个小时，一起看那张图，一起改看板。年轻人工具用得快，副手熟悉客户，她知道哪些数字背后有故事。卡住的时候，三个人里总有一个人能托一下。这是她给自己造的一个场。

她给自己定了一个笨办法：新的看板和旧的 Excel 模板，并排做三个月。每个月两份报告都做，放在一起对。哪里对不上，就在晨会上讲出来。第一个月，新看板花了她一整天；第二个月，半天；第三个月，两个小时。

第二个月，两份报告上的逾期总额差了一笔不小的数。她花了一个晚上去追，最后发现：旧模板里，有一类重组过的贷款被她的宏悄悄排除了，排除的规则是十年前定的，她自己都忘了。新看板里，这类贷款老老实实算了进去。哪一个对，要看部门怎么定义“逾期”。这个问题过去十年没人问过，因为只有一份报告，没有东西和它对。

两份报告并排放着，本身就是一台制造对不上的机器。

这三个月，是她在付动能，也是她在付维持的功。每个月一次再用，比培训室里练一百遍都结实。偶尔她也问 AI。卡在某个公式上，她会把自己写的那一步贴进去，问“这一步为什么报错”，而不是问“帮我做一张逾期看板”。前一种问法，AI 是托住她的场；后一种问法，AI 是替她付动能的人（第 19 章，人机分工另见书四）。

第四个月，银行新开了一条针对小型建筑商的贷款产品。数据结构不一样，字段不一样，客户的还款节奏也不一样。没有讲师，没有培训。钱慧敏花了两

天，自己搭出了这条产品线的看板，还在上面加了一条新的提醒：“连续三个月还款日后移”。

用三条判据看：换了产品、换了数据，那一套还在，这是稳定；她能从数据接口一路讲到提醒规则，不靠谁提示，这是整体。没有讲师、没有那两位同事在旁边，她一个人搭出来了，这是独立。

更要紧的是第四段：熔开再结晶。她那条十八年的“逾期三十天”老规则，没有被扔掉，也没有被死守。它熔开了，和新发现的“还款日一点点后移”接到了一起，重新长成了一个更细的判断。这一段经历，显出了一个不太一样的钱慧敏：不再只是“看报表最准的人”，而是一个“会让数据先说话、再拿老经验去对一对”的人。那个“我”没有被新工具拿走，是被重新长了一遍。

第一次培训，三天，满意度五分，留下的是一次在场。第二次，课只是一个开头，后面三个月的对不上、场和动能，才是学会发生的地方。

◆ 九、放回日子里

如果你是做培训的人，可以在每一次课的设计单上，加三行字：这次课，学员身上那一块旧土是什么？课上有没有一个环节，让新东西和它真的撞一下？学员回到岗位以后，谁托着他？有没有一个同事、一个小组、一个上司，在他卡住的时候在场？课后第一周、第一个月、第三个月，学员各在哪里再用一次？

评估的时候，别只发笑脸表。可以在课末请学员写一句“我卡在了哪一步，后来怎么接上的”，这是在量建立。三个月后，去岗位上看一看他还用不用，这是在量维持和迁移。一年后换系统时，再看他能不能松开旧做法，这是在量熔开。

如果你是派人去培训的上司，最有用的事不是批准报名，是在他回来后的第一个月给他留出时间，让他用新东西慢慢试。还要容许那份报告晚交半天。Baldwin 与 Ford 三十多年前就说过，工作环境可以绕过课上学了多少，直接影响学员带不带得回去。

如果你是那个去上课的人，可以在出发前问自己三件事：我手上有哪一件真的难事，要带到课上去？我心里有哪一条老经验，愿意写下来让它被验一验？回来以后，我拉谁一起用？

把一次培训的各个环节，配上一句可以当场问的话：

培训环节	落在五段账的哪里	当场可以问的一句话
开课前	为建立找缝	“关于这件事，你现在的做法是什么？写下你预计会看到什么。”
课上练习	一 建立	“用你自己手上的数据或案例做，哪里和你的老做法对不上？”
课末	一 建立的回看	“你卡在了哪一步，后来怎么接上的？”
回岗第一周	二 维持＋场	“你拉了谁一起用？卡住时找谁？”
回岗第三个月	三 粒子化	“换一件没练过的事，不看笔记，你还做得出来吗？”
一年后换系统	四 熔开再结晶	“你的老做法里，哪一条松开了，换成了什么？”

这张表不需要额外的预算，需要的是把评估的眼睛，从培训室挪到工位上，再从当周挪到几个月以后。

还有一件事要说开。成年人学新东西，常常是在下班以后、在一天的力气用得差不多的时候。第 15 章讲过入口三：能量耗尽的时候，再加什么，都是往人身上压。一个连续加了两周班的人，晚上七点去上一门三个小时的课，坐在那里点头，多半只能是在场。这时候先补的，是睡眠，不是课时。

培训室能给的，是一次在场。在场之后的那一段路，还得由人自己去走，在岗位上，在同事中间，在一次又一次的对不上里。

带 走 的 话

成年人身上早有一块很实的旧土，培训只发来新东西，不碰旧的，那就只到在场。

小　账

柯克帕特里克切出了四层，Baldwin 与 Ford 找到了迁移的三块条件，他们关上的是“满意就是学会”那扇门。本书打开的是另一扇：学到的不是搬回岗位的货，是要在人身上熔旧再结晶的东西。用“迁移”这个词的那一下，发生被收回为发现。好像学会的东西早已在培训室里装好，只等学员背回去；于是学员自己那一次熔开、重接、再结晶，就从账上消失了。

想 一 想

1. 你上过的培训里，哪一次你在散场时打了高分，回去却一次也没用过？那三天在你身上留下了什么？

2. 你手上有没有一套用了很多年、闭着眼都会的做法？如果要换掉它，你先要碰到一次怎样的对不上？

3. 下一次学新东西，你打算拉谁一起？在哪一周、哪一件事上，逼自己再用一次？

◆

第　七　编

重新设计：课堂、作业、评价

导　语

前面讲清了五段账、三个条件和三个入口，这一编动手重新设计。第 18 章是课堂：一节课排成卡、试、托、说、再五拍，先放进对不上，让学生自己付动能，再给场，末尾自己重说，下节课换个样子再用；老师的活从讲清楚转成守住落差和场。第 19 章是作业与 AI：AI 能答的作业少留，留下的作业要有一步只能由学生付力气，AI 按三档用，站在维持段当帮手。第 20 章是评价：按五段测，建立看卡点，维持看两周后，粒子化看迁移与撤提示，活不活看反例；分数不必拆，要让它回写。评价排在最后，却管着前面两样。

18

第 18 章

课堂：先卡住，再给场

这一章的问题

老师讲的时候都听懂了，两周后同一类题自己一做，就不知道从哪里开始——一节课该怎么排，才不只是听懂？

周日晚上九点，方明远还坐在书桌前。他三十九岁，在厦门一所高中教数学，教了十五年。桌上摊着两样东西：一份用了好几年的教案，一张上周的单元小测成绩单。教案是古典概型那一节。他自己知道这份教案写得好：先复习上节课的样本空间，再讲定义，再讲两道例题，再让学生做四道练习，最后五分钟布置作业。每一步都有时间，每一步都有板书设计。去年区里听课，这节课还拿过一个好评。

成绩单是另一回事。上周的小测里有一道题：五个人抽签决定演讲顺序，第三个抽的人抽到“第一个上台”的概率是多少？全班四十五个人，答对的十九个。这道题的类型，两周前他在课上讲过，学生当时也都点头了。他想起课后一个女生说过的一句话：“老师，您讲的时候我都懂，自己一做就不知道从哪里开始。”

他把教案翻过来，在背面写了一行字：这节课，学生自己付了什么？这一章要讲的，就是方明远在那张纸背面开始写的东西。前面十七章一直在说，学习、记忆、学会是同一条纠缠走过的几段：先建立，再维持，再结成粒子，最后还要熔得开。这一章把这条账放进一节具体的课里，看它在四十分钟里怎样排。

◆ 一、一节课原来这样排

方明远那份教案的排法，不是他发明的，是一百多年的老传统。往上追，要追到十九世纪初的德国。赫尔巴特（Johann Friedrich Herbart）把教学分成几个“形式阶段”：明了、联想、系统、方法。先让学生把新东西看清楚，再和旧东西连起来，再归入一个体系，最后拿去用。他的后学齐勒尔（Tuiskon Ziller）、赖因（Wilhelm Rein）把它改成五段：预备、提示、联系、总括、应用。这套五段法在十九世纪末二十世纪初传遍欧美，也传到了日本和中国。

二十世纪中叶，另一条线进入中国课堂。苏联凯洛夫（Ivan Kairov）主编的《教育学》被译介进来。国内教育学界把书里讲的课的结构，概括成五个环节：组织教学、复习旧课（也有写作“检查复习”的）、讲授新课、巩固新课、布置作业〔待核：书中原表述与中译本年份〕。几代中国教师就是在这样的结构里学会上课的。今天许多学校的教案模板，骨架仍是这几步。

这套结构对在哪里，要先写足。第一，它讲得清楚。老师先把新内容摆出来，有次序，有板书，学生知道这节课学什么。第二，它能复制。一个新老师照着五个环节走，就能上出一节不出大错的课。在一个要培养几百万教师、教几亿学生的国家里，这一点分量极重。

第三，它管住了维持。“复习旧课”和“巩固新课”两步，实打实地在付维持的功。中国课堂素来讲“双基”、讲“讲练结合”，大量练习确实让公式和算法被维持住了。第 2 章说过，提取练习有实证收益，这一笔不能抹掉。第四，它适合大班。一个老师面对五十个学生，讲授是最省力的办法。方明远那份教案能拿好评，就是因为这四条它都做到了。

可是这套结构有一个默认的前提：讲在前面，学的人跟在后面。学生在“讲授新课”这一段里做的事，是听懂；“巩固”那一段做的事，是照着刚听懂的去做。从头到尾，学生没有被要求先撞一次墙。

用本书的五段账一对，问题就出来了。讲授造出的是“在场”：特征都摆在学生眼前，被老师的解答串着。练习做的是“维持”：把串好的东西多走几遍。中间缺了一段：建立。学生从来没有在自己已有的想法上被撞开过，所以没有东西被拆开、被重接。课上点头的那一刻，是看懂；两周后小测做不出来的那一刻，是看懂型假会露了底。这不是讲得不好。

讲得越好，越顺，越像一条铺平的路，学生越没有机会卡住。

◆ 二、有人把顺序倒了过来

二十世纪末，有一项研究让许多人第一次看清：同样是数学课，次序可以完全不同。1995 年第三次国际数学与科学研究（TIMSS）附带做了一个录像研究。研究者在德国、日本、美国随机抽取八年级数学课录下来，逐节编码。Stigler 与 Hiebert 据此写了《教学的差距》（The Teaching Gap，1999）。书里描绘了两种典型的课。

一种是美国课常见的样子：老师先复习，再示范怎样解一类题，然后学生照着练，最后对答案、布置作业。这和方明远的教案几乎一样。另一种是日本课常见的样子：老师先简短回顾，然后抛出一道当天的问题，学生自己或分小组去做，做的时候还没有人教过他们方法。接着全班把几种不同的解法摆上黑板，比较、讨论，老师最后才把要点收拢起来。两种课用的时间差不多，差的是次序。一种是“先讲，后做”；一种是“先做，后讲”。

书里的大意是：教学是一种文化活动。课的次序，是一个国家的教师们世代传下来的默会剧本〔转述大意，见 Stigler 与 Hiebert，1999〕。日本教师通过“授业研究”一节一节磨课，磨出了那个先抛问题的剧本。

授业研究的做法，大意是这样：几位老师一起选一个学生总学不好的内容，一起设计一节课。由其中一位去上，其余的人坐在教室里，不看老师，看学生。看学生在哪里卡住，卡住时说了什么，哪一种解法先冒出来。课后大家一起改，再找一个班上一次。

这里头有一个容易被忽略的细节：听课的人看的是学生的卡点。一节课好不好，不看老师讲得多漂亮，看学生在哪里撞了墙、怎样爬过去。这个视角，本章最后还会回来。

几乎同一时期，新加坡也在动课堂的次序。2004 年，新加坡总理李显龙在国庆群众大会演讲里提出“少教多学”（Teach Less, Learn More）。

2005 年 9 月，教育部长尚达曼在教育部年度工作计划研讨会上，把它落成了具体措施。小学和初中以内容为主的科目，课程内容削减百分之十到二十。腾出百分之十到二十的课时作为“白色空间”，由教师自行安排；删掉的部分不在小六会考和 O 水准考试里出现。官方的说法，是让教学去“触动学生的心、投入学生的脑”，为生活而学，不只为考试而学。

“少教多学”对在哪里，也要写足。它看准了一件事：内容塞得太满，课堂就只剩下讲。腾出白色空间，等于给“先做后讲”留出了时间。这一步，比任何口号都实在。它还明说删掉的内容不考，这是把评价也一起挪了，否则老师不敢真的少教。

日本的授业研究，新加坡的少教多学，都摸到了同一个方向：先让学的人卡住，再教。第 4 章写过的孔子“不愤不启”，第 6 章写过的 Kapur 先做不会的题再听讲，走的也是这个方向。

◆ 三、它们停在了哪里

方向对了，可是还缺一本账。先看“少教多学”。它做的是一道减法：少教一些内容，空出一些时间。可是空出来的时间里放什么，它没有给出一个分段的说法。白色空间可以拿来做项目，可以拿来讨论，也可以拿来多讲一遍、多练一轮。没有一张表，空地最容易被旧习惯占回去：老师最熟的事是讲，学生最熟的事是听，腾出来的十几分钟，顺手就被补讲和补练填上了。减法做完了，加法却没有一张表。

这不怪哪一位老师。一块空地上长什么，要看四周在往哪边拉。考试还在按原来的样子考，家长还在按原来的样子问“今天讲到哪里了”，老师手上的教案模板还是那几个环节。空地四周的这几股力，都在把它往旧的样子拉。

“多学”这两个字也太宽。学了什么？是多看懂了一些，多记住了一些，还是多结成了几个能带走的粒子？没有分段，就没法判断白色空间里到底发生了哪一段。

再看先做后讲的日本课。它把卡住放到了前面，可它本身没有回答三个问题。第一，卡多大才算刚好。题目太难，学生在那十分钟里只是一锅粥（混沌），什么也拆不开；题目太容易，学生一出手就对，根本没有卡。

第二，卡住之后，场什么时候算“托”，什么时候变成了“替”。老师走过去说一句“你试试画个图”，是托；老师走过去把图画了，就是替。界线在哪里，靠的是老教师的手感。

第三，课的末尾和下节课的开头该干什么。一节先做后讲的课，在全班讨论之后收束，很容易停在“老师总结得很清楚”上。那一刻，学生又回到了在场：看懂了老师的总结。建立也许发生了，维持还没开始。

所以前人停下的地方，不是方向，是分段。他们知道卡住要放在前面。可是没有人把一节课按“建立—维持—粒子化”的账排开，说清每一段要什么条件、付什么能量、缺了会怎样。本书要补的就是这张表。

◆ 四、一节课排成五拍

把五段账放进一节课，本书给出的新结构是五拍：卡、试、托、说、再。第一拍，卡：开头几分钟，放进一个对不上。可以是一个让学生先写下预测的问题，可以是一个反例，也可以是一个用上节课的办法答不上的问题。要紧的是“先写下”：学生在知道答案之前，把自己的想法落在纸上。这是事前独立指认对不上的办法。没有这张纸，事后谁都可以说“我本来就是这么想的”。

第二拍，试：学生拿着这个对不上，自己去碰。动手算，动手画，动手做个小实验。这几分钟是学的人在付动能：把自己原来的想法拆开，试着接上新的东西。老师在这一拍里少说话。

第三拍，托：学生卡在半路时，老师和同伴给场。小组互相看，几种做法摆上黑板，老师示范一个关键步骤，或者给一个脚手架。讲授仍然在，可它排在落差之后，接的是学生手上已经摸到的那条缝。

第四拍，说：课的末尾，每个学生自己重说一遍。不是老师总结、学生抄，是学生用自己的话写下或说出：我原来以为什么，卡在哪一步，现在怎样想。这是这条纠缠的第一次维持，也是第一次检查它是否成了一整件事。

第五拍，再：下一节课的开头，再用一次。换个样子，换个情境，不预告。这是间隔维持，也是粒子化的第一次试探：撤掉了上节课的场，换了一副面孔，它还在不在？

第 1 章写过一位数学老师陆晓岚的“回锅”：批完作业的第二天，挑一道题换个数字，请人上黑板做。那就是第五拍的一个朴素版本。本章要补的只是两

处：换的不只是数字，最好连情境一起换；上黑板之前，先让全班每个人在纸上自己写一遍。

五拍和五段账的关系，用一张表对齐。

拍	课上做什么	对应五段账的哪一段	主要付哪种能量	谁来做	缺了会怎样
卡（约 5 分钟）	写下预测；看一个反例；碰一个答不上的问题	建立的起点：放出对不上	先不付能量，只让落差出现	老师设计，学生写下	没有落差，后面全是在场
试（约 8—10 分钟）	自己算、画、做，带着预测去碰	建立：拆开、重接	动能（学生付）	学生	动能没付，纠缠建不起来
托（约 15 分钟）	小组对看、几种做法上黑板、老师接缝讲解	建立的场	势能（同伴、老师）	老师与同伴	卡住变放弃；或顺序一倒，场成替代品
说（约 5—8 分钟）	每人写三行：原来以为、卡在哪、现在怎样想	第一次维持；整体的初检	内能开始沉积	学生	停在看懂老师的总结

拍	课上做什么	对应五段账的哪一段	主要付哪种能量	谁来做	缺了会怎样
再（下节课开头约 5 分钟）	换情境再用一次，不预告	间隔维持；粒子化的试探	检索付功；跨情境迁移	学生，老师观察	纠缠在两天里松掉，没人知道
老师全程	守住落差，不提前填平	五段的条件	维持落差与场	老师	讲得越顺，越没有建立

时间是按一节四十分钟上下的课粗排的，不是死数。一个有经验的老师会按内容伸缩。可是次序不能乱：卡在试之前，试在托之前，托在说之前，再在下节课。

表里最后一行要单说。老师在这五拍里的角色，变了。在旧结构里，老师的职责是把理念符号传过去，讲得越清楚越好。在新结构里，老师的职责是维持落差与场：开头把缝打开，中间别急着把缝填上，同时让卡住的人不至于掉下去。讲授没有被废掉，它换了位置。

一个看得见的例子：学生问“老师，这题到底怎么做”，旧结构里的好老师会马上讲。新结构里的好老师先问一句“你卡在哪一步”，等他说出来，再决定给多少。这一句问话，就是把场留在托的位置，不让它滑到替的位置。

五拍里还藏着三界符号的一笔账，值得单独看一眼。旧结构里，一节数学课从头到尾几乎只有理念符号：定义、公式、例题、标准解法。学生手上没有做出

任何东西，心里也没有被问过“你原来怎么想”。这样的课，就算讲得再好，结出来的东西也只能落在理念一界。

五拍把另外两界请了进来。拿第七节方明远那节抽签课先看一眼。第一拍里那张写着预测的纸条，是学生的自我符号第一次被摆到桌面上：“我觉得先抽好。”这是他身上本来就有的东西，不是课本给的。第二拍里那一百八十轮抽签的数据，是现实符号：不是老师说的，是手抽出来、笔记下来的，换谁来数都是这些数。

理念符号要到第三拍才正式登场。它一登场，面对的就不是一张白纸，而是一个已经和现实撞过一次的自我。三界在一张课桌上对了一次账。第四拍那三行，又把这次对账写回到自我一端：“我原来以为……现在我这样想……”第五拍换一个情境，是看这个刚结出来的东西，能不能离开那一百八十轮纸条，在商场抽奖箱前面也立得住。

一节课当然完成不了粒子化。粒子化要跨界迁移，要时间，要很多次再用。可是一节课可以把这条路的头开对：让三界在课上都出一次场。学生手上做过、心里被撞过，理念才有地方落。这是书二第 13 章那个三角在教室里最小的一次演出。

◆ 五、卡多大才算刚好

第一拍最难。难在“刚好”。落差太小，没有功可做。老师问“两个骰子点数之和为七的概率是多少”，如果全班都在上节课做过同一道题，那就没有对不上，只是在复述。落差太大，是一锅粥。老师一上来抛出一道竞赛题，大部分学生连题目的意思都抓不住，那几分钟里没有任何东西被拆开，只是发呆。

刚好的落差，要落在学生已有的纠缠上。什么叫已有的纠缠？就是学生身上已经稳下来的一个想法、一个直觉、一个做惯了的办法。好的对不上，是让这个

已有的东西撞上一个它解释不了的结果。学生会愣一下，觉得“不对呀”，而且他知道是自己的哪一个想法不对了。

所以设计第一拍，先问自己一个问题：这个班的学生，在这件事上本来是怎么想的？一个办法是看收上来的预测。方明远后来用了一个粗糙却管用的判别：如果收上来的预测里，九成都对了，落差太小，换题。如果收上来的纸上，大半写不出任何预测，连错的猜想都没有，落差太大，或者题目离学生的日子太远，退一步。如果预测分成两三派，各有各的理由，而且多数派是错的，这就是好的落差。

这个判别不精确，可它有一个好处：对不上是在答案出来之前，从学生自己的纸上指认出来的，不是老师事后说的。第 10 章专门讲了对不上怎样设计，这里只记三种最常用的开头。

第一种，预测。先写下“我猜会怎样”，再去看真的怎样。第二种，反例。给一个学生自以为的规律管不住的例子。比如学生以为“乘法总让数变大”，就给一个乘以 0.5 的题。第三种，答不上的问题。用上节课的工具，刚好够不着这节课的问题。学生会发现，旧办法到这里断了。三种开头都有一个共同点：答案先不给。

还有一个现实问题：大班怎么卡。一个五十人的班，老师没法一个一个听预测。可是“写下来”这一步不怕人多。小纸条、举手卡、本子最上面一行，都行。方明远后来最常用的是举手：A 举左手，B 举右手，C 不举，五秒钟就能看出三派各有多少人。举手比纸条快，坏处是会互相看，有人跟着多数派举。所以要紧的题，他还是用纸条，先写后收，收了再分堆。

另一个现实问题是考试。高中老师最怕的一句话是“这样考试来不及”。这个担心是真的，不能装作看不见。第 20 章会专门谈评价怎样改；这里只说一

点：五拍不必每节课都用满。一个单元里，挑出两三个学生最容易看懂型假会的节点，用五拍去排；其余的课，照旧讲练，也无妨。先改一处，比一处都不改强，也比一夜之间全改了、改得走样强。

◆ 六、场是托，不是替

第三拍是最容易走样的一拍。学生卡住了，老师心疼，同伴着急，于是有人马上把答案说出来。这一说，落差被填平，场就从“托”滑成了“替”。

第 4 章写过孔子的“不愤不启，不悱不发”。愤，是心里想通，还没通；悱，是嘴上想说，说不出。孔子等到学生到了这一步才开口。用本书的话说，他等的是动能付到了头、落差还在的那一刻。这时给场，场接住的是一个正在拆开、正在重接的东西；早一步给，场接住的只是一个还没开始动的人。

托和替的分界，可以落成几句很具体的话。托的话：你卡在哪一步？你刚才那个想法，在哪个地方和结果对不上？旁边那组和你做法不一样，你去看一眼，再回来说说差别。这一步，你能先试一个最小的例子吗？替的话：这题应该这样做。你看，先设，再列，最后算。下次遇到这种题就套这个。

托的话把动能留在学生身上；替的话把动能拿走了。

场有几种来源。第 11 章专门讲了场，这里只按一节课的时间排一排。同伴是最近的场。两个人做法不同，摆在一起一对，对不上就从一个人身上扩到两个人之间，谁都得说出自己的理由。全班是公共的场。几种解法由各组写上黑板、并排摆开，学生看见的是“同一个问题可以有几条路”，而不是“老师的那一条”。

老师是最强的场。老师的一句示范，分量比同伴大得多。正因为分量大，老师出手要晚，要小，要接在学生摸到的那条缝上。脚手架是老师这一份托里可以撤掉的那部分。第 5 章写过 Wood、布鲁纳、Ross 的脚手架；它的要害在于撤得掉。老师递一张提示卡，第一次给全，第二次给一半，第三次不给。撤不掉的脚手架，就是替。

还要说一种情形：有的学生不是卡住，是根本没在场。他在第一拍没有写预测，第二拍没有动手，第三拍只是坐着。这不是落差的问题，可能是能量的问题。第 15 章讲过入口三：学不动了的人，先要被托住。对这样的学生，第一拍的落差再刚好也没有用，老师要先看见他。身体或心里的难处真的大了，请找医生或心理咨询师。

那么，讲授还留在哪里？公道地说，不是每一样东西都该先卡住再讲。有一类东西，学生身上本来没有任何想法可以和它对不上。数学里的记号就是这样：概率写作 P(A)，组合数写成那个样子，这是约定，不是发现。让学生去“猜”一个记号怎么写，猜不出任何落差，只会浪费时间。约定直接讲，讲清楚，就够了。

还有一类东西，卡住的代价太大。化学实验的安全规程，先讲，先演示，不留给学生去试错。第三类，是学生已经卡过、已经托过、只差最后一层窗户纸的时候。这时老师的一段完整讲解，接住的是一个正在合拢的东西，讲得越清楚越好。方明远在抽签课第三拍里那八分钟（见下一节），就是这种讲。

所以本书的说法，不是“不要讲”，是讲有它的位置：约定直接讲，危险先讲，学生摸到缝之后讲。最不该讲的时候，恰恰是旧结构里讲得最多的时候：学生还没有任何想法、还没碰到任何东西的那一刻。讲授本身没有错。错的只是把它放在了建立之前，让它去做它做不了的事。

◆ 七、方明远的那一节课

回到方明远。他把古典概型那一节重新排过，决定在这个班重上一遍。这一节在旧教案里，是先讲定义再做例题。新教案的第一页只有一个问题：

> 班上五个人抽签，决定周五谁第一个上台演讲。五张纸条里只有一张写着“1”。你是第一个抽，还是最后一个抽，更容易抽到“1”？还是一样？先写下你的答案和一句理由。

第一拍，卡。　周一第二节课，他把题写在黑板上，发下小纸条，给三分钟。纸条收上来，他当场在讲台上分了三堆。先抽更容易：二十六张。理由大多是“先抽的人选择多”“后面的人可能被别人抽走了”。后抽更容易：八张。理由是“前面的人没抽到，剩下的机会就变大了”。一样：十一张。有几张写着“感觉应该一样”，说不出理由。他没有说哪一堆对。他只是把三堆的张数写在黑板一角。

方明远心里有数：这是一个好的落差。多数派是错的，而且错得有理由；“一样”那一派大多也说不出为什么。这个对不上，落在学生每天都在用的直觉上：排队、抢座位、抽奖，“先下手为强”几乎是每个人身上已经稳下来的一个想法。

第二拍，试。　他把全班分成九个小组，每组五人，每组发五张纸条。规则很简单：五个人轮流抽，记下谁抽到了“1”，重来，做二十轮。教室里很吵。有一组的卢子骞一连三轮都是第一个抽到“1”，大喊“我就说先抽好”。另一组的杜若彤抽了十轮一次都没中，在本子上画了个哭脸。

十分钟后，九个组的数据收上来，一共一百八十轮。他把每个抽签位置抽中的次数写在黑板上。第一位、第二位、第三位、第四位、第五位，五个数挨在一起，彼此差得不多。卢子骞不说话了。

这就是对不上落了地：纸上写的是“先抽好”，黑板上的数却说“差不多”。这时候没有一个学生需要老师来告诉他“你错了”，他自己的预测和他自己组抽出来的数，已经对不上了。

第三拍，托。 现在才轮到讲。方明远没有直接写公式。他先问：“为什么会差不多？谁能说一个理由？”站起来的第一个学生说：“可能是次数还不够多。”这是一个好的怀疑，他把它记在黑板上，留着。

第二个学生是写“后抽好”的那一派，她说：“前面的人有可能抽中，有可能没抽中。没抽中的时候我机会大，抽中了我就没机会了。两种情况一抵，可能就平了。”方明远等的就是这句话。他请她到黑板上，把“第二个人抽中”这件事拆成两步写：第一个人没抽中，第二个人抽中。全班一起算出来：五分之四乘以四分之一，等于五分之一。

接着他问：“第三个人呢？谁来？”三四个组抢着上来写。算出来，还是五分之一。到这里，他才把古典概型的定义写上黑板。他还换了一个角度说：把五张纸条排成一排，五个位置，那张“1”落在每个位置上的机会是一样的。抽签的先后，只是把这一排揭开的次序，不改变那张纸条落在哪儿。

这段讲解大概八分钟。和旧教案里的讲授比，时间短了一半，可是每一句都接在学生手上已经摸到的那条缝上。那个“次数还不够多”的怀疑，他也没有放过。他说，一百八十轮里的小差别是正常的；如果有兴趣，回去可以多抽一些，看看差别是变大还是变小。这一句，把一个实验留给了课后。

第四拍，说。 离下课还有七分钟。他让每个人在作业本最上面写三行：

> 我原来以为：
>
> 我卡在：
>
> 现在我这样想：

杜若彤写的是：“我原来以为先抽好，因为东西会被别人拿走。我卡在第二个人那里，不知道前面的人抽没抽中要怎么算。现在我觉得，每个人抽到的机会都是五分之一，因为纸条本来就是平均放在五个位置上的。”卢子骞写的是：“我原来以为先抽好。我卡在我们组明明前三轮都是我中。现在我这样想：三轮太少了。”

两份三行，深浅不一样。杜若彤已经能把“为什么”说成一整件事；卢子骞抓住的是“次数少不能下结论”，离“每个位置都一样”还差一步。方明远在两本作业本上各画了一个记号，记下下节课要先看谁。

第五拍，再。 星期三的数学课，他一上来没有复习，直接在黑板上写：

> 商场抽奖箱里有十张券，其中两张有奖。你排在第四个。你中奖的概率，比第一个人高、低，还是一样？

两分钟，写在纸上，不许翻书。收上来，四十五张里三十八张写了“一样，五分之一”。方明远看到这里先停了一下，再看其余七张。有三张写“一样”，可是概率写成了十分之一；有两张还写“第一个人高”；有两张空着。

他没有急着讲。他从那三十八张里挑出几张，念了念上面的理由，然后在黑板上加了一个变化：

> 如果第一个人抽完以后当场开奖，大家都看见他中了。这时候你排第四，概率还是五分之一吗？

教室里安静了几秒。几个人开始交头接耳。这一问，是给上节课结出来的东西一个反例。“抽签和顺序无关”这颗刚有苗头的粒子，碰上“已经知道了前面的结果”，就不再原样成立。能松开它、重新想的学生，会说“不一样了，现在只剩九张，里面一张有奖”；松不开的学生，会坚持“顺序无关，所以还是五分

之一”。方明远没有在这节课把它讲完。他把这道题留成了作业的一部分，下一章会讲那份作业怎样留。

那七张没写对的纸条，他也一张一张看了。写“十分之一”的三个人，问题不在顺序上，在“两张有奖”这个条件上：他们只看到了“十张里抽一张”，把“两张”漏了。这是读题的问题，和上节课结出来的东西没关系。他在下课时单独提醒了一句。

写“第一个人高”的两个人，一个是卢子骞的组员，另一个是上节课请了半天假的学生。前一个说：“我知道上节课算出来是一样的，可我还是觉得先抽好。”这句话很诚实。它说明上节课的结论在他身上只是被听见了，旧的那个“先下手为强”没有被拆开。

方明远想了想，没有再给他讲一遍。他让这个学生回家用五张纸条和家里人抽二十轮，把结果拍照发给他。这是把现实符号再推到他面前一次：上一次是组里的数据，这一次是他自己家饭桌上的数据。

空着的那两张，他下课后找两个学生聊了几句。一个说没听懂题；另一个低着头不说话。后一个他记在了本子上，打算这周再多看几眼。

这一节课的代价，他心里也有数。旧教案一节课能讲完定义、两道例题、四道练习。新教案一节课只做了一件事：一个抽签的问题。剩下的练习，他挪进了作业，有一部分挪进了周三课上的那五分钟。

教研组有同事问他：“进度怎么办？”他的回答是：进度是讲到了哪里；可是两周后小测大半做不出，等于那一节课白讲了，还得回头再讲一遍。算总账，未必慢。这个说法对不对，他也不敢打包票。他打算在这个单元结束两周后，用同一道抽签题再测一次，和上周那次小测放在一起看。这才是一个老师能做的诚实的事：不说新办法一定好，先把账记下来。

学校这一头也有一笔账。许多学校的听课评课表，看的是老师：环节是否完整，讲解是否清楚，板书是否规范，时间分配是否合理。按这张表打分，方明远的新课会丢分：讲授时间太短，练习量不够，有十分钟“课堂秩序有些乱”。

如果评课表换几栏，看的就是学生：第一拍收上来的预测分成了几派？第二拍里有多少人动了手？第四拍的三行里，“卡在哪”写得出来的有几成？第五拍换了情境以后，还有多少人做得对？评课表看什么，听课评课的那一圈人就往哪里拉，老师就往哪里使劲。这是整个学校的场。

◆ 八、哪些地方容易走样

新结构写在纸上很顺，放进教室里会走样。几种常见的走样，都可以用五段账认出来。第一种，卡成了作秀。开头放了一个很热闹的问题，学生兴奋地猜了一轮，接着老师照旧讲。这时第一拍只是一个引子，落差没有被带进第二拍。分辨办法很简单：看第二拍里学生有没有拿着自己的预测去碰。

第二种，试成了等。第二拍给了十分钟，可大部分学生在等老师公布答案。动能没有付。原因多半是前面几次课里，等一等总会等到答案，学生学会了等。要扭转，老师得连着几节课守住不讲，让“等”不再有用。

第三种，托成了替。前面说过了。最常见的样子是老师走到一个卡住的学生身边，说“我给你提示一下”，然后把整个过程讲完。

第四种，说成了抄。第四拍让学生“用自己的话总结”，结果大家都抄了黑板上的定义。分辨办法是看三行里的第二行：卡在哪一步。抄来的总结写不出卡点；真走过一遍的人，卡点各不一样。

第五种，再成了复习。第五拍变成“我们先复习一下上节课讲的内容”，老师又讲了一遍。这样一来，间隔维持变成了又一次在场。第五拍要的是学生先动手，老师后看，不是老师先说。这五种走样的共同毛病，是落差被提前填平了。

五拍也不只属于数学课。换一门课，看它怎样排。同一所学校的地理老师，讲海陆风。第一拍，她问：“厦门的夏天，白天站在环岛路上，风多半从海上吹来还是从岛上吹出去？晚上呢？”先写下来。不少学生写的是“海边嘛，风总是从海上来”。

第二拍，她让学生拿两只杯子，一杯沙、一杯水，放在窗台上晒二十分钟，再各插一支温度计读数；回家后夜里再读一次。第三拍，全班把读数摆在一起，她才画出热力环流的示意图。第四拍，三行。第五拍，下一节课开头，她问：“山谷里，白天风往哪边吹？”

题目换了，五拍的骨头没变。先让学生身上本来的想法落在纸上，再让他手上做出一个现实，然后才给理念；最后让他自己说一遍，隔几天换个地方再用。

一节语文课、一节英语课，也可以这样排。第 10 章给了几个学科的课例，这里不重复。要记的只有一条：先找出这个班的学生在这件事上本来怎么想。找不到这个想法，就找不到落差；找不到落差，五拍就只剩一个形式。

走样	表面上看	实际停在哪一段	一个识别问题
卡成作秀	开头热闹，学生踊跃	在场	第二拍里，学生拿预测去碰了吗？
试成了等	安静地“思考”	在场，动能未付	十分钟后纸上有没有涂改的痕迹？
托成了替	老师耐心辅导	在场，场代替了动能	是学生先说卡点，还是老师先讲？
说成了抄	人人有总结	在场的复写	三行里“卡在哪”写得出来吗？
再成了复习	有复习环节	又一次在场	是学生先动手，还是老师先讲？

◆ 九、放回日子里

回到“少教多学”。本书对它的判断是：方向对，减法做得实在，缺的是一张分段的表。白色空间是一块空地，空地上长什么，要看有没有对不上、有没有

场、有没有学生自己付的动能。五拍是一种填法，不是唯一的填法。日本课堂、新加坡的白色空间、方明远的抽签课，它们的共同点不是形式，是次序。

好课堂的标志，不是老师讲清楚了，是学生带着一个没解决的问题离开，并且知道下一步找谁、怎么找。

方明远那节课下课时，黑板一角还写着“次数还不够多”。卢子骞走之前问他：“老师，我回家抽一千次，会不会就一样了？”方明远说：“你抽完告诉我。”这个问题没有在课上解决。它跟着卢子骞回了家。

如果你是老师，下一节课可以先只改一处：开头别讲，先让学生写下一个预测。收上来，分成几堆，看看落差在哪里。如果你是家长，孩子回家说“今天老师什么都没讲，就让我们抽纸条”，先别急着觉得这节课浪费了。问他一句：“你一开始猜的是什么？后来变了吗？”如果你在自学一样新东西，也可以给自己排五拍。先猜，再试，卡住了去找人或找书；学完用自己的话写三行，过两天换个样子再用一次。

还要替学生说一句。先卡住的课，对学生来说并不舒服。习惯了听讲的学生，第一次被要求先写预测，会紧张：写错了怎么办，会不会被笑。第二拍的十分钟里，有人会觉得“老师在偷懒”。这种不舒服是真的。

不舒服本身不坏，它是动能在付的感觉。可是不舒服要有场托着，否则就成了害怕。方明远在第一节新课上说的第一句话是：“这张纸条不记名，写错不扣分，我只想知道大家本来是怎么想的。”这一句话，是在给卡住先搭一个托底的网。

有的学生更喜欢清清楚楚的讲授，这也正常。讲授给人安全感：知道这节课学什么，知道标准答案在哪里。五拍不是要拿走这份安全感，是要把它挪到卡住之后再给。这五拍里，没有一拍是新发明。新的只是把它们排在同一张账上，看清每一拍在付什么能量、在走哪一段。

带走的话

一节课先放进对不上，让学生自己付动能，再给场；末尾自己重说，下节课换样再用。

小　账

赫尔巴特一系的五段法与凯洛夫的五环节，把“讲”排在学生动手之前，关上了建立这扇门。日本课堂与“少教多学”推开了门缝，本书把一节课按建立、维持、粒子化排成五拍，把门打开。

老师在学生卡住的那一刻走过去讲完了全过程：落差被填平，一次本该发生在学生身上的建立，被收回成了一次看懂老师的发现。

想一想

1. 你记得最清楚的一节课，开头发生了什么？那一节课里，你自己卡住过吗？
2. 你辅导别人（孩子、同事、新人）时，说得最多的是“你卡在哪一步”，还是“这个应该这样做”？
3. 如果把你明天要上的课、要开的会、要教的事，按“卡、试、托、说、再”排一遍，哪一拍最难排进去？为什么？

◆

19

第 19 章

作业与 AI：留什么给学生付动能

这一章的问题

孩子的作业拍一下题就有步骤，交上去全对，第二天自己却写不出来——作业里到底该留哪一步给他自己做？

星期四晚上十点，蔡文琳批到第二十一份作文的时候，停下了笔。她三十三岁，在新加坡一所中学教英文，带两个中三班。这周的作业是一篇议论文，题目是：小贩中心应不应该禁止一次性塑料餐盒？

前二十份里，有十几份读起来很像。开头都是一句“在当今快节奏的世界里”，中间三段各有一个主题句，每段末尾都有一句收束，结尾都以“总之，显而易见……”开场。语法几乎挑不出错，用词比这些学生平时的水平高出一截。

第二十一份是哈菲兹（Hafiz）的。语法错了七八处，时态前后不一。可是第二段写了他舅舅在宏茂桥一个小贩中心卖椰浆饭，每天中午要用掉两百多个打包盒；有一回换成纸盒，汤汁渗出来，顾客当场退了两份。他写：“我舅舅不是不想环保，是纸盒装不住咖喱。”蔡文琳把这一份放在一边，又把前面那十几份翻了一遍。

按评分标准，那十几份会拿高分：结构清楚，论点完整，语言准确。哈菲兹这份，语言一项要扣不少。她心里很清楚，那十几份里，有不少是 AI 写的，或者是 AI 改过的。可是她更在意的是另一件事：就算那十几份全是学生亲手写的，这份作业，又留下了什么？

她在备课本上写了一行字：这份作业里，哪一步是学生自己付的？上一章，方明远在教案背面写了几乎同样的一句话。那一章讲的是课堂里的四十分钟。这

一章讲的是课堂外的那几个小时：作业。AI 进门以后，作业是最先被改变的地方。

◆ 一、作业本来是干什么的

作业这件事，先要说它对在哪里。教育研究里，作业和成绩的关系被研究了几十年。Cooper 与同事在 2006 年发表过一份综合评述，汇总了 1987 年到 2003 年的研究。大意是：作业和学业成绩之间有正的关联。可是关联的强弱和年级有关，初中和高中明显强于小学〔Cooper、Robinson 与 Patall，2006，《教育研究评论》〕。

这个结果很朴素，也很要紧。它说明作业不是一件“多多益善”的事，也不是一件“可有可无”的事。它在某些年龄、某些用法上确实有用。

传统上，作业有三种用处。第一种是练习巩固。课上讲过的东西，回家再做几遍。这一种最常见，它付的是维持的功。第 2 章说过，提取练习有实证收益；第 8 章说过，间隔与检索都在帮纠缠不散。一本练习册，如果题目隔几天回头出现一次，它就在替学生排间隔。

第二种是预习。课前先读一读，先试一试。这一种用得好，是建立的前奏：学生带着一个问题进课堂。用得不好，就是提前看一遍答案，进了课堂反而没有对不上了。

第三种是延伸。把课上的东西拿到课外去用：做一个小调查，写一篇观察日记，在家里做一个小实验。这一种走的是迁移的路，是往粒子化那边去的。三种用处，在本书的五段账上各有位置。好的作业单，往往三种都有一点。

各国对作业的量也一直在调整。中国 2021 年“双减”意见对各学段书面作业的总量作了规定，第 2 章已经讲过来龙去脉。新加坡的学校也常有关于作业量的讨论。这些调整管的是“多少”，多半没有管“落在哪一段”。

可是在 AI 出现之前，“多少”已经够用了。因为作业不管落在哪一段，学生都得自己做。哪怕只是照着例题抄一遍，手也动了一遍。AI 改变的，正是这一条。

◆ 二、AI 进门以后，变了什么

AI 进门以后，作业最大的变化是：答案不要钱了。一道数学题，拍照就有步骤；一篇议论文，输入题目就有全文；一段英文阅读，贴进去就有翻译和要点。第 1 章讲过那项高中数学对照研究（Bastani 等）。它给出的线索是：有答案辅助时练习成绩明显上涨，撤掉辅助之后，反而不如从没用过的那一组〔见第 1 章〕。

面对这个变化，学校和社会大体分成了两种反应。一种是防。禁止在作业里用 AI，用检测工具查，查出来扣分。这一种反应的初衷是保护：保护学生自己付的那份努力，保护评分的公平。

可是防守的工具并不可靠。2023 年，斯坦福大学的 Weixin Liang、James Zou 等人做过一项研究。他们把非英语母语学生写的托福作文，拿给几种常见的 AI 文字检测器去测。这些作文被误判为 AI 所写的比例很高，母语学生的作文却很少被误判〔Liang 等，2023，《模式》（Patterns）〕。

原因之一是，非母语写作者用词比较简单、句式比较规整，这恰好像机器的文字。这一条，对新加坡的英文课尤其扎眼。一个班里，家里讲华语、马来语、泰米尔语的学生都有。用检测器去查，最容易被冤枉的，恰恰是语言还在成形中的那一批。

另一种反应是放。既然挡不住，就教学生用。让学生学会写提示词，学会让 AI 改作文、出题、讲解。这一种反应的初衷也是好的：AI 会是学生一辈子的工具，早学比晚学好。

两种反应之外，还有一些更稳的声音。联合国教科文组织 2023 年 9 月发布《教育与研究中的生成式人工智能指南》，提了几条：各国要尽快为教育中的 AI 立规。在课堂上独立使用 AI 工具，建议设一个最低年龄，大意是十三岁；要保护数据与隐私；要守住人的能动性，不要让工具替人做判断。这些建议是在给整个系统划底线。

防、放、划底线，三条路各有对的地方。防的人看到了“不付动能就学不会”；放的人看到了“AI 是绕不开的场”；划底线的人看到了“年龄和能力不同，用法也该不同”。

◆ 三、争论停在“用不用”

三条路停在同一个地方：它们问的都是“能不能用 AI”。这是一个工具问题。工具问题的回答，只能是“能”或“不能”，“多用”或“少用”。可是同一个 AI，用在作业的不同地方，结果完全不同。

一个学生第二天要考单词，晚上让 AI 按他前几天错过的词，每隔一段时间出一轮小测。这是在帮他维持：检索在付功，间隔被排好了。AI 在这里是一个好帮手。

另一个学生刚学了议论文结构，老师让他回家写一篇。他把题目丢给 AI，拿到全文，改几个词，交上去。这一回，作业本该落在建立这一段：他要自己把论点和论据接起来，自己卡住，自己找出路。AI 把这一段整个替他走完了。落差还没形成，就被填平了。同一个 AI，前一回在维持段，是帮手；后一回在建立段，是填平机。

所以“用不用”这个问题问不出答案。要问的是：这份作业落在五段账的哪一段？在这一段上，AI 站在哪里？

作业里的 AI，站在维持段是帮手，站在建立段是替身。

◆ 四、AI 能答的作业少留

从这个判断推下去，本书对作业的第一条建议很直白：AI 能答的作业，少留。这句话要说清楚，否则会被听成“不留作业”或者“禁止 AI”。

什么是“AI 能答的作业”？就是题目在理念界里问、答案也在理念界里给的作业。解一道和例题同类的方程，写一篇不需要任何个人材料的议论文，翻译

一段课文，回答一组“根据课文内容”的问题。这类作业，答案在 AI 那里早就有了，可以原样转手。

“少留”不是不留。练习巩固类的作业，仍然有它的位置：它付的是维持的功。可是如果整份作业都是这一类，AI 一来，学生就可以把维持的功也一并转手出去。

那么空出来的位置，留什么？留 AI 答不了的那一部分。大致有三样。第一样，学生自己身上的想法。他在学之前本来是怎么想的，他猜结果会怎样，他觉得哪个论点最站得住。这些是他的自我符号，AI 不知道，也替他写不出来。写出来了，也是 AI 的想法，不是他的。

第二样，学生手上的现实。他去量了什么，问了谁，做出了什么，失败在哪里。哈菲兹舅舅的两百多个打包盒、那两份渗了汤的纸盒，是现实符号。AI 可以编一个类似的故事，可是编不出他舅舅那一天。

第三样，学生自己的卡点。他在哪一步卡住了，他是怎么接上的。这是建立这一段留下的痕迹，只有走过的人才有。这三样有一个共同点：它们都要学生自己付动能。

换几门课看看，这三样分别长什么样。数学课：AI 能答“求这个函数的最大值”；答不了的是“你先估一个大概的数，再算，看看差多少”，以及“你家这个月的电费单上，哪一项和今天学的函数有关”。前一个是学生的预测，后一个是学生手上的现实。

科学课：AI 能答“为什么冰会浮在水面上”；答不了的是“把一杯水放进冰箱冷冻格，猜猜结冰后水面会比原来高还是低，先画在纸上，明早拿出来看”。历史课：AI 能答“这场改革的三点意义是什么”；答不了的是“问一问家里年纪最大的人，他记得的那个年代，和课本上写的哪一处对不上”。每一个“答不了的”，都带着一个只有这个学生才拿得到的东西：他的猜测，他的冰箱，他的长辈。

认知科学里有两条老证据，可以在这里作旁证。一条是“生成效应”（Slamecka 与 Graf，1978），第 12 章讲过：同样的内容，自己补出来的那一份，比直接读到的留得更久。

另一条是“预测试效应”。Richland、Kornell 与 Kao 在 2009 年的研究里，让一部分学生在读材料之前先回答相关问题，这些问题他们多半答不对。结果，先试答过的人，后来对材料的掌握比只读不试的人更好〔Richland、Kornell 与 Kao，2009〕。先错一次，不是白错。

这两条证据，都指向同一个方向：在拿到答案之前，学生自己先付一次动能，哪怕付错了，这份动能也不会白付。本书的说法是：它把对不上在学生身上先打开了，后面的答案才有地方落。第 6 章讲过 Bjork 的“合意困难”和 Kapur 的“创造性失败”，说的是同一件事的不同侧面。这里不重复。

◆ 五、三档用法

“AI 能答的作业少留”是减法。加法是：AI 可以用，按三档用。

第一档：先写预测，再问。 学生在问 AI 之前，先把自己的答案、猜测或立场写下来，手写或打字都行，交作业时一起交。然后再去问 AI，再把两边对一对：哪里一样，哪里不一样，不一样的地方你信谁，为什么。这一档守住的是建立的起点：对不上必须在答案出来之前，由学生自己指认出来。第 18 章课堂上的第一拍“卡”，在作业里就是这一档。

第二档：先做，再对答案。 学生先独立把作业做完，然后才让 AI 来检查、点评或者给参考答案。关键是次序和证据：做完的那一版先交，或者先拍照存档；AI 的点评另交；最后一版写明改了哪里、为什么改。这一档守住的是动能：做的那一步必须是学生自己的。AI 在这里像一个随叫随到的对账员。

第 1 章里那位同学姚可欣的用法，就在第二档和第三档之间：先自己代几个数，看看函数长什么样，再动笔证。实在卡住了，再去问 AI，问的也不是“这题怎么做”，而是“这是为什么”。没人教过她三档，是那一晚的四十分钟在她身上留下了这个次序：先付动能，再要场。

第三档：AI 当场，不当答案。 学生让 AI 扮演一个提问的人、一个反方、一个只说“你卡在哪一步”的陪练，而不是一个给答案的人。比如：让 AI 只提问题不给结论；让 AI 找出你论证里最弱的一句，不准它改写；让 AI 扮演你采访对象可能会说的话，帮你准备一场真实的采访。

这一档守住的是场与动能的分工：AI 提供势能之网，把落差托住；拆开、重接的活，仍然是学生自己干。书四第 11、12 章把这个分工讲得更细：AI 是迄今最大的势能之网，场能托住结晶，不能代替结晶。

三档的次序是从严到宽：第一档对 AI 限得最多，第三档给 AI 的空间最大。严宽看的是 AI 在作业里掺进来多少：第一档，它只在学生写完预测之后出来，给一个对照。第二档，它对整份做完的作业点评。第三档，它从头到尾陪在旁边。陪得越久，越容易从“托”滑成“替”（下一节细说）。所以三档和年龄只有一条规则：年纪越小、对一样东西越生，放得越窄，越该从第一档开始。

档	学生先做什么	AI 做什么	主要落在五段的哪一段	交上来的证据	最常见的走样
一：先写预测再问	写下自己的猜测、立场或答案	给出它的回答，供对照	建立的起点：放出对不上	预测原稿＋对照记录＋“我信谁、为什么”	预测是看过 AI 之后补写的
二：先做再对答案	独立完成全部作业	检查、点评、给参考	建立中的动能；维持	初稿（先存档）＋AI 点评＋修改说明	初稿本身就是 AI 写的
三：AI 当场不当答案	带着问题去和 AI 对话	只提问、扮反方、找弱处，不改写	建立的场；维持中的检索	对话记录＋学生自己写的最终版	AI 被问着问着就把答案给了
不建议：直接要答案	无	生成全部内容	在场	一份全对的作业	看懂型假会

档	学生先做什么	AI 做什么	主要落在五段的哪一段	交上来的证据	最常见的走样
维持专用：AI 出检索题	先学过、先做过	按错题排间隔、换问法出题	维持	每轮小测的对错记录	只练原题，不换问法

表里的最后一行，是 AI 最能帮忙的地方，下一节单说。三档用法还可以和三种假会对着看。前面几章说过，三种假会各停在不同的一段，所以药也不同。放到作业上，药也不同。

看懂型假会，停在在场。它最典型的来路，就是作业里一键拿答案。对它的药，是第一档：先写预测，再问。只要那张预测纸条在答案之前写下来，学生就至少有一次机会发现自己原来的想法和答案不一样。

背住型假会，停在维持，建得窄，靠外力撑着。它的来路是只练原题、考前突击。对它的药，是下一节作业设计单上的第 11 栏：两周后换一个样子再用。AI 在这里帮得上大忙：同一个知识点，让它换五种问法去出。只会原题的学生，第三种问法就会露出来。

刷熟型假会，结成了粒子，可是只结在理念一界，熔不开。它的来路是同类题做得太多。对它的药，是第 7 栏和第 12 栏：要学生手上的现实，要反例和换条件。AI 很会出同类题，这恰恰是刷熟型假会的温床；让它出反例、出“这个办法在哪里不灵”的题，才是用对了它。

假会	停在哪一段	在作业里的典型样子	作业设计的药	AI 该站在哪里
看懂型	在场	拍题拿步骤，抄一遍，全对	第一档：先写预测再问	预测之后才出场，当对照
背住型	维持，靠外力	只练原题，考前一晚背	两周后换问法再用	排间隔、换问法出检索题
刷熟型	粒子只在理念界	同类题刷到闭眼会	要手上的现实，给反例	出反例与换条件题，不出同类题

◆ 六、能帮维持，替不了建立

AI 能做的事里，有一大块是帮维持。维持靠三样：连接度、再用、场。后两样，AI 都帮得上。再用这一样，AI 很在行。它可以按一个学生前几天错过的题，隔一天、隔三天、隔一周各出一轮；它可以把同一个知识点换五种问法。它可以在学生答完以后，马上追问一句“为什么”，逼他再走一遍那条路。

第 8 章讲过，间隔与检索每一次都在付维持的功。过去，排间隔、换问法，要靠老师一份一份地出卷子；现在，这件事可以交给 AI 去排。

蔡文琳在另一份作业里就是这样用的。中三的学生每周要积累一批议论文里常用的连接词和句式。过去她每周印一张填空单，学生做一遍就收起来，下周换新的，旧的再也不见。后来她让学生把每周做错的那几个，交给 AI 去排：三天后出一轮，一周后换个句子再出一轮，两周后混进新的一批里再出一轮。每一轮只有五道题，五分钟做完，记下对错。

这里 AI 做的事，是维持段里最费人工的那一部分：记住谁错了什么，什么时候该再出现，换什么样子出现。学生付的，是每一轮那五分钟的检索。动能仍在学生身上，只是排程交给了机器。这一份作业，她没有填第 7 栏，也没有用采访。它本来就落在维持段，不需要假装成建立。

场这一样，AI 也能补上一部分。一个学生深夜一个人做作业，身边没有同学，也没有老师。AI 至少可以陪他说话，问他“你卡在哪”，让他不至于一个人卡死在那里。

可是有两件事，AI 替不了。第一件，它替不了建立。建立要学生自己付动能：把原来的想法拆开，试着接上新的东西。这一步，AI 说得再好，也是 AI 在拆、AI 在接。学生看着它拆、看着它接，得到的是看懂。看懂是在场，不是建立。

第二件，它替不了粒子化。粒子化有三条判据：稳定、整体、独立。其中“独立”最直接：离开书、离开老师，它还立得住吗？放在今天，还要加一

句：离开 AI，它还立得住吗？一个学生如果每次都要 AI 在旁边才能写出一段论证，那么这段论证在他身上就没有独立。它只是借来的。

还有一层：粒子化要跨界迁移。从课本上的理念，走到手上做出来的现实，再沉到“我会这样想事情”的自我。AI 只住在理念一界，书四讲的就是这件事。它可以把理念符号摊开给你，可以陪你练。可是它没法替你去舅舅的摊位上看那两份渗了汤的纸盒，也没法替你在心里长出“我是一个会找证据的人”。

AI 可以帮学生把已经建起来的纠缠维持住，却没法替学生把纠缠建起来，也没法替他把它结成粒子。

所以作业设计的问题，可以落成一句话：这份作业里，哪一步必须由学生自己付动能？这一步，AI 一碰就失效。其余的步骤，AI 可以帮忙。

第三档还有一个风险，要单独说：场太好，也会出事。一个好的陪练，会在你卡住时问你问题；一个太好的陪练，会在你卡住三秒钟之后就把下一步说出来。AI 的耐心是无限的，反应是即时的，这让它很容易从“托”滑到“替”。学生问一句“能不能给我一点提示”，它给一点；再问一句“再多一点”，它再给一点；问到第四句，提示已经是答案了。

人和人之间，场有一个天然的刹车：老师会累，同学会走，家长要做饭。AI 没有这个刹车。所以用第三档时，要给它加一个人为的刹车。蔡文琳的办法是在作业单上写明：一次对话里，最多要三次提示；第三次提示之后，必须先自己写一段，再继续问。这条规矩看着笨，它守的是第 18 章说过的那条线：场要接在学生摸到的缝上，不能抢在前面。

◆ 七、一份作业设计单

把上面这些收拢，可以做成一张作业设计单。它是给老师用的，也可以给家长和自学的人用。设计单的每一栏，都在逼设计者回答一个问题。

栏目	要回答的问题	填写提示
1. 作业名称与时长	这份作业叫什么？学生大约要花多久？	时长写实，不写理想值
2. 落在五段的哪一段	主要是建立、维持、粒子化，还是熔开？	只能选一个主段，可另注一个副段
3. 学生本来怎么想	在这件事上，这个班的学生已有的想法、直觉、做法是什么？	写不出来，说明还不了解学生，先去问
4. 对不上	学生在拿到答案之前，要先写下什么？	预测、立场、初稿、一个答不上的问题；必须在答案之前留下证据
5. 场	卡住时，谁来托？同伴、家人、老师、AI，各自做什么？	写清楚 AI 当什么角色，不当什么角色
6. 动能	哪一步必须由学生亲手做？AI 一碰就失效的是哪一步？	这一步是整份作业的核，没有它就不留这份作业
7. 现实符号	学生手上要做出、量出、问出、拿出什么？	采访、测量、实物、照片、录音；AI 编不出的那一份
8. AI 用法档位	第一档、第二档、第三档，还是不用？	按年龄与熟悉程度从严到宽
9. 交什么	要交哪些证据，才能看见建立真的发生了？	预测原稿、初稿、对话记录、修改说明、三行反思
10. 卡点记录	学生写下：我原来以为……我卡在……现在我这样想……	写不出“卡在哪”的，多半没走过
11. 两周后怎样再用	这份作业的内容，两周后在哪里、换什么样子再出现一次？	写清日期与形式；没有这一栏，维持就交给了运气
12. 熔开的试探	有没有一个反例或换条件的追问，留给下一次？	可选；粒子已有苗头时再加
13. 自查	如果学生把题目整个丢给 AI，这份作业还剩什么？	剩下的部分，就是这份作业真正的价值

最后一栏是整张单子的试金石。一份作业，如果整个丢给 AI 以后什么都不剩，它就是“AI 能答的作业”。这样的作业可以留，可是要知道它最多落在维持段，而且只在学生真的自己做时才算数。

一份作业，如果丢给 AI 以后，还剩下学生的预测、学生手上的现实、学生自己的卡点，那就不一样了。不管学生用不用 AI，这一部分都只能由他自己付。

第 13 章拉奥老师留给子涵的“两栏作业”，放进这张单子也填得上。第 2 栏，主段是熔开再结晶，副段是维持：左边一栏照南京的办法写，让旧的那颗粒子照旧被用，是维持。右边一栏把力气改往“说清楚”那边使，是第 6 栏的动能，换了方向。

右边写不出理由的那几步，就是第 4 栏的对不上。那个“没上过课的同学”只是想象出来的读者，给右栏定了方向，还不算场；后来同组、真会说“我看不懂”的伊森，才是第 5 栏的场。两份东西说的是同一本账，一份从能量记，一份按栏目记。

设计单不只适合作文。上一章方明远那节抽签课，最后留下了一道没讲完的题。题目是：如果第一个人抽完当场开奖，大家都看见他中了，你排第四，概率还是五分之一吗？他用这张单子，把这道题做成了那一节课的作业。只填关键几栏，是这样的：

第 2 栏，落在哪一段：主段是熔开，副段是维持。课上刚结出来的“抽签与顺序无关”，要在一个反例前面试一试松不松得开。第 3 栏，学生本来怎么想：经过上节课，大多数人现在相信“顺序无关”。这一回，旧的那个“先下手为强”已经被拆过一次，新的这个正是要被撞的东西。

第 4 栏，对不上：先写下“还是五分之一”或“变了”，写一句理由，再动手算。第 6 栏，动能：自己用纸条模拟一次“第一个人中了”之后的情形，抽二十轮，记下第四个人中的次数；再自己写出算式。第 7 栏，现实符号：那二十轮的记录。

第 8 栏，AI 档位：第二档。做完以后可以让 AI 检查算式，可是必须先拍照存下自己的那一版。第 11 栏，两周后：单元小测里放一道“已知前面有人中奖”的变形题，不预告。

第 13 栏，自查：把题目丢给 AI，它会给出正确答案“九分之一”，还会给出一段很漂亮的条件概率解释。剩下的，是学生那张写着“还是五分之一”的预测纸条，和那二十轮的记录。这两样，AI 拿不出。

方明远收上来的作业里，有十几张预测纸条写的是“还是五分之一，因为顺序无关”。可是后面的模拟记录写着“第四个人二十轮中了两次”。好几个学生在算式下面自己补了一句：“原来顺序无关是在不知道前面结果的时候才对。”这一句，就是一颗刚有苗头的粒子在反例面前熔开、又重新长出来的样子。它不是老师讲出来的，是学生自己在纸条和算式之间撞出来的。

◆ 八、蔡文琳的那一周

回到蔡文琳。她用这张单子，把那篇议论文作业重新设计了一遍。她先填了第 3 栏：学生本来怎么想？她发现自己答不上来。她不知道这个班的学生，对“小贩中心禁用一次性餐盒”本来是什么态度。那十几份很像的作文，看不出任何一个学生本来的想法。

于是周五的英文课，她用了五分钟。每人一张纸，手写两行：你赞成还是反对？给一个理由，必须是你自己见过的事。收上来，赞成的二十二个，反对的九个，说不清的七个。理由里，有十几个写的是“保护环境”，没有任何自己见过的事。有一个女生写的是她家楼下的咖啡店改用可降解杯子以后，咖啡涨了二十分；哈菲兹写的还是舅舅的打包盒。

第 3 栏有了。第 4 栏也有了：这两行手写的立场，就是学生在拿到任何答案之前留下的预测。接着她填第 6 栏：哪一步 AI 一碰就失效？她想到的是：一个只有你能拿到的证据。于是第 7 栏写的是：采访一个真正卖食物的人，或者一个每天在小贩中心吃饭的人，问三个问题，记下对方的原话。家里人也行，邻居也行，常去的那家摊位的阿姨也行。

第 5 栏和第 8 栏，她这样写：AI 用第三档。可以让 AI 扮演你的采访对象，帮你预演采访；可以让 AI 扮演反方，找出你立场里最弱的一点。不准让 AI 写任何一段正文。

第 9 栏，要交的东西有四样：周五那张手写的立场；采访记录；和 AI 的对话记录；最后一篇作文，篇幅比原来短，只要三段。第 10 栏，作文最后附三行：“我原来以为……我卡在……现在我这样想……”

第 11 栏，她写了一个日期：两周后的周一，课上十分钟。换一个题目——“学校食堂该不该取消塑料吸管”——手写一个主题段，不许用任何设备。第 12 栏，她留了一个问题。她打算在作文发回去时，把它写在每个人的作业纸上：“如果你采访的那个人，说的和你的立场正好相反，你会怎么改你的文章？”

第 13 栏，她自查了一遍：如果学生把题目整个丢给 AI，这份作业还剩什么？剩下的是采访，是那两行立场，是卡点。AI 可以帮学生预演采访，却不能替他去问；AI 可以写出一篇好看的作文，可是那篇作文里不会有任何一个真名真姓的摊主说过的话。

一周后作业收上来。作文的语言，整体比上一回粗糙了。一些学生的句子回到了他们平时的水平，有错，有生硬的地方。可是内容变了。

那个写“保护环境”的男生，采访了他奶奶。奶奶说，她年轻时在小贩中心吃饭，都是自己带饭盒和搪瓷杯去。他在三行里写：“我原来以为禁塑料是一件新事情。我卡在奶奶说的话上，她说以前大家本来就不用。现在我觉得，这件事不是要发明什么，是要回到一个旧习惯，可是现在的人上班太赶了。”

那个写咖啡涨价的女生，采访了咖啡店的老板，老板说可降解杯子一箱的进价是塑料杯的两倍多。她在文章里把原来“赞成”的立场改成了“有条件地赞成”，并且提了一个补贴的办法。

哈菲兹的作文，语法还是错了不少。可是他和 AI 的对话记录里有一段很有意思。他让 AI 扮演反方，AI 说：“纸盒装不住咖喱，那就换更好的盒子，这是

技术问题，不是禁不禁的问题。”哈菲兹回了一句：“你说得容易，更好的盒子谁出钱？”然后他回去又问了一次舅舅，舅舅说一个好点的盒子要贵一倍。他把这句话写进了第三段。蔡文琳在这一段旁边写了一句批语：这一段是你自己的。

当然，也有学生把作业做走样了。有两个学生交来的采访记录，一看就是编的：受访人说的话太整齐，和 AI 的语气一模一样。蔡文琳没有当场揭穿，她在第 12 栏那个问题下面多写了一句：“下周课上，请你把采访对象说的原话，当面再讲给我听。”

还有一个学生，三行反思写的是：“我原来以为要写作文。我卡在要去采访。现在我这样想：采访很麻烦。”这一份，蔡文琳看了很久。它很诚实。它说明这个学生在这份作业里付的动能，大半花在了“开口问一个陌生人”上，而不在论证上。对一个十五岁的孩子来说，开口去问，本身也许就是这一周里最大的一次建立。

这份作业也引来了一些不同的声音。同一个英文科组里，一位资深同事看了她的设计单，说了一句很实在的话：“O 水准英文的作文是在考场里限时写的，不会让你去采访。你这么练，考试的时候学生拿什么写？”

这个质疑是对的，蔡文琳没有回避。她的回答是：考场上要的，是学生能在没有任何帮手的情况下，把一个立场和几条证据接成一篇文章。采访是为了让“找证据、接证据”这件事先在他身上建起来一次。两周后那十分钟的手写，就是在考场的样子里检查它还在不在。如果那时候写不出来，说明这次没建成，她会改。

还有一位家长发来邮件，说孩子为了采访，周末在小贩中心转了一个小时，不好意思开口，回家哭了。蔡文琳回信，说采访对象可以换成家里人，也可以换成通过电话问一个亲戚；如果实在开不了口，可以写一段“我为什么开不了口”，这也算。她没有把这当成多余的麻烦。对这个孩子来说，“开不了口”就是这份作业里真正的对不上。场要先托住他，而不是逼他。

两周后的周一，课上十分钟，手写，题目是食堂的塑料吸管。蔡文琳没有拿这次的结果去和别的班比，也没有当成实验数据。她只是看：有多少人在没有任

何设备的情况下，写得出一个有自己证据的主题段。她把这个数，记在了自己的本子上。

◆ 九、哪些地方要小心

这套作业设计，有几个地方要说在前面。第一，作业变“重”了。采访、预测、反思、对话记录，样样都要时间。如果不减掉别的作业，学生的总负担会上去。所以这张设计单要和“少留”一起用：多一份要付动能的作业，就少几份 AI 能答的作业。

第二，家庭条件不一样。有的学生家里有人可以采访，有的学生回家没人说话；有的学生有自己的电脑，有的学生和兄弟姐妹共用一部手机。设计“现实符号”那一栏时，要给出几种选择，让每个学生都够得着。

第三，年龄不一样。联合国教科文组织建议的那个十三岁，是一条底线。底线之上，还是第五节那一条规则：年纪越小，放得越窄。小学生的作业里，AI 最好不进门；要用，也只在家长陪同下用第一档。中学生从第一档开始，熟了再往第二档走；高中以上，可以更多地用第二档和第三档。蔡文琳让中三学生用第三档，是给它加了刹车的：一次对话最多三次提示。

第四，评分要跟着改。如果作文仍然按“语言准确、结构清楚”打分，学生很快就会发现，让 AI 写比自己写分高。蔡文琳那一回给哈菲兹的分，比上一回高了：她在评分里给“自己的证据”和“卡点记录”各留了一档。评分怎么改，是下一章的事。

第五，检测不是设计。查出谁用了 AI，最多是防住了一次；把作业设计成 AI 一碰就失效，才是从根上让动能回到学生身上。何况检测器本身会误判，最容易被冤枉的往往是语言还在长的学生。

第六，过程证据也能造假。预测纸条可以事后补写，对话记录可以删改，采访可以编。蔡文琳那两份太整齐的采访，就是例子。设计单不能保证没人作假，它能做的是两件事：一是让作假比自己做更麻烦，二是给老师留一个当面核对的

口子。“请你把采访对象的原话，当面再讲给我听”，这一句话的成本很低，却很难被 AI 替。

说到底，作业是一份信任。老师信学生会自己付那一步，学生信老师看的是他付的那一步而不只是成品。设计单上把“交什么”写清楚，是把这份信任落到看得见的东西上。

第七，老师的工作量会变。批一份带预测、对话记录、三行反思的作业，比批一份全对的练习慢得多。一个办法是不全批：预测纸条和三行反思只扫一眼，分成几堆，看全班卡在哪里；只有采访记录和最终文章细看。另一个办法是让同伴先互看一轮。老师的精力，也是一份要省着用的能量。

常见做法	它守住了什么	它漏掉了什么	用设计单怎样补
全面禁止 AI	学生自己写	写的仍可能只是复述；校外挡不住	第 6、7 栏：留 AI 一碰就失效的那一步
用检测器查	评分公平的表面	误判；对非母语学生不公	第 9 栏：交过程证据，不只交成品
放开随便用	工具熟练	建立段被整个替走	第 8 栏：按档位用，从严到宽
加大作业量	维持的功	动能被摊薄，学生转手给 AI	第 2 栏：先问落在哪一段，再定量
只留开放题	有发挥空间	开放题 AI 也能答得很漂亮	第 3、7 栏：要学生本来的想法和手上的现实
让 AI 出检索题	间隔与检索	只练原题，不换问法	第 11 栏：两周后换样再用

◆ 十、放回日子里

回到蔡文琳的那一行字：这份作业里，哪一步是学生自己付的？这个问题，放在 AI 出现以前，几乎不用问：作业都是自己做的。AI 出现以后，它成了设计作业的第一个问题。

AI 时代的作业，留的不是题目，是一个必须由学生自己付动能的位置。

如果你是老师，下一回布置作业前，先拿最后一栏自查一次：把题目整个丢给 AI，还剩什么？剩下的那一部分，就是这份作业真正要留的东西。如果什么都不剩，就改。

如果你是家长，也要小心另一种用法：孩子不会，家长自己拿手机拍题，让 AI 出步骤，再照着讲给孩子听。这看上去是在帮忙，其实是一个更快的看懂型假会：落差被填平得更快，讲得也更顺，孩子点头点得也更快。

所以看孩子的作业时，别先看对不对。先问一句：“这里面哪一步是你自己想出来的？你在哪里卡住过？”孩子要是说不出来，这份全对的作业，多半只是看懂。第 16 章讲过家里的饭桌上还能做什么。

如果你在学校里管作业政策，可以在“每天作业不超过多少分钟”这样的规定后面，再加一句。这一句是：“每份作业注明它落在五段的哪一段，以及哪一步必须由学生自己完成。”量的规定管住了负担；段的规定，才管得住 AI 进门以后作业还剩不剩东西。

如果你自己在学一样新东西，用 AI 帮你的时候，给自己定一条规矩：先写下自己的答案，再去问。写错了也没关系，那张写错的纸，正是你身上第一次对不上的地方。

人和 AI 在一般意义上该怎样分工，书四专门讲了（见书四第 10—13 章；教育一侧见书四第 16 章）。人提供对不上与动能，AI 提供势能之网，结晶在人身上发生。本章只把这条分工放进了一份作业单里。

带 走 的 话

AI 能答的作业少留；留下的作业，要有一步只能由学生自己付动能，AI 一碰就失效。

小　账

“用不用 AI”的争论关上了分段这扇门；本书问作业落在五段的哪一段，让 AI 站在维持段当帮手，把建立段留给学生。

学生把题目丢给 AI，拿回一份全对的作业：本该在他身上发生的一次建立，被收回成了一次看懂别人答案的发现。

想 一 想

1. 你最近一次交出去的作业、报告或方案，如果整个丢给 AI 去做，还剩下什么是只有你才拿得出来的？

2. 你用 AI 的时候，通常是先写下自己的想法再问，还是一上来就问？两种用法下，你留下的东西有什么不同？

3. 你身边有没有一件事，是你借着 AI 做成了很多次、可一离开 AI 就做不出来的？它停在了五段账的哪一段？

◆

20

第 20 章

评价：测结晶，不测复述

这一章的问题

数学考九十多分的孩子，到了物理课却认不出同一条直线——那个分数量到的，究竟是他身上的什么？

期末质量分析会开到晚上七点才散。罗志坚回到办公室，没有开灯，先坐了一会儿。他五十五岁，在成都一所完全中学当校长，当了九年。前面二十年，他是数学老师。

会上的数据很好看。初二数学期末统考，年级平均分比去年同期涨了四分，优秀率涨了六个百分点。分管教学的副校长在投影上把这几个数标成了红色。

散会时，初二的物理老师在门口拦住他，说了一件小事。这学期物理讲到弹簧：挂的钩码越重，弹簧伸得越长。实验数据画在坐标纸上，是一条斜着往上的直线。她问学生：“这条线，你们数学课上学过，叫什么？”全班没几个人答得上。她又提示：“上个月刚考完的一次函数啊。”学生这才反应过来，有人说：“哦，可这是物理啊。”物理老师说：“数学考九十多分的孩子，在我这里认不出一次函数。”

罗志坚回到办公室，翻出两份东西。一份是期末统考的分数表，一份是开学初数学组自己做的一次不打分的“回头测”：用上学期期末考过的同一类题，不预告，再测一次。回头测的正确率，比期末那一回掉了将近一半。他在会议记录本的空白处写了一句：我们测的，到底是什么？

前两章讲了课堂和作业。这一章讲评价。评价排在最后，可它管着前面两样：评价测什么，课堂就往哪里教，作业就往哪里留。第 3 章问过“考试测的是

什么”，答案是：多半在理念界里问理念符号，在当周测维持。这一章接着问：那该怎样测？

◆ 一、分数为什么这么有用

先要把分数对在哪里写足。考试和分数，是人类最成功的社会发明之一。第一，它公平。中国从隋唐起开科取士，一千多年里，一纸试卷让许多出身寒微的人有了上升的路。今天的统一考试仍然承担着这份功能：同一张卷子，同一把尺子，不看你家是谁。

第二，它可比。几十万考生的分数可以放在一起排；一个学生今年和去年的分数可以放在一起看。没有可比，就没有大规模的选拔和管理。第三，它省。一场两小时的考试，可以给几百个学生每人一个数，成本很低。

还有一点常被忽略：考试自己一直在和“只测复述”较劲。第 3 章讲过唐代明经科的“帖经”：把经文遮住前后，只露出一行，再贴住其中几个字，让考生填出来。这是最纯粹的测复述，测的是经文在考生身上维持得牢不牢。可是同一套制度里，又有“策问”：出一个时务上的问题，让考生写对策。策问要的，是把读过的书拿到一个没见过的问题上去用。

一千多年前的出题人，已经在一张卷子里同时放了两种东西：一种测维持，一种试着测迁移。后来的历史里，哪一种占上风，常常决定了读书人把力气花在哪里。第 2 章写范进，写的就是测复述那一边占尽上风之后的样子。

欧洲大学里也有一条老路：口试。学生当面回答考官的追问，答不上来就当场露底。今天的博士答辩，还保留着这个样子。口试贵，慢，可它有一个笔试很难有的长处：考官可以顺着学生的回答往下追，一直追到他说不下去的地方。那个地方，往往就是他的纠缠到头的地方。

第四，它会改进自己。二十世纪的教育测量一直在给考试补课。1956 年，Bloom（中文常译布卢姆）等人发表了教育目标分类的认知部分，把学习目标分成六层：知识、领会、应用、分析、综合、评价。这是在提醒出题的人：别只

考第一层的记忆，要往上考。后来又有修订版，把六层改成记忆、理解、应用、分析、评价、创造。中国的许多考试说明里，“了解、理解、掌握、运用”这样的层级用语，也来自这一路的影响。

1998 年，英国的 Black 与 Wiliam 发表了一份关于课堂评价的综述。同一年，两人又把它写成一本影响很大的小册子《黑箱之内》（Inside the Black Box）。大意是：评价不只是在学期末打一个分，更应该在教学过程里不断地看学生学到了哪里、卡在哪里，并据此调整教学。这样的“形成性评价”，能明显提高学习成效〔Black 与 Wiliam，1998〕。

还有一路主张“真实性评价”：让学生在接近真实的任务里展示他会什么，比如做一个项目、写一份报告、当众答辩。分层的目标，过程中的评价，真实的任务，这三条改进都对。它们都在把考试从“测复述”往外推。

◆ 二、改革在往哪边走

最近十几年，中国和新加坡都动了评价。两边的做法，都值得看一看。这里只说它们改了什么，不评判政策背后的取向。

先看新加坡。2016 年，新加坡教育部宣布改革小六会考（PSLE）的计分办法，从 2021 年起实行。旧办法叫 T 分数，是一个和同届考生比较出来的分数：你考得多好，要看别人考得怎样；四科合起来的总分有两百多种可能的取值，分得很细。

新办法改用“成绩等级”（Achievement Level，简称 AL）：每科按分数分成八级，第一级最好；四科的等级加起来就是总分，最好是四分，最差是三十二分。这一改的用意，是把等级放宽：分数接近的学生拿同一个等级，不再为了一两分和同届的人细细地比。

2018 年 9 月，新加坡教育部又宣布：从 2019 年起，小一、小二取消所有计分的测验和考试。测验仍然有，可只用来了解学生、给反馈，不算进任何总分或

等级。小三、小五、中一、中三的年中考试，也在 2019 年到 2021 年间逐步取消，从中一先开始。

再看中国。2014 年 9 月，国务院印发《关于深化考试招生制度改革的实施意见》，上海、浙江两地成为高考综合改革的试点。2017 年，两地第一届“新高考”的学生走进考场。

几个主要变化是：总成绩由语文、数学、外语三门统考，加上学生自己选的三门学业水平考试科目组成，不再分文理。外语一年可以考两次，取较好的一次；录取“两依据一参考”，即依据统一高考成绩和学业水平考试成绩，参考综合素质评价。此后，改革在更多省份分批推开。

两边的改革，对在哪里？新加坡的改革，看准了一件事：分得太细的分数，会把学生推进无休止的相互比较。把等级放宽、把低年级的考试拿掉，是给“比”降温，给“学”腾地方。

中国的改革，看准了另一件事：一考定终身、文理一刀切，学生没有选择。给选择、给两次机会、把综合素质评价放进录取参考，是在拓宽“会”的样子。

两边都在做同一件事：不让一个数说完一个人。

◆ 三、它们停在了哪里

可是两边改的，多半是分数怎么算、考几次、谁来选科。题目本身问的是什么，改得少。拿 PSLE 的新旧计分做个对照就看得清。旧办法下，一科考九十一分和九十二分，换算出来的 T 分数可能不同；新办法下，九十分以上都是第一级，这一分的差别被抹平了。这是实实在在的降温。

可是两种办法面对的，是同一张卷子。卷子上那道题，测的是两周后还在不在、换个情境认不认得出、碰到反例松不松得开，还是只测考场上那一刻能不能复述出来？计分办法回答不了这个问题。

一张卷子，换成 AL 计分，题目还是那些题目；换成“3+3”选考，每一科的卷子也还是在考场里两小时内答完。如果卷子主要在理念界里问理念符号，在学完不久时测，它测到的就仍然是维持的一小截。分数怎么算，改的是这一截怎样排名；它没有改变测的是哪一截。

还有一层：一个指标被当成了目标，就会变形。经济学家 Goodhart（中文常译古德哈特）在 1975 年讨论货币政策时提出过一个观察。后来人类学家 Strathern 把它概括成一句流传很广的话，大意是：一个量度一旦成了目标，它就不再是好的量度。

学校里这句话天天在应验。分数原本是用来看学生学到哪里的，一旦成了学校、老师、家长和学生的目标，大家就会去找最省力的提分办法：押题、刷同类题、背范文。分数涨了，它所代表的东西却没有跟着涨。罗志坚那个涨了四分的平均分，就是这样一个数。

等级放宽了，这个机制也不会消失，只会换一个形状。原来是为一两分拼，现在是为跨过一个等级的分数线拼。综合素质评价放进来了，也可能变成一份份被精心准备的材料。这不是改革失败了，是改的地方还没有碰到那条根：测的到底是哪一段。

再回头看前人的三条改进。Bloom 的分层，分的是认知的高低：记忆低，创造高。可是它没有分时间：同一道“应用”题，当周测和两周后测，测到的是不同的东西。它也没有分“维持”和“粒子化”：一个学生可以在应用层的题上拿满分，却只是把同类题刷熟了。

形成性评价，把评价放进了过程，这是一大步。可是“过程中看学生学到哪里”，学到哪里要有一张段落分明的地图，否则老师看到的仍然是“会了几成”。

真实性评价最接近本书要说的东西。它停在的地方是：任务真实了，评分标准却常常还是“内容完整、表达清楚、有创意”，没有问这次的结晶稳不稳、整

不整、能不能离开、熔不熔得开。所以前人停下的地方，是一张按五段排开的评价地图。

◆ 四、按五段测

本书的说法很简单：评价要按五段测，而不是只测复述。五段账是全书的主干：在场、建立、维持、粒子化、熔开再结晶。每一段，要测的东西不同，测的时间不同，测的办法也不同。

在场，不必测。 看懂是在场。学生说“我懂了”，脸上的表情、课堂上的点头，都只说明特征被摆在了眼前。在场本身不是学到了什么，测它没有意义；把它当成学会，正是看懂型假会的来源。

建立，看能不能说出卡点和接法。 建立是对不上逼出重连。测它，就看学生能不能说出：我原来以为什么，卡在哪一步，后来怎样接上的。第 18 章课堂末尾那三行、第 19 章作业里的卡点记录，就是建立的证据。说不出卡点的，多半没有经过建立；卡点人人一样、像是抄的，也要存疑。

维持，用延迟测验。 维持是纠缠不散。测它，就不能在学完当周测，要隔一段时间，比如两周以后，不预告，再测一次。第 8 章讲过遗忘曲线和间隔效应：当周测出来的，有很大一部分只是还没来得及松掉的东西。罗志坚学校那次回头测，测的就是维持。

为什么是两周？这不是一个从实验里精确算出来的数，是一个好用的约数。隔得太短，比如两三天，测到的仍然多半是刚学完的余温；隔得太长，比如一个学期，中间又学了别的，又复习过几次，分不清测到的是哪一回的维持。两周大致是一个单元刚结束、下一个单元刚开头的时候，学校里好安排，也足够让靠外力撑着的纠缠露出松动。“不预告”同样要紧。一预告，学生就会在前一晚突击，测到的又成了外力撑起来的维持，那正是背住型假会的来路。

粒子化，用迁移、撤提示和独立来测。 粒子化是纠缠结成粒子：稳定、整体、独立。测它，要换情境（换一个问法、换一门学科、换一件生活里的事，看

它还在不在）；要撤提示（不给公式、不给步骤，看学生能不能自己说成一整件事）；要离开（不让翻书、不让问人、不让用 AI，看它立不立得住）。办法可以是迁移题、口试、作品答辩。

熔开再结晶，用反例和换条件来测。 活的会，在下一次对不上时熔得开。测它，就给一个学生熟悉的做法管不住的反例，或者把条件换掉，看他能不能松开旧做法、重新结晶。熔不开的，就是固化：刷熟型假会的后半段。

段	要测的是什么	怎样测	什么时候测	一道题的样子（以一次函数为例）	最常犯的错
○ 在场	不必测	—	—	—	把“听懂了”当成学会
一 建立	卡点与接法	三行反思；追问“你原来怎么想”	学的当时、作业里	“你第一次画一次函数图像时，卡在哪一步？后来怎样想通的？”	只看结果对不对，不看过程
二 维持	纠缠还在不在	不预告的延迟测验	学完两周以后	原题型，换数字，不预告	只在学完当周测
三 粒子化	稳定、整体、独立	迁移题；撤提示口试；作品答辩	两周以后至学期末	“弹簧挂钩码的数据，是不是一次函数？说出理由。”	迁移题出成原题的换皮
四 熔开	熔不熔得开	反例；换条件	粒子化之后	“居民用电按阶梯计价，电费和用电量还是一次函数吗？”	只奖励做对，不奖励松开

表里第五列的几道题，是罗志坚的学校后来真的用上的，下一节会讲。

◆ 五、一张评分量表

按五段测，还要有一张能打分的量表。否则口试和答辩就只剩“感觉不错”。本书的量表，用的是粒子的三条判据，加上一条“熔不熔得开”：稳定、整体、独立、熔开，四项。

先说一个容易被误会的地方。第 9 章说过：“会”是一个事件，不是一个程度。发生了，或者没发生。那么量表为什么还分档？因为量表的档，不是“会了

几成”，是“证据看到了哪一步”。每一项都有一条门槛线，定在第 2 档。到了第 2 档，这一项性质就立住了；没到，就是还没立住，哪怕看到了苗头。第 3 档只是说，它立得更稳，经得起更远的考验。最后的判断，看的是四项各自有没有过门槛，而不是四项加起来多少分。这里正好看得出一个总分的毛病。

分数把一个事件摊平成了一个程度。

一张卷子一百分，学生拿了八十五，大家会说“会了八成半”。可是那十五分丢在哪里，丢的是哪一段，分数不说。一道两周后还会的题和一道当周才会的题，在卷子上各占五分；一个熔得开的会和一个熔不开的会，在卷子上可以拿一样的分。事件被摊进了一个连续的数里，看不见哪里发生了、哪里没有。本书的量表不加总，就是不让这一摊平再发生一次。

还有一条同样要守：维持和粒子化要分开测。延迟测验测的是两周后还在不在，迁移题测的是换了情境认不认得出。两样混在一张卷子里算一个总分，保持好、迁移差的学生和保持差、迁移好的学生，就会拿到一样的数。所以延迟测验与迁移，要分开出题、分开记录、分开看。

项	0 档：没有立住	1 档：有苗头	2 档：立住了（门槛）	3 档：立得稳	怎样测	看什么证据
稳定	两周后原题型也做不出	两周后原题型做得出，换问法就不行	两周后换一种问法仍做得出	两周后换两种以上问法、换一种表示法（式子、表格、图像），都做得出	不预告的延迟测验，题目换问法	延迟测验的对错；与当周成绩的落差

项	0 档：没有立住	1 档：有苗头	2 档：立住了（门槛）	3 档：立得稳	怎样测	看什么证据
整体	只说得出零散的词或公式，串不起来	在提示下能串成一件事	不靠提示，能用自己的话把它说成一整件事：是什么、为什么、怎样用	能说清它和相邻的东西是什么关系，哪里一样、哪里不一样	撤提示的口试：只给一个问题，不给公式和步骤	口试录音或记录；学生自己画的结构图
独立	离开书、老师或 AI 就做不了	离开后能做原题，换到别的情境就停	离开书、老师和 AI，在一个没见过的情境里能认出它、用上它	能在生活或另一门学科里自己发现它，并主动用上	迁移题；作品答辩；跨学科情境题	迁移题作答；作品与答辩记录
熔开	遇到反例，硬套旧做法，不觉得有问题	觉得“有点不对”，可是说不出哪里不对，或者只会放弃	能指出旧做法在哪个条件下失效，并给出新的做法	能说出旧做法和新做法各自适用的范围，把两者接成一个更大的东西	反例题；换条件题；口试中的追问“如果……还成立吗”	反例题作答；口试中改口的过程

“稳定”这一行要补一句说明。它的 2 档用的是“两周后换一种问法”，这已经越出了单纯的维持。可是它只换问法，不换情境：题还是数学课上的一次函数题，只是问的方式变了。所以它测的是稳定能撑到多远，是稳定的上限。跨到物理课、账单、生活里的迁移，不记在这一行，另归“独立”一行，记在粒子化名下。延迟测验里，原题型那几道和换问法那几道也分开记对错：前者看维持（1 档），后者看稳定（2 档）。这样，前面说的维持与迁移分开记，在量表里仍然守得住。

量表下面，还要配一张判断表。四项各自有没有过门槛，组合起来，就能看出这个学生在这件事上停在哪一段，是哪一种假会，或者是活的会。

四项过门槛的情形	判断	停在哪一段	下一步该做什么
稳定、整体、独立、熔开四项都过	活的会：结晶发生，熔得开	走完五段	换更远的情境，让它再迁移
稳定、整体、独立过，熔开不过	结成了粒子，却熔不开（固化）：刷熟型风险	粒子化之后熔不开	多给反例和换条件，少给同类题
两周后原题型还在（稳定 1 档以上），整体或独立不过	背住型：维持住了，没有粒子化	维持	撤提示、换情境，让他自己说成一整件事
当周会做，两周后原题型也做不出（稳定 0 档）	看懂型或短暂维持	在场或刚建立	回到建立：先找出他原来怎么想、卡在哪
说不出卡点，当周会做，两周后全空	看懂型假会	在场	撤掉解答，让他从头做一遍，从对不上开始

这张判断表里没有一个总分。这是有意的。四项加起来得九分的学生，可能是四项都在第 2 档上下（3、2、2、2），也可能是三项满档、熔开一项为零（3、3、3、0）。前一个是刚刚结晶、还活着的会；后一个是结得很牢、却熔不开的会。总分一样，下一步该做的事完全不同。

◆ 六、熔开最难测，也最要紧

四项里，熔开最难测，也最容易被漏掉。难在两处。第一，反例题不好出。出得太偏，学生答不上来，测到的是“没见过”，不是“熔不开”。出得太近，学生换个数字就过去了，测到的还是维持。第二，熔开的证据在过程里，不在结果里。一个学生最后答对了反例题，可能是一开始就没有被旧做法套住，也可能是先硬套、被追问之后才松开。后一种，恰恰是熔开最清楚的样子。所以测熔开，最好用口试或者留下草稿的笔试，看过程。

反例题大致有三种出法。第一种，规律管不住的例子。学生以为“乘法总让数变大”，给他一个乘以零点五的题。学生以为“重的东西落得快”，给他一张纸和一团揉紧的纸，再问他：揉紧以后，纸变重了吗？

第二种，换掉一个条件。第 18 章方明远留下、第 19 章做成作业的那道“第一个人当场开奖以后，你的概率还是五分之一吗”，就是这一种。条件一换，原来的结论就不再原样成立。

第三种，两个做法打架。语文课上，学生学过“景物描写要烘托人物心情”，再给他一段景物和心情正好相反的文字，问他：作者为什么这样写？英文课上，学生背过“现在完成时表示过去的动作对现在有影响”。再给他一个不用现在完成时、意思却一样通的句子，问他差别在哪。

三种出法有一个共同的要求：反例要落在学生已经结出来的那个东西上。不是随便找一道难题，是专门对准他刚学会的那个“会”，看它松不松得开。这和第 18 章说的“对不上要落在学生已有的纠缠上”，是同一条道理，只是一头用在教，一头用在测。

还有一条更要紧：熔开要被奖励。如果一个学生在反例面前犹豫了，改口了，最后给出一个新的做法，评分时要给分，而且要给高分。如果评分只看最后答案对不对，或者把“改口”当成“不够熟练”，学生很快就会学到：碰到不对劲的地方，最安全的是硬套。这样教出来的，就是熔不开的会。

学生在反例前的样子	常见的评分	按本书量表应怎样看
硬套旧做法，答得很快	答错扣分，或答对（碰巧）给分	熔开 0 档
说“有点不对”，然后放弃	空白，零分	熔开 1 档：有苗头，要给场
先硬套，被追问后改口，给出新做法	常被扣“过程混乱”的分	熔开 2 档：立住了，应给高分
一开始就指出旧做法失效的条件	满分	熔开 2 档或 3 档
说清新旧两种做法各管哪里	满分	熔开 3 档

◆ 七、罗志坚学校的那一个单元

罗志坚拿着这张量表，和初二数学组商量了一个学期。最后，他们决定先在一个单元里试：一次函数。期末统考照旧，一分不改。他们只是在统考之外，加了四样东西。

第一样，两周后的延迟测验。 单元测验之后两周，不预告，用十五分钟做六道题：三道原题型换数字，三道换问法。比如原来问“已知两点求解析式”。换问法的题是：“一根蜡烛点燃后每分钟变短的长度一样，点了五分钟剩十六厘米，点了十二分钟剩九厘米，蜡烛原来多长”。

第二样，五分钟口试，撤掉提示。 每个学生抽一个问题，比如“一次函数是什么？你怎么知道一个东西是不是一次函数？”不给课本，不给公式，让他说。两位老师一起听，各自按量表的“整体”一项打档，有分歧时听录音再议。

第三样，一个小作品。 回家找一张家里的账单，话费、水费、电费、打车的票据都行。判断它和一次函数有没有关系，画出图，写一段说明，下周课上每人两分钟答辩。

第四样，一道反例题。 放在口试的最后，当作追问：“居民用电按阶梯计价，用得越多，超出的那部分每度越贵。这时候，电费和用电量还是一次函数吗？”

单元结束后，数学组把三个学生的材料拿到校务会上，作为例子。他们是综合了好几个学生的情况写出来的，名字是化名。

邓欣然。 期末统考九十六分。两周后的延迟测验，三道原题型全对，三道换问法的错了两道；蜡烛那道题，她说“没见过这种题”。

口试时，她能背出一次函数的一般式。可是问她“怎么判断一个东西是不是一次函数”，她想了很久，说“看它是不是 y 等于 kx 加 b 的样子”。账单作业，她交的是一张话费单，判断是“是一次函数”，图画得很漂亮，可是答辩时

被问“月租是哪一部分”，答不上来。按量表：稳定 1 档，整体 1 档，独立 1 档，熔开 0 档。判断：背住型。维持住了公式和原题型，没有粒子化。

曾浩然。 期末统考七十八分，计算出了好几处错。延迟测验六道题对了五道，蜡烛那道他做对了，旁边写着“每分钟一样，就是一次函数”。

口试时，他说：“一次函数就是一个东西每走一步，另一个东西就跟着变同样多。图上是一条直的线，因为每一步都一样。”这句话没有用课本的定义，可是是一整件事。反例题，他先说“是”，过了几秒改口：“不对，用多了以后每度贵了，那一段斜得更陡，就不是一条直线了。应该是好几段直线拼起来的。”按量表：稳定 2 档，整体 2 档，独立 2 档，熔开 3 档。判断：活的会。统考分数不高，是计算的问题，那是另一件事，也要练，可它不是“没学会”。

谢雨泽。 期末统考一百分，平时刷题最多。延迟测验六道全对，蜡烛题秒做。口试说得很完整，用的是课本的话，也用上了“斜率”“截距”这样的词。账单作业，他交的是打车票，准确地算出了起步价和每公里的单价，画出了图。

可是到了反例题，他说：“是一次函数，k 就是电价，b 是零。”老师追问：“用得越多每度越贵，k 还是一个数吗？”他说：“那就取个平均值。”再追问，他有点急了：“考试不会考这种题吧。”按量表：稳定 3 档，整体 2 档，独立 2 档，熔开 0 档。判断：结成了粒子，却熔不开，已经固化，刷熟型风险。

还有一样材料，数学组一开始没打算用，后来发现最能说明问题：单元第一周，每个学生在作业本上写过的三行，“我原来以为……我卡在……现在我这样想……”。

邓欣然写的是：“我原来以为一次函数很难。我没有卡住，老师讲得很清楚。现在我觉得一次函数不难。”曾浩然写的是：“我原来以为 k 越大线越高。我卡在 k 是负数的时候，线是往下走的，我以为自己画错了，擦了三遍。现在我这样想：k 不是管高低的，是管斜的方向和陡不陡的。”谢雨泽写的是：“没有卡住，这类题以前在培训班做过很多。”

三行放在一起，建立这一段的证据就出来了。邓欣然说得很诚实，她没有卡住：她看懂了，在场了，然后靠练习维持住了。曾浩然的卡点是他自己的，旁人抄不来，“擦了三遍”是动能付过的痕迹。谢雨泽也没有卡住，可原因不同：他的纠缠是在别处、靠大量同类题建起来的，结得很牢，却从没在这里被撞开过。

三行反思不打档，只作参照。可是拿它去对照后面的延迟测验、口试和反例题，几乎每一个人的去向，都能在第一周的那三行里找到苗头。

三个学生的统考分数是九十六、七十八、一百。按分数排，曾浩然最差。按量表看，只有他走完了五段。罗志坚在校务会上说，这不是说分数没用。谢雨泽的一百分是真的，他的稳定、整体、独立都过了门槛，这是刷题实打实换来的东西，第 2 章说过，这一笔不能抹。邓欣然的九十六分也是真的，它测到了维持的那一截。分数没有说谎，它只是只说了一半。

打档的过程里，两位老师也吵过。曾浩然的熔开一项，一位老师给了 3 档，另一位给了 2 档。给 2 档的老师说：他是先答错再改口的，说明一开始没看出来。给 3 档的老师说：他改口以后，说的是“好几段直线拼起来”，这已经把新旧两个做法接成了一个更大的东西，量表上写的 3 档就是这个样子。两人把录音又听了一遍，最后定了 3 档。理由写在了记录里：“改口不扣分；改口之后接成更大的东西，给 3 档。”

这种争论，一开始很费时间。可是吵过几回，数学组自己写出了一份“打档备忘”，把几种常见的情形和定档的理由一条条记下来。这份备忘，比量表本身还有用：它是这一组老师在打档这件事上，自己结出来的东西。

这四样东西，成本是多少，校务会上也算了。延迟测验十五分钟，不占额外的课时，放在一节课的开头就行。口试最费时：一个班四十五个学生，每人五分钟，两位老师一起听，大约要四个小时，分摊到两周的自习课里。账单答辩，每人两分钟，约两节课。反例题放在口试里，不另算。

算下来，一个单元多花了大约七八个课时的人力。数学组的意见是：一学期挑两个单元这样做，做得起；每个单元都这样做，做不起。罗志坚同意了。他

说：“先在两个单元里看清楚，我们的学生停在哪一段。看清楚了，其余单元的课怎样上，大家心里就有数了。”

◆ 八、分数不必拆，要让它回写

从罗志坚的学校回到一般的问题：分数怎么办？本书的回答是：分数不必拆，要让它回写。分数是一个理念符号。它本身没有错。错在它被供奉起来，不再和现实、和学生自己对账。这时候它就成了偶像：大家为它努力，它却不再告诉大家学生身上发生了什么。

分数这个偶像不必拆，要让它回写到现实与自我。

回写到现实，是让分数后面跟着看得见的东西。不只是“九十六分”，还有“两周后换问法题对了一道”“口试说不出判断依据”“账单作业里认不出月租”。分数旁边多出这几行字，它就不再只是一个排名用的数，而是指向学生手上做出来、嘴里说出来的东西。

回写到自我，是让学生自己读得懂自己的分数。罗志坚的学校在单元评价单的最后加了一栏，让学生自己填：我在哪一项还没过门槛？下一步我要做什么？邓欣然在这一栏写的是：“我会算，但我说不清为什么是一次函数。下次先自己用一句话说一遍再做题。”这一句，比九十六分更能告诉她自己，她停在哪里。

对家长也一样。家长会上，老师可以不只报分数，而是说：孩子在这个单元里，稳定过了，整体和独立还差一点，熔开还没有。家长回家可以做的事，也就清楚了：别再买同类题的练习册，让孩子在饭桌上用自己的话讲一遍，问他“如果……还成立吗”。

还有两个担心，要说清楚。一个是公平。口试和答辩比笔试主观，会不会不公平？会，如果没有量表。所以要有量表，要两人同评，要录音留底，有分歧时复议。即使这样，口试仍不适合用来做高风险的选拔，它更适合用在学校内部，

用来看学生停在哪里、下一步怎么教。统一考试的公平功能，仍然要留给统一考试。

另一个是负担。多测几样，学生会不会更累？如果是在原有考试之外再叠一层，会。所以要减：少考几次只测当周维持的小测，换成一次两周后的延迟测；少做几张同类题的卷子，换成一道反例题。总的测验时间可以不增加，测的段变了。

AI 进门以后，评价还多了一道新题。带回家完成的论文、报告、作品，现在都可能是 AI 写的，或者 AI 改过的。第 19 章说过，检测器靠不住。评价这一头，要换一个思路：凡是带回家完成的东西，都只当作“证据的一部分”，不当作全部；真正用来判定独立的，放在学生当面、不带设备的那一刻。

这样一来，口试、答辩、课上手写这些“老办法”，反而变得更要紧了。它们贵，慢，可是在 AI 时代，它们是少数几个能看见“离开了 AI，它还立不立得住”的地方。

AI 在评价里也不是只有坏处。它很会出换问法的题，很会出反例的初稿，很会把一个学生的三行反思归类。这些都可以交给它，省下老师的时间。可是最后那一档打多少，尤其是熔开那一项，要人在场听：听学生在反例面前停顿了几秒，改口时说了什么。这些东西不在答案里，在过程里。

新加坡把小一小二的计分考试拿掉，中国在录取里加进综合素质评价，往这个方向走了一步：让一个数不再说完一个人。本书想补的是另外半步：剩下的那个数，要说清它测的是哪一段。

◆ 九、放回日子里

回到罗志坚在会议记录本上写的那一句：我们测的，到底是什么？用这一章的话回答：期末统考测的，多半是当周的维持，加上一部分理念界里的粒子化。它测不到建立，测不到两周后的维持，测不到跨界的独立，更测不到熔开。

这不是统考的错。一张两小时的卷子，本来就只能测这么多。错在大家把这一截当成了全部。

常见的评价	它其实测到了哪一段	它测不到什么	一个最小的补法
学完当周的单元测	维持的开头	两周后还在不在	两周后不预告，再测一次
期末统考	维持＋理念界的粒子化	跨界迁移；熔开	加一道换情境题和一道反例题
背诵默写	维持	整体与独立	撤提示，让学生用自己的话说一遍
作品展示	可能到粒子化	是不是学生自己付的动能	加答辩，追问“你卡在哪里”
综合素质材料	不一定	材料背后有没有结晶	请学生当面讲一件材料里的事
AI 辅助完成的作业	在场	几乎全部	见第 19 章：留 AI 一碰就失效的那一步

如果你是老师，下一个单元可以只加一样东西：单元测之后两周，不预告，用十分钟再测一次。把两次的成绩放在一起看，差得最多的那几个学生，就是最需要你回头看一眼的人。

如果你是家长，孩子考了高分回家，先别急着高兴，也别急着担心。过两周，在饭桌上随口问一道换了样子的题，或者问一句“如果……还成立吗”。他答得上来，那个分数是真的结晶；答不上来，分数是真的，可它只说了一半。

如果你在学一样新东西，可以拿这张量表给自己打一次分。最难的是最后一项：找一个你熟悉的做法管不住的例子，看看自己松不松得开。

如果你是校长或管评价的人，不妨在一个单元里试一次：统考照旧，另加延迟测、撤提示口试、一道反例题。看看分数最高的学生里，有几个是活的会，有几个是熔不开的会。这个数，比平均分涨了几分，更能告诉你学校教出了什么。

还有一句话，留给学生自己。分数高的时候，别急着把它当成“我是学霸”；分数低的时候，也别急着把它当成“我是学渣”。这两句话一旦说久了，

就会在你身上结成石心：前一个让你不敢碰反例，怕露底；后一个让你不再付动能，反正也学不会。分数只是一个理念符号，它说的是你在某一天、某一张卷子上停在了哪一段。下一段，还没写。

罗志坚后来在全校教师会上，把那三个学生的例子又讲了一遍。最后他说：“我们不是要少考，是要考对地方。”

带走的话

评价按五段测：建立看卡点，维持看两周后，粒子化看迁移与撤提示，活不活看反例。

小　账

Bloom 分层、形成性评价与 PSLE、新高考的改革，都在改分数怎么算、怎么用；本书把评价按五段排开，让分数说清它测的是哪一段。

一个只测当周复述的分数被供奉成目标：学生身上的一次结晶，被收回成了一张卷子上的一次“找到正确答案”的发现。

想一想

1. 你最近一次拿到的高分（考试、考核、证书），如果两周后换一种问法再考一次，你有把握吗？

2. 在你工作或生活里，有没有一个数被当成了目标，大家都在为它努力，它却越来越不代表原来想代表的东西？

3. 你自己最熟的一件本事，能不能找到一个它管不住的反例？碰到那个反例时，你是松开了，还是硬套了？

◆



第　八　编

检验与收束

导　语

一本讲学会的书，自己先要经得起检验。第 21 章替这套说法写下输法：不卡住也学得一样好、没有场也一样、没力气也一样、刷熟也熔得开、记得牢就一定用得出，五道门任一扇被确实推开，书就要改；再加一道闸，对不上要先写在纸上，事后找到的不算，并给出四个能拿进教室的实验设计，只写设计，不编结果。第 22 章回到新加坡宏茂桥那张饭桌：同样二十道题，先猜、卡住先写卡点、只要提示不要答案，再到纸箱拼出的长方形和一道变了形的题。全书在这里收束，回到那句判词：教育的产品不是答案，是结晶。

21

第 21 章

它怎样才算错

这一章的问题

你认定管用的那个学习办法，考好了说它灵，考砸了说没坚持——要出现什么结果，你才肯承认它其实没用？

◆ 一、一张先写输法的表

星期二晚上九点，叶清还在办公室。她三十七岁，在新加坡一家教育研究机构做研究员，这几年做的都是课堂实验。桌上摊着一份表，是下个学期一项研究的预先登记表。三所邻里中学已经答应合作，二年级和三年级各有几个班，家长同意书也收回了大半。

表上的栏目，她填过很多次：研究问题、分组办法、测量工具、样本量、分析方法。今晚卡住她的，是最后一栏。那一栏的题目是：“出现什么结果，你们会承认自己的说法错了？”她盯着这一行，二十分钟没有动笔。

中午吃饭时，统计组的同事邹敏行说过一句话。他四十五岁，跟数据打了二十年交道，说话不留情面。他翻了翻她带去的材料，说：“你们这套‘对不上’，学生学会了，你说是因为有对不上；没学会，你说是对不上太大、没有场、没力气。怎么都说得通。”他又补了一句：“怎么都说得通的东西，我没法帮你算。”叶清当时笑了笑，没有接话。可是这句话一下午都在她脑子里转。

她手里这套说法，就是本书前二十章讲的那一套：学习是纠缠的建立，记忆是纠缠的维持，学会是纠缠的粒子化。建立要三个条件，对不上、场、动能；刷

熟的粒子熔不开。她信它，是因为它解释了她在课堂里见过的许多事。可是邹敏行说的也对。一套说法能解释的事越多，越要问它禁止了什么。

一套什么都不禁止的说法，等于什么也没说。

这一章做的，就是叶清今晚要做的事：在看到任何数据之前，先把“输法”写下来。哪些结果一出来，本书就要改；哪些结果一出来，本书的哪一句话就站不住。这一章不报告任何结果。本书没有做过下面这些实验，也不借别人的数字来充数。它只做一件事：把门画出来，让后来的人去推。

◆ 二、前人怎样给理论立规矩

给理论设“输法”，不是本书的发明。前人在这里做得很足，先把他们对在哪里写清楚。

波普尔：一个理论要敢于禁止。波普尔（Karl Popper）1934 年出版德文本《研究的逻辑》，1959 年的英译本改题《科学发现的逻辑》。他提出一条后来很有名的标准：一个说法是不是科学的，不看它被多少事实支持，看它能不能被事实推翻。

他在《猜想与反驳》（1963）里回忆过一件旧事。年轻时，他在维也纳给阿德勒（Alfred Adler）的儿童辅导工作帮过忙。有一次他向阿德勒讲了一个孩子的情况，阿德勒没见过那个孩子，当场就用他的“自卑感”理论讲通了。波普尔问他怎么这么有把握，阿德勒说，凭他上千例的经验。波普尔忍不住回了一句：那么加上这一例，就是一千零一例了。这件事让波普尔起了疑。一个理论如果每一例都能讲通，那它的每一次“讲通”，都不再算证据。

这种讲通，你在饭桌上也见过。有的家长认定孩子考不好“就是粗心”。考砸了，是粗心；考好了，是“这次总算不粗心了”；错了一道难题，是“粗心没看清题”；空着一道题，是“粗心没留够时间”。四种结果，一个解释全接住了。这个解释从来不会错，所以它也从来没帮上忙。一年下来，家长还是只会说“细心点”，孩子还是不知道自己错在哪里。

证据要有风险。只有在一个结果本来可能让它输、它却没输的时候，它才赢得了一点什么。这一条，正是邹敏行中午那句话的来历。

拉卡托斯：理论有硬核，也有保护带。波普尔的标准很干净，可是真实的科学不完全这样走。拉卡托斯（Imre Lakatos）在 1970 年的长文《证伪与科学研究纲领方法论》里补了一层。

他说，一个研究纲领有一个“硬核”，大家不轻易动它；硬核外面围着一圈“保护带”，是各种辅助的假设。遇到不合的结果，人们通常先改保护带，不动硬核。这本身不算犯规。要看的是改了以后，这个纲领能不能预言出新的、事先没想到的事实。能，它是在往前走；只会事后补洞，它就在往后退。

这一层很要紧。它告诉叶清：被一个结果打了一下，不等于整套说法就该扔；可是如果每次挨打都靠事后加一句话躲过去，那就是往后退的信号。

预先登记：先写计划，再看数据。到了二十一世纪，心理学和教育研究吃过几次亏：一些很有名的结果，换一批人重做，做不出来。第 12 章讲过手写笔记和键盘笔记的争论，就是一例：早年的结果流传很广，后来的复现却各说各话。一个回应的办法叫“预先登记”：在收数据之前，把假设、分组、测量、分析办法都写下来，存在一个改不了的地方。再往前一步，是“注册报告”。2013 年起，英国心理学家 Chambers 在《皮层》（Cortex）杂志推动这种做法：期刊

先审研究计划，计划过了，就承诺发表，不管结果是正是负。这两个办法守的是同一道门：不让人看了数据，再回头改说法。

它们停在哪里。这三样东西给的是门的样式，不是门本身。波普尔说理论要能被推翻，可是哪一个结果能推翻哪一句话，要每一套说法自己写。预先登记表上留了那一栏，填什么，还是要叶清自己填。

本书的说法，在这里还有一层特别的危险。它的核心词是“对不上”。这个词天然是事后好用的：任何一次学会，回头都能找出一点“对不上”；任何一次没学会，回头都能说“对不上太大”或“没有场”。阿德勒的一千零一例，在这里也可能发生。

所以本书要守两道关。一道是结果的门：五条可推翻条件，写明什么结果出来本书就输。一道是过程的闸：对不上必须在事前、用旁人能核对的办法指认出来，不许事后补。

这两道关少一道，本书前二十章就都成了阿德勒式的讲通。

◆ 三、五道门，先看一张总表

先把五条摆在一起。每一条都对着本书一句承重的话；那句话站不住，这一条就是它倒下的地方。

门	它要推翻的那句话	怎样观察	什么结果算推翻	什么结果不算推翻
① 不卡住也一样	没有对不上，就没有建立	零困惑、零动能组对“先卡住再讲”组，比两周后保持与迁移	延迟与迁移成绩落在事先定好的“算一样”范围里，或零困惑组更好，且跨校跨科重复	当堂测验两组持平，或零困惑组更好
② 没有场也一样	落差要有场托住，否则成一锅粥	大落差无场组对大落差有场组	两组保持、迁移、放弃率都落在“算一样”范围里	落差适中时，有场无场差别不大
③ 没力气也一样	疲惫、孤立的人要先被托住	自然出现的疲惫、孤立学生，未被托住时与对照组比	结晶的多少与对照组落在“算一样”范围里	被托住后差距缩小（这本是预言）
④ 刷熟也熔得开	刷熟的粒子只结在理念界（纸面上），熔不开	过了同类题标准后，刷题组对先卡住组，比遇反例时松开再结晶的比例	两组比例落在“算一样”范围里，或刷题组更高	刷题组同类题的延迟成绩更好
⑤ 记得牢就会用	维持不等于粒子化	大样本里看两周后保持与迁移、独立能不能分开	校正测量误差后两者始终同进同退，只练保持的干预同样拉动迁移	两者正相关（这本是预言）

这张表里有几处要先讲清，不然后面每一条都会被读偏。

第一，“没有差别”要事先定好范围。两组成绩没测出差别，不等于两组一样。样本小、测量粗，什么差别都测不出来。

统计上有一种办法叫等效检验：事先说好“差多少以内算一样”，再看结果是不是落在这个范围里。荷兰学者 Lakens　2017 年写过一篇常被引用的入门文章，专讲这个办法。

打个比方。你拿家里的体重秤，去比两袋米谁重。秤的刻度只到一公斤，两袋米差了半公斤，秤上看着一样。你不能说“两袋一样重”，只能说“这台秤分不出来”。要说“一样重”，得先定好：“差两百克以内，我就当它们一样”，再找一台分得出两百克的秤。

本书的五道门里，凡是写“一样”的，一律按这个意思：事先定好范围，结果落在范围里，才算“一样”。没测出差别，只算“这一次没看清”。

第二，当堂测验不算数。本书本来就预言：讲得清楚的课，当堂测验往往更好看。看懂型假会，就是当堂好看、两周后空白。所以凡是比“学会”的门，都看两周以后的延迟测验和换了情境的迁移题，不看下课前五分钟的小测。

第三，测结晶要按三判据测。稳定：换一种问法，还在吗。整体：不靠提示，能不能说成一整件事。独立：撤掉课本、例题和提示，还立得住吗。再加上第四项：熔不熔得开。给一个老办法管不住的反例，看他松不松得开、能不能重新结晶。

这四项就是第 20 章那张评分量表。照第 20 章的口径，每一项各有一条门槛线，只看各自过没过门槛，不加成一个总分。四项加起来一样多的两个学生，可能一个是刚结晶、还活着的会，一个是结得很牢、却熔不开的会。总分一摊平，第四道门要看的东西就看不见了。

还有一条同样照第 20 章：维持和粒子化分开记。两周后的延迟测验测还在不在，迁移题测换了情境认不认得出。两样分开出题、分开记录。混成一个分数，第五道门就根本没法过。

第四，评分的人不知道分组。改卷、听口述、看作品的老师，事先不知道这个学生在哪一组。

第五，一次不算。一所学校、一门课、一个学期的结果，只算一次。要在不同学校、不同学科（至少数学、科学、语文或英文写作各一）重复出来，才拿去改书。

第六，挨了打，不许往三条路上躲。拉卡托斯说，被一个结果打了，先改保护带不算犯规。可是有几条退路，一走就是往后退。本书事先把它们堵上。

第一条退路：“对照组其实也有对不上。”比如第一道门被推开了，讲解组和先卡住组一样好，研究者回头说：“讲解组的学生听课时，心里其实也暗暗卡过。”这句话也许是真的，可是事后说出来不算数。要算，只能凭事前的记录：预测单、确定程度、课后那一句话。记录里没有，就当没有。

第二条退路：“测验没测到真正的学会。”结果不合意，就说测验题出得不好。本书的办法是：测什么、怎么测、哪几道题算迁移、哪几道算独立，全在收数据之前定好、登记好。登记了，就认。真觉得题出得不好，下一次研究重新登记新题，这一次的结果照旧算数。

第三条退路：“时间不够长，再等等就分出来了。”延迟测几次、各隔多久，也事先定死。两周和六周都没分出来，就不能说“也许半年后会分出来”，除非下一项研究事先把“半年”登记进去。

堵上这三条路以后，被打一下，本书能做的事只剩三样：照实写出来；改掉被推开的那一句；再看改过的说法，能不能预言出一样原来没想到的事。能，这是往前走。不能，就老老实实承认这一块退了。

◆ 四、不卡住，也学得一样好吗

第一道门对着本书最承重的一句话：没有对不上，就没有建立。这句话一倒，后面几乎全要重写。第 1 章说一键答案让纠缠根本没开始建。第 18 章说一节课的前五分钟要先放进对不上。第 19 章说作业要留给学生付动能。这三处都靠它撑着。

它预言什么。两组学生学同一样东西，用同样多的时间。一组是“零困惑、零动能”。老师讲得清清楚楚，例题一步步展开，学生看完整的解答，有疑问随时有现成的答案。学生不需要先猜、先试、先错。这一组也可以换成 AI 一键给出分步解答的做法。

另一组是“先卡住再讲”。先给一道够不着的题，或一个反直觉的现象，学生先写下预测、自己试；卡住以后，再讲、再讨论。

本书预言：当堂测验，第一组可能持平，甚至更好；两周以后，第二组的延迟测验，尤其是迁移题和撤掉提示的独立题，会明显更好。

拿一道中一数学的题来看两组怎样上。题目是：“一辆车去程每小时 60 公里，回程每小时 40 公里，来回的平均速度是多少？”

第一组，老师先讲：平均速度是总路程除以总时间，不是两个速度的平均数。然后在黑板上设路程为 120 公里：去程 2 小时，回程 3 小时；总路程 240 公里，总时间 5 小时，平均每小时 48 公里。学生点头，抄下来。

第二组，老师先不讲，只让学生在预测单上写一个数。大多数人会写 50。然后发给每组一张路程表，让他们自己算去程用了几小时、回程用了几小时。算到最后是 48，和预测单上的 50 对不上。这时候再讨论：为什么慢的那一段，占的时间更多。

两组用的时间差不多，最后黑板上的字也差不多。差别在于，第二组每个人手上都有一张写着“50”的纸。那张纸，就是事前留下的对不上。

怎样才算推翻。两周后的延迟测验、迁移题和独立题，两组成绩落在事先定好的“算一样”的范围里；或者第一组反倒更好。并且这个结果在几所学校、几门学科里都重复出来。那么，“没有对不上就没有建立”这句话站不住。

还要先查一件事：卡住了没有。这一道门有一个容易被忽略的前提。第二组真的卡住了吗？第一组真的没有困惑吗？

如果第二组的题太容易，大多数学生一下就做出来了，那它其实也是零困惑组。比出来一样，什么也说明不了。反过来，如果第一组听讲时有很多人一头雾水，那它也不是零困惑组。

所以每个学生在过程中都要留下记录：做之前写的预测，加上一个一到五分的“我有多确定”。课后再问一句：“刚才你卡在哪里？”

只有记录显示第二组大多数人确实预测错了、确实卡过，第一组大多数人确实没卡，这一次比较才算数。这一步叫“操控核查”，查的是实验有没有真的做成它说要做的那件事。

前人离这道门有多近。第 6 章讲过 Kapur 的“创造性失败”：先让学生做不会的题，再听讲，迁移更好。这一路研究离第一道门最近。

可是本书不拿它的结果来顶这道门。原因有两个。一是它比的东西和本书不完全一样。它的测验分的是程序、概念与迁移，不是按本书的分法，把两周后的“维持”和“粒子化”分开来测；它也没有把“零动能”单独拎出来做一组。

二是这道门要由一个事先写好推翻线的研究来推，不由一个已有的结果来替。别人赢过的仗，不能算在本书头上。

◆ 五、没有人托着，也一样吗

第二、第三道门，对着建立的另外两个条件：场和动能。

第二道门：落差大了，没有场也行吗？本书说，落差要刚好；落差太大又没有场托住，卡住就成了一锅粥，学生只会放弃。第 18 章那句“先卡住，再给场”，靠的就是这个。

观察的办法是一个二乘二的设计。落差分“大”和“适中”两档，场分“有”和“无”两档，一共四组。“落差大”是一道离学生现有本事远一截的题；“落差适中”是一道够得着、要使劲的题。两道题事先由三位不知道研究假设的老师分档，三人分档一致才用。

“有场”是：四人一组可以讨论，老师巡回，学生举手可以问一句。“无场”是：同样的时间，独自做，不交流，只有一张印好的材料。这一节课结束后，所有组都会得到完整的讲解，没有哪一组被落下。

本书预言：大落差无场组的放弃率最高，延迟保持和迁移最差；大落差有场组未必最差，甚至可能是四组里最好的。

这个预言在职场里人人见过。一个新同事第一天上班，主管丢给他一本两百页的系统手册，说“你先自己看看”，然后去开会了。手册里的东西离他原来会

的远了一大截，旁边没有一个人可以问。到了下午，他已经不在看手册，在刷手机。

同一本手册，如果旁边坐着一位老同事，情形就不同了。他翻到第三页卡住，能转头问一句“这个代码是什么意思”。到下班时，他也许只看了三十页，可是那三十页是真进去了。落差一样大，差的是有没有人托着。

放弃率怎样看？看三样：空白作答的比例；中途停笔的时间点；课后一句自评，“刚才那道题，你后来还在想吗”。

怎样才算推翻：大落差无场组与大落差有场组，在延迟保持、迁移题和放弃率上，都落在“算一样”的范围里。也就是说，落差大了，有没有人托着都一样。那么“场托住落差”这一条要改。第 11 章和第 18 章的大半，都要跟着改。

第三道门：没力气了，不托住也行吗？本书说，疲惫、孤立的学生，矛盾仍在，却付不起动能，要先补能量、先被托住，再谈方法。第 15 章讲入口三，靠的就是这个。

这一道门，不能像前两道那样分组操控。不能为了做实验让学生少睡一晚，也不能故意把一个学生孤立起来。这是研究伦理的底线，没有商量的余地。所以这一道门用“自然观察，加上托住干预”来做。

开学时，每个学生填一份简短问卷：这一周平均几点睡，早上起来累不累。再填一张同伴提名表：“你平常和谁一起做功课、问问题？”没有被人提名、也不提名别人的学生，算作“孤立”一档；睡眠长期不足、自评很累的，算作“疲惫”一档。这些只是研究用的分档，不是诊断。

然后，在同一套“先卡住再讲”的课里，把疲惫、孤立这一档的学生随机分成两半。一半照常上课。另一半在课前得到一点托住：老师课前单独打一声招呼，安排一位同伴坐在旁边，课中允许短休一次，课前可以吃点东西。

本书预言两件事。一是疲惫、孤立且未被托住的学生，延迟测验和迁移都明显少于其他同学。二是被托住的那一半，差距会缩小。

怎样才算推翻：疲惫、孤立且未被托住的学生，结晶的多少与对照组落在“算一样”的范围里。那么“入口三要先被托住”这一条要改。被托住后差距缩小，不是推翻，是本书本来的预言。

这里还有一句话，必须写进研究方案：问卷只做研究分档；若发现学生的困难明显超出课堂，要转给学校的辅导老师。身体或心里的难处真的大了，请找医生或心理咨询师。

◆ 六、刷熟了，还熔得开吗

第四道门，对着第 2 章的那句话：刷出来的也是粒子，可它只结在理念一界，碰到反例和新情境时熔不开。

先写足前人对在哪里。刷题不是全无用处。第 2 章讲过，提取练习有扎实的实证，它确实在付维持的功。本书从没说刷题是白刷，只说它停在了哪一段。

离这道门最近的老实验，第 9 章已经讲过：Luchins　1942 年的量水罐研究。一串题都用同一个绕远的办法解。做顺了以后，碰到有更简单解法、甚至老办法根本解不了的题，许多人还在用老办法，或者干脆卡住。

这个实验有力的地方，是它说明一个办法用顺了，会把人的眼睛遮住。第 9 章拿它来说明固化的样子，这里只借它来看这道门离前人有多近。

可是它停在一个地方。量水罐不是课堂里的知识，它测的是一个套路用顺以后的惯性。它没有拿刷题的学生和“先卡住再讲”的学生来比。它也没有看人在挨了一下之后，能不能重新长出新的办法。本书要的，正是后面那一截：松开以后，能不能再结晶。

它预言什么。两组学同一样东西，时间相同。刷题组做大量同类题，一类一类集中练。先卡住组做少一些的题，每道先写预测，中间夹进一两个反例。

先比同类题。两组都要达到一个事先定好的标准，比如同类题延迟测验答对八成以上。没达到标准的学生，不进入下一步比较。这样做，是为了确认两组手上都有一颗结成了的粒子。没结成的东西，谈不上熔开。

然后给“熔开测验”。几道题，表面上和练过的题一模一样，可是老办法在这里会给出错的答案，或者根本用不上。

举一个例子。学生刷了一整周的正比例题：“买 3 本练习本 6 块钱，买 9 本多少钱？”见到“一个量变大，另一个也跟着变大”，就设 $y = kx$，乘一下了事。熔开题长得一模一样：“阳台上晾 1 件衬衫，3 个小时晾干；同时晾 5 件，要多久？”刷熟的手会直接写 15 个小时。可是 5 件衬衫是一起挂在太阳底下的，还是 3 个小时。件数变了，时间没有跟着变。

停下来写“这里不能直接乘”的，算松开。能说出“成正比要两个量真的一个跟着一个变。这里件数变了，晾干的时间不跟着变”，并且能自己再举一个看着像、其实不成正比的例子，才算重新结晶。

记两样东西。一是“松开”：学生有没有发现老办法在这里不对，写出类似“这里不能直接套”的话。二是“重新结晶”：他有没有长出一个能用的新办法，并且说得出新旧两个办法各在什么条件下成立。

本书预言：在已经过了同类题标准的学生里，先卡住组松开并重新结晶的比例，明显高于刷题组。

怎样才算推翻：两组松开、重新结晶的比例落在“算一样”的范围里，或者刷题组更高。那么“刷熟的粒子熔不开”这一说站不住，第 2 章和第 9 章关于活粒子与固化粒子的那一段要改。

什么不算推翻：刷题组在同类题的延迟测验上比先卡住组好。这是预料中的事，刷题在付维持的功。第四道门只看熔开，不看熟练。

◆ 七、记得牢，就一定用得上吗

第五道门，对着五段账里的一条缝：维持和粒子化是两段，不是一段。这一条如果站不住，五段账就要并成四段。“背住型假会”这个说法也就没了着落，因为它说的正是“维持住了，却没有粒子化”。

先写足前人对在哪里。认知科学里有一项研究离这道门很近。2018 年，Pan 与 Rickard 在《心理学公报》发表过一篇元分析。它汇总了“提取练习能不能迁移”的研究。

大意是：练习时反复提取，对迁移到新问题确有帮助；可是这份帮助通常小于对原题记忆的帮助，并且很看练习和测验的形式像不像。这条结果对本书是一个有用的旁证：记得牢的那一份，并不原样搬到用得上的那一份。

可是它停在一个地方。它说的“迁移”，和本书说的“粒子化”不完全是一回事。本书的粒子化有三判据：换情境还在，不靠提示能说成一整件事，离开书和老师立得住。它没有把这三样分开来测。所以这条旁证，不能替本书过门。

它预言什么。本书预言的不是“保持和迁移无关”。恰恰相反，粒子化要以维持为前提：一条松掉了的纠缠，此刻够不着，就结不成粒子。所以两者应当正相关。

本书预言的是一个特定的形状。把每个学生画成一个点：横轴是两周后的保持成绩，纵轴是迁移和独立成绩。本书预言，这堆点会缺一个角。

迁移好的学生，几乎都保持好；可是保持好的学生里，有相当一部分迁移不好。左上角（保持差、迁移好）几乎空着；右下角（保持好、迁移差）却有一大块。右下角那一块，就是背住型假会。

日子里很容易找到右下角的人。考驾照的理论考试，许多人把题库背得滚瓜烂熟，“让行标志”“黄色网格线不能停车”，一道不错。几个星期后真开上路，到了一个画着黄色网格线的路口。前面车堵着，他还是跟着开了进去，卡在网格里。题库的答案他记得很牢，问他他也答得出来。可是那条规矩没有在路口这个现实里结成粒子。他是保持好、迁移差的那一个点。

反过来的人就少见得多：路口的规矩处处做得对，却一道理论题也答不出。这样的人不是没有，比如一位开了多年车、从没碰过题库的老司机。可是本书预言，在学校里学同一个单元的学生当中，这种人会很少。

怎样才算推翻：在大样本、多学科里，两样成绩校正了测量误差之后，几乎完全同进同退。右下角那一块，小到可以用测量误差解释。并且，有一种只练保持的干预，比如对原题做间隔检索。它每一次拉动保持多少，也同样拉动迁移和独立多少。那么“维持不等于粒子化”这一条站不住。第 8 章和第 9 章之间那道分界线，就要擦掉。**什么不算推翻：**两者正相关。这本是本书的预言。

◆ 八、四个能拿进教室的实验

五道门讲完了。下面是四个可以拿到课堂里做的实验设计。只写设计，不写结果，因为没有结果。下面出现的班数和人数，是设计用的起点，最后要按事前的样本量估算来定。先说四个实验共用的规矩。

以班为单位随机分组。同一个班的学生会互相讲题，把一个班拆进两组，两组会串味。所以按班分，并且每所学校里各组都有班。

时间相同。各组用同样多的课时和作业时间。**先登记，再收数据**。假设、分组、测量、推翻线，全部写进预先登记表。**评分盲**。改卷的老师不知道分组。

伦理。家长知情同意，学生可以随时退出。研究结束后，各组都补上研究里较好的那种教法，不让任何一组吃亏。

实验一：先卡住，还是先讲清楚（对第一道门，兼看第五道）。

- 问题：零困惑、零动能的学习，两周后是否与“先卡住再讲”一样好。
- 分组：三组。甲组，老师讲解加完整例题；乙组，AI 一键给出分步解答，学生读懂后自己誊写；丙组，先写预测、自己试，卡住后再讲。
- 测量：当堂小测；两周后延迟测验（原题型）；迁移题（换情境）；独立题（撤掉公式表与提示）；一段两分钟口述，按“能否说成一整件事”评分。过程记录：预测单、确定程度、课后“卡在哪里”一句话。
- 延迟：当堂、两周、六周，三次。
- 样本与对照：每组建议不少于六个班，约两百名学生起步。甲、乙两组都是第一道门说的“零困惑、零动能”：不先猜、不先试，解答现成摆在眼前。两组只差在解答从哪里来，一个来自老师，一个来自 AI；后者直接对着第 1 章的一键答案。丙组是本书主张的做法。
- 推翻线：甲组或乙组与丙组，在两周与六周的迁移题和独立题上落在“算一样”的范围里。并且这个结果在第二所学校、第二门学科重复出来。甲、乙两组任一组做到，都算推翻，本书不挑对自己有利的那一组。

实验二：落差与场（对第二道门，附第三道门的观察）。

- 问题：落差大时，有场无场是否一样；疲惫、孤立的学生不被托住，是否也一样。

- 分组：二乘二，四组：大落差有场、大落差无场、适中落差有场、适中落差无场。开学问卷分出的疲惫、孤立一档，在这一档里随机一半给托住。
- 测量：放弃率（空白比例、停笔时间点、课后自评）；两周后保持；迁移题。
- 延迟：当堂、两周。
- 样本与对照：四组每组建议不少于四个班。落差档由三位不知假设的老师独立分档。
- 推翻线：大落差无场与大落差有场，在保持、迁移、放弃率上都落在“算一样”的范围里；疲惫孤立且未托住者，与对照组落在“算一样”的范围里。

实验三：刷熟与熔开（对第四道门）。

- 问题：过了同类题标准的学生，刷题组与先卡住组遇到反例时，松开并重新结晶的比例是否一样。
- 分组：两组；必要时加一组“交错练习”（不同类题混在一起练）作参照。
- 测量：先测同类题延迟成绩，过标准的才进入比较；再给熔开测验，记“松开”和“重新结晶”两样，后者要能说出新旧办法各在什么条件下成立。
- 延迟：练习结束后两周，做熔开测验。
- 样本与对照：每组建议不少于六个班。熔开题由不参与教学的老师出，事先请另一批学生试做，确认老办法在这里确实会出错。
- 推翻线：两组松开并重新结晶的比例落在“算一样”的范围里，或刷题组更高。

实验四：记得牢与用得上（对第五道门）。

- 问题：维持与粒子化，在数据上能不能分开。
- 分组：分两步。第一步不分组：在几所学校的大样本里，对同一单元测两周后的保持、迁移、独立、口述整体，看两样成绩的分布形状。第二步分两组：一组只做原题的间隔检索，专练保持；一组做换情境的检索，练迁移。看各自拉动了什么。
- 测量：每种成绩至少两套平行题，用来估计测量的信度，以便校正误差。
- 延迟：两周、六周。
- 样本与对照：第一步建议上千人起步，跨至少三门学科。
- 推翻线：校正误差后两样成绩几乎同进同退，“保持好、迁移差”那一块小到可用误差解释；第二步里，专练保持的一组，迁移和独立也同样提高。

四个实验和五道门的对应，压成一张表：

实验	主要对哪道门	关键比较	延迟	本书预言	推翻线
一 先卡住还是先讲清	①，兼⑤	讲解组、AI 答案组，对先卡住组	当堂、两周、六周	当堂持平或落后，两周后迁移、独立领先	迁移与独立落在“算一样”范围，且跨校跨科重复
二 落差与场	②，附③	大落差有场对无场；疲惫孤立者托住对未托住	当堂、两周	大落差无场放弃最多；托住后差距缩小	有场无场一样；未托住者与对照一样
三 刷熟与熔开	④	过了同类题标准后，刷题组对先卡住组	两周	先卡住组松开再结晶的比例更高	两组比例一样，或刷题组更高
四 记得牢与用得上	⑤	保持与迁移、独立的分布形状；专练保持的干预	两周、六周	缺一角的形状；专练保持不同等拉动迁移	校正后同进同退；专练保持同等拉动迁移

没有研究团队，一位老师也能做的小版本。上面四个实验，要几所学校、几十个班、一个统计组。一位普通老师手上只有两个平行班，也能做一个小版本。它推不倒本书，可是能让这位老师自己看清，本书的说法在他的课堂里输没输。

做法是：同一个单元，两个班轮流。第一周甲班先讲后练，乙班先卡住再讲；第二周对调。每次课都收预测单，封存。两周后，两个班做同一张延迟小测，里面一半是原题型，一半是换了情境的题。改卷前，请同事把卷子上的班级遮掉。

小测改完，看三样东西。一是同一周的内容，先卡住的那个班和先讲的那个班，原题型差多少。二是换情境的题差多少。三是预测单上写错了的学生和写对了的学生，后来各自怎样。

事先在本子上写一句：“如果换情境的题两班差不到五分，我就不再说‘先卡住更好’。”写下来，日期标上。一个学期做三四个单元，这位老师手上就有了一本自己的账。还要写清一件事：哪一道门被推开，本书改哪里。

被推开的门	要改的承重命题	要重写的章
① 不卡住也一样	第 3 条：没有对不上，就没有建立	第 1、7、10、18、19 章
② 没有场也一样	第 6 条：卡住要有场托住	第 11、16、18 章
③ 没力气也一样	第 7 条：入口三先要被托住	第 15 章及第 13 章末
④ 刷熟也熔得开	第 5 条：刷熟是会的赝品	第 2、9、20 章
⑤ 记得牢就会用	第 1、4 条：维持与粒子化是两段	第 3、8、9、20 章，五段账并为四段

◆ 九、对不上，要先写在纸上

五道门守的是结果。还有一道闸，守的是过程：对不上，必须在事前、用旁人能核对的办法指认出来。没有这道闸，前面五道门都会漏。研究做完，任何一个学会了的学生，回头都能说“他那时一定有过对不上”；任何一个没学会的，

也能说“他的对不上太大了”。这正是阿德勒那一千零一例的路数。本书在课堂上用的指认办法，有下面几样。

一是预测单。做之前，学生在一张小纸上写三样东西：我以为结果是什么；我有多确定（一到五）；一句理由。写完收上去，标上时间，老师当场封存，课后才拆。这就是第 10 章许文静那张三分钟纸条：事前的、个人的、书面的，只是多了确定程度和封存。

做完以后，对照预测单和实际结果。预测和结果不同，才算记录在案的一次对不上。预测对了的学生，在这道题上就是“对得上”。本书预言他在这道题上新建的东西少，不能把他后来的进步算到这次对不上头上。一张填好的预测单，大概是这样：

> 题号：3　时间：10:05
>
> 我以为：来回平均速度是每小时 50 公里。
>
> 我有多确定：4
>
> 理由：60 和 40 中间就是 50。

做完以后，老师在旁边盖一个“48”。这张纸上的“50”和“4”，就是这个学生在这道题上的对不上，写在结果出来之前，谁都改不了。

确定程度那一栏也有用。写“50，确定程度 1”的学生和写“50，确定程度 5”的学生，挨的那一下不一样重。本书预言后者的落差更大，若有场托住，建起来的也更多；若没有场，放弃得也更快。这本身又是一条可以查的预言。

二是老师事先写下卡点清单。上课前，老师写下他估计学生会在哪几处卡住、会卡成什么样。这份清单也封存。课后对照：卡在清单上的有多少，卡在清

单外的有多少。清单外的卡点不是坏事，只是要老老实实单列，不能事后说“这也是我设计好的”。

三是由第三方判。预测单上“对上了没有”，由不知道研究假设、也不知道学生后来成绩的人来判。判不准的，记为“未判”，不硬归。

四是课后一句话。课后让学生写一句：“我原来以为……，结果……，我现在觉得……”。这一句要拿去和封存的预测单对。两者对得上，才算这次对不上被他自己认领了。两者对不上，以预测单为准，不以事后的说法为准。

五是找不到就照实写。有的学生学会了，可是预测单上找不到任何对不上的记录。这些学生不硬归，单独列一档，在报告里写明有多少。这一档如果很大，本身就是对本书的一次打击。它说明有不少学会，并不经过本书说的那一下。

这里还有一个绕不开的难处，也要照实写。写预测这个动作，本身就可能制造对不上。一个学生本来没想过结果，被要求写下一个预测，他手上就有了一个会被结果打脸的东西。所以在实验一里，“零困惑”的那两组不能也写预测单，否则它们就不再是零困惑了。

本书给的办法是：零困惑组的指认挪到前一天，用另一组题做一个简短的前测。这个前测只用来估计他们原有的纠缠，不在当天的学习里出现。这个办法不完美。可是把难处写出来，总比假装它不存在要好。这些办法，也可以压成一张小表，供老师直接用：

办法	什么时候做	谁来做	留下什么	防的是什么
预测单	做之前	学生	预测、确定程度、一句理由，封存	事后说“我早觉得不对”
卡点清单	上课前	老师	估计的卡点，封存	事后把任何卡住都说成设计好的
第三方判	课后	不知假设的人	“对上／没对上／未判”三档	研究者自己替学生判

办法	什么时候做	谁来做	留下什么	防的是什么
课后一句话	课后	学生	“原来以为……结果……现在……”	对不上被谁认领说不清
未指认单列	分析时	研究者	学会了却找不到对不上的人数	把每一次学会都硬归给对不上

◆ 十、那张表，终于填上了

回到星期二晚上。十点过后，叶清把五道门一条条抄进了那一栏。抄到第四道门时，她决定先做实验三。

合作学校里有一位教三年级数学的傅老师，早就跟她抱怨过：“学生刷到麻木了，题目一换个说法，全班一起倒。”他愿意把两个班交出来。另外两所学校的班加进来，才够得上每组六个班的起步数。

她在方案里写下要教的单元：百分比的增减。熔开题她已经想好了一道：一件衣服先涨价两成，再降价两成，是不是回到原价？刷熟了“涨多少、降多少，正好抵消”的学生，会说回到原价。其实不是，比原价少了百分之四：一百块涨到一百二，再降两成，是九十六。

她又写下熔开测验的记分规则。写出“这里不能直接抵消”，算松开。能用一个具体的价钱算给别人看，并说出“两次的两成，是对着两个不同的底数算的”，才算重新结晶。

她顺手把这道题拿给自己试了一遍。她当然知道答案，可是写预测单时，她还是先写了“回到原价，确定程度一”，再划掉。那个“一”，是她给自己留的一点诚实：凡是做过题的人，第一眼都会往那边偏一下。

最后那一栏，她写的是：“本研究只比较过了同类题标准的学生。若刷题组遇到此类题时松开并重新结晶的比例，与先卡住组落在事先定好的等效范围内，或高于后者，即判为推翻。被推翻的，是本研究所依的‘刷熟粒子熔不开’一

说。我们将在报告中如实写明，并据此修改相关的课堂建议。”她又在下面加了一行：“若同类结果在另一所学校、另一门学科也出现，本研究所依的那本书，第 2 章与第 9 章应当改写。”写完，她把预先登记表存进登记平台。按下提交的那一下，这张表就再也改不了了。

第二天中午，她把打印出来的那一份递给邹敏行。他从头翻到尾，在第四道门那一行停了很久。“现在它可以输了。”他说，“能输的东西，我才帮你算。”本书把这一句当作这一章最好的评语。

这件事里，叶清并没有“想通”什么。她手上的那套说法，在一张改不了的表上，第一次有了会输的样子。这一段经历，显出了一个新的她：一个替自己相信的东西，先写好输法的研究者。

放回日子里。你不做研究，也用得着这一章。如果你是老师，下一节课前，花两分钟写下你估计学生会卡在哪里，封进信封。下课以后打开，对一对。对上的不多，不丢人；不写下来，你会一直觉得自己早就料到了。

如果你是家长，下一次孩子说“我会了”，先别急着高兴，也别急着怀疑。请他写一句预测：“这道题如果换成这样，你觉得答案会变吗？”写下来，再做。对不上的那一下，你和他都看得见。

如果你自己在学一样新东西，替你的学法写一道门：什么情况出现，你就承认这个学法对你没用。写不出来，说明你还没有认真对待它。

成人也有现成的小版本。第 17 章里钱慧敏学新看板，用的是一个笨办法：先把预测写在纸上，再让新看板和旧模板并排做三个月，每月对一次。哪里对不上，就讲出来。这其实就是一个人做的一项小实验：预测先写下，对照摆在旁边，时间事先定好。三个月后，新办法输没输，她自己看得见。

对一套说法最大的尊重，不是信它，是给它一个输的机会。

带走的话

一套说法能讲通的事越多，越要先写下它会在哪里输；先写在纸上的对不上才算数，事后找到的不算。

小　账

波普尔立了“能被推翻”的规矩，预先登记立了“先写后看”的程序；本书替自己写下五道门和一道闸，把“对不上”从事后好用的词，变成事前可查的记录。

研究者事后回头说“那里一定有过对不上”的那一下，就是发生被收回为发现的地方。本该在学生身上发生的一次结晶，被改写成了研究者在数据里找到的一样东西。

想一想

1. 你自己认定“有用”的一个学习办法，什么结果出来，你会承认它对你没用？
2. 上一次你说“我早就知道会这样”，那个“早就”，有没有写在纸上？
3. 你的孩子或学生说“我会了”，你会用哪一道题，让这句话有机会被推翻？

◆

22

第 22 章

回到那份作业

这一章的问题

孩子把上周全对的作业重做一遍，这回慢了一倍，还卡了三次——这一晚，到底比上周多留下了什么？

◆ 一、还是那二十道题

又是一个周日晚上。宏茂桥那套组屋里，饭桌刚收拾干净。沈知远把上周那本作业本放在桌上，没有翻开。旁边是一本新的草稿本，和一支削好的铅笔。

这个主意是周六晚上定下来的。林佩君问他：“明天，把上周那二十道再做一遍，好不好？”他愣了一下：“都做过了，全对的。”“全对的是那一本。”她说，“这一次换一种做法。”

上周一晚上那张几乎空白的小测卷，她一直没有扔，压在冰箱贴底下。那一晚她问儿子“你是在哪一步卡住的”，他答不上来。这一个星期，她一直在想这件事：一个人连自己卡在哪里都说不出，是因为他一次也没有卡住过。所以这一次，她想让他卡住。

这个念头，有一半是她自己试出来的。周三晚上，她在公司碰上一条新的会计准则，讲租赁怎样入账，条文绕得很。她学儿子的样子，把条文贴进手机上的 AI 应用，请它讲一讲。AI 讲得很好：先讲为什么要改，再讲怎样分录，还举了一个仓库租约的例子。她一边看一边点头，心里说了一句“原来如此”。

周四上午，她要真做一笔仓库租约的分录。她打开表，手放在键盘上，第一步该借记哪个科目，她想不起来了。昨晚那个讲解长什么样，她记得清清楚楚：分了四段，第二段有一张小表。可是表里填的是什么，她脑子里是空的。她坐在工位上，愣了一会儿，然后笑了一下。这就是她儿子周一早上的那二十分钟。

那天上午，她没有再去翻 AI 的讲解。她把准则条文打印出来，先自己在纸上写了一笔分录，写完再去对条文。第一笔写错了，错在把一笔该分摊的钱一次记了进去。她改过来，又写了两笔，到中午才算弄明白。那个上午，她卡了一次，自己翻了两个钟头，最后接上了。她知道这一次留下了。

她没有给他讲十字相乘。说实话，她自己读书时学过，到今天还依稀记得怎么画那个十字。周六晚上她差一点就坐下来讲了。她拿起笔，又放下。她想起二十年前那个账不平的下午：老会计只说了一句话，没有接过她的账本。

她跟儿子商量了三条做法。第一条，每一道题，动笔算之前，先在旁边写一个猜测：你觉得它会拆成哪两个括号。写下来，不许改，再去算。第二条，卡住了，先在草稿本上写一行“卡在哪一步”，再去问人。问同学可以，问她也可以，问手机上那个 AI 也可以。可是只能问“我卡在这里，给我一个提示”，不要整份解答。第三条，上周那本作业本合上，放到她那一边。

沈知远想了想，说：“那会做很久。”“会。”她说，“做不完也没关系。”晚上七点半，他翻开草稿本，抄下第一题：$x^2 + 5x + 6$。

◆ 二、先写下你以为的

第一题，他在旁边写：猜 $(x + 2)(x + 3)$。然后乘开验算：$x^2 + 3x + 2x + 6$，正好是 $x^2 + 5x + 6$。猜对了。

第二题、第三题、第四题，也都是 x^2　前面没有数的那一种。他每一道都先猜，每一道都猜对。找两个数，乘起来等于常数，加起来等于中间那一项。这条规矩是这个单元一开头就学的，前几周练了很多，他用得很顺。

先猜这一步，他起初觉得多余。答案反正要算出来的，猜它做什么？可是猜和不猜，差的正是一样东西：一个可以被结果打脸的东西。不猜，算出什么就是什么，他永远只会觉得“嗯，是这样”。猜了，结果出来以后，就有两行字摆在一起，对得上，还是对不上，一眼看得见。第 21 章叶清的预测单，在研究里做的也是这件事。

这四道题，他什么新东西也没有学到。也不需要学：那几样东西早就在他身上结好了。猜测和结果对得上，就没有对不上，也就没有新的建立。这一段不是“在场”，在场是特征挨在一起、还没接上；这里的特征都在，而且早已接好，一碰就动。用本书的话说，这是把一颗早已结好的粒子再用了一次。

第五题是 $2x^2 + 7x + 3$。他照老规矩找两个数：乘起来等于 3，加起来等于 7。1 和 3，加起来是 4。没有别的了。他在旁边写下猜测，字写得有点犹豫：“$(x + 1)(x + 3)$，前面再乘个 2？”乘开一验：$2(x^2 + 4x + 3) = 2x^2 + 8x + 6$。不对。中间是 $8x$，不是 $7x$；最后是 6，不是 3。

他盯着这一行，看了很久。

上周日他也做过这道题，那时候一点也没有停。AI 的解答直接告诉他答案是 $(2x + 1)(x + 3)$，他看了一眼，觉得合理，就抄了。他从来没有自己去找过那两个数。所以他从来不知道，那条早就用顺了的规矩，到了 x^2　前面有数的时候，是不灵的。这是他第一次撞上它不灵。

那条规矩是他手上一颗早就结好的粒子，稳稳当当，一直好用。现在它和纸上这一行算式对不上了。这一处对不上，是写在纸上的：猜测在左边，乘开的结果在右边，两行字，谁也改不了。

他在下面写了一行：“卡在：乘起来是 3、加起来是 7 的两个数，没有。”写完这一行，他才发现，这是他第一次说得出自己卡在哪里。

◆ 三、带着卡住去问人

林佩君在客厅另一头对账，听见笔停了很久。她走过来，没有看题，先看那一行字。看完，她问：“那你觉得，问题出在哪里？是题错了，还是你那条规矩用错了地方？”

他说：“题不会错吧。”“那就是规矩。”她说，“我们对账也是这样。账不平，先别急着改数字，先看是哪一条规矩用错了地方。”

她说完就回去了。她没有说那条规矩错在哪里，因为她自己也说不太清楚；就算说得清楚，她也决定先不说。

沈知远拿起手机，给同学拉吉发了一条消息：“$2x^2 + 7x + 3$ 你怎么找那两个数的？我用乘起来是 3、加起来是 7，找不到。”拉吉是他小组里的同学，数学比他好一些。过了几分钟，回过来一条：“你先别找那两个数。随便写一个 $(2x + 几)(x + 几)$，乘开，看中间那一项是怎么凑出来的。”他照着做。随手写了 $(2x + 1)(x + 1)$，乘开：

$$2x \cdot x = 2x^2 2x \cdot 1 = 2x 1 \cdot x = x 1 \cdot 1 = 1$$

合起来是 $2x^2 + 3x + 1$。中间那个 3x，是 2x 加上 x 凑出来的。他又写了一个 $(2x + 1)(x + 2)$：中间是 $4x + x$，等于 5x。再写 $(2x + 3)(x + 1)$：中间是 $2x + 3x$，等于 5x。

写到第三个，他停住了。中间那一项，不是两个数直接加起来。是前面那个2，先乘了后面括号里的数，再加上前面括号里的数。那个2，一直在里面。他又拿笔，在草稿本上写了一行字，写得很重：“那个2也在里面。”

规矩其实不难改。两个数还是要乘起来等于3，可是加起来的时候，有一个要先被2乘一下。1和3：$2 \times 3 + 1 = 7$。对上了。所以是 $(2x + 1)(x + 3)$。他乘开验了一遍：$2x^2 + 6x + x + 3 = 2x^2 + 7x + 3$。上周日晚上，他抄下来的就是这个答案，一字不差。可是这一次，它是他自己找出来的。

这一下，就是本书说的“建立”。2、1、3、7、交叉乘、再相加，这几样东西上周就全在他眼前，被AI那份解答一条线串着。今晚，那条线没有了。他把它们一样一样拆开，乘开、对照、再重新接起来，接成一团彼此牵连的东西：动一个数，别的跟着动。

拉吉，是场。他没有给答案，只给了一个方向，托住了这一次卡住，不让它变成放弃。乘开三个括号、看出那个2的，是沈知远自己。动能是他付的。

AI那份解答里其实也画着这个关系。前言里说过，那个十字是蓝色的，在一个灰色的小框里。十字的左上角就是那个2，斜着连到右下角的3。上周他看了，看懂了，点了头。

那个2上周就在场，只是没有接上。

接上它，花了他二十五分钟：写错一个猜测，乘开三个括号，盯着三行算式看出一个规律。上周日，这道题只花了他一分钟。多出来的二十四分钟，就是动能的账单。第6、7章说过，难度就是这张账单。上周那一分钟很便宜，所以什么也没买到。这二十四分钟很贵，买到的是一样带得走的东西。

这张账单没有人能替他付。拉吉不能，妈妈不能，AI 也不能。AI 上周替他付过一次，付得又快又好，结果那一次的东西，记在 AI 的账上，不在他身上。

他往后翻，挑了同一类的第十四题来试：$3x^2 - 11x + 6$。这一次他先写猜测：“乘起来是 6；其中一个先乘 3，再加另一个，等于 −11。猜 −2 和 −3。”验算：$3 \times (-3) + (-2) = -11$。对上了。$(3x - 2)(x - 3)$。

然后他翻开上周一那张小测卷，冰箱贴底下抽出来的，第一题是 $3x^2 - 10x + 8$。他找到了 −4 和 −2：$3 \times (-2) + (-4) = -10$。$(3x - 4)(x - 2)$。上周一早上，他在考场里也试出过这一组，可是不敢确定是碰上的，还是本该这样找。现在他知道了，不是碰上的。

那天晚上，他一共做了十二道题，卡住的有三道。第五题是头一次。第二次在第九题 $2x^2 - x - 6$。常数是负的，两个数一正一负。他先写了 $(2x - 3)(x + 2)$，乘开是 $2x^2 + x - 6$，中间一项的符号反了。他盯着两行字看了十来分钟，才看出来是哪个数该带负号，换成 $(2x + 3)(x - 2)$，对上了。

第二十题 $6x^2 - 7x - 3$ 卡得最久。6 可以拆成 6 和 1，也可以拆成 3 和 2，他一组一组地试。试到第三十分钟，他有点烦了，拿起手机，照第二条的规矩打了一行字：“$6x^2 - 7x - 3$，我试了 $(6x \ldots)(x \ldots)$，凑不出 −7x，给我一个提示，不要答案。”

AI 回得很快，第一句是提示：“试试把 6 拆成 3 和 2。”第二句已经开始写“所以可以分解为……”。他把手机扣在桌上，没有往下看。

这一下很小，可是不容易。那台机器很愿意帮忙，帮着帮着，就要把整份账替他做平。第二条规矩挡住的，正是这一步。他按那一句提示，换成 $(3x \ldots)(2x \cdots)$，又试了十分钟，草稿本写满了两页，最后找到 $(3x + 1)(2x - 3)$。

十点半，林佩君说：“今天到这里。”剩下的八道，他没有做完。上周日，二十道题用了一个半小时，一道也没有卡。这一周，三个钟头做了十二道，卡了三次，一次卡了四十分钟。

他合上草稿本，说了一句：“好累。”林佩君听出来，这个“累”和上周日那种做完作业的松快不一样。她没有让他把剩下的八道补完，也没有说“明天早点起来做”。她给他热了一杯可可，催他去洗澡睡觉。

第 15 章讲过，力气是会用完的。一个晚上卡三次，已经付了不少。剩下的八道题再硬撑下去，第四次卡住时，旁边有没有人托着都不要紧了，他已经没有力气去接。今晚留下的那几处接头，要靠一夜的睡眠去稳住，不要靠多做八道题。

◆ 四、周一，周四，再说一遍

周一早上，七点十分，沈知远坐在去学校的公交车上。他没有拿书，也没有拿草稿本。他在脑子里给自己出了一道题：$2x^2 + 5x + 2$。乘起来是 2，其中一个先乘 2，再加另一个，等于 5。1 和 2：$2 \times 2 + 1 = 5$。所以是 $(2x + 1)(x + 2)$。他在心里乘开验了一遍，对上了。

这一遍很短，只有一站路。可是它是在没有草稿本、没有拉吉、没有妈妈的时候做的。昨晚接起来的那团东西，被他自己拿出来用了一次。这是第一次维持。

第二节课后，郭老师把他叫到走廊上，就是上周留言里说的“下周再聊聊”。郭老师问他周末怎么样。他把草稿本递过去，翻到第五题那一页。左边是猜测，右边是乘开，底下那一行“那个 2 也在里面”写得很重。

郭老师三十出头，教了七八年书。她看了一会儿，没有夸他，问了一句：“为什么是那个 2 去乘后面的数，不是乘前面的？”他愣了一下，说不上来。他只知道这样算是对的。

“你回去乘开看看。”郭老师说，“想清楚了，下次讲给我听。”他说好。走回教室的路上，他想：昨晚接起来的东西，还有一块没接牢。

郭老师这一问，问在一个好地方。她看得出，那团东西已经建起来了，只是有一处接头还没接牢。她没有替他把那一处拧紧，只是用手指点了一下：“这里。”

一条建起来、却还有一处没接牢的纠缠，最怕的是有人当场替它拧紧。

拧紧的人是老师，那一处的连接度就记在老师身上。留给他回家自己拧，那一处才记在他身上。

周一晚饭后，林佩君说：“你讲给我听一遍吧。我早忘光了，你就当我是外行。”他拿了一张纸，给她讲 $2x^2 + 7x + 3$。讲到“那个 2 先乘后面的数”，她问：“为什么是后面的？”跟郭老师问的一模一样。

这一次他想到了办法：把 $(2x + 1)(x + 3)$ 一项一项乘开给她看。$2x$ 乘 3 得 $6x$，1 乘 x 得 x。2 跟着 $2x$ 走，所以它碰到的，一定是另一个括号里的那个数。讲完，他自己也松了一口气。郭老师的那个问题，是在给妈妈讲的时候才通的。

其实那天课间，他已经先跟拉吉对过一次。拉吉的办法和他不一样。拉吉不画十字，用的是课本上另一种做法：把 x^2 前面的数和常数先乘起来，$2 \times 3 =$

6。再找两个数，乘起来是 6、加起来是 7，就是 1 和 6；然后把中间的 7x 拆成 x + 6x，两两一组提公因式。

$2x^2 + x + 6x + 3 = x(2x + 1) + 3(2x + 1) = (2x + 1)(x + 3)$。

答案一样。沈知远看着拉吉的草稿，看了好一会儿，说：“你那个 6，就是我那个 2 乘 3。”拉吉想了想：“对，你那个 2 是先乘进去再加，我是一开始就乘进去了。”两个十四岁的男孩，在课间的走廊上，把两种做法对上了。

这一段对话不长，可是它在做一件要紧的事。同一个东西，从另一条路走过去，还认得出来，还是同一个东西。他那条刚建起来的纠缠，在这里多接上了一个点：十字相乘和拆中间项，是一件事的两种写法。接上的点越多，断起来就越难。

林佩君其实并没有完全听懂。可是她不需要听懂。她坐在那里，问了一句外行的话，就够了。

周四晚上，他又坐到饭桌边。这一次是她事先说好的：不看周日的草稿本，从空白开始，做两道没见过的。第一道：$2x^2 - 7x + 3$。

他写下猜测：“乘起来是 3，其中一个先乘 2，再加另一个，等于 −7。猜 −1 和 −3：$2 \times (-3) + (-1) = -7$。”所以是 $(2x - 1)(x - 3)$。乘开一验，对。用了三分钟。

第二道：$4x^2 - 4x - 3$。这一道他写得很快：$(2x + 3)(2x - 1)$。然后习惯性地乘开验算：$4x^2 - 2x + 6x - 3 = 4x^2 + 4x - 3$。中间一项，符号反了。

他没有慌。周日在第九题上卡了十来分钟的那一下，这回一眼就认了出来：是两个括号里的正负号放反了。他换成 $(2x - 3)(2x + 1)$，再乘开：$4x^2 + 2x - 6x - 3 = 4x^2 - 4x - 3$。对了。用了六分钟。

周日那一晚，$2x^2 + 7x + 3$ 他卡了二十五分钟。四天以后，同样的一类题，三分钟。中间有一次符号放反，是他自己乘开时抓出来的。

这就是维持。周日建起来的那条纠缠，周一在公交车上被拿出来用了一次，晚饭桌上被讲了一次。周四，它又被从空白里做了一次。每用一次，它就紧一些。第 8 章说维持要付功，这几次就是在付功：间隔开来，每一次都从脑子里往外拿，而不是看着书往里看。

第 1 章里，上海那位陆晓岚老师有一个“回锅”的做法：批完作业，第二天挑一道题换个数字，请人上黑板做。沈知远家里的周四，做的是同一件事，只是挪到了饭桌上，隔得更久一点。

为什么周四那道题只用了三分钟，而不是重新卡二十五分钟？因为周日那一晚，他付的力气多。他不是看了一个规矩，是乘开了三个括号、试了好几组数、自己看出那个 2。接上的点多，断起来就难。建立时付的动能，到维持时变成了连接度，替他省下了二十二分钟。这也说明，维持不是从周一才开始的。周日那三个钟头，已经替周四付了一大半的账。

那个随手乘开验算的习惯，也是在这几天里长出来的。林佩君看见了，没有说话。她想起自己刚入行那几年：每做完一张凭证，老会计都要她回头加一遍。

◆ 五、纸箱剪出来的长方形

周六下午，林佩君从公司带回来几个压平的纸箱。物流公司里最不缺的就是纸箱。她本来是想拿来装旧书的。沈知远看见了，忽然说：“能给我一个吗？”

他想试一样东西。周四晚上睡前，他一直在想一件事：x^2　是一个边长为 x 的正方形，x 是一条长 x、宽 1 的长条，1 是一个小方块。那么 $2x^2 + 7x + 3$，就是两个大正方形、七条长条、三个小方块。如果因式分解是对的，这些东西应该能拼成一个长方形，长和宽就是那两个括号。

他用尺子和美工刀，从纸箱上裁下两个大正方形、七条长条、三个小方块，在饭桌上摆。第一次没拼成。他把两个大正方形并排放，长条贴在旁边，剩下三个小方块怎么也塞不进角落。他把一条长条拿开，换了个方向，再试。试到第四次，东西全放进去了，严严实实，没有缝，也没有多出来的。

他拿尺子量了量拼出来的那个长方形。一边是两个大正方形的边再加一个小方块的宽，就是 $2x + 1$；另一边是一个大正方形的边再加三个小方块的宽，就是 $x + 3$。

$(2x + 1)(x + 3)$。

他在饭桌前坐了一会儿，没有说话。然后他又裁了几块，想试试别的。$2x^2 + 5x + 3$，两个大正方形、五条长条、三个小方块，拼出来是 $(2x + 3)(x + 1)$，他乘开一验，对。

再试 $x^2 + x + 1$：一个大正方形、一条长条、一个小方块。他摆了十几分钟，怎么也拼不成长方形，总有一个角空着，或者多出一块。

他跑去问妈妈：“是不是有的式子根本拆不开？”林佩君说：“你说呢？”他又摆了一会儿，自己答了：“拆不开的，就是拼不成长方形的。”

这一句，课本里要到后面才讲，讲的时候用的是别的说法。可是在这一天，它已经在一块拼不拢的纸板上，先落了地。

那个十字、那两个括号，从周日起是纸上的东西。现在，它们是饭桌上一块纸板拼出来的长和宽。草稿本上的算式变成了摸得到的东西，这是理念到现实的一步迁移。

林佩君走过来看了一眼，说：“那我也出一道。跟我们仓库有关的，是我编的。”她说，仓库有一块货区，原来是正方形，边长 x 米。现在要扩：一边加 2

米，另一边加 4 米。“假设房东报来的新面积写成 $x^2 + 6x + 8$ 平方米，你帮我对一对，这个数对不对。”

他在纸上写：乘起来是 8，加起来是 6，x^2　前面没有数，就直接找。2 和 4。$(x + 2)(x + 4)$。“对的。”他说，“一边加 2，一边加 4。”“要是房东写的是 $x^2 + 6x + 9$ 呢？”他又算：3 和 3。$(x + 3)(x + 3)$。“那就不对了。”他说，“那是两边都加 3 米，不是一边 2、一边 4。面积算出来也不一样。”林佩君点点头。这是她的老本行：两样东西摆在一起，对得上，还是对不上。

这一个下午，可以拿第 9 章的三判据量一量。**稳定**：题换了样子，从“分解因式”换成“仓库的面积对不对”，他还认得出来。**整体**：从拼纸板到讲仓库，他没有看草稿本，也没有人提示，从头到尾说成了一件事。面积是长乘宽，因式分解就是从面积倒回去找长和宽，中间那一项是交叉的两块拼起来的。**独立**：没有课本，没有手机，没有拉吉。

三样都在。到这里，周日建起来、这几天维持住的那条纠缠，结成了一颗粒子。本书说，这一下叫学会，也叫一个符号的发生。

它落在哪里？落在饭桌上那个纸板长方形里，那是现实；落在“长和宽乘出面积、面积也能倒回长和宽”这句话里，那是理念；还落在他身上一样很小的东西里。

那天晚上睡前，他跟妈妈说了一句：“下次卡住，我就先乘开看看。”这句话很小，可是它说的不是一道题，是他自己：一个卡住了，知道先去哪里找的人。这是自我符号。

这颗自我符号，是从另一颗旁边长出来的。交那张几乎空白的小测卷的那个周一，课间拉吉问他考得怎样，他说了一句：“我数学不行。”这句话说得很轻，像随口一说。可是这种话说多了，会在一个人身上结成一样硬东西。

第 9 章和第 20 章都讲过，“我是学渣”一类的话，一旦结死，就是自我那一端的石心。以后每一次卡住，都只会被它解释成“果然不行”，再也不会被当成一处可以接上的缝。

这些天，那句“我数学不行”没有被谁驳倒。没有人跟他说“你其实很行”。它只是慢慢地没有用处了：卡住的时候，他手上有了另一样东西可以拿出来，“先乘开看看”。

◆ 六、一道变了形的题

又过了一个星期。周二的数学课快下课时，郭老师在白板上写了一道题，说是给愿意想的同学的，不收，不算分：

$2(x+1)^2-7(x+1)+3$

沈知远抄了下来。他看了半天，不知道从哪里下手。他手上那颗粒子说的是：先看 x^2 前面的数，再找两个数，交叉乘了加起来，等于 x 前面的数。可是这道题里，x^2 前面的数在哪里？它藏在括号里。2 是 $(x+1)^2$ 前面的数，不是 x^2 前面的数。规矩又不灵了。

这一次，他没有直接问人。他先用了一个最笨、也最稳的办法：把括号全部乘开。

$2(x^2+2x+1)-7x-7+3=2x^2+4x+2-7x-4=2x^2-3x-2$

第一次乘的时候，他把 $-7(x+1)$ 写成了 $-7x+7$，得出来的式子不对，验算时发现了，改回 $-7x-7$。然后用他的老办法分解：乘起来是 -2，其中一个先乘 2，再加另一个，等于 -3。他找到 1 和 -2：$2\times(-2)+1=-3$。所以是 $(2x+1)(x-2)$。

用了八分钟。答案是对的。如果停在这里，这也算做出来了。老办法没有熔开，只是绕了个弯，把一道新题硬掰回了老样子。

可是他看着这道题，总觉得哪里眼熟。2、−7、3。他翻开草稿本，往前翻到周四晚上那一页。$2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)(x - 3)$。同样的三个数。他把两个答案并排写在一起：

$(2x - 1)(x - 3)(2x + 1)(x - 2)$

看了一会儿，他在第一行的 x 底下，都写上了一个 $(x + 1)$：

$(2(x + 1) - 1)((x + 1) - 3)$

乘开括号里的东西：$2x + 2 - 1 = 2x + 1$；$x + 1 - 3 = x - 2$。就是第二行。他坐在那里，手里的笔半天没有动。

这道题根本不用乘开。$(x + 1)$ 就是一个 x。不，不是一个 x，是 x 原来站的那个位置，现在站了另一样东西。十字相乘认的从来不是 x 这个字母，认的是一个形状：某一样东西的平方，前面一个数；那样东西本身，前面一个数；再加一个常数。那样东西是 x 也好，是 $(x + 1)$ 也好，是什么都好。

这一下，就是本书说的“熔开再结晶”。他手上那颗粒子“十字相乘对 x 用”，在这道题面前松开了。它没有碎掉，也没有被扔掉，而是被拆开，和一样新东西接在一起，重新结成了一颗大一些的粒子：“十字相乘对一个形状用”。

为了确定，他自己又出了一道：$(x - 3)^2 + 5(x - 3) + 6$。把 $(x - 3)$ 当成一样东西：乘起来是 6，加起来是 5，2 和 3。所以是 $((x - 3) + 2)((x - 3) + 3)$，就是 $(x - 1)x$。用了不到一分钟。他还是乘开验了一遍：$x^2 - 6x + 9 + 5x - 15 + 6 = x^2 - x$，正好是 $x(x - 1)$。

第二天，他把这两道题拿给郭老师看。郭老师看了看他把 (x + 1) 写进 x 位置的那一行，问：“你怎么想到的？”他说：“它跟周四那道题，长得一样。”郭老师笑了笑，没有多说，在他草稿本那一页的角上画了一个小小的圈。

下一节课，郭老师给全班讲了这道题。她在白板上写了两个字：“换元”。把 (x + 1) 换成一个新字母 y，先分解 $2y^2 - 7y + 3$，再把 y 换回去。沈知远在本子上抄下这两个字。

他抄得很平静，像是在给一样早就在手里的东西贴一张标签。这个词，是理念符号。它在课本里一直等着，可是对他来说，是先有了那一晚把 (x + 1) 写进 x 位置的那一下，这个词才有地方落脚。

如果顺序反过来，先听到“换元”两个字、再看老师在白板上换一遍，他多半也会看懂、点头、抄下来。那就又是一个在场。

拿第 20 章那张量表来看这几个星期，四项各自过没过门槛，一项一项看得清。稳定：仓库题、纸板题，换了样子都认得出来；两周多以后的单元测验里也还在（见下一节），过了。整体：周一晚饭桌上给妈妈讲，周六讲仓库，都不看本子，从头说成一件事，过了。独立：公交车上、周四晚上，没书没人，过了。熔开：$2(x + 1)^2 - 7(x + 1) + 3$ 面前，老规矩松开，结成“对一个形状用”，并且能自己出一道新题去验它，也过了。

四项不加总分，只看各自过没过门槛。要是只看分数，那道题不收、不算分，什么也记不下来。

这道题，班上做出来的同学不多。做出来的人里，大多数也是全部乘开再分解的。乘开再分解没有错，那是老粒子还够用。可是对沈知远来说，那一晚多出来的一样东西，不在答案里。

◆ 七、妈妈这一次做了什么

回头看这两个周日，林佩君做的事，几乎都是“没做”。她没有讲题。周六晚上她差一点就讲了，拿起笔又放下。之后的两个星期，她又有三次差一点讲出来：一次是第五题，一次是周四的符号放反，一次是纸板拼不上的时候。三次，她都把话咽了回去，换成一个问题。

她没有坐在旁边看着他做。她在客厅另一头对她自己的账，只在笔停得太久的时候走过来。她没有说“你真聪明”“你进步好大”。

最难忍的是周六下午那一回。儿子拼纸板，第三次没拼上，有一条长条明明横过来就能放进去，她站在旁边看得清清楚楚。她的手都伸出去了，碰到那条纸板的边，又缩了回来。她转身去厨房倒了一杯水。回来的时候，儿子已经把那条长条横了过来。

那一杯水，是她这两个星期里做得最对的一件事。

她做了的事，也可以数出来。她跟儿子一起定了三条做法：先猜、卡住先写卡点、只要提示不要答案。这三条不是规矩，是给对不上留出地方：先猜，才有东西被结果打脸；先写卡点，卡住才看得见；只要提示，力气才留在他手上。

她把那一句话变成了一条做法：“你卡在哪一步？”上一次她当面问，他答不上来；这一次，他自己先把它写在了草稿本上。

她当了一回外行。周一晚饭后，她让儿子讲给她听，问了一句“为什么是后面的”。这一问，让周一早上郭老师那个问题，在饭桌上又被碰了一次。

她把周四定在那里。周四晚上不是她想起来的，是周日就说好的。到了周四，她只说了一句“该做那两道了”，就回去对账。

她从公司带回来纸箱，又编了一道仓库的题。题是编的，可是“对一对”这个动作，是她干了二十年的真活。

她也没有把手机从儿子手里拿走。AI 还在，只是换了位置。第 19 章说，AI 可以当场，不当答案。那一晚它给的第一句提示，就是在当场；它接着要写的第二句，才是答案。她立的第二条规矩，就是把那台机器留在第一句上。

本书在第 16 章说过：家长是场，不是动能。林佩君这两个星期，就是一个场。她托住了儿子的卡住，没有替他付力气。

她做这些，不是因为读过什么教育学的书。她手上的凭据只有两样：二十年前那个账差 540 元的下午，和那个周四她自己对着租赁准则愣住的那一上午。两样都是她自己身上的事。前一样告诉她，一个人怎样真正学会一样东西；后一样告诉她，看懂了离学会有多远。

她自己也有一处对不上。上周一晚上，她以为儿子的问题是“不会”，想的是怎样教会他。这两个星期，她看见的是另一回事：他缺的不是一个会讲题的人，是一次自己卡住、自己接上的机会。她原来那个“教会他”的念头，和这两个星期看到的东西，对不上了。周六晚上，儿子睡了以后，她在手机备忘录里写了一行字：“不要替他平账。”

两周的事，压成一张表，是这样：

五段	第一个周日	第二个周日及之后	谁付的动能	林佩君做了什么
○ 在场	AI 解答把特征全摆出来，一条线串着，看懂了	不再停在这里：前四道用的是早已结好的旧规矩，对得上，只是再用一次	不需要	让他先猜

五段	第一个周日	第二个周日及之后	谁付的动能	林佩君做了什么
一 建立	没有发生：每一步都对，一次没卡	第五题猜错，写下卡点；拉吉给方向，他自己乘开，看出“那个 2 也在里面”	他自己，三个钟头	让他先写“卡在哪一步”；不讲题
二 维持	没有可维持的：周一小测几乎空白	周一公交车上自测一遍；晚饭桌上讲一遍；周四从空白做两道	他自己，间隔着付	当外行听他讲；守住周四
三 粒子化	没有发生	纸箱拼出长方形；仓库题对得上；不看本子、不靠提示讲成一件事	他自己，跨到现实里	带回纸箱；编一道仓库题
四 熔开再结晶	谈不上	$2(x+1)^2-7(x+1)+3$：老规矩松开，结成“对一个形状用”	他自己	什么也没做；那道题是郭老师出的
他的那句话	“我昨晚都看懂了”	“下次卡住，我就先乘开看看”		

表的最后一行，是两个周日各自留下的一句话。前一句说的是那一晚他看见了什么。后一句说的是他以后会怎么做。

◆ 八、显出一个新的他

第二个周日之后的第三个星期，数学单元测验。十道题，有因式分解，也有新学的别的东西。第一道就是因式分解：$3x^2 + 5x - 2$。他看了一眼，没有去回想任何屏幕。他在草稿边上先写了一个猜测，再找数：乘起来是 -2，其中一个先乘 3，再加另一个，等于 5。-1 和 2：$3 \times 2 + (-1) = 5$。$(3x - 1)(x + 2)$。乘开一验，对。

三个星期前的那个周一早上，碰到同一类题，他在考场里回想的是屏幕上一个蓝色的十字。那个十字里什么也没有。这一次，他没有去想任何地方。那几样东西就在他手上。

因式分解那几道，他做对了大半。有一道 $6x^2 + x - 12$，他没做出来。他没有空着。题目旁边，他写了一行小字：“卡在：6 有两种拆法，12 有好几种。试了 (6x ...)(x ...) 和 (3x ...)(2x ...)，中间项凑不出 x。时间不够了。”

郭老师改卷的时候，在这一行底下画了一条线。那道题后来他回家又做了，是 $(3x - 4)(2x + 3)$。乘开验算，$3x \times 3 = 9x$，$-4 \times 2x = -8x$，加起来正好是 x。

这次测验，他不是满分。林佩君看了卷子，没有说“你进步了”，也没有说“再细心一点”。她看了那一行小字很久。那是三个星期前那一晚他答不上来的问题。现在，这个问题的答案写在卷面上。

又一个周日晚上，沈知远在饭桌边写新一周的作业。这一周学的是联立方程。林佩君在客厅另一头对账，抬头看了一眼。他在第一题旁边，先写了一行小字。离得远，她看不清写的是什么。她猜是一个猜测。这一次，没有人跟他商量过要先猜。她没有走过去看，低下头，接着对她的账。

这一章不打算写“他变好了”。他没有变成一个什么题都会的孩子。第三周的测验还有一道没做出来，联立方程他也还没学会。往后他还会卡住，还会有看懂了却写不出来的晚上。

往前看，还有一个坑在等着他。因式分解他现在有了一颗粒子。下一步最容易发生的事，是他为了考试，把同类题刷上一百道，刷到闭眼都会。刷题本身没有错，它在付维持的功。可是刷到一定地步，那颗刚刚熔开、重新结晶过的粒

子，又会慢慢结死在纸面上。那就是第 2 章说的刷熟型假会。下一次再碰到一道变了形的题，它也许就熔不开了。

所以那一晚的事，不是一劳永逸的。活的会，要靠一次又一次新的对不上去保持它是活的。郭老师那种不收、不算分的“变形题”，林佩君那种“我编一道”的仓库题，以后还要不时地来。

可是那三个星期里发生过一些事。第五题旁边那一行猜错的字；拉吉的一句提示；公交车上的一站路。周四晚上被自己抓出来的一个负号；饭桌上拼成的一块纸板长方形；一道把 (x + 1) 放进 x 位置的题。

这一段经历，显出了一个新的他。不是一个“会因式分解”的他。因式分解只是这一段经历结晶出来的一颗粒子。显出来的，是一个知道自己卡在哪一步的他，一个卡住了先写下来、先乘开看看、再去找人的他。

前言里那一晚，妈妈问他“你昨晚不是都会吗”，他说“我昨晚都看懂了”。如果今天再问他，他大概会说：“我昨晚卡了三次。”

放回日子里。如果你家里也有一个“我都看懂了”的孩子，不必等一个合适的晚上，就拿他上周全对的那份作业来。

请他每道题先写一个猜测，再去做。卡住了，先写一行“卡在哪一步”，再去问人。问人可以，问 AI 也可以，只要提示，不要答案。旧本子合上，放到你那一边。

然后，你去做你自己的事。听见笔停了很久，再走过去，先看那一行卡点，再问一句：“你觉得问题出在哪里？”

你也许会担心：这道题我自己都不会，怎么帮他？不会，反而好办。林佩君对十字相乘也只是依稀记得，正因为这样，她讲不出来，也就不会去讲。你只要

能问出“你卡在哪一步”“为什么是这样”，再请他讲给你这个外行听，就够了。场不需要比学的人懂得多，只需要托得住。

你也许还会担心：他不肯先猜，嫌麻烦。那就先只要求一道题。挑一道你估计他会猜错的，让他猜一次，看看猜错的那一下是什么滋味。有过一次，第二次就好说了。

不要替他把账做平。他做不完那二十道题，没关系。他卡了三次，也没关系。那三次，就是这个晚上留下的东西。

带走的话

同一份作业，换一种做法，留下的就不是一本全对的本子，而是一个知道自己卡在哪一步的人。

小　账

前人把“做对了”当作学会的凭据，本书把“写下了卡在哪一步”当作建立开始的凭据；前一扇门关在作业本上，后一扇门开在学的人身上。

上周日 AI 那个蓝色的十字里本来就画着那个 2，他看懂了，那是“找到”；这一周他自己乘开三个括号才看出那个 2，那是“发生”。把后者说成“原来答案里早就有”，发生就被收回成了发现。

想一想

1. 你家孩子（或者你自己）最近一份“全对”的作业，如果每道题先写猜测再做，哪一道会第一个猜错?
2. 你上一次差一点替别人“平账”，是在什么时候？你最后讲了，还是咽回去换成了一个问题?
3. 你手上有没有一颗用了很多年、很顺手的“老规矩”？最近有没有哪一道“变了形的题”，让它不灵了一下?

◆

结语

教育的产品是结晶

宏茂桥那套组屋的冰箱门上，压着一张几乎空白的小测卷。第一题底下画着半个十字，四个角都空着。那是沈知远初二时一个周一早上的二十分钟。林佩君一直没有把它拿下来。

后来冰箱门上又多了一样东西，压在它旁边。是一块纸箱裁出来的纸板，拼着两个大正方形、七条长条、三个小方块，用透明胶带粘成了一个长方形。旁边用铅笔写着：$(2x + 1)(x + 3)$。

两样东西挨在一起，一样是空的，一样是满的。可是要说哪一张留下了东西，恰好要反过来看：那张空卷子背后，是一份全对的作业；那块纸板背后，是一个卡了三次、没做完的晚上。本书从这一晚出发，问了三个问题。走到这里，可以一个一个回答了。

看懂了和学会了，差在哪里？差的不是几成功夫，是差了一件事。看懂，是几样东西同时在你眼前，被别人的解答串着，挨在一起。学会，是这几样东西在你身上被拆开、接上，接得结实了，最后结成一颗粒子：换个问法它还在，不靠提示能说成一整件事，离了书和老师也立得住。

中间隔着三段：建立，是学习；维持，是记忆；粒子化，是学会。再往后还有一段：下一次对不上的时候，那颗粒子熔得开，能重新结晶。这是活的会。五段是一条纠缠走过的五段，不是五件事。沈知远的第一个周日停在第〇段；从第二个周日起，他一段一段走了下去。

为什么越努力、越有工具，留下的越少？因为工具替学的人付掉了最贵、也最不能代付的那一笔：建立时的动能。答案来得太快，对不上还没有形成，缝就被填平了。没有对不上，就没有落差；没有落差，就没有东西逼着人去拆、去接。刷题走的是另一条路，结果却相近。同类题一道接一道，对不上被事先排除在外。刷出来的东西也是粒子，可是结死在纸面上，碰到书本外的情形就熔不开。

三种假会，看懂型、背住型、刷熟型，都不是因为不努力。是努力花在了走不到“学会”的那几段上。

教室该怎么改？教室要守的东西换了。答案稀缺的年代，学校守的是答案；答案免费的年代，学校要守的是答案在一个人身上长成的那一下。

那一下要三个条件：一处对不上，最好能事前写下来；一个托得住这次卡住的场；学的人自己付的力气。课堂、作业、评价，都要围着这三样重新排：先让人卡住，再给场；作业留给学生付动能；评价分开测维持和粒子化，再测熔不熔得开。

老师的活，从把话讲清楚，转成守住落差、守住场。家长的活，从替孩子把账做平，转成问一句“你卡在哪一步”。学校和培训机构的活，从发答案、收满意度，转成去看学的人身上到底结出了什么。

AI 不在这件事的对面。它是迄今最大的一张托人的网，能陪着卡住，能提醒再用一次。它只做不了一样事：替你结晶。用它的分寸也就在这里：让它托着你，不让它替你走。

本书的说法，也有它会输的地方。第 21 章写下了五道门和一道闸：不卡住也学得一样好，没人托着也一样，没有力气也一样，刷熟了也熔得开，记得牢就

一定用得上。这五样里任何一样被确实证明，本书就要改。对不上要先写在纸上，事后找到的不算。一套说法给自己留了输法，才配拿来改别人的课堂。

这句判词，不是在反对答案。读到这里，容易落到另一头去：既然产品是结晶，那答案就没用了，讲解就该少，AI 就该关掉。

不是这样。答案是第〇段的材料。几样东西先得到场，才谈得上被拆开、被接上。一个从没见过十字相乘的孩子，直接让他去分解，他卡住了也只是一锅粥。前言里那条手机导航的蓝线，让你七天都走到了地铁站，也让那条路上的便利店和大榕树都在你眼前出现过。它没有害你，它只是替你走了。

要改的不是“有没有答案”，是答案出现在哪一段、替谁做掉了哪一步。答案排在对不上之后，由托住他的人递过去，它帮着接上那道缝；答案排在对不上之前，它就把缝填平了。

这句判词，也可能变成一个新的偶像。还有一个坑，本书要先替读者指出来。一所学校读了这本书，决定“测结晶”。于是每节课都要收预测单，每周统计预测单的份数，每月比哪个班“对不上”的次数多。过不了一年，预测单会变成一种新的作业：学生随手写一个猜测，交上去了事；老师照着表格打勾，报上去了事。

到那一步，“结晶”这两个字本身，就成了一个被供起来的数字。它和当年那一页分数，是同一个结构。

本书说的结晶，量不出一个总数，也排不出一张名次表。它只能一个学生一个学生、一件事一件事地看：这一处，卡过没有；卡住时，有没有人托；力气是谁付的；两周以后还在不在；碰到反例，松不松得开。看的人要有耐心，也要肯承认，有些东西这一学期就是还没结成。

林佩君的那一上午。这本书大半写的是孩子，可是那笔账，成人身上一样记着。第 22 章里，林佩君在公司碰上一条新的租赁准则。她请 AI 讲了一遍，点了头，第二天要动手做分录时，脑子里是空的。那一上午，她把条文打印出来，自己先写一笔分录，写错了，改过来，到中午才算弄明白。

她是一个四十一岁、做了二十年账的会计。她在那一上午走过的路，和她十四岁的儿子在饭桌边走过的路，是同一条。在场，对不上，自己付力气，写错一笔、对着条文改过来，才接上。往后还要隔几天再用，才谈得上结成一颗带得走的东西。学，不分年纪。年纪大的人旧纠缠多、接得结实，学新的往往要先熔旧的，账单更贵一些。可是账是同一本。

这本书里所有的人。上海的顾一鸣，河北县城的赵思琪，武汉的周振华，杭州的吴秀兰和郑雨桐。新加坡的林家豪、努尔·艾莎、李俊杰、钱慧敏。还有许多别的名字。他们都是综合人物。他们的晚上是许多家庭、许多教室的晚上拼起来的。

他们没有一个是“变好了”的。书里没有谁看穿了什么、决定了什么、从此脱胎换骨。发生在他们身上的，是一段一段的经历：一处对不上，一个托住的人，一份自己付的力气。经历走完一段，就显出一个新的他或她。

沈知远也是这样。他没有变成一个什么题都会的孩子。往后他还会卡住，还会有看懂了却写不出来的晚上。他还可能刷题刷到闭眼都会，又在一道变了形的题面前愣住。可是有一样东西，那三个星期留了下来：卡住的时候，他知道先写下卡在哪一步。这一样东西，不在任何一本作业本上，也不在哪一张试卷的分数里。它在他身上。

它也不是他一个人弄出来的。拉吉在手机上回的那一句“你先别找那两个数”；郭老师在走廊上那一问“为什么是那个 2 去乘后面的数”；妈妈那一

句“你卡在哪一步”。这些人，是托住他的那张网。那几个从物流公司带回来的纸箱，是这张网替他摆上饭桌的东西。网托着他，可是没有一个人替他乘开那三个括号。

场在外面，力气在里面。结晶，是在两样都在的时候发生的。

最后，回到判词。一份作业可以全对，一张卷子可以满分，一节课可以讲得清清楚楚，一台机器可以几秒钟给出所有步骤。这些都是答案。答案是好东西，它可以转手，可以复制，可以免费。可是学校送出门的，不应当只是这些。

一个孩子走出校门，过了几年，碰到一件课本上没写过的事。那时候他身上还剩下什么、还用得出什么，才是这所学校、这些老师、这些晚上真正的产量。那些东西不能转手，不能复制，也没有人能替他付钱。它们只能在他自己身上，一次一次地结成。

教育的产品不是答案，是结晶。

◆

参考书目

本书目据各章“已核”清单与正文引用整理。外文文献凡正文只给中译题名者，照录中译，原文题名出版前补齐。未列卷期页码者，是正文与核验注都没有记载，不另行补写。末尾带〔待核〕的条目，见附录三。

一、古籍与经典

- 《论语》：学而、为政、述而、卫灵公、先进、子罕、公冶长、颜渊诸篇。
- 朱熹《论语集注》（“愤者……悱者……”“启，谓开其意。发，谓达其辞”“复，再告也”诸句；引程子“愤悱，诚意之见于色辞者也”；程子“不待愤悱而发……则沛然矣”一句〔待核：逐字〕）。
- 朱熹《童蒙须知》（“三到”，“三到之中，心到最急”；通行书中多引作《训学斋规》〔待核：两篇是否同篇异名〕）。
- 朱熹为白鹿洞书院所定学规（“为学之序”，取自《中庸》）。
- 《中庸》（“博学之，审问之，慎思之，明辨之，笃行之”）。
- 《礼记·学记》〔待核：成书年代的表述〕。
- 《礼记·杂记下》（“一张一弛，文武之道也”）。
- 《孟子·公孙丑上》（揠苗助长）。
- 《孟子·离娄上》（“君子之不教子”章）。
- 《庄子·秋水》（邯郸学步）。
- 《庄子·天道》（轮扁斫轮）。
- 《荀子·儒效》。

· 《吕氏春秋·察今》（刻舟求剑）。
· 《周易·系辞下》（“穷则变，变则通，通则久”）。
· 司马迁《史记·孔子世家》。
· 司马迁《史记·廉颇蔺相如列传》。
· 杜佑《通典·选举三》（明经科帖经）。
· 刘义庆《世说新语·雅量》（王戎不取道旁李）。
· 许慎《说文解字》（“习，数飞也”）。
· 《三字经》。
· 陶渊明《桃花源记》。
· 杜甫《春夜喜雨》。
· 陆游《冬夜读书示子聿》。
· 陆九渊《白鹿洞书院论语讲义》（陆九渊自述“至有流涕者”、朱熹刻石作跋，据转引核，排印前宜再对《陆九渊集》）。
· 王阳明《传习录》（“知而不行，只是未知”）。
· 吴敬梓《儒林外史》第二、三、七回（第二、三回字句据转录全文核，排印前宜再对人民文学出版社本）。
· 鲁迅《孔乙己》，《新青年》，1919 年 4 月。
· 柏拉图《美诺》《泰阿泰德》，王晓朝译《柏拉图全集》〔待核：卷次与版次〕。
· 《圣经·列王纪上》19:7，和合本。
· 巴利《法句经》注释，不放逸品第 25 偈（周利槃陀伽的故事）；汉译本“扫帚扫地”一说〔待核：具体经卷〕。

二、中文文献与政策文件

（一）中文文献

- 马立平（1999）. Knowing and Teaching Elementary Mathematics（书名直译《小学数学的知与教》）.
- 凯洛夫（主编）.《教育学》，中译本〔待核：中译本年份与“课的结构”原表述〕.
- 王德生、阳涌.《学习发生学导论》. 德麦国际出版社，德麦国际专著第 22 号〔待核〕.
- 《课堂学习发生学》. 德麦国际出版社，德麦国际专著第 55 号〔待核：作者〕.
- 阳涌、胡敏.《学习兴趣发生学导论》. 德麦国际出版社，德麦国际专著第 352 号〔待核〕.
- 《SDE 符号学》（本系列书二）. 正文以“见书二第 N 章”回指。

（二）政策与机构文件

- 中共中央办公厅、国务院办公厅（2021 年 7 月）.《关于进一步减轻义务教育阶段学生作业负担和校外培训负担的意见》（“双减”意见）.
- 国务院（2014 年 9 月）.《关于深化考试招生制度改革的实施意见》.
- 教育部办公厅（2021 年 3 月 30 日）.《关于进一步加强中小学生睡眠管理工作的通知》（教基厅函〔2021〕11 号）.
- 国务院（2016）.《国务院关于统筹推进县域内城乡义务教育一体化改革发展的若干意见》（国发〔2016〕40 号；消除超大班额、大班额的 2018 年、2020 年两步目标）.
- 人力资源和社会保障部门关于专业技术人员继续教育学时的规定〔待核：正文未引具体文件〕.

· 新加坡总理李显龙（2004）. 国庆群众大会演讲（提出“少教多学”）.
· 新加坡教育部长尚达曼（2005 年 9 月）. 教育部工作计划研讨会讲话（课程内容削减 10%—20%，“白色空间”）.
· 新加坡教育部（2016）. PSLE 改用成绩等级（AL）计分的宣布，2021 年起实行.
· 新加坡教育部（2018 年 9 月 28 日）. 取消小一、小二计分测验与考试，逐步取消部分年级年中考试的宣布.
· 新加坡教育部（2017）.《新加坡教学实践》（Singapore Teaching Practice）.
· 新加坡教育部（2024）. 教育统计（小学班额）.
· 新加坡技能创前程计划（SkillsFuture）及技能创前程培训补助（SkillsFuture Credit）相关公告（2015、2016、2020、2024）.
· 新加坡劳动力发展局（2015 年 3 月 28 日）. 推出“边做边学计划”（SkillsFuture Earn and Learn Programme）的新闻稿.
· 新加坡工艺教育学院（ITE）. 关于 2022 学年三年制高级工艺教育证书新结构的公告；2023 年 12 月 18 日公告.
· 新加坡一所小学的家庭作业指引（不点校名）.
· 国际文凭组织（IB）. 中学项目（MYP）数学评分标准 A—D.
· 联合国教科文组织（2023 年 9 月）.《教育与研究中的生成式人工智能指南》.
· 世界卫生组织（2019 年 5 月）. 关于 ICD-11 中“职业倦怠”为职业现象、非医学疾病的说明.

三、外文研究文献

- Abedi、Lord（2001）.《数学测验里的语言因素》. Applied Measurement in Education, 14(3).
- Alliger 等（1997）. 培训反应与学习、行为关系的汇总研究.《人事心理学》, 50〔待核〕.
- Alter 等（2007）. 难读字体与推理研究.
- Anderson、Krathwohl（编）（2001）. A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing（Bloom 教育目标分类的修订版）.
- Asch（1956）. Studies of Independence and Conformity: I. A Minority of One Against a Unanimous Majority（《独立与从众研究之一：一人对全体一致的多数》）. Psychological Monographs.
- Ausubel（1968）. 教育心理学教科书（扉页语；正文未给书名）.
- Bahrick（1984）. 西班牙语五十年保持研究（“永久存储”）.
- Bahrick 等（1993）. 外语词汇九年间隔复习研究.
- Baldwin、Ford（1988）.《培训迁移：回顾与未来研究方向》.《人事心理学》, 41(1), 63—105.
- Bartlett（巴特利特）（1932）.《记忆》.
- Bastani 等（2024）.《生成式 AI 可能伤害学习》. 工作论文. 修订后刊于《美国国家科学院院刊》（PNAS）， 2025, 122.
- Bjork（1994）. 合意困难（desirable difficulties）. 收于 Metcalfe、Shimamura 主编《元认知》.
- Bjork、Bjork（1992）.《一种新的废用理论与一种旧的刺激波动理论》. 收于纪念 Estes 文集, 第 2 卷.
- Bjork、Bjork（2020）. 合意困难回顾.《应用记忆与认知研究》.

· Black、Wiliam（1998）. Inside the Black Box（《黑箱之内》）.
· Bloom（布卢姆）等（1956）. 教育目标分类：认知领域.
· Brown、McNeill（1966）. “话到嘴边”研究.
· Bruner（布鲁纳）（1960）.《教育过程》.
· Bruner（布鲁纳）（1966）.《教学论》.
· Bryan、Harter（1897；1899）. 电报员学习曲线与“习惯的层级”.
· Canning、Harackiewicz（2015）. Teach It, Don't Preach It. Motivation Science, 1(1).
· Cepeda 等（2006）. 间隔效应汇总分析〔待核：纳入实验数〕.
· Cepeda 等（2008）. 间隔与保持期研究. Psychological Science.
· Chambers（2013 起）. 注册报告的推行. Cortex.
· Chase 等（2009）. 教虚拟学生的研究（门生效应；研究一八年级、研究二五年级）.《科学教育与技术杂志》.
· Chase、Simon（1973）. 国际象棋组块研究.
· Chi 等（1989）. 自我解释效应.《认知科学》.
· Chi、Feltovich、Glaser（1981）. 新手与专家的物理题分类.
· Chi、Wylie（2014）. ICAP 框架.《教育心理学家》, 49(4).
· Chinn、Brewer（1993）. 学习者对异常数据的反应.《教育研究评论》.
· Cooper、Robinson、Patall（2006）. 家庭作业与学业成绩的综合评述.《教育研究评论》, 76(1).
· Craik、Lockhart（1972）. 加工水平.
· Craik、Tulving（1975）. 加工深度与词语保持的实验（大小写、读音、句子三种加工）.

- Crouch、Fagen、Callan、Mazur（2004）. 课堂演示的四种方式. 《美国物理学杂志》, 72.
- Crouch、Mazur（2001）. 同伴教学十年. 《美国物理学杂志》, 69.
- Cummings、Bridgman、Brown（2016）. 勒温三步模型来历考证.
- Dahmani、Bohbot（2020）. 导航依赖与空间记忆. 《科学报告》.
- Dewey（杜威）（1916）. 《民主与教育》.
- Driver、Guesne、Tiberghien（编）（1985）. Children's Ideas in Science（《儿童的科学观念》）.
- Dunlosky、Rawson、Marsh、Nathan、Willingham（2013）. 用有效的学习技巧改善学生的学习（题名大意）. 《心理科学与公共利益》.
- Dweck（2015）. 关于成长型思维误用的回顾文章. 《教育周刊》.
- Ebbinghaus（艾宾浩斯）（1885）. 《论记忆》.
- Fiorella、Mayer（2013）. 准备教与真教的实验. 《当代教育心理学》, 38.
- Fischbein（1987）. 《科学与数学中的直觉》〔待核：转述未逐字核原文〕.
- Fischbein、Deri、Nello、Marino（1985）. 乘除法的原始模型. 《数学教育研究》, 16(1)（比萨 13 所学校、628 名学生）.
- Fischhoff（1975）. 后见之明偏差.
- Fischhoff、Beyth（1975）. 事前估计与事后回忆.
- Fleishman、Parker（1962）. 复杂追踪技能的保持.
- Ford 等（2011）. “一成的错觉”.
- Geertz（格尔茨）（1963）. 《农业内卷化》.

- Georgenson（1982）. 培训转化“不超过一成”的估计（经 Baldwin 与 Ford 1988 转引）.
- Gick、Holyoak（1980）. 类比问题解决（将军—堡垒故事与射线难题）. Cognitive Psychology.
- Godden、Baddeley（1975）. 潜水员情境记忆实验.
- Goodhart（古德哈特）（1975）. 关于货币政策指标的观察.
- Goodstein、Goodstein（1996）.《费曼失落的讲义》.
- Greene（2015）. Wrong Diagnosis on Homework Help from Parents（《坏掉的指南针》书评）. Education Next, 15(2).
- Hagger 等（2016）. 自我损耗多实验室重复（23 个实验室，2,141 名被试）.
- Hake（1998）. 传统课与互动课的标准化增益.《美国物理学杂志》.
- Halloun、Hestenes（1985）. 大学新生的常识力学.《美国物理学杂志》.
- Herbart（赫尔巴特）. 教学形式阶段说〔待核：正文未指明著作与年份〕.
- Hestenes、Wells、Swackhamer（1992）. Force Concept Inventory（力学概念量表）.《物理教师》.
- Hoover-Dempsey、Sandler（1997）. 家长为何参与子女学业.《教育研究评论》, 67(1).
- Hulleman、Harackiewicz（2009）. 高中理科效用价值实地实验.《科学》.
- Hunt、Thomas（1999）. The Pragmatic Programmer（《程序员修炼之道》；小黄鸭调试法出处）.

- Jenkins（詹金斯）、Dallenbach（达伦巴赫）（1924）. 睡眠与遗忘. American Journal of Psychology, 35.
- Kapur（2008）. Productive Failure.《认知与教学》, 26(3).
- Kapur（2014）. 有成效的失败与标准差学习.《认知科学》.
- Kapur（2016）. 有成效的失败等四格.《教育心理学家》, 51(2).
- Kapur、Lee（2010）. 九年级学生学方差的研究. 美国教育研究协会（AERA）年会报告.
- Kerr、Booth（1978）. 变换距离投掷练习.《知觉与运动技能》.
- Kilpatrick（克伯屈）（1918）. The Project Method（《设计教学法》）. Teachers College Record, 19(4).
- Kirkpatrick（柯克帕特里克）（1959—1960）.“评估培训项目的技巧”系列四篇（1959 年 11 月至 1960 年 2 月连载）. 美国培训主管协会会刊.
- Kirkpatrick（柯克帕特里克）（1994）.《评估培训项目：四个层次》.
- Knowles（诺尔斯）（1970）.《成人教育的现代实践》.
- Kobayashi（2019）. 准备教与真教的元分析.
- Koriat（1997）. 学习判断的线索利用说.
- Koriat、Bjork（2005）. 答案在场造成的胜任错觉. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition.
- Kornell、Bjork（2008）. 画家风格的穿插学习.《心理科学》, 19.
- Kosmyna 等（2025）. 使用 ChatGPT 写作的脑电研究. 麻省理工学院媒体实验室预印本（未经同行评审）.
- Lakatos（拉卡托斯）（1970）.《证伪与科学研究纲领方法论》.
- Lakens（2017）. 等效检验入门.

- Lave、Wenger（1991）.《情境学习》.
- Lewin（勒温）（约 1947）.“解冻—改变—再冻结”.
- Liang、Yuksekgonul、Mao、Wu、Zou（2023）. AI 文字检测器对非英语母语写作者的误判. Patterns.
- Luchins（1942）. 水罐定势实验. Psychological Monographs.
- Lysgaard（1955）. 挪威富布赖特学者的适应 U 形曲线.
- Maier、Seligman（2016）. 习得性无助五十年.《心理学评论》.
- Maslach、Jackson（1981）. Maslach 倦怠量表.
- Mayer（2004）. 纯发现学习的回顾.《美国心理学家》, 59(1).
- Mazur（1997）. 同伴教学（Peer Instruction）专著（1991 年期中数据经 Saul 博士论文第二章转述核）.
- McGarrigle、Donaldson（1974）.“淘气小熊”守恒实验.《认知》, 3.
- Meyer、Land（2003 起）. 门槛概念.
- Meyer 等（2015）. 难读字体效应的多实验室重做.
- Milner（1962）. H.M. 镜画实验报告. 收于 Passouant 编《海马生理学》. 巴黎：CNRS.
- Morehead、Dunlosky、Rawson（2019）. 手写与电脑笔记的复现.《教育心理学评论》.
- Mueller、Oppenheimer（2014）. 手写笔记与电脑笔记.《心理科学》, 25.
- Murre（2021）. 潜水员情境实验的重做. Royal Society Open Science.
- Murre、Dros（2015）. 艾宾浩斯遗忘曲线的重做. PLOS ONE.
- Nestojko 等（2014）. 期待去教.《记忆与认知》.
- Nickerson、Adams（1979）. 一美分硬币的记忆〔待核〕.

- Oberg（1954）. 里约热内卢讲话（文化冲击）. 重刊于《实用人类学》, 1960.
- Pan、Rickard（2018）. 提取练习迁移的元分析. 《心理学公报》.
- Patall、Cooper、Robinson（2008）. 家长参与家庭作业的综述. 《教育研究评论》, 78(4).
- Piaget（皮亚杰）（1962）. Comments on Vygotsky's critical remarks（为《思维与语言》英译本所写的回应）.
- Piaget（皮亚杰）（1975；英译 1985）.《认知结构的平衡化》.
- Polanyi（波兰尼）（1958）.《个人知识》（骑车平衡一例据二手文献转引）.
- Polanyi（波兰尼）（1966）.《默会的维度》.
- Pomerantz、Moorman、Litwack（2007）. 家长参与“多并不总是更好”.《教育研究评论》, 77(3).
- Popper（波普尔）（1934）.《研究的逻辑》. 英译本改题《科学发现的逻辑》, 1959.
- Popper（波普尔）（1963）.《猜想与反驳》.
- Posner、Strike、Hewson、Gertzog（1982）. 概念转变的四个条件. 《科学教育》.
- Rhodes、Castel（2008）. 字号效应. Journal of Experimental Psychology: General.
- Richland、Kornell、Kao（2009）. 预测试效应.
- Robinson、Harris（2014）.《坏掉的指南针》.
- Roediger、Karpicke（2006）. 测试效应.《心理科学》, 17.
- Roscoe、Chi（2007）. 知识转述与知识建构.《教育研究评论》, 77.

- Rowe（1974）. 课堂等待时间.
- Rozenblit、Keil（2002）. 解释深度的错觉. 《认知科学》.
- Ryle（赖尔）（1949）. 《心的概念》.
- Saks、Burke（2012）. 培训评估层级与迁移的调查.
- Salmela-Aro 等（2009）. 学校倦怠量表. European Journal of Psychological Assessment, 25.
- Schaufeli 等（2002）. 西班牙、葡萄牙、荷兰大学生倦怠研究.
- Sfard（1998）. 《论学习的两种隐喻，以及只选其一的危险》. 《教育研究者》, 27(2).
- Sinha、Kapur（2021）. “先解题、后讲授”的元分析. 《教育研究评论》.
- Sitterley、Berge（1972）. 程序性操作的保持（据综述转述）.
- Slamecka、Graf（1978）. 生成效应.
- Smith 等（2009）. 同伴讨论与成对概念题. 《科学》, 323.
- Soderstrom、Bjork（2015）. 学习与表现（经 Bjork 与 Bjork 2020 转引）.
- Stigler、Hiebert（1999）. The Teaching Gap（《教学的差距》）.
- Strathern（1997）. Goodhart 定律的通行概括.
- Sweller（1988）. 认知负荷. 《认知科学》, 12.
- Sweller、Cooper（1985）. 例题效应〔待核〕.
- Thorndike（桑代克）、Woodworth（伍德沃思）（1901）. 迁移实验（相同要素说）.
- Urry 等（2021）. 手写笔记研究的直接复现与八项研究的小型元分析. 《心理科学》, 32.

· van de Pol、Volman、Beishuizen（2010）. 脚手架研究综述. 《教育心理学评论》, 22.
· Vygotsky（维果茨基）（1962）. 《思维与语言》（英译）.
· Vygotsky（维果茨基）（1978）. Mind in Society（《社会中的心智》）. Cole 等编译. 哈佛大学出版社.
· Walton、Cohen（2011）. 归属感干预. 《科学》, 331.
· Watkins、Biggs（编）（1996）. The Chinese Learner（《中国学习者》）. 香港大学比较教育研究中心、澳大利亚教育研究委员会.
· Weiner（1985）. 成就动机与情绪的归因理论. 《心理学评论》, 92.
· White、Gunstone（1992）. Probing Understanding（暂译《探查理解》）. Falmer.
· Wood、Bruner（布鲁纳）、Ross（1976）. 《辅导在解决问题中的作用》. 《儿童心理学与精神病学杂志》, 17(2), 89—100.
· Yoo、Hu、Gujar、Jolesz、Walker（2007）. 睡眠剥夺与新记忆形成. 《自然·神经科学》.

四、新闻与网络资料

· IT 之家（2025 年 6 月 9 日）. 2025 年高考期间多款 AI 应用暂停识图功能的报道.
· 沃顿知识在线；PsyPost. 关于 Bastani 等研究的报道.
· 新加坡媒体对统计局家庭开支调查（2012/13、2017/18、2022/23 年度）私人补习开支的报道〔待核：报道出处〕.
· 《牛津英语词典》“kiasu”词条.

· 《今日报》（TODAY）（2023 年 8 月 4 日）. 关于 ITE“It's the end”标签的长篇报道.

附录

本书附录四件：附录一是术语表，把书里的工作词与大白话对照起来；附录二是一节课的“三条件×五段”检查单，可直接打印；附录三列出仍待对原书原刊核对的引文与研究；附录四交代本书的成稿、审校与三审经过。

附录一

术语表

本表收全书反复用到的工作词。第一栏是书里的说法，第二栏是大白话，第三栏是一句话说清，最后一栏是主讲的章。硬词首次出现时的括注，以正文为准。

词条	大白话	一句话说清	主讲章
学习＝纠缠的建立	学	一处对不上逼着人把几样东西拆开、重接，接到一起，动一处牵别处	7
记忆＝纠缠的维持	记住	接好的那条纠缠不散（不散＝拉得住、够得着）；遗忘不是丢了，是松了，没断	8
遗忘：松了，没断	一时想不起	纠缠松了，不是断了，更不是丢了。“松”指此刻够不够得着（对应 Bjork 的提取强度）；连接度还在（对应存储强度），重学时省下的功夫就是证据	6、8
学会＝纠缠的粒子化	会了	那条纠缠结成一颗粒子：稳定、整体、独立；是一个事件，不是一个程度	9
在场	看懂了	几样东西同时在眼前，被别人的解答串着，还没接上；五段账的第〇段	1、7
熔开再结晶	活的会	下一次对不上时，粒子熔得开，和新东西接上，重新结成一颗	9、20
五段账	一条纠缠走过的五段路	在场、建立、维持、粒子化、熔开再结晶	导读、7—9
土（特征纠缠）	土	几个特征被接在一起、彼此牵连；书中多简称“纠缠”	前言、7
粒子态	结成一颗	纠缠结成粒子后的样子，有稳定、整体、独立三样性质；结成一颗活粒子的那一下，本书叫“结晶”	9

词条	大白话	一句话说清	主讲章
结晶	真留下来了	纠缠结成粒子的那一下，也就是一个符号的发生；不加限定时专指学会（活的粒子化）。刷熟型只说“结成了粒子，却熔不开”，不说“结晶了”	9
符号的发生	真会了的那一下	学会的另一种说法；答案可以转手，这一下只能在学的人身上发生	9
三判据	三句问话	换个问法还在吗（稳定）；不靠提示能说成一整件事吗（整体）；离了书和老师立得住吗（独立）	9、20
稳定	换个问法还在	粒子的第一个性质；测法：隔两周，换一种问法再测（换问法测的是稳定的上限；跨情境的迁移另记在独立一栏）	9、20
整体	能说成一件事	粒子的第二个性质；测法：撤提示口述	9、20
独立	离了人也立得住	粒子的第三个性质；测法：不给课本、公式、提示	9、20
熔不熔得开	碰到反例松不松得开	评分量表的第四项；给一个老办法管不住的例子	20
活粒子与固化粒子	活的会与死的会	下一次对不上时熔得开的是活的；熔不开的是固化的	2、9
固化	结死了	粒子熔不开、不再回写；在对象端成偶像，在自我端成石心	2、9、20
偶像	被供起来的东西	对象那一端的固化，比如只看分数、不问分数背后是什么	2、20
石心	结死在自己身上的话	自我那一端的固化，比如“我就是学不好数学”	2、9、15
三种假会	都会了，其实没会	看懂型、背住型、刷熟型，各停在五段里不同的一段	1—3
看懂型假会	“我都看懂了”	停在在场，没有建立；撤掉解答就散	1

词条	大白话	一句话说清	主讲章
背住型假会	“我背过的”	停在维持，建得窄、靠外力撑着；外力一撤就松，换个问法就卡	3
刷熟型假会	“这种题我闭眼都会”	粒子只结在理念界（纸面上），熔不开；给个反例就倒	2
对不上	原来以为的和眼前碰到的两样不合	建立的起点；必须能事前写下来，比如先写预测再看结果	10
对得上就没有解释	一切照常，就什么也不学	没有落差，就没有东西逼人去拆、去接	7、10
事前独立指认	先写在纸上	对不上要在结果出来之前、用旁人能核对的办法记下；事后找到的不算	10、21
场	托得住你的人和网	能回应、能拉扯的各方连成的网，也就是势能。主体是人：同伴、老师、班级、家人；AI 用作提示、陪练时算进这张网，它摆出的解答与材料不算。不会回应的静物（桌上的材料、墙上的图）是现实符号，可以由场摆上来，可是不叫场	11
动能	自己付的力气	学的人自己拆开、重接的那股力气；别人代付不算数	12
内能	接得有多结实	连接度，就是要多大的力才能拆开它；“记得牢”就是内能高；对应 Bjork 的存储强度，大体只增不减	8
势能	网的拉扯	周围那张能回应你的网把你往哪边拉、托不托得住你；本书叫“场”	11
连接度	断开的难度	内能的另一种说法；建立时付的力气越多、接的点越多，越难断；遗忘时松掉的是够不够得着的那一侧，不是它	8
难度＝动能的账单	难，是在付钱	觉得难的那一刻，正是学的人在付建立的账	6、7
落差	卡住的那道坎	对不上的大小；太小没有功可做，太大又没人托就成一锅粥	10、18

词条	大白话	一句话说清	主讲章
三个条件	建立要的三样	对不上、场、动能，三样同时在	第四编
三个入口	学不进的三种来路	旧办法碎了；书上很硬，日子塞不进；学不动了	第五编
入口一	旧办法碎了	老办法在新地方不灵了；药是新的学法，同时要有人托住	13
入口二	书上硬，日子塞不进	道理和日子接不上；药是直面现实、亲手做出一样东西	14
入口三	学不动了	力气耗尽；药是先补能量、先被托住，再谈方法	15
三界符号	结出来的东西落在三个地方	理念符号、现实符号、自我符号	7、9
理念符号	纸上和话里的	课本、公式、标准答案、定义	7
现实符号	手上和东西上的	做出来的实验、作品、模型、错得有后果的练习	7
自我符号	人身上的	“我会解这类题”“我是个读得进书的人”；学会的落点	7、9
三条方程	三样东西互相逼出来	理念＝F（现实，自我）；现实＝G（理念，自我）；自我＝H（理念，现实）；任两类对不上，逼第三类发生并回写	7
迁移	从一处走到另一处	理念到现实、现实到自我，每走一步都要付能量	9
回写	新的反过来改旧的	新结晶的东西反过来改写原先的条件，比如分数要能回到学的人身上	9、20
一锅粥（混沌）	一团乱	落差太大、又没人托住时的样子	4、10
正在成形（介生）	半生不熟	已经开始拆、开始接，还没结成粒子的那一段；落差刚好的课堂就是这个样子	10
定型（秩序）	稳下来了	一切照旧、稳住了的样子；落差太小的课堂是这样，一颗结好的粒子也是这样	10

词条	大白话	一句话说清	主讲章
形状（显露）	露出来的样子	一样东西在某一刻显出来的样子	书二
路（差异序列）	一步一步的路	一样东西一步步变过来所走的那条路	书二
延迟测验	隔两周再考	测维持；与迁移题分开出、分开记	8、20
迁移题	换个样子再问	测粒子化：换一个情境再问，看它还在不在、离了原来的样子立不立得住；与延迟测验分开出、分开记	20
熔开测验	给一个反例	测活不活：老办法在这里会出错，看能不能松开再结晶	20、21
发现学与发生学	找到的，还是长出来的	发现学以为答案现成在那里等人拿；发生学认为会是在人身上长出来的	4、5，各章“两行小账”第二行；书二

附录二

一节课的“三条件×五段”检查单

本检查单供老师备课和课后自查用，可直接打印。一节课不必五段都走完；五段里，一节课至少要让“建立”真的发生一次，并为“维持”留好下一次。打“□”处，课前勾设计，课后勾实情。

课题：_____ 科目：_____ 年级／班：_____ 日期：_____ 任课：_____

表一　课前三问（备课时填）

问题	我的回答（写一句）	勾选
这节课，学生原来以为的是什么？		□ 写下了
我准备用什么让它对不上？（一道题、一个反例、一个现象、一句答不上的问）		□ 写下了
我估计学生会卡在哪几处？（卡点清单，课前封存）		□ 已封存
卡住以后，谁来托？（同伴、小组、我、AI 当场不当答案）		□ 写下了
哪一段时间，留给学生自己拆、自己接？大约几分钟？		□ 写下了
落差会不会太大？如果一半以上学生空白，我的退一步是什么？		□ 写下了

表二　三条件×五段（课前勾设计，课后勾实情）

段	这一段要发生什么	对不上	场	动能	课上看得见的证据	设计	实情
○ 在场	几样东西先到学生眼前	不需要；不要在这里停住	老师示范、讲例子（材料本身是现实符号，不算场）	很少	学生说“看懂了”（只算到场，不算学会）	☐	☐
一 建立	一处对不上逼出拆开、重接	学生先写预测，结果出来和预测不同	讨论、提问、老师巡回；卡住时有人托	学生自己试、自己拆、自己接、自己说	预测单上的错猜；学生能说出“我卡在……，后来……”	☐	☐
二 维持	接上的东西不散	换一个小变化再碰一次	同伴互讲、讲给外行听	下课前不看书自己重说一遍	学生不看笔记能说出主要的一步	☐	☐
二 维持（隔堂）	隔几天再拿出来用	换数字、换说法	下一节课开头的小问	从空白里做，不看旧本子	下节课开头三分钟的检索小题	☐	☐
三 粒子化	结成一颗：稳定、整体、独立	换情境、换样子、生活里的题	场退后一步：老师和同伴不提示，课本撤掉	学生自己迁移到新地方	换情境的题做得出；能说成一整件事；撤提示立得住	☐	☐

段	这一段要发生什么	对不上	场	动能	课上看得见的证据	设计	实情
四 熔开再结晶	碰到反例能松开再长	给一道老办法管不住的变形题	允许先错；不急着纠正	学生自己发现老办法不灵并改出新办法	学生写出“这里不能直接套”，并说出新旧办法各在什么条件下成立	☐	☐

表三　课后三种假会快查（挑三五个学生，各问一句）

假会	怎么问	听到什么，说明可能是它	下一步	勾选
看懂型	撤掉板书：“你从头说一遍。”	“我刚才明明懂的……”	给他一处对不上，让他先猜再做	☐
背住型	换一个问法问同一件事	原话答得出，换个说法就卡	换情境再用一次，隔几天再从空白做	☐
刷熟型	给一道长得像、其实不能套的题	不假思索地套老办法	让他自己找出老办法在哪里不灵	☐
活的会	同上三问都问	换问法还在，能说成一件事，碰到反例松得开	留一道更远的变形题，下次再问	☐
还没到场	“这里面有几样东西？”	说不出几样东西是什么	先让东西到场：示范、例子，再谈卡住	☐

表四　学生学不进时，先看是哪个入口

入口	学生的样子	先给什么	别给什么	勾选
一　旧办法碎了	原来很会，换了学段、换了语言、换了老师，突然不灵	一个新的学法，同时有人托住	只说“再努力一点”	☐

入口	学生的样子	先给什么	别给什么	勾选
二　书上硬，日子塞不进	“学这个有什么用？”	一件亲手做出来的东西，一个用得上的地方	再讲一遍“将来考试要用”	☐
三　学不动了	长期睡不够，什么都听不进，连原来会的也松了	先补能量：睡眠、吃饭、被看见；再谈方法	讲道理、加补习班	☐

身体或心里的难处真的大了，请找医生或心理咨询师。

表五　这节课的小账（课后两分钟）

项	记一笔
预测单上，写错了的学生约占几成？	
卡点在我封存的清单上的有几处？清单外的有几处？	
放弃的学生（空白、中途停笔）有几个？是落差太大，还是没人托？	
下课时，带着没解决的问题离开的学生有几个？他们知道明天找谁吗？	
下一节课开头，我拿哪一道题再用一次？	
两周后，我用哪一道换了情境的题来测？	

附录三

引文与研究核验总表

本表汇总各章章末核验注，以及正文里随文标出的〔待核〕。凡标〔待核〕者，都是出版前须逐条复核的项目。表中按章序列出，每条写明为什么待核、建议怎样核。各章注中所说的“已核”，指执笔时经检索核对过；出版前仍建议对照原书原刊再核一遍，尤其是卷期、页码和数字。表中另有几条属于“综合人物”的体例声明，不是文献问题，一并列出，免得遗漏。表末标“书目”的几行，不是正文里的待核，是参考书目缺的出版信息，补齐后即可撤销。正文在审校、初审、复审、终审中已核实并去掉〔待核〕的项，已从本表移出，归入参考书目。

章	仍待核项	说明（为何待核、建议怎样核）
第 1 章	《训学斋规》与《童蒙须知》是否同篇异名	终审已核到“余尝谓读书有三到……三到之中，心到最急”一段见《童蒙须知》，正文已改标《童蒙须知》，括注“通行书中多引作《训学斋规》”。余下只须查《朱子全书》等通行本，确认两篇是否同篇异名；确认后可删去括注或照留。
第 1 章	Sweller 与 Cooper（1985）例题效应	正文写“1985 年前后”，只转述大意，章末注请附录三复核。须核原刊题名、刊名、被试与代数例题设计。年份核定后，删去“前后”。
第 1 章	Chi 等（1989）自我解释研究	第 12 章已核（《认知科学》，自我解释效应）。第 1 章只需对照原文，确认“学大学物理例题”“学得好的更常说没看懂”两处转述无误。
第 1 章	Rozenblit 与 Keil（2002）解释深度错觉	第 7 章已核（《认知科学》）。复审已把第 7 章压成一句回指，两章物件统一为“拉链、抽水马桶”。须对照原文的物件清单，确认这两样在其中。
第 1 章	Nickerson 与 Adams（1979）硬币画图	他章未核。须核原刊题名与刊名、被试人数，以及“大多数人画错”一句的对应数字。

章	仍待核项	说明（为何待核、建议怎样核）
第 4 章	王晓朝译《柏拉图全集》中《美诺》的卷次与版次	正文写“版次待核”。须查所用译本的出版社、年份、卷次，补进正文或本书目。
第 4 章	程子“不待愤悱而发，则知之不能坚固；待其愤悱而后发，则沛然矣”	初审据朱熹《论语集注·述而》增补，正文标“逐字待核”。须对照《论语集注》通行本逐字核。（原列朱熹注“启，谓开其意。发，谓达其辞”两句，初审已核，移出本表。）
第 4 章	《学记》成书年代	正文写“战国末到西汉之间”并标〔待核〕。学界说法不一。建议据一种通行注本或研究综述定一种表述，注明“一般认为”。
第 4 章	后世评《美诺》问答“牵得太紧”的具体文献	正文写“后世不少读者都指出过”。须找到至少一种可引的研究或注释。找不到，就改为本书自己的判断，删去“不少读者”。
第 7 章	Fischbein 后来“直觉模型去不掉，教学要让学生看见它、管住它”一说	初审据 Fischbein《科学与数学中的直觉》（1987）大意转述，未逐字核原文。须查原书相应章节。
第 8 章	Cepeda 等（2006）间隔效应汇总分析	章末注说只核了存在与结论方向。须核纳入的实验数（正文写“几百个”）与刊名。
第 9 章	Bryan 与 Harter 之后“平台期并非普遍”的质疑	正文写“后来也有研究者指出”，出处未核。线索：Keller（1958）《幻影平台》，《行为实验分析杂志》第 1 卷，已确认该文存在，内容未读到原文。核实后补出处；核不实就删去这一句或改为本书判断。
第 10 章	White 与 Gunstone《Probing Understanding》中译书名	暂按直译《探查理解》。须查有无正式中译本；没有，就在首次出现处注明“书名为本书直译”。
第 10 章	许文静班上数字与四个课例为综合人物、综合情境	体例声明，不是文献项。前言、后记已统一声明综合人物。须确认正文没有把这些数字写成实验结果。
第 11 章	新加坡学校为新生安排“伙伴”的普遍程度	正文写“常有”并标〔待核〕。须核新加坡教育部或学校的公开材料。核不到普遍性，就改为“有的学校”。
第 11 章	卡薇雅、阿迪、杰登、艾莎与俞老师班上情节为综合人物、综合情境	体例声明，不是文献项。前言、后记已有统一声明，无须另核。

章	仍待核项	说明（为何待核、建议怎样核）
第 12 章	“费曼学习法”系后人归纳之名，非费曼本人所定	这是本书判断，未见费曼原始出处。建议查费曼的传记与讲义，看此名最早见于何处。查不到也可保留，正文“后来又被包装成”的说法已留有余地。
第 12 章	宋嘉禾宿舍情节为综合人物、综合情境	体例声明，不是文献项。前言、后记已有统一声明，无须另核。
第 15 章	汉译本“扫帚扫地”一说的具体经卷	正文取巴利《法句经》注释（不放逸品，第 25 偈）为本，已核；“扫帚扫地”只作“另有一说”带过。须核汉译律藏或注释中此说所在经卷，并与书二第 22 章统一。
第 16 章	社交媒体“辅导作业”段子	正文只概述现象，明说不转述具体帖子。出版前须确认正文没有引出可指认的帖子或账号。
第 16 章	“不写作业，母慈子孝”一句的出处	流行俗语，出处不详。正文已作俗语处理。不必强求出处，只要确认没有写成某人原话。
第 16 章	新加坡小学家庭作业指引	正文数字取自一所小学的公开指引，不代表全国统一规定。须保存该校指引的网页存档，以备查证；并确认正文措辞是“有一所小学”。
第 17 章	中国各专业技术岗位继续教育学时或学分的具体规定与数字	正文未给数字。须核人力资源和社会保障部门有关专业技术人员继续教育的规定。若补数字，注明文件名与年份。
第 17 章	各类行业调查中四层评估使用比例的具体数字	正文只说“趋势一致”，未给数字。若补数字，须注明调查机构、年份与样本。
第 17 章	Alliger 等（1997）反应与学习、行为关系的效应大小	刊于《人事心理学》第 50 卷。须核原文的相关系数，确认“喜欢几乎无关、觉得有用关系稍强”的转述。
第 17 章	诺尔斯关于经验可能成为成见的原书表述	须对照《成人教育的现代实践》（1970）原文，找到对应段落。
第 18 章	凯洛夫《教育学》中“课的结构”的原表述与中译本年份	国内通行概括为五环节，“复习旧课”一环亦作“检查复习”。须核中译本的出版社、年份与原书措辞。
后记	后记所列学派前作的作者与专著编号	后置部分的核验注所列。须核《学习发生学导论》（王德生、阳涌，第 22 号）、《课堂学习发生学》（第 55 号，作者未列）、《学习兴趣发生学导论》（阳涌、胡敏，第 352 号）的作者、书名与编号。初审检索未能查到公开书目，保留待核。

章	仍待核项	说明（为何待核、建议怎样核）
书目	赫尔巴特“形式阶段”所出的著作与年份	第 18 章正文未指明著作。参考书目须补一种具体著作。
书目	新加坡家庭补习开支数据所据的媒体报道	第 2 章章末注写“据媒体对统计局家庭开支调查的报道”（2012/13、2017/18、2022/23 年度），未写报道出处。参考书目须补媒体名与日期。

附录四

本版成稿、审校与三审记录

本书由王德生立题并给定口径，按“大纲—并行成稿—统稿—审校—初审—复审—终审”七道工序成书。每道工序的人都直接在稿上改，并逐章留下记录。下面是各道工序做了什么、定了什么，供读者和后来的修订者查对。

一、各道工序

工序	分工	做了什么	改动规模
大纲	统稿人	接入作者口径“学习＝特征纠缠的建立，记忆＝特征纠缠的维持，学会＝特征纠缠的粒子化”，大纲由 v1.0 升至 v1.2：主干改为五段账，提出三种假会，第三编拆为学习、记忆、学会三章	承重命题由九条增为十条
并行成稿	十位执笔	按统一简报（口径、文风、人物登记、例子分配）分章成稿；研究文献先检索核对再写	前言、导读、二十二章、后置
统稿	统稿人	合稿；去同名人物、去重复例子；核书二回指章号；统一章题体例	约 10 处
审校	八组	文字、标点、句段长度、禁用词、主语纪律、口径用词、回指、章末格式、分寸	约 390 处
初审	八组（换人换组）	论证是否成立、口径是否一致、对前人是否公道、事实是否站得住；处理审校遗留问题	约 360 处
复审	三条线	A 口径术语全书统一；B 全书约 355 处回指逐条核对、重复材料压为回指、人物前后一致；C 小节编号、人名体例、章末格式、机检、附录同步	约 150 处

工序	分工	做了什么	改动规模
终审	两人各审半本	逐字通读：合规与分寸、引文与版权、不编造、成书质量、出版前硬规；补核第 3、12、17 章等处研究数据，附录三与正文逐行对齐	约 45 处；全书判可付印

二、统稿人在审读中定下的口径

事项	定为	例子
遗忘	松了，没断。连接度（断裂的难度）大体只增不减；松的是此刻够不够得着的那一侧	十年没用的德语，重学比初学快一截，省下的就是还在的连接
场	能回应、能拉扯的一方连成的网，即势能。人是主体；AI 用作提示、陪练时算进这张网，它摆出的解答与材料不算；桌上的东西是现实符号	奶奶摆在桌上的饼不是场，摆饼、问话、坐在一旁等的人是场
三角	任两类符号对不上，逼第三类发生，再回写给另外两类	规则在本子上灵、到饼上不灵，被逼着改写的是“我是一看就会的人”
入口二的药	只指“直面现实、做出东西”；“学这个有什么用”的道理常被当成入口二的药，其实连入口二也治不好	给学不动的孩子讲大道理，是拿错的药治第三种病
结晶	不加限定时专指学会；刷熟写作“结成了粒子，却熔不开”	范进在理念一界学会了一样东西，可它熔不开
量词与段号	“一条纠缠的五段账”；段号〇在场、一建立、二维持、三粒子化、四熔开再结晶	第三段（粒子化）
人名	思想家用中文通行译名，各章首次正式写到处括注原文；当代研究者用原文姓	皮亚杰（Jean Piaget）；Bjork

三、按审读者推荐先行采纳、请作者过目的事项

1. 第 7 章第三条方程的例子改写为“本子上灵、饼上不灵，逼出自我”。
2. 第 8 章章题“不散”保留，附录一“维持”条补“不散＝拉得住、够得着；忘是松，不是断”。

3. 第 13 章“两栏作业”与第 19 章作业设计单对齐：想象中的读者只给力气定方向，还不是场。
4. 第 14 章弯管改为前后两组偏移弯；“它不是病，是症状”保留。
5. 第 15 章周利槃陀伽取巴利《法句经》注释版（摩挲白布），汉译“扫地”一说入括注。
6. 第 15 章补出“本书说的力气”与“意志力电池说”的区别；第 15 章比大纲多出“没电的时候，一键答案最诱人”一节。
7. 第 19 章 AI 三档以“AI 掺进来多少”定严宽，规则为“年纪越小、对一样东西越生，放得越窄”。
8. 第 21 章实验一把“零困惑、零动能”拆成甲乙两组（解答来自老师或来自 AI），任一组做到都算推翻。
9. 第 22 章补写“卡了三次”的第三次（第九题正负号放反）；林佩君“请 AI 讲租赁准则、周四做不出分录”一段保留。

四、仍待核之处

凡出版前须对原书原刊复核的，逐条列在附录三。各章标〔待核〕处与附录三一一对应。

后记

这本书是 SDE 应用符号学的第一卷。理论那一卷《SDE 符号学》（书二）写的是符号怎样发生。符号是纠缠结晶出来的粒子，在理念、现实、自我三界里发生。它起于对不上，要付能量，会固化，也会熔开再结晶。书二第 26 章用一章的篇幅，说了一句话：学习就是自我符号的结晶。那一章写完，要说的话还远没有说完：一章装不下一间教室。

应用卷要做的，是把理论卷里只用一章带过的地方，放回它真实的日子里去。教育排在第一卷，是因为它离每一个家庭最近，也因为它被 AI 改变得最快、最急。

这本书的骨头，是王德生在学习发生学方面的三句话：学习是纠缠的建立，记忆是纠缠的维持，学会是纠缠的粒子化。

这三句话，在德麦国际 SDE 学派先前的几部著作里已有雏形〔待核〕。《学习发生学导论》（王德生、阳涌，德麦国际专著第 22 号）讲“学习即纠缠”。《课堂学习发生学》（第 55 号）把它带进课堂。《学习兴趣发生学导论》（阳涌、胡敏，第 352 号）追问兴趣从哪里来。本书在它们的基础上，把三句话接成一条五段账，再从五段账里分出三种假会。最后，落到课堂、作业和评价怎样重排。

书中的人物都是综合人物。王德生 2005 年起定居新加坡，书里许多晚上取材于新加坡和中国的家庭与课堂，可是没有一个人指向真人。他们的名字，是为了让读者看见一个具体的晚上，而不是为了讲某一个人的故事。

书中引到的教育研究，凡能核实的，都已核实；核不实的，标了〔待核〕，汇在附录三。本书宁可多一个〔待核〕，也不愿多一个编出来的数字。第 21 章写下了这套说法会在哪里输，也是同一个意思：一本讲学会的书，自己先要经得起检验。

感谢德麦国际出版社的编辑同仁，感谢学派里的同道。也感谢那些在书里没有名字、却给了书许多晚上的老师、家长和孩子。

最后说一说这本书是怎样起头的。在关于 SDE 符号学的一次口述里，王德生说过一句话：无论哪一界，符号的发生都要付能量，要消耗动能，依靠势能，建立内能。

这句话说完，一个很日常的问题就跟着冒了出来。既然结晶要付能量，那么一份几秒钟就能生成的答案，留下了什么？一个不用付任何力气就“看懂了”的晚上，又在学的人身上留下了什么？

这个问题，许多家长在饭桌边都问过，只是换了一种说法：“你昨晚不是都会吗？”这本书，就是从这一问开始的。

判　词

教育的产品
不是答案，
是结晶。

——本书判词

作业全对，第二天的小测一道也写不出；题刷了三年，换个问法就卡住；培训听得频频点头，回到岗位照旧。AI 一键给出答案的时代，“都会”和“会了”之间的那道缝，越来越宽。

本书说：学习是特征纠缠的建立，记忆是它的维持，学会是它的粒子化——一个符号在你身上发生了。答案可以转手，纠缠不能代建。它要有对不上、有托得住的场、有学的人自己付的力气。

从看懂型、背住型、刷熟型三种假会，到学不进的三个入口，再到课堂、作业、评价怎样重新排布；第 21 章写明本书在什么情况下算错。

学习是建立，记忆是维持，学会是粒子化。

ISBN 979-8-90690-409-6

德麦国际出版社 · Demai International Press
德麦国际专著 第 409 号 · 八编二十二章 · 约 25 万字
定价 US$23.00