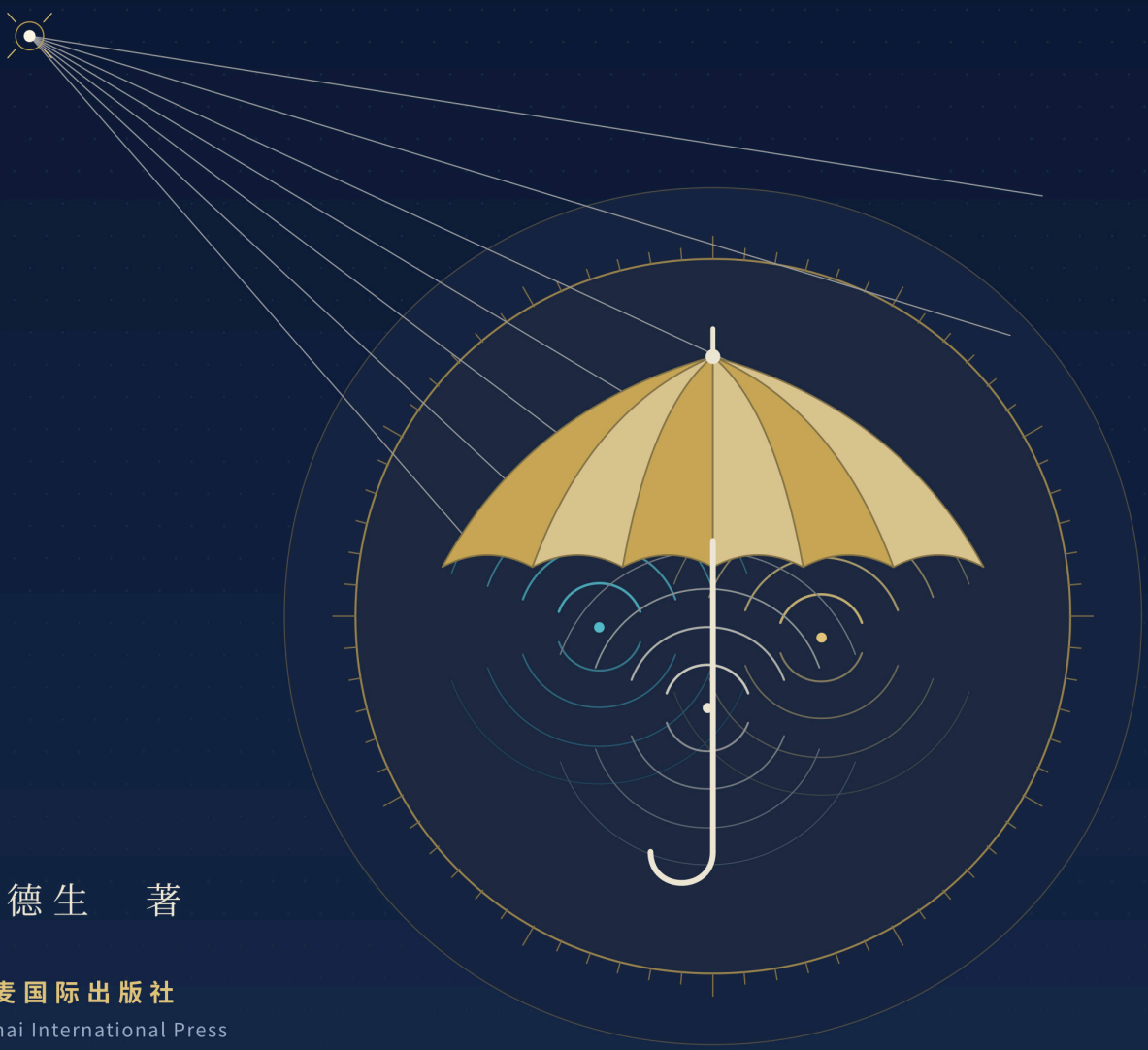
光的科学之外

视觉科学的代签与触觉、听觉科学的新生



王德生　著

德麦国际出版社
Demai International Press

德麦国际专著 · 第 421 号

光的科学之外

视觉科学的代签与触觉、听觉科学的新生

王德生　著

德麦国际出版社
Demai International Press · Singapore

出　版　信　息

书名	《光的科学之外——视觉科学的代签与触觉、听觉科学的新生》
著者	王德生
执笔	复合主体：王德生立题、口述承重命题与口径，Claude 执笔与统稿，经独立质检
出版	德麦国际出版社（Demai International Press）· 新加坡
编号	德麦国际专著第 421 号
ISBN	979-8-90690-027-2
定价	US$23.00
开本	170 mm × 240 mm
字数	约 20 万字
版次	2026 年 10 月第 1 版

AI 协作声明：本书的立题、判词与口述命题由王德生给出；文字在其指令下由 AI（Claude）协作成稿，十路执笔、五路独立质检核实史实。

书中陪读人物与场景均为构想，不当证据。中医章节不构成诊断或治疗建议。书中标“猜想”“待验”的，是本书自己提出、尚未检验的说法。

全书结构：出版信息、作者介绍、前言、导读、目录；导论；七编三十三章；结语、参考书目、附录三件。

版权所有　侵权必究

作者介绍

王德生，博士，SIO 本体论与 SDE 发生学的创立者，新加坡德麦国际（Demai International Pte. Ltd.）创始人、董事长，SDE Universes 平台主持人。

他是计算数学出身：湘潭大学数学系本科与硕士，中国科学院数学研究所博士，中国科学院计算数学研究所博士后；此后在英国威尔士大学斯旺西分校任高级研究员，在新加坡南洋理工大学数学系任教与研究十三年，任博士生导师，在国际期刊发表计算数学与图形学论文四十余篇，研究集中在网格生成、变分表面重建与波的模拟。

2015 年起他回国推广自己的方法论，2017 年 1 月以一篇《给你一双慧眼看天地》开始了“三视角”时期。此后他的思想走过四站：三视角（2017 年 1 月起）、321 智慧系统（2022 年 10 月起）、SIO 本体论（2024 年 7 月起）、SDE 本体论（2026 年 1 月起；同年 5 月起“结构”改读为“显露”）。

他做了二十多年网格与数值计算，处处与点打交道；回过头来，他问的是：现代科学为什么只睁开了眼睛。

前言

这本书从一件很小的事起头：怎样把 SDE 讲给一个孩子听。

SDE 是我这些年讲得最多的东西。S 读"显露"，D 读"差异序列"，E 读"特征纠缠"。三个词写在黑板上，大人听了也皱眉。讲得多了，我慢慢找到一个办法：不从概念讲起，从三件谁都做过的小事讲起。摸一只小猫，手和猫毛贴在一起，谁在摸谁分不太清，这是 E。敲几只碗，叮、当、叮，不一样，分得出，排成先后，这是 D。看天一点点亮，影子冒出来，楼和树成了形，整条街摆在眼前，这是 S。三句话，九岁的孩子听得懂，七十岁的老人也听得懂。

三句话一说出口，就落到了三种感觉上：摸、听、看。起初我只当它是打比方，后来才明白，这一步比比方大得多。我一直讲的那句话是：讲清楚 SDE，最终极的案例来自三大感觉，是触觉 SDE、听觉 SDE、视觉 SDE，每种感觉各含完整的 S·D·E，不是一维对一感；只是触觉 SDE 更容易侧重意识到 E。摸小猫里有完整的显露，敲碗里有完整的纠缠，看天亮里也有完整的差异序列。分别只在哪一维最先被觉察。这一层守不住，SDE 就会被读成三个格子，一种感觉装一维，那就读错了。

这里顺带把 S 说准。S 不是一个摆在那里的样子。它随着 D 启动，一层一层往外显露，冒出来，成了形，再成结构，是一个显露谱系。S、D、E 也分不开，分开只是我们想事情的时候在理念界做的一次假想性切割。看天亮最能体会这两句：天没有一下子亮好的时候；你也找不到一个单独的"亮"，等着光和眼睛来配它。

所以我常说，真正学 SDE，不在书桌上背定义，要在三种亲身的感知里学：看是光，听是音，摸是气。看靠光、听靠音，不用多说。摸为什么配气？中华传统里的气，从来没有谁看见过，它是冷暖、松紧、虚实、通滞，是一阵一阵在身上、在手底下感到的。老中医切脉，厨师看火候，农人试土的干湿，都在感到气。本书把气当作触觉最直接取得的那个世界，不把它当一个玄妙的字眼。它能不能有一个读数，是本书要交的一份作业。

三种感觉摆在一起，下一个问题就冒了出来：我们今天信的科学，是用哪一种感觉做成的?

我是学计算数学出身的。在湘潭大学数学系读书，到中国科学院数学研究所读博士，做的是组合网格和网格的自动生成；后来在新加坡南洋理工大学，做得最多的是 CVT（质心 Voronoi 剖分）和 Delaunay 网格。前前后后二十来年，打交道最多的就是点。网格上每个节点都是一个没有大小的点，点和点各算各的，中间靠方程牵线。点非常好用，没有它就没有今天的飞机、桥梁和天气预报，我从没觉得它有什么不对。

可三种感觉的事一想清楚，回头再看网格，就看出了点的来历。点是眼睛给的。眼睛点对点成像，看这一处不改那一处，光又几乎一下子就到。手按下去，按到的永远是一片，按这里牵着那里，回应一层一层地来。耳朵听一个音，要让它响一会儿，才听得出高低。数学里那个没有大小、互不重叠、一下子全部给出的点，只有眼睛给得出来。

顺着这条线，我说出了本书的中心判断。我一直讲的那句话是：现代科学是视觉科学，光的科学，是看，叫做观察世界，是用视觉 SDE 获得特征、图像（稳定的视觉特征），然后听觉和触觉（碰撞）就用数学模型来假设，比如方程。分子里原子与原子怎样碰撞，没有人摸过，是模型假设的；可我们把那个模型当成了客观物理。本书给这件事起了一个名字，叫"代签"：手和耳朵不在场，

方程替它们签了字。签得很准，桥照样稳，卫星照样定位；错只错在把代签当成了原件。

想到这里，有两件事放不下。

一件是中医。中医的数据有一大半来自手指，今天却要拿一套只给眼睛造了尺子的科学来量它，量完说它不科学。今天的中医确实还不科学，这句话我照直说；可毛病不全在中医，科学自己的定义也片面了。中医要的科学和里面的数学，都得新生。

另一件是 AI。我一直讲的那句话是：视觉数学已经将被 AI 包揽，新数学就是进入触觉和听觉；AI 需要数学家的触觉和听觉加入；AI 没有体会触觉和听觉的互相纠缠，只有人首先实现，然后 AI 再来模拟。点可以切割，可以编码，机器吃起来最顺口。手和耳朵缠在一起的那一下，机器没有经历过，要人先做出来，立成单位，机器才有东西可学。

这本书是接着站上几部书往前走一步。第 8 号《中华之气》说，光让世界被看见，气让世界被感到；它给自己立过一条作废条件：气若给不出独立于既有物理量的读数，就退化为修辞。本书接着做三件事：给气一个读数，也就是伞的三个参数偏离三重退化的程度，这个读数标着"待验"；把"一文明一感官"改成"每种感觉都有完整 SDE，文明之别只是侧重之别"；把它说的模型是气被光学化之后的"残迹"，拆成"代签"这个机制，并配上能推翻它的预测。第 346 号《人与 AI 一起发生新数学》说今天的数学是视觉的，要有摸的数学、听的数学；本书从数学推到科学，说方程是代签，客观物理是代签被当成了原件，又补上触觉镜和"先人、后机、再回人"的次序。第 344 号《意义数学的诞生》说传统数学是伞的三重退化；本书接着问，三重退化从哪里来，答案是视觉成像的三种物理性质。

我也要说清这本书不做什么。它不推倒视觉科学。看得稳，别人也看得见，可以重复，可以传给一万个不认识的人，这是视觉科学伟大的一半，本书一个字都不拿掉。新长出来的数学，伞一收拢，必须一分不差地退回旧数学；退不回去的，我不认。本书也给自己留了死法，一共五条预测，每一条都写明出现什么大局面就算本书错。一个命题怎么说都对，就什么也没说。

书是写给普通人的。初中以上的读者读得下去，做专业的读者也能读出一点新东西。读的时候不妨把手和耳朵带上：拍一个瓜，敲一只碗，揉一回面。概念在体验之后。这本书讲了很多概念，它真正想交给读者的，是读者自己的手和耳朵。

导读

◆ 一句判词

全书压成一句话：

现代科学的眼睛是自己的，手和耳朵是方程借给它的；把借来的当成世界，就叫客观物理。

再短一点：眼睛是自己的，手和耳朵是方程借的。

全书要回答的问题也只有一个：视觉科学替气签了什么字，气自己的科学和数学怎样新生？

这句判词有两半，要分开读。前一半是事实判断：科学取特征靠眼睛，碰撞和节奏靠方程补上。这一半本书用第二、三编去论证。后一半是一句批评：毛病不在借，在借了以后忘了是借的。所以本书不和方程作对，方程照样用，桥照样造；本书只是不肯让方程一个人既当证人、又当原件。读者若只记住"科学错了"，就把这句话读反了。本书说的是科学只睁开了一只眼睛，手和耳朵的那一份还没有长出来，得新生。

◆ 三个承重概念

代签。签字的人本该在场。原子之间怎样推、怎样撞，声音怎样一起一伏，这些碰撞与节奏从来没有被手和耳朵亲身取得。眼睛看到了结果，方程替缺席的手和耳朵签了字。代签不是错，方程照样算得准；错在把代签当成原件，把"模

型假设的碰撞"当成"世界里本来就有的碰撞"。第三编一处一处拆开它：力、原子间的碰撞、声音、热与压与气，再到"客观物理"这一处总代签。

三重退化即视觉三性。本书的新数学单位叫"伞"：一个数有伞心、伞半径、伞面分布，伞和伞还会重叠。传统数学是伞收成点的特殊情形，要三个条件同时成立：伞半径收到零（$r\to 0$），伞与伞互不重叠（$\omega=1$），信号瞬间传到（$v\to\infty$）。本书说，这三个条件不是数学家随手挑的，它们正好是视觉成像的三种物理性质：点对点成像、感受野极小；局部图像互相可切割，看此不改彼；光近乎瞬达，满眼同时呈现。手和耳朵三样都不满足：按到的是一片，按此牵彼，压力和声音都要一段时间才到。

先人后机。拍西瓜、叩诊、弹琴，都是手和耳朵同时在场、缠成一个判断。这种跨感官的纠缠，必须先在人身上实现，并立成可传、可验的单位，AI 才有东西可学。把手的数据和耳朵的数据分开采、分开学、再拼回去，拼不出原来那一下。次序是三步：先人实现，再机模拟，再回到人的手和耳朵里检验。

三个概念是一条链。代签说过去发生了什么；三重退化说为什么会这样；先人后机说现在怎么办。

◆ 七编的路

导论从一个做了二十年网格的人摸不到一个原子说起，用摸小猫、敲碗、看天亮三句话把 SDE 讲给孩子，交代三个承重概念和五条预测。

第一编　三觉 SDE（第一至五章）。在摸、听、看里学会 SDE。摸小猫，最先觉察 E；敲碗，最先觉察 D，并分清 Drive 不是 D，动力来自两维之间的矛盾；看天亮，最先觉察 S，S 是显露谱系。第四章吃一口苹果，三觉同时发生，讲"理念界的假想性切割"和"侧重不是专属"。第五章去谭桂香的瓜摊拍西瓜：只摸不听、只听不摸都不准，触与听缠成一个判断单位。

第二编　光的科学（第六至十章）。说明现代科学是视觉科学。第六章从 eidos、theoria 讲到约纳斯的视觉三性，接过第 422 号的"断桥"，把"光的世界＝西方"降为待检的侧重，交给预测五。第七章讲观察做成了什么：看得稳，别人也看得见，望远镜与显微镜两次扩容。第八章讲仪器的共同本事：把冷暖、松紧、声音翻译成给眼睛看的刻度、曲线和图，连原子力显微镜真的在"摸"，交出的也是图。第九章说点性来自视觉局部图像的可切割性。第十章把伞的三个退化条件一一对上视觉三性。

第三编　代签（第十一至十六章）。力从来没被看见，F 是从看得见的加速度倒推出来的符号；原子在哪里是衍射看出来的，原子之间怎样撞是势函数和力场补上的；声音被波动方程和傅里叶分析画成曲线，好听却不在曲线上；热、压、气被读成刻度，锅气进不了实验报告。第十五章讲代签怎样被当成原件：客观物理在卢瑟福、玻尔、电子云之间换了三次，换的是图，没变的是眼睛取特征、方程替手签字。第十六章回头说公道话：代签签对了行星，签稳了桥；对象离三重退化越远，它签得越吃力。

第四编　如果手能伸进原子（第十七至二十章）。这是思想实验和预案，不是预言成真。第十七章给第三次感官扩容起名"触觉镜"，立下它的条件：一路保住伞，任何一项退化就退回显微镜。第十八章讲 nanoManipulator 这类已有的萌芽为什么还不算：手上的力是模型先算好再推过来的。第十九章列出手到场后五件要改写的事。第二十章摆出四种结局，写下预测一的判错线。

第五编　从点到伞（第二十一至二十五章）。第二十一章立伞的单位，提出气的读数（待验）。第二十二章讲切不开的东西怎样加、怎样数"一个"，给出重叠项和"有效个数"的猜想式记法。第二十三章讲听觉没有瞬间，听觉的伞随时间张合。第二十四章写触与听的跨模态重叠项和判瓜熟的最小模型，引出预测三。

第二十五章立新数学的两道门槛：收拢时退回旧数学，撑开时算出旧数学算不出的；并给预测二报一次预备账。

第六编　中医需要新生的科学（第二十六至二十九章）。第二十六章说脉诊是触觉 SDE，浮沉、滑涩、弦紧各含完整三维，录成波形丢了大半。第二十七章说两头都要动：中医还没立起手指的单位，科学也只给眼睛造了尺子；疗效检验本身不偏向视觉，青蒿素就是例子。第二十八章讲触觉特征怎样稳定、可传、可验，提出为手做的标准物。第二十九章把寸关尺写成三把交叠的伞，设计一个能说错它的小实验，即预测四。

第七编　先人、后机、再回人（第三十至三十三章）。第三十章说 AI 最先接走视觉数学，因为点本来就切好了。第三十一章说 AI 没有跨感官纠缠，两串切开的数据对得再齐也只是并排。第三十二章讲先人、后机、再回人三步，给出预测三的实验做法。第三十三章从爱因斯坦"视觉的和某种肌肉型的"思维元素讲起，说数学家要做三件事：带进特征，立下单位，判断对味。

结语回到孩子的三句话，接第 342 号给典范的多样添一根感官的轴，分出视觉、触觉、听觉三种典范，说出本书最弱的三处，并给五条预测逐条报账。

◆ 怎么读

急着看结论的，读导论、第十章、第十五章、第十六章和结语。这五处合起来，就是判词、三重退化、代签被当原件、代签的边界和五条预测的总账。

想看数学的，读第九、十章，看点性从哪里来；再读第二十一至二十五章，那里是伞、重叠、听觉伞、跨模态重叠项和两道门槛；第二十九章和第三十三章第四节各有一个小样。数学只写到普通读者跟得上的程度，凡不是已证结论的，都标着"猜想"或"待验"。

关心中医的，读第十四章（气为什么进不了实验报告）、第二十一章第四节（气的读数），再读第六编四章。第五章的叩诊和第二十四章的拍、叩、弹，可以当作前奏。

只想先摸一遍骨架的，每章只读开头的"这一章的问题"和末尾的"带走的话"与两行小账。一行记本章的 S、D、E 各落在哪里，一行记本章拆开了哪一处代签，或给出了伞的哪一个参数。

◆ 六位陪读人物

六位都是我构想的人物，全书前后一致。他们不承担证据，只帮读者把道理放到日子里去看。

- 罗明川：四十八岁，长沙一所大学的材料力学副教授，做断裂模拟，画了一辈子网格、列了一辈子方程。
- 罗朵朵：九岁，罗明川的女儿，小学三年级，什么都要问一句"为什么"，第一编的小事多半由她带着做。
- 谭桂香：六十七岁，在娄底菜市场卖瓜卖菜三十年，拍瓜判熟一拍一个准。
- 邓守仁：七十一岁，湘中乡下的老中医，三根手指切脉四十多年。
- 许蔓：三十一岁，深圳一家机器人公司的触觉传感工程师，想让机器的手知道自己摸到了什么。
- 曾一鸣：二十六岁，数学博士生，用 AI 做形式化证明，有点担心自己的饭碗。

凡人物出场的场景，都在该章第一次出现时写明"这是我构想的场景"。人物说的话也是构想的，不是任何真人的原话。

◆ 三条禁令与几种标法

全书守三条禁令。讲中医的几章，不作诊断，不给治疗或用药的建议。全书不做政策表态。书里提出的各种读数，包括气的读数和脉的伞式特征，只用来认识，不进任何考核，不给任何人打分排名。

书里有几种标法，读者见到时请照此理解：

- **待验**：本书自己提出的读数或判断，已经说清楚怎样去验、验出什么就作废，但还没有人去验。气的读数就是这一类。
- **猜想**：本书写下的数学记法或推论，不是已证的定理。伞的有效个数、听觉伞的叠接变三种运算、跨模态重叠项、判瓜熟的最小模型，都是这一类。
- **构想**：人物、场景和对话是作者构想的，只作引子，不当证据。
- **本书暂名**：本书临时起的名字，比如"叠合量"，将来有更好的叫法就换。
- **示意**：为了说明道理随手取的数字，不是测量结果。

正文里拿不准的史实与数字，都已逐条核过，核不实的收成了概括，或者删去。所引文献见书末参考书目；与站上各部专著的关系，见附录三。

目 录

作者介绍 iii

前言 iv

导读 viii

导论　做了二十年网格的人，摸不到一个原子 1

第一编　三觉 SDE：在看、听、摸里学会 SDE 13

第 1 章　摸小猫：触觉最先让人觉察 E 14

第 2 章　敲碗：听觉最先让人觉察 D 24

第 3 章　看天亮：视觉最先让人觉察 S 34

第 4 章　吃一口苹果：三觉同时发生 44

第 5 章　拍西瓜：触与听纠缠在一起 54

第二编　光的科学：现代科学是视觉科学 65

第 6 章　理念是"所见之形"：西方为什么是光的世界 66

第 7 章　观察世界：视觉 SDE 取得稳定特征 77

第 8 章　仪器的共同本事：把听和触翻译成可看的 87

第 9 章　局部图像的可切割性：点性从哪里来 99

第 10 章　三重退化即视觉三性 111

第三编　代签：方程替手和耳朵签了字 125

第 11 章　力从来没被看见 126

第 12 章　原子里的碰撞是模型假设的 137

第 13 章　声音被画成曲线 148

第 14 章　热、压、气被读成刻度 158

第 15 章　代签被当成原件 169

第 16 章　代签不是错：视觉科学的伟大与边界 182

第四编　如果手能伸进原子：一场预演的物理学革命 193

第 17 章　望远镜、显微镜、触觉镜：第三次感官扩容 194

第 18 章　nanoManipulator：已有的萌芽为什么还不算　204
第 19 章　触察世界：五件会被改写的事　214
第 20 章　预案：触觉进入微观后的四种结局　224

第五编　触觉与听觉的新数学：从点到伞　235
第 21 章　数不再是点：触觉数学的单位是伞　236
第 22 章　切不开：不可加性与重叠　248
第 23 章　听觉没有瞬间：一张一合的伞　260
第 24 章　触与听的纠缠数学　271
第 25 章　新数学的门槛　283

第六编　中医需要新生的科学　295
第 26 章　脉诊是触觉 SDE　296
第 27 章　中医不科学，科学也片面　307
第 28 章　触觉特征怎样稳定、可传、可验　318
第 29 章　脉的伞数学　329

第七编　AI 包揽视觉数学之后：先人、后机、再回人　341
第 30 章　视觉数学正在被 AI 接走　342
第 31 章　AI 没有跨感官纠缠　350
第 32 章　先人、后机、再回人　358
第 33 章　数学家的手和耳朵　366

结语　三觉科学：从一只眼睛长成一个身体　374
参考书目　382
附录　393
附录一　术语小词典　394
附录二　五条预测与作废条件一览　397
附录三　与站上专著的碰撞　399

导论

做了二十年网格的人，摸不到一个原子

> **这一篇的问题**
>
> 我们信了几百年的科学，是用哪一种感觉做成的？它没有亲身用上的那几种感觉，又是谁替它们上了班？

◆ 一、二十年网格，处处是点

我在计算数学里做了二十来年的网格。

网格是什么，先用大白话说。工程师要算一座桥受了多大的力，一块钢板从哪里开裂，一股水流怎样绕过桥墩，方程是写得出来的，可方程在整块材料上一口气解不出来。办法是把材料切碎：在桥上、钢板上、水里撒下许多点，把相邻的点连成小三角形或小四面体，整块东西就变成一张密密的网。电脑在每个点上算一个数，再把这些数拼回去，就得到整块材料的样子。

撒点有讲究。一种叫 Delaunay 网格（德劳内三角剖分），它让每个小三角形尽量"胖"，不要又尖又扁，算起来才稳。另一种叫 Voronoi 剖分（沃罗诺伊剖分），它给每个点划一块"地盘"，地盘里的每个位置都离这个点最近。打个比方：一座城里散着几十家超市，每户人家都去离自己最近的那一家买菜，把城按"去哪家买菜"分成几十块，这就是一张 Voronoi 图。再把地盘挨着的两家超市用直线连起来，连出来的三角形就是 Delaunay 网格。两种做法像一对孪生兄弟，一个管连线，一个管分地。我博士阶段做的是组合网格和网格的自动生成，后来在新加坡南洋理工大学，做得最多的就是这对兄弟：CVT（质心 Voronoi 剖分，让每个点正好坐在自己那块地盘的重心上，地盘就分得又匀又正）和 Delaunay 网格。

请留意这个比方里的一件事：每一户人家只属于一家超市，不能同时属于两家。地盘与地盘之间，只有边界，没有重叠。超市本身，在图上也只是一个点，不管它实际有多大的门面。做得好，网格又匀又顺，误差就小。

这二十来年里，计算用的网格从几千个点长到了上亿个点。网越来越密，算得越来越准，有一件事始终没变：网上每一个节点，都是一个没有大小的点。

点没有面积，没有厚薄，不占地方。两个点之间，要么连一条线，要么不连。一个点上的数，和它旁边那个点上的数，各算各的，中间靠方程去牵线。整张网，从头到尾，是由互不重叠的小块拼成的：这一块是这一块，那一块是那一块，边界清清楚楚。

点非常好用。点可以编号，可以存进电脑，可以一个一个地数；两个点之间的关系，可以干干净净地写成一个式子。没有点，就没有今天的飞机、高铁和天气预报。我不打算说点不好。

可是做网格的人都知道，有些地方点最难对付。材料开裂的那一处，就是一个。按经典的弹性力学去算，裂纹尖端那一个点上的应力会变成无穷大，数学上叫"奇异"。工程师只好在尖端附近把网格撒得极密，再用各种办法把那个无穷大绕过去。材料在那里被撕开，点在那里失灵。撕开，恰恰是一件手最熟悉的事：撕一张纸、掰一块饼，手都知道哪里先松、哪里先断。眼睛看到的是一条裂缝，手感到的是一片在松动。这个对照，本书第五编还要回来细说。

可是谁都揉过面团，或者至少按过一块橡皮泥。手按下去的时候，按到的从来不是一个点。按到的永远是一片：掌心底下一片软，指缝那里鼓起来一圈，再远一点的面也跟着动了一下。你按这一处，那一处就被牵着。你按得慢，它回得慢；按得快，它顶得硬。手底下没有一个"没有大小的点"，也没有一条"清清楚楚的边界"。

这就有了一个奇怪的落差。我们用来描述材料的数学，是由点和互不重叠的小块拼成的；我们用手去碰材料时，碰到的却是一片、一层、一阵，处处重叠、处处牵连。

我在本书里请出一位陪读的人物，罗明川。他是我构想的人物：四十八岁，长沙一所大学的材料力学副教授，一辈子做断裂模拟，画网格、列方程。有一天他的女儿罗朵朵问他："爸爸，你算的那块钢板，你摸过吗？"他说摸过，钢板凉凉的，硬硬的。女儿又问："那你电脑里的钢板，凉不凉？"他答不上来。这是我构想的场景，可这个问题是真的：电脑里的钢板，只有点，没有凉。

再往下走一步，问题就更大。今天的物理学告诉我们，钢板里有铁原子，原子之间互相推、互相拉，裂纹就是这些推拉在某处撑不住了。可是谁摸过一个原子？没有人。我们看过原子的图像，那是扫描隧道显微镜在 1981 年以后给出的；我们写过原子之间的推拉，那是一串势能方程。图像是眼睛的，方程是笔下的。原子之间那一下"碰"，那一下"推"，从来没有经过任何人的手。

这怪不得谁。人的手指尖最细能分辨的距离，大约两三毫米，原子比它小了上千万倍。眼睛借了显微镜，一路追到了原子的图像；手没有这样一条路，只好停在原地，把那一段交给方程去写。

做了二十年网格的人，摸不到一个原子。这件事本来不稀奇，稀奇的是我们很少觉得这里缺了什么。

本书要说的就是这里缺的东西。我把它压成一句判词：

现代科学的眼睛是自己的，手和耳朵是方程借给它的；把借来的当成世界，就叫客观物理。

更短一点：眼睛是自己的，手和耳朵是方程借的。

◆ 二、三句话把 SDE 讲给孩子

要讲清这句判词，得先讲清本书用的那把刀：SDE。

SDE 是三个字母，S、D、E。S 读"显露"，D 读"差异序列"，E 读"特征纠缠"。这三个词摆在纸上，大人读了也发懵。可我发现，讲给孩子反倒容易，只要不从概念讲起，从三件小事讲起。

第一件，摸小猫。手放上去，猫毛贴着手心，手也贴着猫毛，谁在摸谁，一下子分不太清。猫拱一下背，你的手就被顶起来；你按重一点，猫就缩一下。手和猫在互相改写。这种"你改我、我改你、分不开"的状态，就是 E，特征纠缠。

第二件，敲碗。三只碗盛了不同深浅的水，用筷子一敲，叮、当、叮。三个声音不一样，你分得出哪个是哪个，它们还排出了先后。叮当叮和当叮叮，是两支不同的小曲。这种"不一样、分得出、排成先后"，就是 D，差异序列。

第三件，看天亮。天还黑的时候，窗外什么都没有。慢慢地，楼的影子冒出来了，树的轮廓成形了，最后整条街摆在眼前，哪里近、哪里远、哪条路通哪里，都清楚了。这种"冒出来、成了形、成了结构"，就是 S，显露。

三件小事，三个字母。三件事都用不着仪器，也用不着书本，九岁的孩子做得到，七十岁的老人也做得到。一套讲"发生"的道理，要是只能在书本里讲清楚，它就离日子太远了。

讲到这里，有一个最容易犯、也最要紧的错，我必须先堵住：千万别以为触觉就是 E，听觉就是 D，视觉就是 S。

摸小猫里有完整的 S：软和暖是一阵阵冒出来的，猫的身形在手底下慢慢成形。摸小猫里也有完整的 D：顺毛滑过去和逆毛推回来，是两种不一样的感觉，还分先后。敲碗里有完整的 E：你用手指按住碗沿再敲，声音就闷了，碗、水、筷子、手指缠在一起决定那一声。看天亮里有完整的 D：没有由暗到亮的一串差异，什么都显露不出来。

每一种感觉，都各有一套完整的 S、D、E。分别只在于：摸的时候最容易觉察到 E，听的时候最容易觉察到 D，看的时候最容易觉察到 S。是侧重，不是专属。

这层意思，我愿意说得直接一点：讲清楚 SDE，最终极的案例来自三大感觉，是触觉 SDE、听觉 SDE、视觉 SDE，每种感觉各含完整的 S、D、E，不是一维对一感；只是触觉 SDE 更容易让人侧重意识到 E。

还有两句话，本书从头守到尾。

一句是关于 S 的："S 不是静态的样子，而是不停地显露，是一个'显露谱系'：当你启动 D 差异序列，S 就发生。"天亮就是这样。天一层一层亮出来，没有一下子亮好的时候；你闭眼再睁眼，它又重新显露一次。

一句是关于三者关系的："S、D、E 是不可分割的，只是思考的时候进行一个'理念界的假想性切割'。"摸小猫的时候，并没有一个单独的 E 在那里等你，再来一个单独的 D、一个单独的 S。是我们想清楚的时候，在脑子里把它们切开来看。切开是为了想，不是因为它们本来就是三块。

所以，真正学 SDE，不在书桌上背定义，要在看、听、摸的亲身体验里学：看是光，听是音，摸是气。概念在体验之后。本书第一编五章，就是带读者把这三件小事一件一件做一遍，再把它们放在一起做一遍：摸小猫、敲碗、看天亮，然后是吃一口苹果、拍一个西瓜。

三句话里，还藏着一个对照，值得先点一下。

摸小猫的时候，手和猫隔不开；敲碗的时候，声音一个接一个地来，不能一下子全听完；看天亮的时候，整条街是同时摆在眼前的，而且街并不因为你在看就改变一点。看，是三种感觉里唯一让人觉得"我站在外面"的那一种。你可以看一只猫看很久，猫毫不知情；你摸它一下，它就回头了。

正因为看让人站在外面，它最容易被当成"客观"。站在外面看到的样子，似乎就是事物本来的样子，与我无关。这一点是视觉科学的大功劳，也是它后来出岔子的地方。本书第二编会细讲：看此不改彼，看到的东西就可以一块一块切开，切开了就可以数，数到最后，就剩下一个一个的点。

学会了这三句话，再回头看那张网格，就能看出它的来历了。

◆ 三、本书的路与死法

本书的中心命题是这样的：

现代科学是视觉科学。它用视觉 SDE 取得稳定的特征，也就是图像；碰撞和节奏这两样，眼睛取不到，就用数学模型替缺席的触觉和听觉"代签"；后来又把代签当成了客观物理。传统数学的点，正是视觉成像三种物理性质留下的影子。触觉与听觉的科学和数学，只能新生：先在人身上实现跨感官的纠缠，再交给 AI 模拟放大，最后回到人的手和耳朵上检验。

全书要回答一个问题：视觉科学替气签了什么字，气自己的科学和数学怎样新生？

撑起这个命题的，是三个承重概念。删掉任何一个，后面就接不上。

第一个是"代签"。签字的人本该在场。方程描述原子之间怎么推、怎么撞，声波怎样一起一伏，可是推和撞、起和伏，从来没有被手和耳朵亲身取得。是眼睛看到了结果，再由方程替缺席的手和耳朵签了字。代签不是错，方程照样算得准，飞机照样飞得起来。错在把代签当成了原件，把"模型假设的碰撞"当成了"世界里本来就有的碰撞"。

第二个是"三重退化"。本书第五编会讲一种新的数学单位，叫"伞"：一个数不再是数轴上的一个点，而是一把撑开的伞，有伞心，有伞半径，有伞面上的分布，伞和伞之间还会重叠。传统数学，就是伞收拢成点的特殊情况：半径缩到零，伞与伞互不重叠，信号瞬间传到。本书要说明，这三个收拢条件不是数学家

随手选的，它们恰好就是视觉成像的三种物理性质：眼睛点对点成像，看这一处不改那一处，光几乎瞬间到达。点性的来历，就在眼睛里。

第三个是"先人后机"。拍西瓜、叩诊、弹琴，都是手和耳朵同时在场、缠在一起的判断。这种跨感官的纠缠，必须先在人身上实现，并且立成可以传、可以验的单位，AI 才有东西可学。把手的数据和耳朵的数据分开采、分开学、再拼回去，拼不出原来的那一下。次序只能是：先人实现，再机模拟，再回到人检验。

这三个概念是一条链。代签说的是"过去发生了什么"：科学怎样用眼睛加方程，补齐了它取不到的碰撞与节奏。三重退化说的是"为什么会这样"：科学的数学单位是点，而点就是眼睛的成像方式压出来的形状，用点去写碰撞，只能代签。先人后机说的是"现在该怎么办"：视觉的数学正在被 AI 接手，手和耳朵的那一份，AI 自己长不出来，得由人先做出来。过去、原因、现在，三环扣在一起。

对专业读者，我也先交个底，本书新在哪里。说数学来自身体，莱考夫和努涅斯在 2000 年的《数学从哪里来》里已经说过；可他们不分感官，也没有问，为什么数学最基本的单位偏偏是一个点。说视觉在西方思想里坐了头把交椅，约纳斯说过，马丁·杰伊在 1993 年的《垂目》里也梳理过二十世纪法国思想对视觉中心的批判；可他们停在哲学描述，没有把视觉的性质接到数学的单位上，更没有动手去搭一门触觉的、听觉的科学。本书要做的，是把这几段路接起来，并且接到可以被检验、可以被推翻的地方去。

一个命题如果怎么说都对，就什么也没说。所以本书给自己留了死法，一共五条预测，每一条都写明，出现什么大局面，本书哪一部分就算错。这里只简述，正文第二十章、第二十五章、第二十九章、第三十二章和结语会一条一条报账。

一是触察修正：凡是触觉通道真正伸进微观的地方，迟早会摸出模型没料到、需要修正力场的东西；如果长期只是确认旧方程，第一个承重概念就要收窄。二是退化溯源：那些放宽了半径、重叠、传播速度的新数学和新物理，多数由断裂、撕裂、声音、热这类触觉或听觉问题逼出；若主要由视觉问题逼出，第二个承重概念就错了。三是纠缠不可拼：判瓜熟、叩诊、听敲判裂这类任务，联合采集的触听数据，应当胜过分开采集再拼接的数据；如果拼接稳定不输，第三个承重概念就错了。四是脉的伞单位：脉诊如果改用伞式的特征，医生之间的一致性应当更高；如果不高，触觉的科学化就得另找单位。五是文明的感官词根：西方科学核心术语里来自"看"的词根，比例应当明显高于中华、印度传统里对应的概念；如果没有差别，"光的世界是西方"这句话就降为修辞。

再说一下本书走路的次序。现代科学有一个很稳的单向次序：先看，得到样子（S）；再列方程，排出先后与变化（D）；最后用方程去假设看不见的推拉与牵连（E）。从 S 走到 D，再走到 E。这条路走得非常成功，问题是它只有这一条。E 在这条路上永远排在最后，永远是被假设出来的。

本书反着走。它的主线是从 E 走起：先在手和耳朵的纠缠里沉下去，再从纠缠里分出差异的序列，最后让新的样子显露出来。从 E 走到 D，再走到 S。这是一条沉淀型的路，慢，但每一步都有人亲身在场。两条路并不互相取消。本书要说的是：科学只会走第一条，等于只用一只眼睛走路。

还要说清一件事：本书不推倒视觉科学。

视觉科学有它伟大的一半。看得稳，别人也看得见，可以重复，可以记录，可以传给一万个不认识的人。望远镜和显微镜两次把眼睛延长，人类因此认出了星系和细胞。点和方程让我们造出了桥、飞机和计算机。这一半，本书全部保留，而且要说清它为什么这样有力。本书要拆的只有一处：代签被当成了原件。拆开这一处，触觉和听觉的科学才有位置新生；新生出来的数学，在伞收拢的时候，必须一分不差地退回旧数学。退不回去的新数学，本书不认。

全书的路是这样走的。第一编在看、听、摸里学会 SDE。第二编说明现代科学是视觉科学，点性从眼睛里来。第三编拆开代签：力、原子里的碰撞、声音、热和气，是怎样被方程签了字。第四编做一场思想实验：如果有一天手能像眼睛一样伸进原子，物理学会怎样改写。第五编搭起触觉和听觉的新数学，从点走到伞。第六编讲中医：今天的中医确实还不科学，可不是中医不能科学化，是科学自己的定义片面了。第七编讲 AI：视觉数学正在被 AI 接走，手和耳朵的纠缠，只能人先走一步。

还要交代"光、音、气"这三个字。看靠光，听靠音，这不用解释。摸为什么配"气"？中华传统里的气，从来没有谁看见过；它是冷暖、松紧、虚实、通滞，是一阵一阵在身上、在手下感到的。老中医切脉，厨师看火候，农人试土的干湿，都在"感到"气。本书把气当成触觉最直接取得的那个世界，不把它当一个神秘的词。气能不能有读数，正是本书要交的一份作业。

本书是接着站上几部书往下做的。第 8 号《中华之气》说过，光让世界被看见，气让世界被感到；它给自己定下一条作废条件：气若给不出独立于既有物理量的读数，就退化为修辞。本书要给气一个读数。第 344 号《意义数学的诞生》提出了伞和三重退化，本书要说出三重退化从哪里来。第 422 号《发生的身体》明说过，从身体的感觉推不出"哪个文明重哪种感官"，那是一座断桥；本书正面去走这座桥，走不过去，就认它为修辞。站外，哲学家汉斯·约纳斯在 1954 年写过《视觉的高贵》，说视觉给出同时性、距离，并且把感觉作用里的因果"中立化"了，看的人不觉得被看的东西在作用于自己；本书站在他之后，把他的哲学描述接到数学单位上去。

本书每一章的样子是固定的。开头一两句"这一章的问题"，开门见山；正文用日常的事开场，学术的事只作旁证；结尾一句"带走的话"，再记两行"小账"：一行记这一章的 S、D、E 各落在哪里，一行记这一章拆开了哪一处代签，或者

给出了伞的哪一个参数。读者可以只看每章的问题和小账，先把全书的骨架摸一遍，再回头读正文。

还有三条规矩，提前说明：讲中医的几章，不作诊断，不给治疗和用药的建议；全书不做政策表态；书里提出的各种"读数"，只用来认识，不拿来考核任何人。

陪读人物一共六位，都是我构想的，全书前后一致。他们不承担证据，只帮读者把道理放到日子里去看。

罗明川，前面已经见过，四十八岁的材料力学副教授，画了一辈子网格。

罗朵朵，他的女儿，九岁，小学三年级，什么都要问一句"为什么"。第一编的三件小事，多半是她带着做的。

谭桂香，六十七岁，在娄底的菜市场卖瓜卖菜三十年。拍一个西瓜，听一声，就知道熟没熟，一拍一个准。

邓守仁，七十一岁，湘中乡下的老中医，三根手指切脉切了四十多年。

许蔓，三十一岁，深圳一家机器人公司的触觉传感工程师，天天想让机器的手"知道"自己摸到了什么。

曾一鸣，二十六岁，数学博士生，用 AI 做形式化证明，最近有点担心自己的饭碗。

他们分属三代人、几个行当。有人一辈子靠眼睛和方程吃饭，有人一辈子靠手和耳朵吃饭，有人正在教机器长出手和耳朵。他们之间隔着的，正是本书要填上的那道缝。

带 走 的 话

网格上处处是点，手底下处处是片；点是眼睛给的，片是手给的。

小　账

SDE 账：S 落在天亮一层层显露与网格的"样子"；D 落在敲碗的叮当叮；E 落在摸小猫的手与猫毛互相改写，三者在每种感觉里都完整。

代签账：本篇为铺垫，只点出原子间的"推和撞"无人亲手取得，由势能方程代签。

◆



第　一　编

三觉 SDE：在看、听、摸里学会 SDE

导　语

真正学 SDE，要在看（光）、听（音）、触（气）的亲身体验里学；概念在体验之后。本编五章，先摸、再听、再看，然后三觉同时，收尾是触听纠缠。每一种感觉都含完整的 S·D·E，分别只在于哪一维最先被人觉察。

01

第 1 章

摸小猫：触觉最先让人觉察 E

> 这一章的问题
>
> 摸一只猫的时候，我们最先觉察到的是什么？为什么说，那个"分不开"的感觉，就是 SDE 里的 E?

◆ 一、手和猫毛贴在一起

罗朵朵家楼下的邻居养了一只橘猫，叫团子。这是我构想的场景。

朵朵每天放学都要在楼道口蹲一会儿，等团子出来。团子出来了，先在她脚边绕一圈，尾巴扫过她的小腿；然后在台阶上一歪，露出肚皮。朵朵伸出手，手掌从团子的脑袋顶上慢慢往后抹。

有一天她父亲罗明川也蹲在旁边，问她："摸猫是什么感觉？"

朵朵想了想，说："软，暖。"停了一下，又说："还有，它也在摸我。"

罗明川笑了。可这句话他记住了。

"它也在摸我"，这是一个九岁孩子说出来的，却比许多教科书说得准。我们讲"摸"，总以为是一方在动、一方在被动：我摸，猫被摸。可你真的把手放上去，就知道没有这么分明。手掌贴上去，猫毛被压弯了，倒向一边；同一瞬间，手心被猫毛扎得有点痒，被猫的体温烘得有点热。团子舒服了，会往你手上顶一下，你的手就被顶高了一点；你手一重，它会缩一下，或者回头看你一眼，你的手就跟着轻了。

手在改写猫，猫也在改写手。改写同时发生、搅在一起，没有一前一后的轮换。你说不清那一下"软"，有几分是猫毛本来的软，有几分是你手掌按下去的力道造成的。你也说不清那一下"暖"，有几分是猫的体温，有几分是你自己手心的温度被挡住、反过来烘着自己。

再细想一层：手和猫的分界在哪里？在手心的皮肤上，还是在猫的皮肤上？中间隔着一层毛，毛被压扁的那一层，算手的，还是算猫的？手心的汗渗进毛里，猫的体温透过毛烘到手上，那一层薄薄的地方，既是手的又是猫的。导论里说过，网格上的每一块地盘之间只有边界、没有重叠。摸猫的时候正好相反：只有重叠，找不到一条干净的边界。

这种状态，在 SDE 里叫 E，特征纠缠。

特征，是一样东西在你这里冒出来的那些"性质"：软、暖、滑、痒。纠缠，是说这些性质不属于哪一方单独所有，它们是在手和猫贴在一起的那一处，一起发生的。离开了手，猫毛的"软"没有地方显出来；离开了猫，手心的"软"也无从说起。

有一种讲法，必须在这里先改掉。很多人会把 E 讲成"环境"：猫是对象，手是工具，周围的楼道、天气、光线是环境。这样讲，E 就成了一个装东西的盒子，摆在那里，不参与。可摸猫的时候，没有一个摆在那里不参与的东西。手不是工具，它被猫改写了；猫也不是对象，它被手改写了。楼道里的穿堂风一吹，团子的毛就竖起来一点，手下的感觉就变了，风也在里面。E 说的是对象和场在互相改写，不是一个背景。

还有一个人人都能做的小试验。用左手去握右手。左手觉得自己在握，右手觉得自己被握；可你稍一用心，又能让右手觉得是自己在握左手，左手是被握的那一只。哪只手是"摸的"，哪只手是"被摸的"，全看你的心思落在哪一边，两只

手的感觉却始终是一起发生的。哲学家梅洛-庞蒂在《知觉现象学》里专门讨论过这个"摸与被摸"的翻转，晚年的《可见的与不可见的》又一再回到这个例子。在孩子那里，这个翻转用不着哲学，一句"它也在摸我"就说完了。

团子有时候也主动来"摸"朵朵：它用脑袋蹭她的小腿，用尾巴绕她的脚踝。这时候朵朵并没有伸手，可她照样知道团子的毛有多软、身子有多暖。触觉没有严格的"主动方"。只要贴在一起，两边就同时在取得、同时在被取得。

拿看来对照一下，就更清楚。朵朵站在三米外看团子，看它的橘色、它的圆脸、它眯起来的眼睛。团子在那里晒太阳，完全不因为她在看而改变什么。她看得再久，团子也不会被看得竖起毛来。看的时候，人觉得自己站在外面；摸的时候，人站不到外面去。

这就是本章标题的意思：触觉最先让人觉察 E。不是说看的时候没有 E。光照到团子身上，又从团子身上反射进朵朵的眼睛，光、猫、眼睛也缠在一起，只是缠得太轻、太快，人觉察不到。摸的时候，纠缠被放大到你躲不开的程度。手一放上去，你头一个知道的就是"我们贴在一起了"。

◆ 二、一下一下滑过去：顺毛与逆毛

那天罗明川又做了一个小试验。他让朵朵把手放在团子背上，不要动。

"现在呢？"

朵朵说："还是暖的。"过了一会儿，她说："好像没什么感觉了。"

手一直不动，感觉就会慢慢淡下去。这件事每个人都可以自己试：把手平放在桌上的一块毛巾上，一动不动，过一阵子，你会觉得毛巾的质地"消失"了，只剩下一点压着的感觉。轻轻挪一下手指，质地又回来了。生理学里有一个说法叫"适应"，皮肤里有些感受器对持续不变的刺激，很快就不再报告。早上穿上毛

衣，脖子扎了一下，过一会儿就不觉得了；戴了一天的手表，摘下来才发现手腕上压出了印子。我们不必记住这个说法，只要记住那个体验：手不动，摸就停了。

于是朵朵开始顺着毛抹。从头顶往尾巴的方向，一下，又一下。顺毛的时候，手下是滑的、顺的、一溜到底的；团子眯起眼，喉咙里呼噜呼噜。

罗明川说："反过来试试。"

朵朵从尾巴往头顶抹。手刚动，就感觉毛一根根竖起来，扎手，有一股往回推的劲儿。团子不乐意了，扭过身子，尾巴甩了一下。朵朵赶紧收手。

同一只猫，同一只手，方向一换，感觉就全变了。

这就是 D，差异序列。D 有三层，一层比一层深。

第一层是"不一样"（Difference）。顺毛滑，逆毛涩，手最先觉察到的是这一下与那一下不同。没有不同，就什么也没有。手一直按着不动，没有不同了，所以感觉也就淡了。

第二层是"分得出"（Distinction）。摸过几次之后，朵朵闭着眼都分得出哪是顺毛、哪是逆毛，还分得出团子的背和团子的肚子：背上的毛短而密，肚子上的毛长而软。差异不再是一闪而过的不同，它被稳定地辨认出来了。

第三层是"排成先后"（Direction）。顺毛抹和逆毛抹，用的是同样那一片毛，差别就在次序：从头到尾，还是从尾到头。可这还只是一下手的方向。Direction 真正厉害的地方，要在好几下手之间才看得出来：同样几下，谁先谁后，结果就不一样。

朵朵后来自己撞上了一件事。她先逆着毛抹一下，团子背上的毛一排排竖起来，手底下是扎的、涩的；紧接着再顺着抹回去，手掌底下来的是一种平常没有的感觉：一排竖着的毛被手一路按倒、铺平，像抹平一块揉皱的绒布，痒痒的，

指缝里还有一点"沙沙"的响。只顺着抹，十下、二十下，都摸不到这一下"铺平"。同一个顺抹，排在逆抹后面，就成了另一种手感。

这一下"铺平"从哪里来？逆抹把毛弄竖了，猫背先被改了样；后一下顺抹，摸到的已经是被前一下改过的猫。先后不只是两下手的排法，前一下还改写了后一下要摸的东西。这是触觉里换序最有分量的地方：看两张照片，先看哪一张，照片都不会变；手摸两下，先摸的那一下会改掉后一下的对象。

换序还会改写整件事的结局。朵朵试过两种排法。一种是先挠下巴，再顺着背抹，末了逆着撩一下尾根；团子已经舒服了，逆着那一下，它只甩甩尾巴。另一种是一上来就逆着撩尾根，再去挠下巴；团子早起身走了，后面那两下根本没有机会发生。三下手法一模一样，换了先后，一种排法得到一只呼噜呼噜的猫，另一种排法得到一个空台阶。

再后来，朵朵摸团子有了一条固定的路线：头顶，耳后，下巴，再顺着脊背一抹到尾巴。走熟了，团子一被摸到头顶，就先把下巴抬起来等着。先后排熟了，就成了一条路；路一熟，下巴那一下还没来，猫已经在等它了。排成先后的差异，到这一步，已经能往前"预先"了。

三层是一层压着一层的。没有不一样，就谈不上分得出；分不出这一下和那一下，也就排不出谁先谁后；排出了先后，前一下又会改写后一下，差异就不再是一颗一颗的珠子，成了一串。次序本身就是差异的一部分。

还有两样东西会改变这串差异。

一样是快慢。朵朵飞快地抹一下，手下只是"毛茸茸的"一片；慢慢地抹，她能觉出毛的长短、一根根从指缝间滑过去。同样的路线，走得快和走得慢，差异序列的密度就不一样，冒出来的东西也就不一样。

另一样是隔着什么。冬天朵朵戴着毛线手套去摸团子，摸了半天，说："摸不出来了，都是手套的毛。"手套一隔，手和猫的贴法变了，顺毛和逆毛的差别就钝了，团子的背和肚子也分不太清。纠缠一变，差异序列跟着变。可见 D 并不是手单方面"发出"的，它是在手和猫贴着的那一处取得的。

所以摸猫这件事里，D 一点都不少。触觉需要动，需要一下一下的滑过去，才能取得差异。触觉研究里有一个很稳的发现：粗的纹理，手指按着不动也摸得出几分；很细的纹理，比如细砂纸、丝绸的织纹，手指一动不动几乎摸不出来，一滑过去就分辨出来了。上世纪二十年代，德国心理学家卡茨就主张触觉读纹理有粗、细两路，细的那一路靠手指移动时皮肤里引起的细微振动；后来的实验研究又把这个说法坐实了。手是靠移动来"读"世界的。

这里要顺带说一句：说触觉最容易觉察 E，并不等于触觉只有 E。触觉的 D 恰恰非常讲究。一个好的推拿师傅，一个揉面的老师傅，一个切脉的老中医，他们的本事很大一部分就在这个 D 上：按多深，走多快，先按哪里，后按哪里。邓守仁那三根手指（本书第二十六章再细讲），就是一套极讲究的差异序列。

◆ 三、软和暖一阵阵冒出来

现在说 S。

朵朵说"软，暖"。软和暖是什么时候有的？手刚放上去的那一瞬间，有一点；抹过第一下，软更清楚了；抹到第三下、第五下，她不光知道软，还知道哪里更软（肚子），哪里软中带一点硬（脊梁骨）。暖也是这样：一开始是一片暖，慢慢地，她觉出脖子那里最暖，尾巴尖那里有点凉。

软和暖不是一下子摆在那里的，是一阵一阵冒出来的。

这就是 S，显露。S 也有三层。

第一层是"冒出来"（Show）。软、暖、滑，最先冒出来的是这些零星的性质。它们不成样子，只是有。

第二层是"成形"（Shape）。手一下一下抹过去，零星的软和暖开始连成一片，连成一个形状：一个弯弯的背，一个圆圆的头，一根细细的尾巴。罗明川让朵朵闭上眼睛摸，她照样说得出团子是侧躺着还是趴着，头朝哪边。猫的形状，是在她手底下成形的。

第三层是"结构"（Structure）。摸得多了，朵朵认得出这是团子，不是对门那只黑猫。团子的毛更厚，背更宽，被摸到下巴的时候会把头仰起来。这些性质不再零散，它们组成了一个稳定的、认得出来的整体：这一只猫。

这个结构里，还不只是形状。朵朵摸久了，知道团子喜欢被挠下巴和耳朵后面，挠到那里它会把脑袋往手上送；肚子虽然肯露出来，真去摸却常常翻脸，四只爪子一起抱住你的手。哪里能摸、哪里不能摸、摸重了会怎样，这些也是"团子"这个结构的一部分。手认出的不是一个静物，而是一只会回应的猫。结构里装着回应，这是触觉的 S 特有的味道。

请注意一件事：这三层都离不开手的移动。手停了，冒出来的东西就淡下去，成形的那个形状也开始模糊。只要手还在动，S 就还在显露；手停一阵子再动，S 又重新冒出来一次。猫身上并没有一个现成的"样子"等着你去取，S 随着手的一下一下（D）不停显露出来。这正是导论里说的那句话：当你启动 D 差异序列，S 就发生。S 是一个显露谱系，不是一张定好的图。

S 也离不开纠缠。朵朵手心出汗了，猫毛就粘一点，"滑"就变成了"涩"；团子睡着了，身子松下来，"软"就更软；天冷了，"暖"就格外分明。冒出来的是什么，要看手和猫此刻缠成了什么样子。

触觉能自己成形、自己成结构，这件事我们天天在用，只是不留意。手伸进口袋里找钥匙，不用看，指头一碰就知道哪个是钥匙、哪个是硬币、哪个是揉成团的纸巾。手在口袋里拨弄几下，零星的凉和硬冒出来（Show），连成一个有齿、有圈的形状（Shape），认出是家门的那一把，而不是单位的那一把（Structure）。朵朵在学校玩过一个游戏：把东西装进布袋，只许伸手进去摸，猜是什么。橡皮、苹果、发卡，她大多猜得中。她猜的时候，手指一直在动；手一停，她就犹豫了。

这样一来，三个字母在摸猫这一件事里全齐了。

把它们写成三个关系，也不难懂。冒出来的软和暖（S），由手怎样一下一下地抹（D）和手与猫怎样贴在一起（E）一起决定，写成 S＝F(D,E)。手怎样抹下去（D），又要看已经摸出了什么（S）和此刻贴成了什么样（E）：摸到脊梁骨了，手就自动轻一点，写成 D＝G(S,E)。手与猫贴成什么样（E），也被已经冒出的样子（S）和抹的次序（D）改写着：逆毛抹了一下，团子绷紧了身子，贴法就变了，写成 E＝H(S,D)。三个式子，说的是三维互相生成，谁也不是谁的原因，谁也不是谁的结果。

可话说回来，三个字母在这里是我们在脑子里切开的。朵朵摸猫的时候，并没有先感到一个 E，再感到一个 D，最后感到一个 S。她只是在摸，软、暖、顺、逆、团子，全是一起来的。我们把它切成三份，是为了想清楚，这叫理念界的假想性切割。切开以后，还要记得把它们放回去。

那么，为什么说触觉"最先"让人觉察 E 呢？因为在摸的时候，三维里最躲不开的，就是那个"贴在一起"。看的时候你可以忘掉自己，听的时候你可以闭上眼专心跟着旋律走，摸的时候你没法忘掉自己的手。手一放上去，你和对方就缠在了一起，后面的一切差异和显露，都是在这个纠缠里展开的。这就是为什么本书说，学 E，要从摸学起。

回头看朵朵摸团子的次序，还会发现一件事：手先贴上去（E），然后一下一下滑出差异（D），软和暖、团子的身形才一阵阵冒出来（S）。从 E 到 D 再到 S，这正是导论里说的那条沉淀型的路。摸的时候，人天然就走在这条路上：先沉进纠缠里，再从纠缠里分出差异，最后让样子显露。看的时候，人天然走的是另一条路：先看到样子，再去分辨变化，最后才猜想背后的牵连。两种感觉，两种起步的次序。本书后面所有的话，都可以看成是在追问：一门科学，如果只会走第二种次序，会漏掉什么。

摸猫里还藏着一个"动力从哪里来"的小例子。朵朵顺着毛抹，心里等着的是滑和软（已经冒出的 S）；手一逆过去，来的却是扎和推（新的一下 D）。等着的和来的对不上，这一点别扭会积起来。积到一定程度，事情就变了：要么朵朵改了手法，绕着毛走；要么团子换了姿势，干脆翻身把背藏起来。手和猫的贴法（E）被改写了。两维之间的矛盾，推动第三维改变，这就是 SDE 讲的三原理。推动摸猫往前走的，不是一股外加的"劲"，是这一点对不上。下一章敲碗，会把这件事讲透。

这一章只是摸了一只猫，可它已经碰到了本书最大的那个问题。

现代科学几乎全靠"看"来取得特征。一样东西放在显微镜下，放在望远镜里，放在各种仪器的屏幕上，科学家取得的是它的图像、它的刻度、它的曲线，全是给眼睛的。看，让人站在外面，看此不改彼，于是看到的东西被认为是"客观的"。这是看的好处。

可看也有一个代价：它最不容易觉察 E。手和猫毛之间那种互相改写，眼睛几乎看不到。于是在视觉科学里，E 常常被放到最后，要么当成"环境"，要么交给方程去假设。原子和原子之间怎么碰，分子和分子之间怎么挤，科学并没有像朵朵摸团子那样亲手取得过，它是先看到了结构，再用方程把碰撞补上去。这件事，本书第三编要细说。

摸还有一个麻烦，也是在这里先露了头。朵朵可以指着团子对父亲说"你看，它是橘色的"，父亲一抬头就看见了，两个人看到的是同一个橘色。可朵朵没法把手底下的那一下"软"递给父亲。父亲得自己伸手去摸，摸到的还未必是她那一下软，因为他的手更大、更粗，手心更热，贴法不一样。看到的东西容易对齐，摸到的东西很难对齐。科学为什么偏爱看，这是一个很实在的理由。触觉的东西怎样才能稳定、可传、可验，本书第六编讲中医时，要把它当作一个真问题来对付。

如果有一天，人能像摸团子一样，去摸一个原子，会怎样？那时我们头一个觉察到的，大概也是"它也在摸我"：手伸进去，原子被改写了，手也被改写了。今天的科学还没有准备好这样一句话。本书第四编会做这个思想实验。

而现在，读者只需要带走一个体验：下次摸猫，或者摸一块面团、一条毛巾，停下来问自己一句，"我和它，是不是已经分不开了？"那个分不开，就是 E。

带 走 的 话

摸的时候站不到外面去；"它也在摸我"，就是 E。

小　账

SDE 账： E 落在手与猫毛互相改写（最先觉察）；D 落在顺毛逆毛的不一样、分得出、排先后；S 落在软和暖一阵阵冒出、猫的身形在手下成形、认出这一只猫。

代签账： 本章为铺垫，只点出视觉最不易觉察 E，故科学里的碰撞由方程补上。

◆

02

第 2 章

敲碗：听觉最先让人觉察 D

这一章的问题

敲几只碗，我们最先听出来的是什么？让一支小曲往前走的那股"劲"，算不算 D？

◆ 一、叮当叮

晚饭吃完，碗还没收。罗朵朵把三只一样的白瓷碗排在桌上，往里倒水：左边倒得浅，中间倒得满，右边又倒得浅。她拿起一根筷子，挨个敲过去。

叮。当。叮。

这是我构想的场景。可每个读者在家里都能照做一遍，不用花一分钱。

罗明川在旁边剥橘子，听了一会儿，说："再敲一遍。"

叮，当，叮。

"换个顺序。"

朵朵先敲中间，再敲左边、右边：当，叮，叮。她自己先笑了："不一样了！"

三只碗没有动，水没有动，筷子也是那一根。只是先后换了一下，听起来就成了另一个东西。

这就是 D，差异序列。上一章摸猫的时候讲过 D 的三层，敲碗把这三层摆得更清楚。

第一层，不一样（Difference）。叮和当，一个亮，一个沉，耳朵最先听到的是这两声不同。要是三只碗的水一样深，敲出来就是叮、叮、叮，耳朵只听得到"有声音"，听不出任何别的东西。

这里有一个小地方，值得停一下。第一声"叮"刚响的时候，它是亮还是沉？其实说不上来。只有等"当"来了，回头一比，前面那一声才"亮"了起来。一个孤零零的声音，几乎说不出什么；差异要等第二声来了才成立。看就不一样，桌上三只碗一眼扫过去，哪只水多、哪只水少，是同时看出来的，用不着等。

第二层，分得出（Distinction）。敲过几轮，罗明川让朵朵闭上眼睛，他把三只碗的位置挪了挪，自己敲。朵朵照样说得出："这是满的那只。"后来她给它们起了名字：两只浅的叫"小叮"，满的那只叫"大当"。名字一起，差异就被固定下来了，不再是一闪而过的不同，而是稳稳认得出的"这一个"和"那一个"。

耳朵的这份本事，日子里用得极多，只是没人当回事。朵朵晚上躺在床上，听见楼道里有脚步声，一下就知道是不是父亲回来了。她没看见人，靠的是脚步的轻重和快慢：父亲走路是先重后轻，一步一顿，上到三楼总要停一下喘口气。电话那头一声"喂"，她也分得出是奶奶还是姑姑。这些分辨，几乎全靠一串声音里的不一样和先后。

她还发现了更细的分别。用筷子敲，和用勺子敲，"小叮"的声音不一样：筷子敲的脆，勺子敲的更圆一点。同一个音高，换个敲法，声音的"色"就变了，音乐里管这叫音色。耳朵分得出这么细的东西，靠的还是那一串不一样。

第三层，排成先后（Direction）。叮当叮、当叮叮、叮叮当，用的是同样三个声音，排法不同，就是三支不同的小曲。叮当叮听起来像一问一答又回到原处；叮叮当像是一路往下走，落了地。

说话也是这样。"上海"和"海上"，两个字的音一个不差，换了先后，一个是城市，一个是一片水；"牛奶"和"奶牛"，一个能喝，一个会叫。听人说话，耳朵也要等后面的字来了，才定得下前面的意思：刚听到一个"奶"，还不知道是喝的还是会叫的，等第二个字落了地，才定下来。先后本身就是曲子的内容，用不着另外贴一个标签。

先后里还有快慢。朵朵敲"叮——当叮"，前一声拖长、后两声挨紧；再敲"叮当——叮"，中间一声拖长。三个声音、同一个次序，只是间隔变了，罗明川一听就说："前一个像敲门，后一个像有人在喊你。"间隔长短，音乐里叫节奏。节奏里没有新的声音，只有先后和疏密，它几乎是纯粹的 D。

疏密也有限度。朵朵后来玩疯了，筷子在"小叮"上飞快地点，点得越来越快，到后来已经听不出一下一下，只剩一串连成片的颤音。两声挨得太近，耳朵就分不开了。差异要有一点距离，才分得出；分不出，就并成了一个新的声音。耳朵对先后的分辨，也有它自己的"刻度"。

而且这个先后撤不回来。你不能把"叮当叮"倒着听；倒着放出来，也是另一段声音。在桌上看三只碗，从左看到右，或从右看到左，看到的还是同一张桌子。在耳朵里，次序一换，世界就换了。

这就是本章标题的意思：听觉最先让人觉察 D。声音只能一个接一个地来，没有办法一下子全部到齐。人一听，一上来撞上的就是这个"一个接一个"。

可听觉也不只有 D。

每敲一下，都有一个声音冒出来（Show）；这个声音有它的形状（Shape），先是一下脆亮的起头，然后慢慢地拖尾、变弱，"叮——"的那一长串，比起头的一下要长得多；几声连起来，成了一支认得出的小曲（Structure）。这是听觉里完整的 S。

听觉里也有完整的 E。朵朵后来又玩出了新花样：一只手敲，另一只手的手指轻轻搭在碗沿上，"叮"一下就变成了"嗒"，闷闷的，一点余音都没有。手指一搭，碗、水、筷子和手指缠成了另一个样子，声音就跟着变了。她又把"大当"端起来，托在手心里敲，声音比放在桌上时更长；放回木头桌面，就短了一截。罗明川把碗端进卫生间，在瓷砖墙边敲，嗡嗡的回声在小屋里转。

听的人自己也在里面。朵朵把一只耳朵贴在桌面上，让父亲去敲"大当"，她说声音"从桌子里钻进来了"，比隔着空气听更闷、更近。她又用手捂住另一只耳朵，碗的声音一下子缩到了一边。耳朵贴在哪里、捂没捂住，听到的就不一样。听者不是站在纠缠外面接收声音的那一方，听者的身子也被缠进去了。

更好玩的是水。敲得重一点，碗里的水面会起一圈细细的波纹。声音在碗里响，水面跟着颤；水多了，声音就低。声音改写了水，水也改写了声音。这一圈波纹，就是听觉里的纠缠被眼睛偶然看见的一刻。

所以，敲碗里 S、D、E 全都在场，三维一维不少。D 只是最先被耳朵撞上的那一维。

◆ 二、Drive 不是 D

罗明川是做力学的，他有他的看法。

"声音是我手上的劲打出来的嘛。"他说，"没有这一下敲，什么都没有。说到底，是力在驱动。"

这句话很多人都会说。而且有一个很常见的误会，正好就藏在这里：把 D 读成 Drive，读成"驱动"、"动力"、"推动的那股劲"。D 这个字母，在英文里打头的词很多，Drive 是其中一个，又恰好很像"让事情发生的东西"，于是很容易被拿来当 D 的意思。

本书要明说：Drive 不是 D。

道理就在这三只碗上。罗明川用同样的力气，敲"小叮"，是叮；敲"大当"，是当。力气一样，声音不一样。差别不在劲上。

反过来，他用更大的力气敲"小叮"，声音更响了，可它还是叮，不会变成当。劲大劲小，只改了响不响，改不了是叮还是当。

叮当叮这一串差异，并不装在那一下劲里。劲只是让碗响起来；响成什么、怎样跟前后的声音不一样、排成什么先后，要看碗、看水、看前一声与后一声。差异序列在碗、水、手和耳朵缠在一起的那一处取得，手单方面"推"不出来。

阳台上挂着一串风铃，可以帮着再看一遍。风吹过来，所有的铃管被同一阵风推着，风对谁都一样，响出来却是高高低低好几个音，一阵一个样。音的高低，来自铃管的长短粗细；一阵一个样，来自它们在风里互相碰撞的先后。风这股"劲"是同一股，差异却是铃管与铃管、铃管与风缠出来的。

罗明川不太服气："可没有我敲这一下，总归什么都没有啊。"

这话也对。敲当然要紧，只是"敲"这件事本身，也拆得进 S、D、E 里去。筷子落在碗沿的哪个位置、用什么角度、碗被托着还是放着，这是手、筷、碗缠在一起的样子，是 E；这一下落在前一声之后多久，是 D 里的先后与疏密；敲出来的那一声亮还是沉、拖得长还是短，是 S。敲就在三维里面，用不着在三维外面另立一样东西。说"是力在驱动"，等于把三维里的一大块，收拢成了一个字。

那么，让事情往前走的劲，到底从哪里来？

朵朵敲着敲着，想敲一支她会唱的歌。她挑了《小星星》："一闪一闪亮晶晶。"头两个字一样高，第三、四个字高上去，第五、六个字再高一点，第七个字落回来一点。

三只碗不够，她又拿来三只。罗明川帮她倒水，倒了半天，从左到右排出一个大致的高低。朵朵敲："一、闪、一、闪、亮、晶、晶。"

前面都还行，到"亮"那一下，不对劲。她皱眉："太高了。"

她心里已经有了这支歌的样子，那是早就在她这里显露过、成了形的东西，是 S。碗敲出来的那一串高低，是此刻的 D。两样对不上。

对不上，就有一点别扭。敲一遍，别扭一点；再敲一遍，更别扭。别扭积起来，她坐不住了，拿起水杯往"亮"那只碗里添水。添一点，敲一下，还是高；再添一点，敲一下，差不多了；再敲整句，顺了。

这一添水，改变的是碗和水的样子，是 E。E 一变，敲出来的 D 跟着变；D 一变，那支歌的样子在桌上第一次完整地冒了出来，S 也落了地。她回头又把整句敲了三遍，越敲越顺，这支歌在她手里"成了"。

把这一段压短：S 和 D 之间的矛盾（想要的样子和敲出来的序列对不上），积成一股张力，张力推动 E 改变（添水），E 的改变再回写到 D 和 S 上（曲子顺了）。这就是 SDE 的三原理：两维之间的矛盾，推动第三维改变；张力积累，形状改变，回写。

三原理不只这一个方向。过了几天，"大当"磕了个小口，再敲，声音沙沙的，带着一点破音。这回是碗变了（E），敲出来的那一串（D）跟着走了样，两样一起，跟朵朵心里那支歌对不上。她试了几次添水，都救不回来。最后她干脆改了主意：不用它敲《小星星》了，把它当"鼓"，在每句末尾"嚓"地敲一下。歌的样子（S）变了，多了一个鼓点，反倒更热闹。这一次，是 D 和 E 的矛盾，推动了 S 的改变。哪两维对不上，哪一维就被推着动。

推着朵朵往前走的那股"劲"，就在这一点对不上里。它不是第四样东西，也不是 D 本身，它是三维之间的不平衡。劲一直都在，可劲从哪来，要看三维之间哪里对不上。

为什么要这样较真？因为把 Drive 当成 D，会把思路带进一条窄路。

一旦认定"是劲推着一切"，人就会去找那股劲：给它起个名字，给它一个符号，再用它解释所有的变化。叮为什么响？因为敲了。曲子为什么顺了？因为添水了。添水为什么？因为想顺。一路追下去，全是"谁推了谁"，三维之间的那一点对不上反倒看不见了。

物理学里，有一个符号恰好扮演着"那股劲"的角色，它叫力。苹果落地，说是因为受了力；球被弹开，说是因为受了力。力是不是这样被请进科学的，本书第十一章要细问，这里只点一句：把劲当成原因，很方便，也很容易让人忘了，劲本身是从哪里来的。

日子里也有现成的例子。一个人唱歌跑调，旁人劝他"使点劲"，他扯着嗓子唱，调跑得更远、更响。跑调不是劲不够。能把调唱回来的人，是那些先听出来"我唱的和那支歌对不上"的人；听出来了，喉咙自己会去找。加劲只能把声音推大，听出对不上，才把声音推对。

所以本书讲 D，只讲三层：不一样，分得出，排成先后。讲动力，讲三原理：两维矛盾推动第三维。两件事分开讲，不混成一件。这一条分清了，后面讲力、讲碰撞、讲方程的时候，才不会把"谁推了谁"错当成"差异怎样排成序列"，也不会把"找到了那股劲"错当成"弄明白了事情怎样发生"。

◆ 三、曲子从哪里冒出来

那天晚上，朵朵敲完《小星星》的第一句，问了她父亲一个问题。

"爸爸，这首歌是在哪只碗里？"

罗明川想了想，说："哪只碗里都不在。"

这是对的。"一闪一闪亮晶晶"不在第一只碗里，也不在第五只碗里。拿掉任何一只碗，歌就缺了一块；可把六只碗一只一只单独敲，敲一百遍，也敲不出这首歌。歌只在一串声音的先后里。

再往细里想：敲到"亮"的时候，前面的"一闪一闪"已经响过了，声音早就散了。可耳朵还"拿着"它们。正因为还拿着，"亮"一出来，才听得出是往上走了一步。歌是一串声音被耳朵连在一起，不断往后接、又不断往回照。

往回照这件事，很值得说一说。朵朵后来敲出过一串："叮，当。"停在这里，听起来像一句问话，悬着。再补一个"叮"，问话就有了回答，落了地。后来的这一声，改变了前面两声的意思：原来"叮当"不是一个结尾，是一个开头。曲子往前走一步，前面走过的路就被重新照亮一次。

这就是 S 的样子。没有哪一首歌早就写好、搁在某处等着；S 随着一声接一声的 D，不停显露出来。每一声新的差异，都让已经冒出来的东西重新显露一次。导论里那句话，在这里最容易听懂：当你启动 D 差异序列，S 就发生。S 是一个显露谱系。

还有一个人人都有的经验。一首熟歌，中间某一句忽然想不起来了，怎么办？大多数人会从头唱起，一路唱到那里，那一句就自己冒出来了。直接跳到中间去想，往往想不出。背课文、背乘法口诀，也常是这样。歌没法一格一格存放、随手抽出，它要沿着那一串先后走进去，才显露得出来。这又是 D 和 S 分不开的一个证据。

《小星星》这支歌，朵朵也不是这一晚才有的。她在幼儿园就唱过，那时它在她嗓子里显露过许多遍，成了形，才有今晚她心里"该是这个样子"的那个 S。

今晚用碗敲出来，是它又一次显露，这一次换了碗、换了水、换了筷子。显露谱系的"谱系"两个字，说的就是这个：每一次显露，都接在以前那些显露的后面，像一家人一代接一代。

第二天放学，朵朵没有敲碗，一路上自己哼着"一闪一闪亮晶晶"。歌离开了碗，到了她的嗓子里，换了声音，换了地方，可她认得出，还是那一支。S 到了"结构"这一层，就能离开最初冒出它的那几只碗，在别的纠缠里再显露一次。它仍然是显露，只是显露得很稳了。

她哼得多了，就说这首歌"好听"。站上第 387 号《好听是谁的？》（胡敏著）说过：好听不是听出来的，是唱进去的。放在这里也合适：《小星星》好不好听，不全在曲谱里，也在朵朵这一晚上一只碗一只碗添水、敲了一遍又一遍的那个过程里。

其实连一个音里面，也有先后。中国人说话，天天在用这一点。"妈、麻、马、骂"四个字，声母韵母都一样，分别只在声调：一个平着走，一个往上扬，一个先落后起，一个直直落下。声调就是一个字里面的一小段先后。外国朋友学中文，常常把"买"说成"卖"，买卖颠倒，就因为这一小段先后走反了。一个字都要在时间里走一小段路才是它自己，可见在听觉里，连最小的单位也不是一个瞬间。

回到本章的问题：为什么听觉最先让人觉察 D?

因为声音没有一下子到齐的时候。一个音要响一阵才是那个音，一支曲子要一声一声地来才是那支曲子。听的人躲不开先后。看可以"一眼看全"，摸可以"一贴就缠上"，听却必须"一声接一声"。耳朵最先撞上的，就是差异的序列。

可正因为听觉的东西都在先后里，它很难被"摊开来看"。一张照片可以挂在墙上慢慢看，一支曲子却只能在时间里一遍遍地听。科学后来用了一个办法：把

声音画成一条曲线，摊在纸上，让眼睛去看。这个办法极有用，也让曲子里那种"往回照"的东西，在纸上找不着了。这是本书第十三章的事。听觉的数学为什么没有瞬间、它的单位为什么要随时间一张一合，是第二十三章的事。

本章只要读者带走一个体验：下次听到一串声音，停下来问自己一句，"要是换个先后，它还是它吗？"那个先后，就是 D。

带 走 的 话

叮当叮换个先后就不是它了；推着曲子往前走的，是三维之间的对不上，不是一股叫 D 的劲。

小　账

SDE 账：D 落在叮与当的不一样、闭眼分得出、排成先后（最先觉察）；S 落在每声的冒出与拖尾、《小星星》在耳中成形并离碗再现；E 落在碗、水、筷、手指、桌面与墙互相改写。

代签账：本章为铺垫，点出把 Drive 当 D、把"劲"当原因，正是"力"这个符号被请进科学的入口（见第十一章）。

◆

03

第 3 章

看天亮：视觉最先让人觉察 S

这一章的问题

看着天一点点亮起来，我们最先觉察到的是什么？眼前那条街，是一直"摆"在那里，还是一层一层"显露"出来的？

◆ 一、Show：先冒出来的是影子

国庆假期，罗朵朵的语文老师布置了一篇作文，题目叫《看日出》。朵朵定了闹钟，五点钟爬起来，拉着父亲罗明川坐到阳台上。这是我构想的场景。他们家在长沙河西一栋高楼的十几层，阳台朝东。

五点出头，窗外是黑的。路灯一盏一盏亮着，像几粒黄豆，别的什么都没有。朵朵把脸贴在玻璃上，呼出的气在玻璃上蒙了一小片白雾，她用袖子擦掉，还是什么都看不见。

"什么都没有。"她说。

"等一等。"罗明川说。

过了一阵，东边的天先变了。说亮还谈不上，只是从黑里透出一点点灰，像墨汁里兑进了一滴水。就在这一点灰底下，有一样东西冒了出来：一条黑黑的、高高低低的边。

朵朵指着说："那里有东西。"

她说的是"有东西"。她还说不出那是什么。那条边比天更黑，天一灰，它就显出来了。

这就是 S 的第一层，冒出来（Show）。最先冒出来的不是"楼"，不是"树"，也不是"塔"，只是"有"：黑底上一块更黑的，灰底上一道边。名字还没来，形状还没定，只知道那里有了点什么。

请留意这一下是怎么来的。天不灰，那条边就冒不出来；天和楼一样黑的时候，楼就在那里，可它显露不出来。是天和楼之间有了一点不一样，楼才有了"边"。一点不一样，就是 D 的第一层。视觉的 S，也是在 D 启动的那一刻发生的。

反过来试一试也行。早上遇上大雾，窗外白茫茫一片，到处一样亮、一样灰，什么都看不出来。东西都在，只是没有差异，所以没有显露。上世纪三十年代起，心理学家就做过一类"全视野均匀"的实验：让人对着一片完全均匀、没有任何明暗差别的视野坐一阵，人会觉得眼前"什么都没有了"，甚至说不准自己是不是还睁着眼。眼睛也是靠差异来看的。

星星也是一个现成的例子。白天，星星并没有走开，它们一直在天上。可白天的天太亮，星星和天之间没有差异，于是一颗也显露不出来。太阳一落，天一暗，星星就一颗一颗冒了出来。天亮的时候正好反过来，星星一颗一颗退回去。朵朵那天早上就看着最后一颗星在东边的灰白里淡掉了。星星在不在，和星星显不显露，是两件事。城里人难得看见星星，也是这个道理：路灯、楼灯把夜空照得发白，星星和天之间的那一点差异被抹平了，星星还在，只是显不出来。

那天早上的 E 也一直在场。玻璃上的白雾，一擦就看得清一点，一呼气又模糊了；朵朵的眼睛刚从被窝里出来，揉了好几下，适应了一会儿黑，才开始看得出那条边；空气里的湿气把远处的东西都罩了一层。光、空气、玻璃、眼睛，缠

在一起决定那一刻冒出来什么。她父亲戴着眼镜，比她晚了一会儿才看见那条边，他说是镜片上也起了雾。

还有一个地方要说：那时候冒出来的东西，没有颜色。天是灰的，楼是黑的，树也是黑的。天光很暗的时候，人眼主要靠一类只分明暗、不分颜色的感光细胞在工作，这类细胞叫视杆细胞，所以黎明和黄昏的世界多半是灰的。颜色要等光再多一点，才一样一样冒出来。连颜色，也是显露出来的。

◆ 二、Shape 与 Structure：从成形到结构

天越来越灰白。那条高高低低的边，慢慢有了细节。

"那个尖尖的，是电视塔。"朵朵说。

"那一团圆的，是树。"

"那个方方的，楼顶上有个水箱。"

也有认错的时候。朵朵指着楼顶上一个圆圆的黑影说"那里也有一棵树"，等光再亮一些，才看出那是一只圆肚子的太阳能热水器。成形不是一锤子定音，后来的光会改掉先前的形。

一样一样，都有了形。这是 S 的第二层，成形（Shape）。刚才只是"有东西"，现在是"这是一个尖的、那是一个圆的、那是一个方的"。形状一出来，名字也就跟着来了。

成形还在继续。光再多一点，红色冒了出来：远处一片屋顶是红瓦的。绿色也冒了出来：小区里的樟树。再后来，对面楼的窗户一扇一扇分得清了，有几扇已经亮了灯，有人起得比她还早。

再过一阵，天边泛红，最后一轮太阳从远处的楼群后面露出一条亮边，一下子把半边天染成了橘黄。

太阳一露头，地上就有了影子。楼下那几棵樟树，在草地上拖出长长的、斜斜的黑影，一直伸到对面的花坛边上。天亮以前，世界是灰的，却没有影子；太阳一出来，影子和亮处同时冒了出来。朵朵发现，所有的影子都朝着一个方向倒，她说："影子都在躲太阳。"影子一出，太阳在哪边、哪棵树高、哪棵树矮，一下子都清楚了。一道影子，是一个新的差异，它让更多的东西显露出来。

这时候朵朵看到的，已经不只是一样一样的形状。她看得出哪栋楼近、哪栋楼远，看得出那条大路从小区门口一直通到江边，看得出江对面是河东密密层层的楼群，看得出自己的学校在哪个方向，被哪栋楼挡住了一半。一样一样的形状，彼此有了位置、有了远近、有了连通。

这是 S 的第三层，结构（Structure）。结构并没有多出一样东西，它就是形与形之间稳定下来的关系：远近、上下、通与不通、挡与被挡。到了这一层，朵朵眼前的世界就"摆"好了。她可以闭上眼睛，在心里把这条街走一遍。

讲到这里，就看得出视觉的特别之处了。

摸猫的时候，软和暖是一阵一阵冒出来的，手停了就淡；敲碗的时候，曲子是一声一声来的，声音一散就没了。看天亮，一开始也是一层一层地显露，可到了太阳出来，整条街一下子同时摆在眼前，而且摆得很稳。朵朵看电视塔的时候，那几棵樟树并不因为她没看而消失；她转头去看樟树，电视塔也还在原处，一点没变。她看哪一处，都不会改动另一处。

她还试了一下"盯住看"。她盯着对面楼上一扇亮灯的窗户，那扇窗清清楚楚，连窗帘上的花都看得见；旁边的窗户就模糊了一点。可旁边的窗户并没有因为她没盯着而有任何变化，她眼光一挪，它们又清楚了。看，可以把一小块单独切出来看，切的时候不碰其他地方。这一点在摸猫时是做不到的：手按住猫背的

一小块，整只猫都会动。看可以切、摸切不开，本书第九章要追问这件事的后果。

看，最容易给人一种感觉：世界本来就摆在那里，样子是现成的，我只是把它看进来。

这就是本章标题的意思：视觉最先让人觉察 S。显露这一维，在看的时候最醒目，醒目到让人忘了它是"显露"出来的，以为它是"本来就在"的。

可就在这个最醒目的地方，有一个要小心的误会。正因为视觉的 S 显露得又快又稳，人很容易把 S 读成"结构"、读成"样子"，读成一张已经画好的图。本书坚持把 S 读成"显露"，原因就在这里：结构只是显露的第三层，不是 S 的全部。天亮这一个早上，是 Show、Shape、Structure 一层一层走出来的。要是只拿最后那张"摆好了的街景"当作 S，前面那一个小时就被抹掉了。

第二天早上，朵朵又爬起来看了一次。这一回，天刚透出一点灰，她就说："电视塔在那里，水箱在那里。"昨天要等很久才认出来的东西，今天一冒头就认出来了。今天的光和昨天差不多，变了的是她心里已经有了昨天那一整串显露。昨天的结构，让今天的显露走了捷径。S 的显露，是一回接着一回的，后一回站在前一回的肩膀上。

还有一件小事，能说明看到的样子也不是"现成"的。人的眼睛其实一刻不停地在动，哪怕你觉得自己盯着一点不动，眼球也在做极细小的跳动和颤动。上世纪五十年代，科学家做过实验，想办法让一个图像跟着眼球一起动，在视网膜上完全不动，结果没过多久，那个图像就在人眼里淡下去、消失了。这和第一章里手一直不动、感觉就淡下去，是同一回事。看也要靠一刻不停的差异序列，才能让样子一直显露着。我们只是觉察不到眼睛在动，于是以为样子是摆在那里的。

视觉的 D 和 E 只是更隐蔽，一点没少。D 藏在明与暗、这块颜色与那块颜色的不一样里，藏在眼睛一刻不停的移动里，也藏在天光由暗到亮那一整串先后里。E 藏在光、空气、玻璃和眼睛的互相改写里。只是光走得太快，眼睛动得太细，纠缠又太轻，人坐在阳台上，只觉得街景"就在那里"。

◆ 三、显露谱系：孩子画笑脸

太阳出来以后，朵朵回到书桌前写作文。写了几行，她说要先画一张画。

她拿铅笔，先画了一个圆。

"这是什么？"罗明川问。

"你猜。"

一个圆，可以是太阳，可以是皮球，可以是一只盘子，也可以是一张脸。这时候纸上只是"冒出来"了一样东西，它是什么，还没定下来。

朵朵在圆里点了两个点。

"脸！"父亲说。

两个点一点，圆就成了一张脸的形状。圆还是那个圆，可它的意思变了：它不再可能是盘子了。

她又在两个点下面画了一道往上弯的弧线。

"笑脸。"

一道弧线，这张脸有了表情。脸的各个部分彼此有了关系：眼睛在上，嘴巴在下，嘴角往上翘，这几样合在一起，才是"笑"。缺了哪一样，都不是这个笑。

朵朵还没停。她在圆的外面画了一圈短短的线，一根一根往外放。

"啊，是太阳。"罗明川说，"会笑的太阳。"

这一圈短线一画，前面那张笑脸又被重新认了一遍：原来它不只是一张脸，它是一个太阳的脸。一开始那个圆，转了一圈，又回到了"太阳"这个可能上，只是已经不是开头那个空空的圆了，它带着眼睛和笑。

末了，她在太阳下面画了几栋方方的楼，一座尖尖的塔，几团圆圆的树。会笑的太阳，挂在她家阳台外面的那条街上。

这张画，就是一个"显露谱系"。

圆，是 Show：有了一样东西，是什么还不知道。两点一弧，是 Shape：成了一张笑脸。一圈光芒和下面的街景，是 Structure：太阳、脸、楼、塔、树，彼此有了位置和关系，组成一幅认得出的"我看到的日出"。

可这还不是全部。更要紧的是，每一笔都是一个新的差异（D），每一个新的差异都让已经冒出来的东西重新显露一次。两个点，让圆从"什么都可能"变成"一张脸"；一圈短线，让脸从"一张脸"变成"太阳的脸"。后来的笔画，改写了前面的笔画的意思。这和上一章里那一声"叮"让前面的"叮当"从问话变成开头，是同一种事情：往回照。

显露谱系的意思，就在这里。S 不是一张画好的画，是一串接着一串的显露：圆，脸，笑脸，笑着的太阳，挂在街上的笑着的太阳。前一次显露是后一次显露的"长辈"，后一次显露又回过头去改写长辈。整串连起来，像一份家谱。只要还有下一笔，S 就还在发生。这正是我讲 SDE 时一直坚持的那句话：S 不是静态的样子，而是不停地显露，是一个显露谱系；当你启动 D 差异序列，S 就发生。

画纸上的那张画，看上去是静的。可它的"静"，是一路显露过来、显露得稳了。而且每一个看画的人，眼睛在画上从太阳扫到楼、再从楼扫回太阳，又在自

己眼里让它显露了一遍。画挂在墙上不动，看的人每看一次，它就重新发生一次。

朵朵翻出她一年级时画的一本画册，里面也有太阳，也有脸。那时候的太阳是一个歪歪扭扭的圈，眼睛是两个大黑点，光芒画得像一圈刺。二年级的画里，太阳的光芒画成了波浪线，脸上多了两团红脸蛋。今天这一张，太阳挂在了她家阳台外的街上。同一个"会笑的太阳"，在她手底下画了几十遍，每一遍都接着上一遍，又和上一遍不一样。画太阳这件事本身，也是一个显露谱系，跨了三年。

这张画里也有 E。铅笔是软是硬，纸是粗是滑，朵朵手腕的劲，橡皮擦掉了哪一笔，都在改写这张画。她有一笔画歪了，太阳的嘴角一边高一边低，看上去像在坏笑，她索性不擦了，说："它在偷看我写作文。"一笔画歪（E 里手和纸的一次意外），改写了表情（S），也改变了她下一笔要画什么（D）。

摸小猫、敲碗、看天亮，三件小事做完了，可以合在一起看一眼。

	S（显露）	D（差异序列）	E（特征纠缠）	最先觉察
摸小猫	软与暖一阵阵冒出，猫的身形在手下成形，认出团子	顺毛与逆毛，快抹与慢抹，隔不隔手套	手与猫毛互相改写，找不到干净的边界	E
敲碗	每声冒出与拖尾，《小星星》成形并离碗再现	叮与当不一样、分得出、排先后，节奏疏密	碗、水、筷、手指、桌面、耳朵互相改写	D
看天亮	影子冒出，塔树楼成形，街景成结构，笑脸画成谱系	明暗之差，眼睛不停的移动，由暗到亮的先后	光、空气、玻璃、眼睛、铅笔与纸互相改写	S

表里每一格都有东西，没有一格是空的。三种感觉，各有一套完整的 S、D、E。前三列在三行里都填满了，只有最后一列在变：最先觉察的那一维。摸的时候，最躲不开的是 E；听的时候，最躲不开的是 D；看的时候，最醒目的是 S。

这是本书第一编最要守住的一句话：是侧重，不是专属。凡是把它说成"视觉对应 S、听觉对应 D、触觉对应 E"的，都把三张完整的图，剪成了三个碎片。

还要再守住一句：表里把 S、D、E 分成三列，是为了看清楚，这是理念界的假想性切割。朵朵看天亮的时候，并没有先看到一个 S，再看到一个 D，再看到一个 E。她只是看着天亮了。三维分不开，分开只在纸上。三种感觉能不能也同时发生、同时分不开？下一章吃一口苹果，就是这件事。

现在，把这一章接回本书的大问题：为什么科学选中了眼睛。

三种感觉里，视觉给出的 S 最稳。看到的东西同时摆在眼前，看这一处不改那一处，你看得见别人也看得见，还能画下来、拍下来、印在书上传给不认识的人。一门想要稳定、可重复、可传播的知识，选中眼睛，是再自然不过的事。现代科学就是这样做的：它用视觉 SDE 取得稳定的特征，也就是图像，再在图像上做文章。这件事本书第二编会细讲，它是视觉科学伟大的那一半。

可是这一章也提醒了另一半。视觉的 S 显露得太稳，稳到让人忘了它是显露出来的；视觉的 D 和 E 藏得太深，深到让人以为它们不存在。于是有一种诱惑：拿到了一张"摆好了的图"，就以为拿到了世界本来的样子；图里看不到的推拉和节奏，再交给方程去补。补上去的东西，后来也被当成了图里本来就有的东西。

罗明川那天早上也想到了自己的电脑。他做断裂模拟，算完了，屏幕上会出一张五颜六色的图：红的地方应力大，蓝的地方应力小，裂纹尖端一片通红。那张图很好看，学生们常常盯着它说："你看，这里要裂了。"可那些颜色，是电脑在网格的一个一个点上算出数来，再按数的大小涂上去的。钢板里的那一下"撑不住"，没有人摸过，图上却画得清清楚楚。那张图，也是一个显露谱系，只是它的每一笔，是方程替手画上去的。

朵朵画笑脸的时候，知道那个笑是她一笔一笔画出来的。科学拿到一张原子的图像时，常常忘了图里的"小棍"是怎么来的。这一忘，就是本书第三编要拆开的代签。

带 走 的 话

天不是亮好了摆在那里的，是一层一层亮出来的；S 是显露谱系，结构只是它的第三层。

小　账

SDE 账：S 落在影子冒出、塔树楼成形、街景成结构与笑脸画的显露谱系（最先觉察）；D 落在明暗之差、眼动与由暗到亮的先后；E 落在光、空气、玻璃、眼睛、铅笔与纸的互相改写。

代签账：本章为铺垫，点出视觉的 S 显露得最稳，故最易被当成"现成的样子"，为方程补上看不见的推拉留下入口。

◆

04

第 4 章

吃一口苹果：三觉同时发生

> **这一章的问题**
>
> 前三章把触、听、视分开讲，一章一种。可人活着的时候，三种感觉是分开来的吗？咬一口苹果，你分得出哪一下是听、哪一下是看、哪一下是摸吗？

◆ 一、咔嚓、变小、咬合

这是我构想的场景。

星期六早上，长沙。罗明川在厨房削苹果，削到一半，罗朵朵伸手抢过去，连皮带肉咬了一大口。

"咔嚓。"

就这一口，我们停下来，慢慢拆。

先说那一声。苹果脆，牙一落下去，果肉先顶住，再一下裂开，裂开的那一刻有声音。朵朵自己听到的声音，比坐在对面的爸爸听到的要响得多，也闷得多。原因很简单：她的声音有一半是从牙床、颌骨直接传进耳朵里的，不经过空气。爸爸只听得见空气里那一半。同一口苹果，两个人听到的不是同一声。

再说眼睛看到的。苹果上多出一个缺口，缺口边上有一排细细的牙印，牙印里冒出一点汁水，在晨光里发亮。苹果变小了。再咬一口，又小一圈。白色的果肉露在外面，过一会儿边上开始发黄。

再说牙和舌头摸到的。牙尖刚碰到果皮，皮先是滑的、硬的，往下压，压不动，再多用一点力，"啪"一下塌进去。塌进去以后是另一种手感：果肉一块一块地散开，有颗粒，有水，凉。舌头把碎块往后推，牙再合上，一次比一次软。

三段话，三种感觉。好像真能分开写。

可是请你回到那一刻，回到"咔嚓"的那一下。那一声响，和牙尖塌进去的那一下，是先后两件事吗？不是先后。牙塌进去的那一下就是那一声，那一声就是牙塌进去。你耳朵里听到脆，是因为牙底下真的裂了；你牙底下觉得脆，一半也是因为听见了那一声。

2004 年，英国牛津大学的两位研究者做过这样的实验：让人戴着耳机咬薯片，把他自己听到的咀嚼声调响或调闷，人对薯片"脆不脆""新不新鲜"的判断就跟着变。薯片还是那片薯片，牙底下的力也没变，变的只是耳朵里那一声，可人说出来的"口感"变了。

这件事说明什么？说明"口感"这个词本身就不属于哪一种感觉。它是牙和耳朵一起交出来的。

眼睛也在里面。朵朵咬第二口之前，先看一眼缺口在哪里，下一口往哪边下牙，是眼睛定的。看见汁水亮，她就知道这口会甜；看见果肉发黄、发软，她会犹豫。眼睛给牙排了队，排了顺序，也给牙提了醒。

所以那一口苹果里，耳朵、眼睛、牙齿是同时在场的。三种感觉并没有轮流上岗，一个下班一个上班；它们一起发生。

◆ 二、理念界的假想性切割

那为什么前三章我要分开讲？

因为要讲清楚，就得切开。我一直讲的那句话，本书反复用：

> **S、D、E 是不可分割的，只是思考的时候进行一个"理念界的假想性切割"。**

这句话里有两层意思。

第一层，切割是真的有用。不切开，你说不清。一口苹果，"咔嚓""变小""咬合"同时冲过来，你要是不一样一样拎出来，只能说一句"好吃"，然后什么也说不下去。第一章讲手摸小猫，第二章讲敲碗，第三章讲看天亮，就是这样切出来的。切开，才看得见每一种感觉里头有什么。

第二层，切割发生在"理念界"，也就是在想的时候、讲的时候、写在纸上的时候。它不发生在苹果身上。苹果从来没有被切成三份：一份声音、一份形状、一份手感。是我们的脑子为了说话，假装切了一刀。

"假想性"三个字很要紧。它提醒我们：切完了要记得拼回去。更要记得，拼回去的东西永远不等于原来那一口。原来那一口，从来就没有缝。

举一个人人都有的经验。一首歌，你喜欢它。有人问你：你喜欢它的声音，还是它的旋律？

你会愣一下。声音和旋律分得开吗？在乐谱上分得开：旋律是一串音符，写在五线谱上；声音是谁来唱、用什么乐器、音色怎样。可是你听歌的时候，从来没有听到过一个"没有声音的旋律"，也没有听到过一个"没有旋律的声音"。旋律一响起来，就已经是某个嗓子、某个音色里的旋律；那个嗓子一开口，就已经在走某条旋律。你把它们分开说，是乐理课在切；你在耳机里听，它们本来是一个。

换一个嗓子唱同一条旋律，你可能就不喜欢了。这说明你喜欢的从来不是"旋律"那半边，也不是"声音"那半边，而是它们缠在一起的那个东西。

S、D、E 也是这样。

拿第一章的小猫来说：手和猫毛贴在一起（E），一下一下滑过去（D），软和暖冒出来（S）。读者读到那里，好像是三件事。可在手上，它们是一件事。你没法先"贴在一起"、等一会儿再"滑"、再等一会儿让"软"冒出来。贴着就在滑，滑着就冒出软；软一冒出来，你的手又变了力道，贴得更紧或更松。三件事互相生出对方，互相改写对方。

所以本书讲 SDE，有一条底线：可以切，要切；但每切一次，都要在心里说一句"这是假想的"。切完要回到那一口苹果、那一首歌、那一只猫，看它原来的样子。

朵朵的爸爸就是一个切得很熟练的人。罗明川做了一辈子断裂力学，你要是请他"解释一下咔嚓"，他多半会拿出纸笔：苹果是一块有孔隙、含水的软材料，牙尖是一个压头；压头往下走，果肉里的应力在牙尖底下聚起来，聚到某个临界值，一条裂纹开始往里跑；裂纹跑得快，就释放出一股能量，其中一小部分变成空气里的振动，就是那一声。他还会在电脑里给半个苹果画上网格，每个网格节点算一个应力值，算出裂纹从哪里起、往哪边拐。

这一套讲法很漂亮，也很有用。做食品的工厂和实验室，真有专门的仪器去测苹果、饼干脆不脆：一根压头往下压，一边记下压了多深、用了多大的力，有的还在旁边放一只话筒，把裂开时的声音一起录下来。有人肯在压头旁边放一只话筒，可见在做这件事的人眼里，脆也不全是力的事。

可你注意他做了什么。他把那一口拆成了"力学"一份、"声学"一份；声学那一份又被他当成力学的副产品，"一小部分能量变成了振动"。朵朵自己牙床里那半个闷闷的声音，在他的纸上没有位置；朵朵看见汁水发亮所以下口更狠，在他的纸上也没有位置。他算得出那一条裂纹，算不出那一口。

这不怪他。他是在理念界切了一刀，切下了最好算的一份。只要他记得这是一刀，事情就没问题。

这条底线后面要用得很重。到第二编、第三编，我们会看到现代科学恰恰是一门特别会切的学问。它切得又快又准，切完就用切下来的那一份去算，算得很好。问题出在：它常常忘了这一刀是假想的，把切下来的那一份当成了世界本来的样子。这是后话。现在只要记住：切割在理念界，不在苹果里。

◆ 三、三种感觉，各有一整套

现在我们可以更仔细地问一个问题，它是本书最容易被读歪的地方。

前三章的题目分别是：触觉最先让人觉察 E，听觉最先让人觉察 D，视觉最先让人觉察 S。

读者很容易读成：触觉就是 E，听觉就是 D，视觉就是 S。一种感觉管一维，三种感觉凑成三维。

这样读是错的。本书在这一点上不让步。

还是回到那口苹果，一种感觉一种感觉地看。

先看耳朵。"咔嚓"一声，是声音冒出来了，这是显露（S）：本来安静，忽然有了一声。这一声不是一个点，它有前后：先是一下尖的，紧跟着一串碎的，再是闷闷的嚼动声。前后排出一个次序，这是差异序列（D）。这一声又跟朵朵的牙床、颌骨、苹果的脆度缠在一起，脆一点声音就亮，绵一点声音就哑；她自己听到的和爸爸听到的不一样，因为声音是跟她的身体一起发出来的。这是特征纠缠（E）。耳朵里有完整的 S、D、E。

再看眼睛。缺口出现了，这是显露（S），而且一层层显露：先看到一个缺口（Show），再看出牙印的弧形（Shape），再看出整个苹果被咬成了什么样

子、还剩几口（Structure）。一口一口变小，眼睛看到的是一个序列（D），先大后小，先圆后缺。果肉被光照着，过一会儿发黄，颜色是在苹果和空气、和光一起变的，眼睛看到的颜色也跟着屋里的光线变：窗边看是一种白，灯下看是另一种白。这是视觉里的 E。眼睛里也有完整的 S、D、E。

再看牙。牙和果肉压在一起，互相改写：牙的力让果肉裂，果肉的硬让牙收力，这是 E。一下一下咬，从硬到脆到碎到软，这是 D。脆、凉、多汁，这些感觉一下一下冒出来，这是 S。牙齿里也有完整的 S、D、E。

三种感觉，每一种都是一整套。

这三维在每一种感觉里还互相生出对方。本书用三个最简单的式子记这件事：S=F(D,E)，D=G(S,E)，E=H(S,D)。不用怕式子，它们说的都是大白话。

第一个式子说：显露出来的样子，由次序和纠缠一起决定。那一声"咔嚓"有多脆（S），取决于牙是猛地落下还是慢慢压下（D），也取决于这只苹果放了几天、朵朵的牙和这块果肉怎样顶在一起（E）。同一只苹果，慢慢压就没有那一声。

第二个式子说：次序由样子和纠缠一起决定。朵朵下一口往哪里咬、咬多快（D），看的是缺口现在长成什么样（S），也看刚才那一口牙底下是硬是软（E）。

第三个式子说：纠缠由样子和次序一起改写。苹果越咬越小（S），一口接一口（D），牙和苹果之间的关系就一直在变：起先是门牙对着整只果子，后来是后牙对着一团碎果肉。到最后一口，牙和苹果已经是完全不同的一对了。

三个式子在耳朵里成立，在眼睛里成立，在牙齿里也成立。这就是"每种感觉各有一整套"在式子上的意思。

那"最先觉察"又是什么意思？意思是：同样一整套 S、D、E，在不同的感觉里，我们最容易注意到的那一维不一样。

牙和手是贴着东西的。贴着的时候，你最容易注意到的是"我和它在互相改变"，这就是 E。摸小猫的时候，你很难忽略手和猫毛贴在一起这件事；咬苹果的时候，你也很难忽略牙和果肉顶在一起这件事。

耳朵听到的东西总是一个接一个来的。你不可能一下子听到整首歌，只能一个音接一个音地听。所以耳朵最容易让你注意到"前后不一样""一个一个排着队"，这就是 D。

眼睛一睁开，一整片东西同时在面前。你看苹果，是一下子看到整个苹果，连同缺口、牙印、光。眼睛最容易让你注意到"有东西出现了、它长成这样"，这就是 S。

所以本书的说法是：侧重，不是专属。

"侧重"的意思是：每种感觉都有三维，只是有一维站在最前面，最先被你发现。"专属"的意思是：一种感觉只有一维。前者是本书的口径，后者是本书要防的误读。

侧重还会挪动。这一点最能看出它不是专属。

夜里停电，朵朵摸黑啃苹果。眼睛那一份退到后面去了，可它没有消失：她仍然在"看"——在心里看那只苹果还剩多大、缺口在哪边，那是刚才亮着灯时留下的样子，加上手指摸出来的轮廓，拼成的一个暗中的苹果。这时候站到最前面的是牙和耳朵。

再换一种情形。咬到一块放坏了的果肉，牙底下忽然一软、一绵，那一声"咔嚓"没有来。这一下，最先冲进意识的，是牙和果肉之间"不对劲"——纠缠

变了。那一声没来，是随后才觉出来的；颜色发褐，要等她低头去看才看见。触觉先报了警，眼睛后来补了样子。

同一张嘴、同一只苹果，哪一维站在最前面，随着情形换。要是每种感觉只管一维，侧重就挪不动；挪得动，正说明每种感觉手里都有三张牌，只是平时先亮哪一张不同。

这个区别看上去只是咬文嚼字，后面却决定了全书的走向。

假如视觉只有 S，那现代科学用眼睛取得世界，就只拿到了 S，它缺 D 和 E 是天经地义的，没什么好说的。可事实不是这样。视觉自己就有 D 和 E。眼睛看到的东西也会前后变化，也会和光、和看的人缠在一起。现代科学有能力用眼睛去觉察 D 和 E，只是它太习惯于用眼睛最擅长的那一维——稳定的、显露出来的样子——去取得世界，再用方程把另外两维补上去。

本书后面说现代科学是"视觉科学"，说的就是这种侧重被推到了极端：只信眼睛最稳的那一面，把手和耳朵本来能亲身取得的东西，交给方程去假设。

假如触觉只有 E，那中医摸脉、厨师掂锅、谭桂香拍瓜，就只能感到一团纠缠，说不出前后，也说不出样子，触觉就永远成不了科学。可事实也不是这样。老中医三根手指按下去，摸出的是"浮""沉"，这是脉显露出的样子（S）；摸出的是"来去""快慢"，这是脉的序列（D）。触觉里也有完整的三维。触觉的科学之所以没长出来，不是触觉缺了 S 和 D，是我们还没学会把触觉里的 S 和 D 稳定下来、讲出来、传下去。这是第六编要做的事。

所以"侧重不是专属"这句话，一头保护了视觉科学：它不是瞎子，它的伟大是真的。另一头给触觉、听觉留了门：它们不是只会糊涂地"感觉"，它们也有自己完整的一套，可以长出自己的科学。

◆ 四、为什么要从苹果讲

还要交代一句：为什么第一编要拿一口苹果收尾。

一口苹果里，其实不止三种感觉。还有味道，还有气味。苹果的甜、酸、香，都在那一口里。味觉和嗅觉当然要紧，本书只讲看、听、触三种，原因在本书要讲的是科学：现代科学取得世界，靠的主要是看，而本书要补的，主要是触和听。味觉、嗅觉的科学化另有它的故事，这本书不展开。

那为什么偏偏是苹果?

因为它太普通了。每个人都咬过，每个人都听过那一声，每个人都看过苹果一口口变小。它不需要实验室，不需要仪器，不需要术语。前三章分开讲的三种感觉，在这一口里自己合拢了。读者不必相信我，只要下次吃苹果的时候慢一点，自己就能验。

你可以做一个小游戏。闭上眼睛咬一口：眼睛那一份拿掉了，你会发现咬的力道变得犹豫，下牙的位置也没那么准。捂上耳朵咬一口：耳朵那一份拿掉了，苹果好像没那么脆了。把苹果切成小块用叉子送进嘴里，不用门牙咬，只用后牙嚼：门牙那一下"顶住—塌下"拿掉了，那一声"咔嚓"也跟着没了。

每拿掉一种感觉，剩下的两种都跟着变。

这就是三觉同时发生最直接的证据。如果三种感觉真是三条互不相干的通道，拿掉一条，另外两条应该原封不动。它们没有原封不动。说明它们本来就缠在一起，你拿掉的不是一条线，是在一张网上剪了一个洞，整张网都跟着松了。

朵朵玩完这几个游戏，大概会问爸爸一句："那我到底是用什么吃苹果的？"

最老实的回答是：用整个人。眼睛、耳朵、牙、舌头、手，一起吃。爸爸那张算裂纹的网格图没有错，它只是这一口里被切出来的一小片。小片算得准，不

等于它就是那一口；把小片当成整口，才会出错。这句话请读者先记着，到第三编我们会给这种出错起一个名字。

下一章，我们去菜市场看一个人怎样拍西瓜。在那里，触觉和听觉缠得更紧，紧到拿掉任何一个，判断都会出错。

带走的话

分开讲是为了说清楚，合在一起才是活着的样子；每种感觉都有完整的S·D·E，只是最先让你注意到的那一维不同。

小　账

SDE账：S在缺口、牙印与那一声脆的显露里，D在一口接一口、一声接一声的次序里，E在牙与果肉、声音与颌骨、果肉与光的互相改写里；三觉各含完整三维。

代签账：本章为铺垫——先立下"切割只在理念界"，为第三编揭出"把切下来的一份当成世界"埋下第一根线。

◆

05

第 5 章

拍西瓜：触与听纠缠在一起

> **这一章的问题**
>
> 上一章说三种感觉同时发生。可"同时发生"还不够说明它们缠得有多紧。有没有一种本事，拿掉手就不灵，拿掉耳朵也不灵？

◆ 一、谭桂香的掌心与"嘭嘭"声

这是我构想的场景。

七月，娄底，下午三点多。菜市场东头的棚子底下，谭桂香守着一车西瓜。她六十七岁，在这个市场卖瓜卖菜三十年了。

罗明川这天回娄底看亲戚，顺路来买瓜。他在长沙的大学里教材料力学，一辈子跟裂纹、应力、网格打交道。按说，判断一只瓜里面熟没熟，算是他的本行：这不就是判断一个装满水的壳体，内部是什么结构吗？

他学着别人的样子，挑了一只，伸手拍两下。"嘭嘭。"他听了听，好像是熟的声音，又好像不是。他换一只，再拍。"嘭嘭。"还是说不清。两声听起来差不多。

谭桂香在旁边看着，笑了。她走过来，没有直接告诉他哪只好，先把他手里那只接过去。

她的动作是这样的：左手托在瓜底下，五指张开，掌心贴着瓜皮，不捧，也不抓，就那么贴着；右手抬起来，手腕放松，用掌心偏下、靠近手指根的那一

块，在瓜身上部拍下去。不重，也不轻，"嘭"。停半拍，换个地方，再"嘭"。有时她把瓜转一下，在另一面再拍一下。前后三四下，她就有数了。

罗明川问她听的是什么。她说，不光是听。

她把罗明川的左手拉过来，学她的样子托在瓜底下，然后她在上面拍。这一拍，罗明川愣住了：他左手的掌心里，有一股颤，从瓜顶上一路透下来，"嗡"地一下传到手心，再慢慢散掉。

她又换了一只瓜，同样让他托着，同样拍下去。这一回，左手心里的颤短，"噔"一下就没了，像拍在一块硬木头上。

再换一只。这一回几乎没有颤，掌心里闷闷的，像托着一团湿棉花。

三只瓜，耳朵听起来也不一样：第一只"嘭嘭"，低一点、浑一点；第二只"当当"，脆，偏高；第三只"噗噗"，哑。可罗明川自己拍的时候，这三种声音在他耳朵里差别没这么大。现在左手托着、心里有了那股颤，耳朵好像一下子被打开了，他第一次听出了三种声音的不同。

谭桂香告诉他：第一只熟了，正好；第二只还生；第三只放久了，瓤可能起沙，也可能倒了。

切开来看，她说的都对。

这里要老实交代一句：本书不打算证明"嘭嘭声＝熟"这条民间经验在物理上有多准。农业工程里有不少研究，用敲击声和振动给西瓜做不切开的成熟度检测，各家方法不同、准头不一，本书不报数字。本书要看的是另一件事：谭桂香的判断是怎样发生的。

她的判断里，有一个右手，一个左手，一双耳朵。

右手拍下去，这是发出。左手托着，这是接收。耳朵听着，这也是接收。可左手和耳朵接收到的，是同一下拍击在瓜里走了一圈之后的两种样子：一种从瓜皮透进掌心，一种从空气传进耳朵。它们说的是同一件事——瓜里面是什么样——用的是两种嗓门。

用上一章的话来说，这里每一种感觉都有完整的 S、D、E。

左手心里：掌心和瓜皮贴在一起，瓜的颤改写着手，手托的松紧也改写着瓜能颤多久，这是 E；颤先来，再散，长或短，这是 D；"透""噔""闷"冒出来，这是 S。

耳朵里：声音冒出来，这是 S；一下一下拍，每一声的起落快慢，这是 D；声音跟瓜、跟她拍的力道、跟她托瓜的那只手缠在一起，这是 E。

可是谭桂香的本事，不在左手，也不在耳朵，在两者之间。

◆ 二、只摸不听、只听不摸都不准

我们来做两个想象中的试验。它们都是构想，用来把那两者之间的东西逼出来。

第一个试验：只摸不听。

市场的喇叭忽然响起来，在放一段很吵的广告，循环播放。棚子边上一辆三轮车在倒车，"倒车请注意"一声接一声。谭桂香的耳朵被淹掉了。

她还拍得出来吗？

按常理推，她仍然能大致判断，因为左手心里的那股颤还在。可是她会变慢，会多拍几下，会把瓜抱得更紧，会把左手的掌心贴得更实，想从手上多拿一点东西回来。她的判断不会完全失灵，但会变得没那么有把握。这是一个推想，

本书没有数据。读者自己去菜市场就能问问卖瓜的人：吵的时候，你拍得准不准？

为什么会变慢？因为她平时的判断，是左手和耳朵互相对着看的。手上一股长颤，耳朵里一声浑响，两边一对，熟了；手上一股长颤，耳朵里却是一声哑响，两边对不上，她就要再拍一下，看看是不是瓜皮厚、是不是拍偏了位置。耳朵被淹掉，她就少了一个对账的人。

第二个试验：只听不摸。

换罗明川来拍。谭桂香不碰瓜，站在一步之外听。

这时她能听出熟不熟吗？大概也能听出个七八分。可她会有一点不放心。为什么？因为罗明川拍的力道不是她的。他拍得太重，生瓜也会"嘭"出一点浑；他拍得太轻，熟瓜也会"当"出一点脆。手不在她身上，她就不知道这一声里，哪一部分是瓜的，哪一部分是拍的人的。

她平时自己拍，是不用想这个问题的。她的右手拍下去多重，她心里有数；左手托多紧，她也有数。这两个"有数"不用说出来，已经被她的身体算进了那一声里面。她听到"嘭嘭"的时候，听到的其实是"我用我惯常的力道拍、我惯常地托着时，这只瓜回来的那一声"。把手换成别人的，那个"我惯常的"就没了，声音还是声音，可是失去了对照的底。

这两个试验合在一起，说出了这一章的要点。

谭桂香判断瓜熟，用的不是"一份触觉＋一份听觉"。如果是那样，只摸不听，她还剩那一份触觉，应该照样准一半；只听不摸，她还剩那一份听觉，也应该照样准一半。可实际上，拿掉一边，另一边也跟着变得不可靠了。手的那一份要靠耳朵来对账，耳朵的那一份要靠手来定底。

更深一层：右手拍下去的力道，本身就是听着上一声调出来的。第一下拍出来声音偏脆，她第二下会稍微加一点力，换一个更靠中间的地方；左手里的颤太短，她会把左手往瓜底下再挪一挪。手调耳，耳调手，一来一回，三四下之后，"熟"这个判断才冒出来。

所以这里不是两条线并排走，是一个圈：拍→听、摸→调整手→再拍→再听、再摸。触和听在这个圈里互相生出对方。把这个圈剪断，剩下的两截都不是原来的样子了。

回头再看第一节里罗明川的那一愣，就更清楚了。他自己拍的时候，三只瓜的声音"差不多"；左手托上去、掌心里有了那股颤以后，耳朵忽然听出了三种声音的不同。瓜没变，声音也没变，变的是他的耳朵。手给耳朵定了一个底：这一声对应的是"透"，那一声对应的是"噔"，耳朵有了这个底，原来混在一起的声音就分出了层次。

反过来也一样。谭桂香要是一辈子只托瓜、从不听声，她掌心里的"透"和"噔"大概也分不了这么细。耳朵给手也定了底。

一个做了二十多年断裂力学的教授，站在瓜摊前学不会的，不是一个知识点，是这个互相定底的圈。他书架上关于振动、关于波的书一本不缺，可那些书讲的是声和振动分开写成的方程，没有一页讲"手怎样打开耳朵"。

用本书的话说：在拍瓜里，触觉和听觉纠缠成了一个判断单位。这个单位不能拆成"一份触＋一份听"再加起来。

请读者记住这个说法，它是全书第三个承重概念"先人后机"的根。到第二十四章，我们会试着给拍瓜搭一个最小的数学模型；到第三十二章，我们要问：如果把谭桂香左手里的颤和耳朵里的声音分别录下来，录成两串数据，交给一台机

器去学，它学得到那个圈吗？这一章先不回答。先把问题留在这里：两串切开的数据，拼得回一个圈吗？

◆ 三、叩诊与弹琴

拍西瓜不是孤例。人身上还有两件事，做法几乎一样。

第一件是叩诊。

去看过医生的人大概见过：医生把左手的中指平贴在病人的胸口或肚子上，右手的中指弯起来，像小锤子一样，在左手中指的第二节上敲两下，"笃笃"。敲完，换个地方再敲。

这和谭桂香拍瓜，几乎是同一个姿势。一只手贴着，一只手敲，耳朵听着。

医学上把叩出来的声音分成几种，教科书里常见的有清音、过清音、鼓音、浊音、实音，大致对应底下是含气多的组织、实的组织，还是空腔里的气。本书不讲怎样用叩诊判断病情，也不讲任何病。这里只看一件事：医生敲的时候，判断从哪里来。

介绍叩诊的通行资料里就写着：不同的叩诊音，除了耳朵听得出，在贴着的那根手指上也会引起不同的感觉。贴在病人身上的那根左手中指，也在"听"。敲在实的地方，指下发硬、发死，回弹短；敲在含气的地方，指下有一点空、一点弹。照这个说法，叩诊这门手艺里，耳朵和指头本来就是一起在用的；声音和指下的感觉合在一起，才构成那一下"浊"或"清"。

叩诊在西方医学里有一段常被讲起的来历。1761 年，维也纳医生奥恩布鲁格出了一本拉丁文小书讲叩诊。常被转述的说法是：他父亲开客栈，他小时候见过父亲敲酒桶、凭声音判断桶里还剩多少酒。这个故事流传很广，出处多是后人

转述，细节未必可靠；它说出的道理却是真的：酒桶、西瓜、胸腔，都是一个装着东西的壳，敲一下，手和耳朵一起把里面的样子取回来。

这里还要多说一句。叩诊后来在临床上的地位，被各种影像检查分走了很多。今天要看胸腔里有没有积液，很多时候是拍一张片子，或者做一次超声，在屏幕上看。屏幕上看得清清楚楚，这是好事。可你注意，判断的通道换了：从"手贴着、手敲着、耳朵听着"，换成了"眼睛看一张图"。这件事本书第二编、第三编还要细讲。现在只指出：原来那个触听纠缠的圈，被一张给眼睛看的图替换掉了。图更清楚，也更好留档、更好拿给别的医生看，这些好处都是真的；本书不主张退回去。本书只是要记下一笔：换通道的时候，手指下的那一点"发死"或"发空"，没有跟着一起进到图里去。它去了哪里，没人问。

第二件是弹琴。

钢琴老师常说一个词：触键。英文里干脆就叫 touch。同一个琴键，有人按下去声音发硬，有人按下去声音圆润。按物理学的讲法，钢琴的击弦机一旦把琴槌抛出去，琴槌打弦的那一下由速度决定，手指管不了那么多；所以学界一直有人争论，"触键改变音色"到底有多少是真的物理差异，有多少是演奏者的感受；也有研究提出，手指撞到琴键的那一下轻响混在琴声里，让听的人觉得音色变了。

这个争论本书不裁判。本书只看一件没人争的事：弹琴的人，是靠手和耳朵一起调出下一个音的。

手指按下去，先碰到琴键的阻力，往下走，到某一处会感觉到轻轻一"脱"（击弦机放开琴槌的那一下），然后键底。耳朵这时听到了音。这一音偏响了，下一个音手指就放轻；这一音的尾巴拖得太长，脚下的踏板就提早松。手

上的感觉和耳朵里的声音，在每一个音之间对账。练琴练的，就是这个对账练到不用想。

吉他手更明显。左手指尖按弦，按得不实，声音发"噗"；按得太死，音会被拉高一点。他听到了，指尖马上调。古琴的吟、猱，手指在弦上来回揉，声音跟着手一起颤，手停了，那一点韵也就停了。

叩诊、弹琴、拍西瓜，三件事放在一起，样子都是一个：一只手发出，另一个表面接收，耳朵同时接收，手和耳一来一回地对账，判断在这个圈里冒出来。

这样的圈，人人身上都有，只是平常不留意。你敲门，听里面有没有人，手指关节上那一点"空"或"实"也在告诉你门后是什么。你拍一拍装修好的墙，听哪一块是空鼓，手掌上的那点发虚也在告诉你。你摇一摇快喝完的饮料瓶，手里的晃荡和耳朵里的"哗啦"一起告诉你还剩多少。

◆ 四、拍瓜的人知道，却说不出来

再回到谭桂香。

她拍瓜一拍一个准。可是请她讲讲怎么拍，她说不太清楚。她会说"声音要沉""手上要有那股劲透过来"。这些话对她自己是够用的，对罗明川这样的人却不太够：什么叫"沉"？多沉？"那股劲"是多大的劲？卖瓜的人之间有一套自己的话，"沉""闷""脆""哑"，在同行里多少传得动，因为大家的手和耳朵都拍过几千只瓜；一出这个圈子，别人听到的就只是几个形容词。

她不笨，也没藏着不说。这门本事还没有被立成单位。

罗明川那一行的东西，都立成了单位：力用牛顿，长度用米，应力用帕斯卡。他说"这块钢的屈服强度是多少兆帕"，全世界的同行都听得懂，都能拿去重

复、检验。谭桂香的本事，三十年里在她手上和耳朵里长得很稳，可是它只稳在她一个人身上，传不出去，别人学，也只能跟着她一只一只拍，慢慢悟。

那她这三十年的准，是怎么长出来的?

想一想就知道：靠的是一刀一刀切开。瓜摊上常有人买了瓜，当场请她切开看看。每切开一只，红不红、沙不沙、有没有空心，眼睛一看就清楚。这一眼，等于给刚才那几下拍击交了答卷。拍出来"嘭嘭"、手心里一股长颤，切开果然是红沙瓤，这个圈就被加固一次；拍出来以为熟了，切开却是白籽浅红，她下一回拍到类似的声音、类似的颤，就会多一分小心。

三十年，几万只瓜〔此为推想量级，非统计〕，一只一只地切，一只一只地对。她的掌心和耳朵，是被眼睛一回一回校准出来的。

这件事很要紧，要说两句。

一句是：这又一次说明三觉不是各管一摊。拍瓜看起来是触和听的事，可在谭桂香长本事的那三十年里，眼睛一直在场。没有切开那一眼，触听的圈就没有对账的终点。这正是上一章说的：侧重，不是专属。

另一句是：可是你注意，眼睛在这里是"最后来验收的"。判断是手和耳朵做出来的，眼睛只在瓜被切开、圈已经完成之后才出场。谁先谁后，大有讲究。现代科学恰好把这个次序倒过来了：它让眼睛先来取得世界，再让方程去补手和耳朵那一份。谭桂香是手耳先行、眼睛验收；现代科学是眼睛先行、方程补签。这一倒，后面整本书的问题都出来了。

这正是本书要处理的难题。触觉和听觉纠缠在一起的知识，人身上是有的，而且很准；但它没有被稳定下来、讲出来、立成单位、交给别人去验。它还停在"手艺"那一层，没走到"科学"那一层。

现代科学走到"科学"那一层的那些知识，大多是先变成了可以看的东西：刻度、曲线、图像。谭桂香的掌心和耳朵，没有被变成可以看的东西。这一点，第二编会讲清楚：为什么现代科学走的偏偏是眼睛那条路。

而本书后半部要说的是另一条路：把谭桂香那个圈，原样地——不切开、不翻成图——立成单位。这条路必须先从人身上走通。别的东西能不能跟上来、怎样跟上来，是第七编的事；迈出第一步的，只能是一双会拍瓜的手和一对会听瓜的耳朵。

带 走 的 话

拍瓜的本事不在手上，也不在耳朵里，在手和耳朵来回对账的那个圈里；圈一剪断，两截都不准。

小　账

SDE 账：S 是"熟"在三四下拍击后冒出来的判断，D 是一拍一停、手调耳耳调手的次序，E 是掌心、瓜皮、声音与拍的力道互相改写；左手与耳朵各含完整三维，又纠缠成一个判断单位。

代签账：本章为铺垫——立下"触听纠缠是一个不可拆的判断单位"，为承重三"先人后机"、第二十四章的最小模型与预测三（纠缠不可拼）埋下伏笔。

◆

第　二　编

光的科学：现代科学是视觉科学

导　语

本编命题：现代科学是看出来的科学。它用视觉 SDE 取得稳定的特征——图像；它的数学之所以以点为单位，是因为视觉的局部图像可以互相切割；传统数学的三重退化，正是视觉成像三种物理性质的投影。本编先问这只眼睛从哪里来，再问它看到了什么、怎样把看到的变成了点。

06

第 6 章

理念是"所见之形"：西方为什么是光的世界

这一章的问题

我常说，光的世界是西方文明。这句话能说到多硬？本章的回答是：它有很深的来历，也有一座断桥；本书把它当作一个待检的假说，不当作定论。

◆ 一、eidos 与 theoria

这是我构想的场景。

罗朵朵上英语课回来，问爸爸："老师说，别人讲完一件事，你听懂了，可以说 I see。我明明是听懂的，为什么要说'我看见'？"

罗明川想了想，说中文也一样：我们说"明白了"，"明"是日月，是亮；我们说"看法""见解""观点"，都离不开眼睛。

朵朵又问："那为什么不说'我听见了'？"

这一问，问到了本章的门口。

西方哲学里最有名的一个词，是柏拉图的"理念"。希腊文写作 eidos，也写作 idea。我们今天说的"理念""观念""理想"，背后都有这个词的影子。

可是这两个希腊词，原来是什么意思？

通行词典的解释是：它们都和希腊语里"看"的动词连在一起。一般认为 eidos、idea 与动词 idein（看见）同源，可以上溯到一个表示"看见"的古老词

根，拉丁文 videre（看）也出自这一支。eidos 的本义，大致是"被看到的样子""外形""模样"。一个东西的 eidos，就是它让人看到的那个形。

柏拉图做了一件大事：他把"被看到的样子"升格了。他说，真正的样子不是眼睛看到的这一个那一个，是灵魂"看到"的那一个——永远不变、完美无缺的"形"。一匹马、另一匹马，眼睛看到的都会老、会死、会走样；可"马之所以为马"的那个形，不老不死。这个形，就是 eidos，就是理念。

拿朵朵自己的事打个比方。她在作业本上画一个三角形，画得歪歪扭扭，一条边还有点弯。老师照样说"这是三角形"。为什么？因为大家心里都有一个"真正的三角形"：三条边笔直，没有粗细，三个角加起来正好一百八十度。这个三角形，谁也没在纸上画出来过，可是谁都"看得见"。纸上那个歪的，只是它的一个影子。柏拉图说的理念，就是这样一个心里看得见、纸上画不出的形。

请注意这一步。眼睛的"看"被拿掉了，"看"这个动作却留了下来，只是换了一个主语：从肉眼换成了"心灵之眼"。理念仍然是一个被看见的东西，只不过是被心看见。所以本章的题目说，理念是"所见之形"。

另一个词，是 theoria，英文的 theory（理论）由此而来。它和希腊语里的 thea（景象、观看）、theatron（看戏的地方，英文 theatre 的来源）是一家。在古希腊，theoros 原指受城邦派遣、去外地观看节庆与神谕的人。后来哲学家把这个词借过来，用来说一种最高的生活：站在一旁，安静地观看真理。

"理论"和"剧场"是亲兄弟。这一点很能说明问题：理论最初的姿势，是坐在观众席上看。看的人不上台，不动手，不改变台上发生的事；他只看，看清楚，看全。

再往下数，西方语言里关于"知道"的词，有很多带着眼睛。evidence（证据）来自拉丁文"看"；speculation（思辨）来自"观望"；insight 是"看进去"；

perspective 是"看透过去"。说"我懂了"，英文是 I see，法文常说 je vois。这些都是词典里的通行说法。

朵朵那一问，不是小孩子的玩笑。整个语言都站在眼睛这一边。

◆ 二、太阳、洞穴、启蒙

柏拉图不只用了"看"的词，他还用"光"来讲最根本的道理。

《理想国》里有两个比喻，几乎每一本西方哲学史都要讲。

第一个是太阳喻。柏拉图说：眼睛要看见东西，光有眼睛不够，光有东西也不够，还要有第三样——光。光从太阳来。太阳让东西能被看见，也让东西能生长。在理念的世界里，也有一个"太阳"，就是"善"本身。善让理念能被心灵认识，也让理念能存在。

这个比喻里，认识就是看，真理就是被照亮的东西，最高的原理就是光源。

第二个是洞穴喻。一群人从小被锁在洞穴里，脸朝着洞壁，背后有一堆火，火和他们之间有人举着各种东西走过，火光把这些东西的影子投在洞壁上。囚徒一辈子只看见影子，就以为影子是真的。有一个人被解开锁链，回头看见火，眼睛被刺痛；再被拉出洞口，看见阳光下的真实事物，最后能直视太阳。这时他才明白：原来以前看的全是影子。

这个故事里，从无知到有知，是一条从暗到亮的路；受教育，是"把灵魂的眼睛转过来"。

洞穴里其实还有一个细节，常被人略过：柏拉图说，假如洞壁会有回声，那么背后的人说话时，囚徒会以为是影子在说话（卷七，515b 前后）。声音在这个故事里，被当成了影子的附属品。囚徒走出洞穴以后，故事讲的是他看见了什

么，没有讲他听见了什么，也没有讲他摸到了什么。真理之路，是一条只为眼睛修的路。

两千年后，光又回来了。

17 世纪，笛卡尔说人有一种"自然之光"，凭它就能清楚分明地看到真理（拉丁文 lumen naturale，《第一哲学沉思集》第三沉思里就用这个说法）。到了 18 世纪，整个思想运动干脆用光来命名：英文叫 Enlightenment，"照亮"；法文叫 les Lumières，"诸光"，那个世纪被叫作"光的世纪"；德文叫 Aufklärung，原意是"弄清楚、使明亮"。

一个文明，把它最自豪的思想时代，用三种语言都叫作"光"。

这条线一直活到今天的日常英语里。说一项研究揭示了什么，叫 shed light on，"投下光"；说把一件事讲清楚，叫 clarify，词根是拉丁文 clarus，有意思的是，这个词既说"明亮"，也说声音"响亮"，光和声在这里共用一个根，算是光的世界里留下的一个听觉的印子；说一个人聪明，叫 brilliant，"闪闪发光"。学术论文里，这些词天天都在用，用的人早就不觉得是在说光了。

顺便说一句。这个运动传到中文里，译成了"启蒙"。"蒙"在《易经》里是一卦，《序卦》说"蒙者，蒙也，物之稚也"，说的是幼小、未开。"启蒙"就是把蒙住的打开。这个译法里，光的意象淡了一层。但一个译词说明不了一个文明，读者不要从这里推出什么。中文里"明"字照样满地都是。

到这里，"光的世界——西方文明"这句话的来历就很清楚了：理念是所见之形，理论是观看，真理是被照亮的东西，学习是从洞穴走向太阳，最伟大的时代叫作"光"。

这是一条长达两千多年、一直没断的线。

◆ 三、约纳斯：视觉的三种高贵

为什么偏偏是眼睛?

20 世纪的哲学家汉斯·约纳斯写过一篇文章，题目就叫《视觉的高贵》（1954 年）。他问的正是这个问题：西方哲学为什么一直把视觉放在最高的位置？他的回答，是去看视觉本身有什么特别的性质。

他找出了三条。

第一条，同时性。一睁眼，一整片东西同时在你面前：桌子、杯子、窗外的树，全都在，不用等。听觉不是这样，声音一个接一个来，前一个走了后一个才到；触觉也不是这样，手只能一处一处摸过去。只有眼睛，一下子给你一个"同时并存"的世界。约纳斯认为，"存在"和"永恒"这类观念，就是从这种同时性里长出来的：看起来没有在变的东西，就像是一直在那里。

第二条，因果被中立化。你看一个杯子，杯子不会因为被看而变；你也感觉不到杯子在"作用"于你。看，是不碰的。摸就不同：你一摸，就在推它，它也在顶你；你一用力，就感觉到阻力。听也不同，声音是一件事情正在发生，有个东西在响，在作用于你的耳朵。只有在看的时候，主客之间的那股力，好像被抽掉了。

第三条，距离。眼睛看东西，最好隔开一点。凑得太近反而看不清。听需要声音传过来，触需要贴上去，可是看，越远越能看全。这种空间上的距离，又变成了心理上的距离：看的人可以不卷进去，可以冷静，可以"客观"。

三条性质，用日常的事一对就明白。

你走进一间屋子，灯一开，屋里有几把椅子、桌上放着什么、墙上挂着什么，一秒钟全知道了。这是同时性。可要是停电，你摸黑进去找一串钥匙，手只

能一样一样摸过去：这是椅背，这是桌角，这是一本书，钥匙在哪儿？摸了半天，屋里的样子才一块一块拼起来。

你站在美术馆里看一幅画，看多久，画都不会因为你变；你也不觉得画在对你做什么。这是因果被中立化。可你去推一扇很重的门，门在顶你，你在推门，这一推一顶你躲都躲不掉。

你想看清一座山，就得退远一点。凑到山脚下，眼前只剩一片石头。可你想听清一个人说话，就得靠近；你想摸清一块布的料子，就得把它拿在手里捻一捻。只有看，是退开了反而更清楚。这是距离。

这三件事每个人每天都在经历，只是没人把它们当成一回事。约纳斯把它们当成了一回事。

约纳斯说，正是这三条，让视觉成为"客观性"和 theoria 的源头。站在一旁、隔开距离、不动它也不被它动、一眼看全——这就是西方理论生活的理想姿势。

约纳斯还说了一句同样重要的话：因果，本来是在身体里发生的经验。人用力推一个东西，感觉到它在抵抗，这一下"我在用力、它在顶我"，就是因果最原初的样子。可是看，恰恰把这一下抽掉了。

本书站在约纳斯之后。他把这件事描述得很准，可是他停在了哲学描述那里。他没有问：视觉这三条性质，进了数学以后变成了什么？他也没有问：被中立化掉的那股因果，科学后来是怎样补回来的？他更没有去建一门触觉的、听觉的科学。

约纳斯也不是唯一的提问者。西方思想自己就对这只眼睛起过疑心。思想史家马丁·杰伊写过一本书，叫《垂目》（1993 年），专讲 20 世纪的法国思想家

们怎样一个接一个地批判"视觉中心主义"：凝视会把人变成对象，看的人高高在上，被看的人无处可躲。

这一点要讲公道：怀疑光的，正是光的世界里的人。一个能这样回头审视自己眼睛的文明，不是一个只会看的文明。

不过杰伊所写的那些批判，大多落在伦理与政治上：看的权力、被看的处境、图像对人的支配。它们很少落到科学的单位上：数学为什么以点为单位，物理里的"力"是怎样被补进来的。批判视觉的人很多，替手和耳朵去建一门科学的人很少。

这三个问题，正是本书要接着做的。第十章会把约纳斯的三性一条一条接到数学单位上；第三编会讲科学怎样用方程补回那股被抽掉的因果，本书叫它"代签"；第四编以后，讲触觉和听觉的科学怎样新生。

◆ 四、接着判：断桥与光逻辑

讲到这里，读者可能已经被说服了：西方是光的世界，证据确凿。

且慢。这里有一座断桥。

站内第 422 号《发生的身体》讲过视、听、触怎样给人的身体"着色"。它在讲完之后，明白写了一句：从这里推不出"中华重触、印度重听、西方重视"这样的文化主张。从身体到文明，中间的桥是断的。

这句提醒很重要。一个人可以偏重眼睛，一群人可以偏重眼睛，可是一个绵延几千年、人口以亿计的文明，能不能说它"是光的"？证据要怎么给？

站内第 8 号《中华之气》走得更远一些。它说：光让世界被看见，气让世界被感到；西方是光的逻辑，中华是触觉、是气的逻辑；西医是光之科学，中医是气之科学。这是一个很有力量的对照，本书从它那里接过了很多东西。

它有一个判断，本书特别看重：现代科学里的模型，是"气的运动被光学化之后的残迹"。意思是，世界里本来有一股流动的、互相牵连的东西，科学用光的办法去取它，取回来的只剩一个干了的印子。这个判断很准，可它停在了一个比喻上。"残迹"是怎样留下来的？留下来以后，为什么大家把它当成了世界本身？它没有细讲。本书第三编要把"残迹"拆成一个机制，起名叫"代签"，并配上可以推翻它的预测。

《中华之气》还很诚实地给自己立了一条作废条件：如果"气"给不出一个独立于既有物理量的读数，它就只是修辞。本书第二十一章会试着给出这个读数。

可是本书在这里要改一处。

本书第四章已经立下：每一种感觉都有完整的S、D、E，只是最先让人觉察的那一维不同。侧重，不是专属。照这个口径，说"西方文明＝视觉，中华文明＝触觉"，就犯了和"视觉＝S、触觉＝E"同样的错：把侧重写成了专属。

事实也不支持专属。

西方并不只有眼睛。古希腊这条线确实偏重看，可是西方文明的另一个大源头——希伯来的传统——常被认为是偏重听的："以色列啊，你要听"，是那个传统里最根本的一句话；挪威学者博曼在1950年代初出过一本《希伯来思想与希腊思想比较》，专门对照希腊思想的"看"与希伯来思想的"听"。拉丁文里"服从"一词（oboedire），由"对着"和"听"合成，本义就是"对着听"。西方的教堂音乐、西方的复调与和声，也绝不是一个只有眼睛的文明能长出来的。

中华也不只有手。前面朵朵问的"明白"，就是一个视觉词；"观""见""察""照"，在中文的思想词汇里一个比一个重。孔子说"朝闻道，夕死可矣"，闻是听；"聪明"二字，聪属耳，明属目，《尚书·洪范》说"视曰明，听曰聪"。中医讲"望闻问切"，望是看，闻是听和嗅，切才是摸。

印度更难归类。印度哲学的各个学派，梵文统称 darśana，本义就是"看见、观"；可是吠陀经典又被称为 śruti，意思是"所听闻的"。一个传统里，"看"和"听"都坐在最高的位子上。

这些反例摆出来，"光的世界——西方文明"还剩下什么？

本书的判断是：剩下的是侧重，而且是一个可以检验的侧重。

说得具体一点，本书收窄这句话，只说一件事：现代科学这一支，它的核心术语——理论、证据、观察、现象、理念、反思、洞见等——大多带着视觉的词根；这个比例，明显高于中华、印度传统里对应的那些概念。

这就是本书的预测五，"文明的感官词根"。它只要求很粗的层级：找一张核心概念的清单，在三个传统里各自查一查词源，数一数带视觉词根的占多少。做法可以很朴素。比如，"理论"一词，希腊那一支出自"观看"；中文的"理"，《说文》解作"治玉也"，就是顺着玉的纹理去剖、去琢，那是手上的活。"证据"一词，拉丁那一支出自"看"；中文的"证"，繁体作"證"，《说文》解作"告也"，字从言，是说出来、告出来的。这样一个一个查下去，查几十个，数一数。

查也要有规矩。一个字往往有好几层古义，挑哪一层当"本义"，结果就能差出去；所以每个词要照同一部字书、同一种取法来定，查不清的就记作"不明"，不许挑对自己有利的那一层。数的时候也不看单个词，看整张清单里视觉词根占几成。

这两个例子是本书随手举的，恰好对本书有利；正因为恰好有利，它们不能算数。挑出来的例子，永远能把话说圆。只有事先定好清单、三边一起查、查完再数，才算检验。

如果西方科学这一边明显偏高，"光的世界"就作为一个侧重的说法站得住；如果三边差不多，那么"光的世界＝西方"就只是一句修辞，本书就把它降为修辞，不再拿来当论证。

这里要把话说清楚，免得被读歪。

本书说现代科学偏重视觉，不是在贬低西方。光的世界给人类带来的东西是实实在在的：望远镜、显微镜、几何、物理、医学影像，后面几章会一样一样讲。本书第十六章还要专门讲视觉科学的伟大。

本书也不是在抬高中华。中医今天确实还不科学，这句话本书在第六编会照直说。中华传统里有很多触觉和气的经验，可经验多，不等于科学成。说中华"重触"，如果只是用来自我安慰，那比不说还坏。

本书要的，是把一句很有力量、却很容易说过头的话，变成一个能被事实推翻的问题。它也许经得住，也许经不住。经不住，本书照样成立：因为全书真正的命题落在"现代科学是视觉科学"，那是一个关于科学怎样取得特征的命题，不靠文明的划分撑着。文明这一层，只是给它多加一个来历；来历不成立，命题照旧要接受第七章到第十章的检验。

◆ 五、为什么还要讲这一章

那么，既然要收窄、要降调，为什么还花一整章讲它？

因为这条线太长、太深，不讲，后面的事就没有根。

现代科学不是凭空长出来的。它从"理念是所见之形"这里来，从"理论是观看"这里来，从"真理是被照亮的东西"这里来，从"光的世纪"这里来。伽利略举起望远镜、列文虎克凑近镜片的时候，他们心里那种"看清楚就是知道"的信念，有两千年的家底。

还要补一句，免得误会。说现代科学是"光的"，不是说西方的科学家只用眼睛、不用手。做实验的人天天在动手：磨镜片、接导线、拧阀门、称药品。实验室里的手，比哪里都忙。本书要问的是另一件事：这些手忙完了，最后交出来的是什么？是一个读数、一条曲线、一张照片——都是交给眼睛去认的东西。手在实验里干活，可是手感本身没有进入结论。结论只认眼睛看到的那一份。

现代科学的眼睛，是一只有家谱的眼睛。

下一章，我们就看这只眼睛做了什么：它怎样把世界"看稳"，怎样让你看到的别人也看得到，又怎样两次把自己撑大。

带 走 的 话

理念原本是"所见之形"，理论原本是"观看"；光的世界有两千年的来历，但它说的是侧重，不是专属，而且要交给证据去验。

小　账

SDE 账： S 在"理念＝所见之形"、真理被照亮这一路的显露里，D 在从洞穴到太阳、从影子到光源的次序里，E 在约纳斯指出的被"中立化"的那股主客互相作用里——视觉的高贵，恰是把 E 推到了看不见的地方。

代签账： 本章为铺垫——指认出约纳斯所说"被中立化的因果"，第三编要讲方程怎样替这股因果代签；"光的世界＝西方"降为待检侧重，交预测五。

◆

07

第 7 章

观察世界：视觉 SDE 取得稳定特征

这一章的问题

现代科学管自己的工作叫"观察"。观察到底做成了什么事，让它两三百年里一路领先？本章的回答是：眼睛能把世界看稳，能让别人也看见，还能被镜片撑大。三件事合起来，就是视觉 SDE 取得的"稳定特征"。

◆ 一、看得稳：一张天气云图

这是我构想的场景。

晚上七点半，罗家的电视在放天气预报。主持人身后是一张卫星云图：中国地图的轮廓上，盖着一团一团白色的云。东南沿海有一大团云卷成了一个旋涡，中间有一个小黑点。

罗朵朵指着那个旋涡问："那是什么？"

罗明川说："台风。中间那个黑点叫台风眼。"

朵朵盯着看了一会儿："它在动！"

确实在动。云图是一张一张接起来的，几个小时的图连着放，那团旋涡就慢慢转着、往西北方向挪。主持人拿手一比："预计后天登陆。"

这一幕，每个中国家庭大概都见过。我们来想一想，这张图做成了什么事。

台风是一个巨大的东西。它直径几百公里，里面有狂风、暴雨、气压的骤降、海水的翻涌。人要是站在台风里，是被它卷着的：风推着你，雨打着你，耳

朵里全是呼啸，衣服湿透贴在身上。那是触觉和听觉的台风，是你身在其中、躲不开、看不全的台风。

可是电视上这一张图，把台风变成了一团安安静静的白色旋涡。没有风声，没有雨打在脸上，你坐在沙发上，就把它从头到尾看全了：它多大，它的眼在哪里，它朝哪边走。

乡下的老人报天气，用的是另一套办法。夏天午后，常听人说"今天闷得很，要落雨"。闷，是皮肤上的事：空气贴在身上，汗出不来。也有人说"起风了，风转了向"，那是脸上、手臂上感到的。这些判断常常是准的，本书不否认。可是这一声"闷"只在说话的人身上，只在这个院子里，只在这个下午；他没法把"闷"递给远方的儿女看，也没法把今天的"闷"存起来，等明年同一天拿出来比一比。

卫星云图做到的，正是皮肤做不到的那一部分。

这就是视觉的第一件本事：看得稳。

"稳"有好几层意思。

第一层，图不会因为被看而变。朵朵看一遍，爸爸看一遍，主持人看一遍，云图还是那张云图。这正是上一章约纳斯说的"因果被中立化"：看不碰它，它也不因为被看而动。

第二层，图可以留下来。今天的云图存起来，明天、明年还能拿出来再看，看到的跟今天一模一样。气象台把几十年的云图存成档案，后来的人可以一张一张翻，比较哪一年的台风走了哪条路。今天手机里的天气软件，还能把过去几天的云图连成一段动画，手指一拉，就倒回去再看一遍。声音不是这样：一声"嘭"拍过去就没了，除非你录下来——而录下来以后怎样变成可以翻看的东西，那是第八章的事。手感更不是这样：谭桂香掌心里那一股颤，颤完就散，存不住。

第三层，图上的东西有清楚的边。云是一团一团的，旋涡是一圈一圈的，台风眼是一个点。看图的人可以指着说"这一团""那一圈"，可以量它离海岸多远。眼睛最擅长的，就是把一片东西分出边界来，分成一块一块，每一块都是一个稳定的样子。

用第三章的话说：视觉最先让人觉察 S，显露。从冒出来（Show）到成形（Shape），再到看出结构（Structure），视觉走这条路走得又快又稳。一张云图，就是一个已经走到 Structure 的显露：台风长成了什么样，一目了然。

这里要守住第四章的口径：视觉里不只有 S。朵朵说"它在动"，那就是视觉里的 D：一张接一张的图，前后不一样，排出了先后。云和大气、和海面、和地形在互相改写，图上的旋涡转快了、变散了，那是视觉里看得到的 E。视觉有完整的三维。

只是，视觉把 D 和 E 也变成了"看"的样子。台风的移动，变成了一串图的前后差别；台风和海洋的互相作用，变成了图上云的形状在变。D 和 E 被看见了，可是被看见的方式，是被收进一张一张稳定的 S 里面。

这一点很要紧，第三编会反复用到：现代科学碰到 D 和 E 的时候，最喜欢的办法，就是先把它们变成一串可以看的 S，再从 S 和 S 的差别里去推。

◆ 二、你看得见，别人也看得见

视觉的第二件本事，是可以共享。

再回到那一幕。电视上的云图，此刻全国几千万户人家都在看。北京的人看到的台风，和娄底的人看到的台风，是同一个台风，在同一个位置，长同一个样子。主持人指着台风眼说"这里"，屏幕前的每个人都知道他指的是哪里。

这件事稀松平常，可是请对照第五章。

罗明川站在瓜摊前，听谭桂香说"手上要有那股劲透过来"，他不知道那股劲是什么。直到谭桂香把他的左手拉过来、托在瓜底下、亲手拍了一下，他才第一

次感到。即便感到了，他也不能确定，他感到的"透"和谭桂香感到的"透"是不是同一个。

手感是很难共享的。你的手心在你身上，我的手心在我身上；我不能把手伸进你的手心里，去感一感你感到的东西。我们只能各自去摸同一个东西，然后用话来对：你觉得软吗？我也觉得软。可是"软"这个字装不下多少，两个人说的"软"，可能差得很远。

声音好一点。两个人可以同时听同一声"嘭"。可是第四章已经说过，朵朵咬苹果听到的声音和爸爸听到的不一样，因为她有一半是从骨头里听的。站在瓜摊左边和右边的人，听到的也不完全一样。声音在空气里走，到每个人耳朵里时，已经被各自的位置、各自的身体改过了一遍。而且声音一过就没了，两个人事后争论刚才那一声到底亮不亮，谁也拿不出那一声来对质。

看就不一样。我可以指给你看。"你看，就是那里。"你顺着我的手指看过去，看到了，我们就对上了。一张图可以同时摆在一百个人面前，一百个人看到的是同一张图；有分歧，就再看一遍，指着图上的某一处争。

这就是"客观"这个词在日常里最朴素的样子：一个东西，你看得见，别人也看得见，大家看到的一样，而且可以反复去看。

科学共同体就是靠这个运转的。一篇论文最重要的部分，往往是它的图：一张照片、一条曲线、一个表格。审稿的人看图，读者看图，后来的人想重复实验，也要对照着图。你说你发现了什么，就得拿出别人也看得见的东西来。说"我感觉到了"，在科学里不算数；说"请看图三"，才算数。

医院里也是这样。一张片子可以在会诊时投到墙上，几位医生围着指指点点；病人肚子上那一下压痛，只有按的那位医生手上知道，别的医生想知道，得自己再按一遍，病人也就再疼一遍。

这里也要讲公道。共享的视觉不是完美的。有人色弱，有人近视；同一张图，有经验的人和没经验的人看出来的东西不一样，老医生看一张片子，一眼看出问题，新手盯半天也看不出。视觉也有错觉，两条一样长的线，加上不同方向的箭头，看起来就一长一短。

可是这些问题都有办法补：色弱可以换颜色，近视可以戴眼镜，新手可以学，错觉可以拿尺子去量。补完之后，视觉的共享程度，远远高过手感和声音。这就够了。科学要的不是完美的共享，是足够好的、可以一步步校正的共享。眼睛恰好给得出。

罗明川自己的工作，也是靠这个运转的。他做断裂模拟，算完之后交出来的，是一张彩色的图：哪里应力大，哪里就涂成红色；哪里小，就涂成蓝色。他们那一行管这种图也叫"云图"，应力云图。开学术会议的时候，他把这张图投到幕布上，台下几十个同行一起看，有人举手说"你这个裂纹尖端的红区好像偏大了"。大家指着同一块红色争论。

应力本身没有颜色，谁也没看见过应力。它怎样被涂上颜色、变成一张能指着争的图，那是第八章的题目。这里只看一点：一门研究力的学问，最后也要把结果做成一张大家都能看的图，才能在同行之间流通。共享，只认眼睛这条路。

所以，"观察世界"这四个字，说的不只是"用眼睛看"，还是"用一种别人也能跟着看的方式去看"。科学的观察，是一种公开的看。

◆ 三、望远镜与显微镜：两次视觉扩容

视觉的第三件本事，是可以被撑大。

人的肉眼有它的极限：太远的看不清，太小的看不见。可是在 17 世纪，人类两次把眼睛撑大了。

第一次是望远镜。

1609 年到 1610 年，伽利略把他自己磨制的望远镜对准了天空。他看到了几样从来没人看到过的东西：月亮上有山有坑，不是一个光滑完美的球；木星旁边有四个小亮点，一夜一夜地换位置，原来是绕着木星转的卫星；银河不是一团雾，是数不清的星星挤在一起。他很快把这些写成了一本小书，书名是拉丁文 Sidereus Nuncius，中文常译作《星际信使》，1610 年春天出版。

这一次扩容，改变的不只是天文学。它改变了人们对"看"的信心。

在伽利略之前，天上的事是哲学家和神学家讲的：天是完美的，月亮是光滑的，所有天体都绕着地球转。伽利略说：别讲了，来看。你们自己从镜筒里看一看，月亮上是不是有山，木星旁边是不是有小星星在转。

伽利略后来又看到，金星像月亮一样，有圆有缺，那是 1610 年秋冬的事。这一回，单看一眼不够，要一夜一夜、一月一月地看下去，把一张一张的样子排成先后，才看得出金星的圆缺在变，而且变的方式只能用它绕着太阳转来解释。这就是第一节说的那个办法：把 D 收进一串可以看的 S 里，再从 S 和 S 的差别里去推。

"来看"这两个字，比任何论证都有力量。当然，当时也有人不肯看，或者看了说那是镜片造出来的假象。可是镜筒可以做很多支，看的人可以越来越多；一个人看到，十个人看到，一百个人看到，最后谁也否认不了。这正是上一节说的共享：望远镜让一样从来没人见过的东西，变成了人人都能去看的东西。

第二次是显微镜。

1670 年代，荷兰代尔夫特的一个布商，叫列文虎克，用自己磨的小透镜做成简单的显微镜，去看一滴雨水、一滴湖水、牙缝里刮下来的东西。他看到了一个满是"小动物"的世界：极小的东西在水里游来游去，数量多得惊人。从 1673 年起，他把看到的东西一封一封写信寄给伦敦的皇家学会，前后写了五十年，附上请人画下来的图。今天我们知道，他看到的里面有原生生物，也有细菌。

差不多同一时候，英国的胡克也在用显微镜看东西。他把一片软木切得很薄，放在镜下，看到一格一格的小空洞，像修道院里一间一间的小房间，就叫它们 cell，"小室"。他把这些写进了 1665 年出版的《显微图谱》。今天生物学里的"细胞"一词，就从这里来。

这两个故事里还有一个容易被忽略的环节：画。伽利略把他从镜筒里看到的月亮，一笔一笔画了下来；列文虎克请人把镜下的"小动物"画成图，随信寄出；胡克的书里满是精细的版画。镜筒只有一支，一次只能凑一只眼睛；画却可以印出来，寄到很远的地方，让没有镜筒的人也"看到"。镜片把眼睛撑大，画又把撑大了的眼睛复制给了更多的人。扩容和共享，在这里连成了一件事。

还有一点要说：透过镜筒看东西，是要学的。早期的镜片做得粗，视野里常有光斑、毛边、彩色的晕，哪些是天上的东西、哪些是镜片自己的毛病，要看多了才分得清；头一回凑上去的人，常常说不出自己看到了什么。眼睛被撑大以后，还得重新学会看。这说明视觉的稳定，也不是天生白给的，是一代代人看出来、校出来的。只不过，它校得出来，而且校好了就能传下去。

望远镜把太远的拉近，显微镜把太小的放大。两次扩容，一个朝外，一个朝里，把人类眼睛的地盘向两头推了出去。

这两次扩容有一个共同的地方，值得慢下来看：它们都是给眼睛加了一块玻璃，眼睛本身的工作方式一点没变。

从镜筒里看木星的卫星，仍然是一下子看到一片（同时性）；仍然是不碰它、它也不因为被看而动（因果被中立化）；仍然是隔着极远的距离，越远越要镜片好（距离）。从显微镜里看一滴水，也是这样：一滴水里的"小动物"同时出现在视野里，看的人不碰它们，隔着镜片和它们保持距离。

换句话说，望远镜和显微镜没有改变视觉的性质，它们只是把视觉的性质带到了原来去不了的地方。木星那么远，眼睛照样能把它看稳；细菌那么小，眼睛照样能让别人也看见。

这就是为什么，从 17 世纪起，"看到了"在科学里越来越有分量。眼睛可以到天上，可以到水滴里，以后还要到更远、更小的地方去。每到一个新地方，它带回来的东西都是稳定的、可以共享的、可以留下来反复看的。

那么手和耳朵呢?

同一时期，手和耳朵没有得到这样的扩容。没有一块玻璃能让手伸到木星上去摸一摸，也没有一块玻璃能让耳朵听见一个细菌游动的声音。后来，1816 年，法国医生雷奈克发明了听诊器，耳朵算是被撑大了一点，能听见胸腔里的声音；可它撑大的范围，始终停在人的身体那样的尺度上，没有进到天上，也没有进到水滴里。

这里先只记一笔：两次视觉扩容之后，手和耳朵被留在了原地。会不会有第三次扩容，让手也伸进原来去不了的地方？那是第十七章要问的问题。

◆ 四、稳定特征：科学的原料

现在把三件事合在一起。

看得稳：图不因被看而变，可以留下来，有清楚的边。

可以共享：你看得见，别人也看得见，可以指着同一处争论、校正。

可以撑大：加一块玻璃，眼睛就能去到原来去不了的地方，带回来的东西依然稳、依然可共享。

这三件事加起来，就是本章题目里说的"视觉 SDE 取得稳定特征"。

"特征"这个词，在本书里有一个比较具体的意思：一个能被稳定地取得、能被别人重复取得、能被记下来的样子。台风眼的位置、木星卫星的排列、一滴水里"小动物"的形状，都是特征。它们是视觉 SDE 走到 Structure 那一步时，留下来的那个稳定的显露。

科学的原料，就是这些特征。

我对这一点一直说得很直接：现代科学是视觉科学，是光的科学，是"看"，叫做观察世界，是用视觉 SDE 获得特征、图像——稳定的视觉特征。

这句话里有两层。

一层是肯定。视觉 SDE 取得的稳定特征，是人类历史上最可靠的一批知识原料。没有它，就没有天文学，没有生物学，没有我们今天的医学影像。本书不打算贬低这一点，也贬低不了。

另一层是提醒。眼睛取回来的是 S，是一个被看稳了的显露。它也带回一部分 D（图和图之间的先后）和一部分 E（图上形状的改变），可这些都是被收进 S 里、以看的方式带回来的。至于手在那里会感到的东西——推一推、顶一顶、按此牵彼——和耳朵在那里会听到的东西——一声接一声、此起彼伏——眼睛没有带回来。

还有一样东西，眼睛也没有带回来：看的那个人自己。

云图上没有朵朵。木星卫星的图上没有伽利略的手酸、眼累，也没有他凑在镜筒上屏住的那口气。列文虎克的"小动物"图上，没有他捏着镜片的手指。一张好的科学图像，恰恰要把看的人擦干净：谁来看都一样，才叫稳定，才叫可共享。

这正是视觉的长处，也正是约纳斯说的"距离"走到了头：看的人退到了图的外面。可是谭桂香拍瓜的时候，她的手就在判断里面，拿掉她的手，判断就没了。一门只认"把人擦干净"的特征的科学，碰到这种"人在里面"的知识，就不知道该把它放在哪里。这个难题，第六编讲脉诊时要正面碰。

那手和耳朵会感到、会听到的东西，去哪儿了？

科学接下来的一步，是在这些稳定特征之间画线、列式子：木星卫星一夜一夜换位置，就算它的轨道；天上的星和地上的苹果，就找一条共同的规律。眼睛先拿到 S，再从 S 的前后里推出 D，最后用一个式子去假设东西之间是怎样互相

牵动的——那就是 E。看，列方程，假设纠缠。这就是本书所说的现代科学的单序：S→D→E。

这个单序很有效。可是走这条路的时候，E 是最后才来的，而且是被假设出来的，不是被亲身取得的。这件事，第三编要细讲。

在那之前，第八章要先看一件事：眼睛扩容之后，人类还造了许许多多别的仪器。它们的共同本事，是把本来属于手和耳朵的东西，翻译成眼睛能看的东西。第九章再问：为什么眼睛取回来的，偏偏是一个一个的点。

带 走 的 话

观察的力量在三件事——看得稳、别人也看得见、加块玻璃就能看得更远更小；科学的原料由此而来，手和耳朵却被留在了原地。

小　账

SDE 账： S 在云图、木星卫星与水滴"小动物"被看稳的显露里，D 在一张接一张图的前后差别里，E 在图上形状的改变里——D 与 E 都被收进稳定的 S 才被带回；三维俱在，侧重在 S。

代签账： 本章为铺垫——指出视觉取得的是稳定 S，E 是在 S→D→E 单序的最后一步被假设的，为第三编拆"代签"立下起点。

◆

08

第 8 章

仪器的共同本事：把听和触翻译成可看的

这一章的问题

实验室里的仪器五花八门，测冷热，测松紧，测声音，测原子的表面。它们有没有一个共同的本事？有。它们几乎都把手和耳朵碰到的东西，翻译成眼睛能读的东西。

◆ 一、冷暖松紧变刻度

先看一间实验室。这是我构想的场景。

罗明川的课题组在做一组拉伸试验。试验机是一台两米来高的铁架子，上下两个夹头。研究生把一根塑料试样条夹好，按下按钮，下夹头开始慢慢往下走。屏幕上同步画出一条线：横轴是伸长了多少，纵轴是用了多大的力。线先是笔直地往上爬，到了某一处开始弯，弯过之后变平，再往后，"啪"的一声，试样断了，线垂直掉下去。

整个过程里，没有一个人用手去拉那根塑料条。

罗明川读本科的时候，老师在课堂上拿一根橡皮筋讲"弹性"。他记得很清楚，橡皮筋拉开一点，手上就有一股往回的劲；拉得越开，往回的劲越大；拉到快断的时候，那股劲变得发硬、发脆，手心里有点慌。那是他第一次"懂"了什么叫紧。

试验机把这份"紧"翻译成了一条线的斜率。斜率大，就是硬；斜率小，就是软；线开始弯的那个地方，叫屈服。这套读法准确、可重复，全世界的材料工程师都认。罗明川一辈子靠它吃饭，他一点都不想推翻它。

这些年，他的课题组还用上了一种更"眼睛"的办法。在试样表面喷上一层黑白相间的细小斑点，旁边架两台相机，拉伸的过程中每秒拍几十张照片。电脑比较前后两张照片里斑点挪了多少，就算出试样每一处被拉长了多少，末了在屏幕上铺出一张彩色的应变云图，红的地方拉得最狠，蓝的地方几乎没动。这种方法叫数字图像相关。它连贴在试样上的传感器都不要了，整件事从头到尾只靠拍照。

罗明川很喜欢这种云图。哪里要裂，一眼就看得出来。学生做报告，一张云图胜过十页表格。

可他心里清楚，那条线、那张云图，和手上那股劲，不是同一个东西。

手上那股劲有一个"回"：我拉它，它拉我；我的手指在变形，橡皮筋也在变形；我手上的力气一点点被它吸走，它的长度一点点被我改写。这是手与橡皮筋在互相改写，用本书的话说，这是特征纠缠（E）正在发生。屏幕上的线没有这个"回"。线不拉你。你盯着它看一个小时，手上也不会有一丝紧。

冷暖也是这样。

英国哲学家洛克在《人类理解论》第二卷里讲过一个很有名的小实验：准备三盆水，一盆热，一盆凉，一盆温。左手泡进热水，右手泡进凉水，泡一会儿，两只手同时放进温水。左手觉得这盆水凉，右手觉得这盆水热。同一盆水，两只手给出两个相反的报告。

这个实验通常被拿来证明：手不可靠，冷暖是主观的，要靠温度计。温度计插进去，不管你先泡过什么，它都说：二十五度。

可是换一个角度看，两只手都没有说错。左手报告的是"我比这盆水热，热量正从我身上往水里走"；右手报告的是"这盆水比我热，热量正往我身上来"。手报告的从来不是水"本身"是多少度，而是手和水之间正在发生的交换。冷暖是一种关系，是两边在互相改写的时候冒出来的。触觉在这里并不糊涂，它只是诚实地报告了纠缠。

说手"不可靠"，用的是谁的标准？用的是"一盆水应该只有一个读数"这个标准。这个标准从哪里来？从眼睛来：一盆水看上去就是一盆水，不管你先看过什么，它的样子不变。拿眼睛的规矩去考手，手当然不及格。用一种感官的尺子量另一种感官，这件事本书第六编还要细说（见第二十七章）。

温度计做的事，是把这份交换切掉一半。它不报告"我和水之间"，只报告一个数。它的办法也很巧：让一小管液体受热膨胀，膨胀多少，就在玻璃管上爬多高。爬到哪一格，你用眼睛去看。

十六世纪末出现了一种测温器，通常记在伽利略名下，是一只倒插在水里的玻璃泡，空气热胀冷缩，水柱就跟着升降。它没有统一的刻度，这一只和那一只读出来的高低对不上。到了十八世纪上半叶，华伦海特在 1724 年发表了他的温标，摄尔修斯在 1742 年提出把水的冰点和沸点之间分成一百格，刻度才有了全世界都认的标准。温度从此有了一个读法：看液柱的顶端停在哪条刻线上。

请注意这一步翻译的方向。冷暖原本是手上的事，是一阵一阵涌过来的；温度计把它变成了一段长度，长度又变成了刻度上的一个位置。一个位置，在一条刻线上，就是一个点。

菜市场里也有一样的翻译。老式的杆秤，一头挂秤盘，一头挂秤砣，秤杆上钉着一排小铜点，叫秤星。卖菜的人抓起一把青菜，先在手里掂一掂，心里已经有个数；再放进秤盘，拨秤砣，等秤杆平了，眼睛去看秤砣绳落在哪颗秤星上。

掂，是手腕和青菜之间的一来一回，菜往下坠，手往上托；秤星，是杆上的一个位置。买卖双方吵起来的时候，没有人拿"我掂着不够"去说服对方，大家都低头看秤星。手上的那份分量，末了要落到一颗看得见的星上，才算数。

把实验室里的表一只一只数过去，几乎都是这个路数。弹簧秤把重量变成指针的位置，压力表把气的推力变成指针的位置，电压表把电的推动变成指针的位置。换成数字屏也一样，屏上亮着一串数字，还是给眼睛看的。英国天文学家爱丁顿在 1928 年出版的《物理世界的本质》里说过，精确科学的全部内容，说到底是"指针的读数"和类似的标示。这句话常被当作对物理学的一种冷静概括。本书想加一句：指针读数，读的是指针在哪里，这是眼睛的活。

第 407 号《被刻进世界的公式》说，仪器把现实刻成可读的痕，科学就在理念与这些痕之间对账。本书完全同意，只往前问一步：这道痕是给谁读的？那本书里用过凌晨孩子发烧时的额温枪，一枪打出来的也是一个亮着的数字，这里不再展开。我们只记下答案：痕几乎全是刻给眼睛的。

为什么要翻译成可看的？第七章已经说过：看到的东西稳，你看得见别人也看得见，还能存下来、传出去（见第七章）。手上的紧传不出去，屏幕上的线能发给全世界。仪器的这份本事是真本事。本章不贬低它，只是要看清楚翻译时丢下了什么。

丢下的，是那个"回"。

◆ 二、声音变曲线

声音的翻译，有一段几乎没人知道的前史。

1857 年，一位叫斯科特·德·马丁维尔的法国印刷工，拿到了一项发明专利，叫"声波记振仪"。它的样子是一只大喇叭，喇叭底部蒙着一层薄膜，膜上粘一根

细毛。人对着喇叭说话、唱歌，膜跟着振，细毛就在一张熏黑的纸上划出弯弯曲曲的白线。

他造这台机器，目的很明确：让人"看见"声音。他是印刷工，他相信声音可以像文字一样被写下来、被读出来。至于把这些线再放回成声音，他没有想过，当时也做不到。

这些纸后来在档案馆里躺了一百多年。2008 年，一批美国研究者把它们扫描成图像，用电脑沿着线条把振动还原成声音，人们第一次听到了 1860 年有人在唱法国民歌《月光下》，只有十来秒。还有一个插曲：刚放出来的时候，大家听到的是一个细细的、像女孩子的嗓音；后来研究者发现回放的速度定快了，放慢之后，那个声音变成了一个男人在慢慢地唱，很可能就是斯科特本人。纸上的线一条没变，耳朵听到的人却换了一个。线自己说不出它该以多快的速度被"听"，这件事要由耳朵回头来定。

这件事很值得停下来想一想。人类第一台记录声音的机器，是为眼睛造的。耳朵要等一百五十年，才把它要了回来。

1877 年，爱迪生的留声机能把声音录下又放出来，这一回耳朵没有被落下。可是进了实验室，声音还是很快回到了屏幕上。示波器把电压的起伏画成一条跳动的亮线；声谱仪把一段声音画成一幅图，横轴是时间，纵轴是高低，颜色越亮表示越响。今天手机上随便一个调音软件，你对着它哼一声，屏幕上就跳出一条曲线和一个音名。

罗明川做断裂研究，也在"听"。材料内部开裂的时候，会发出极细的声音，人耳听不见，频率太高。他的课题组在试样上贴几个小小的传感器，叫声发射探头，裂纹每长一点，探头就收到一个信号。这些信号不放给人听，而是在电脑上

显示成一个一个的小尖峰，按时间排开，按强弱分色。他就看着屏幕上的尖峰越来越密，判断裂纹是不是要贯通了。

他跟学生开玩笑说："我们这行是用眼睛听裂纹。"

细想起来，他真正关心的是节奏。裂纹快要贯通之前，信号一个接一个，越来越急，像雨点从稀稀拉拉变成噼里啪啦。这个"越来越急"，本来是耳朵最擅长分辨的东西。可在他的屏幕上，它变成了尖峰排得越来越密。急，被翻成了密；时间上的催促，被翻成了空间上的拥挤。

老一辈有另一种办法。火车站的检车员拿一把小锤，沿着车轮一个一个敲过去，听声音清脆还是发闷，判断轮子有没有裂。那是真正的用耳朵听裂纹，手也在里面，锤子反弹到手上的感觉也算数。这种"听敲判裂"的本事，本书第五编还要回来（见第二十四章）。

地震也是一样。经历过地震的人，记得的是脚底下一阵发麻、楼板一阵摇、窗户哗哗响，有人还记得地底传来一阵闷闷的轰鸣。那是触和听一起压过来的。可是第二天报纸上登的，是地震台的一张记录图：一条细线原本平平地走，忽然剧烈地上下抖动，抖完又慢慢平下来。1935 年美国地震学家里克特定下的震级，就是从一种标准地震仪的记录图上，量抖动的最大幅度算出来的；后来震级又发展出别的算法，可起点是这张图。人们身上的摇和耳边的响，被一根笔尖写进了一条线。

还有一样东西，几乎每个家庭都见过：量血压。

老式的水银血压计，量的时候要两个感官一起上。医生把袖带绑在你的胳膊上，打气，袖带越勒越紧，把胳膊里的血管压瘪；然后慢慢放气，同时把听诊器贴在你的肘窝上，耳朵听，眼睛盯着水银柱。放气放到某一刻，听诊器里忽然传

来"咚、咚"的搏动声，这时水银柱停在哪一格，就是高压；再放，那声音变弱、消失，这时停在哪一格，就是低压。

这是一个很好的例子。血管被勒住又放开，是触的事；"咚咚"声出现又消失，是听的事；水银柱的格数，是看的事。三种感觉在这里接力。可是写到病历上的，只有两个数字，例如"130/85"。耳朵听到的那一声"咚"，在病历上不留痕迹。

后来有了电子血压计，连耳朵这一环也省了。机器靠袖带里的压力起伏来算，屏幕上直接跳出数字。家里老人自己就能量，这是进步。只是从水银柱到电子屏，翻译又往眼睛那边走了一步。

声音变成曲线，丢下了什么？

一段三秒钟的声音画在屏幕上，三秒钟同时摆在你眼前。你可以一眼看到开头，一眼看到结尾，看到中间哪里高、哪里低。可是耳朵从来没有同时拥有过这三秒。耳朵听到的永远是"现在这一下"，前一下刚刚过去，后一下还没来。声音是一个接一个来的，这个"依次"，是听觉最先让人觉察的差异序列（D）的方向（见第二章）。

曲线把"依次来"变成了"并排摆"。时间被放平，成了一条横轴，横轴就是一条空间里的线，线上每一个时刻都是一个点。听觉的先后，被翻译成了视觉的左右。

这一步翻译特别隐蔽，因为它太好用了。工程师在曲线上找峰值、量周期、算频率，样样都准。也正因为太好用，人们会以为声音"本来就是"那条曲线，耳朵听到的只是它的一个模糊版本。至于一段旋律为什么好听，一句话为什么听着刺耳，曲线上是找不到的，这件事留给第十三章（见第十三章，并接第 387 号《好听是谁的？》）。

公平起见，也要说说例外。医生的听诊器，是把耳朵放大，没有把声音变成图。盖革计数器遇到辐射会"咔咔"响，潜艇上的声呐兵靠耳朵分辨远处的螺旋桨，也有研究者把数据"翻译成声音"来听。电报的历史里还有一段插曲。早期的电报机，收报时用一根笔尖在纸带上打出长长短短的记号，报务员看纸带译电文。可是熟练的报务员很快发现，听电报机"嗒、嗒嗒"的响声，比看纸带还快，于是不少人干脆用耳朵收报，后来电报局索性改用只响不写的发声器。耳朵在这里赢过一回眼睛。这些都是真的。可是它们在科学仪器里是少数，而且一到写报告、发论文，那些咔咔声、那些螺旋桨声，照样要换成计数表和曲线图。所以本章说"几乎全是"，不说"全是"。

◆ 三、原子力显微镜真的在摸，输出的却是图

如果说温度计和示波器只是把手和耳朵的事"转述"给了眼睛，那么原子力显微镜更彻底：它真的在摸，摸完了，交出来的还是一张图。

这一节请许蔓来看。

许蔓在深圳一家机器人公司做触觉传感，天天和"摸"打交道。有一回，她到一所大学的表面物理实验室参观原子力显微镜（这也是构想的场景，仪器原理是真的）。

先说扫描隧道显微镜。1981 年，宾宁和罗雷尔做出了它，靠针尖和样品之间极其微弱的隧道电流，第一次让人"看到"了单个原子的排列。可它只能对付导电的样品。1985 至 1986 年，宾宁和同事又做出了原子力显微镜，绝缘的样品也能测了。

原子力显微镜的心脏，是一根极小的悬臂，像一块跳水板，长度通常是一两百微米，大约是两三根头发丝并排那么宽。悬臂的末端朝下长着一个针尖，针尖最尖处的曲率半径只有几个到几十个纳米。针尖慢慢靠近样品表面，靠得足够近

的时候，针尖上的原子和表面上的原子之间就有了力：远一点时互相吸，近一点时互相推。这个力会让悬臂弯一点点。

许蔓听到这里，心里一动：这不就是手指按在桌面上吗？指尖靠近，碰上，压下去，桌面把手指往回顶。针尖确实在摸。它摸到的是力，是针与表面之间的一推一拉，是双方都在被对方改写。这是货真价实的触觉事件。

可是接下来，悬臂弯了多少，怎么知道？

答案是用光。一束激光打在悬臂的背面，反射到一个光电探测器上。悬臂弯一点，反射回来的光点就挪一点。机器读的是光点的位置。

许蔓愣了一下。针尖在摸，可"摸到了多少"，是由一束光来读的。触觉事件发生在针尖上，读数却发生在光点上。

再往后，针尖在样品表面一行一行地扫，像老式电视机一行一行地扫屏幕。每扫一个位置，机器就记下一个高度。扫完几百行，几百乘几百个高度排成一张方格，给每个高度上一种颜色，高的偏黄，低的偏蓝，一张"表面形貌图"就出来了。还可以把它渲染成立体的样子，山峰山谷，像一张航拍照片。

许蔓问了一句：这些颜色是从哪里来的？

老师笑了，说颜色是加上去的，叫伪彩。针尖摸到的只有高低，高低本身没有颜色，是软件按高度给每一格配了一种色，好让人一眼分出起伏。换一套配色，同一个表面可以是金黄的，也可以是紫红的。论文里常见的那种漂亮的原子图，颜色几乎都是这样配出来的。

这一点很小，却很说明问题。从摸到的力，到屏幕上的图，中间不但有翻译，还有为眼睛的"装修"。

实验室的老师指着屏幕说："你看，这就是这片薄膜的表面。"

许蔓注意到这个"看"字。仪器摸了一个小时，人用三秒钟看完了结果。

原子力显微镜还有一种工作方式，叫轻敲模式：让悬臂上下振动，针尖一下一下地轻轻叩在表面上。叩，这是触觉和听觉纠缠在一起的动作，就像拍西瓜（见第五章）。叩得轻重、回弹快慢，本来都是信息。可是在仪器里，这些叩击的回应被换算成振幅和相位的变化，末了还是变成一张图上的颜色。

最接近"摸"的读法，是所谓的力—距离曲线：让针尖在一个点上慢慢压下去，再慢慢提起来，记下每一个距离上的力。压下去时什么时候突然被吸住，提起来时什么时候突然被放开，这条曲线里藏着表面软硬、黏不黏的信息。许蔓觉得这才像手上的感觉。可它交出来的形式，仍然是一条画在屏幕上的线。

许蔓回到公司，看着自己调了两年的机器人触觉手套，忽然觉得有点好笑。手套上有几百个压力传感点，机器人一抓杯子，每个点都在测压力。可工程师们调试的时候，看的是什么？是一张实时刷新的压力热力图，红的地方压得重，蓝的地方压得轻。她让机器人去摸，然后自己用眼睛去看机器人摸到了什么。

更有意思的是，机器人自己并不需要那张热力图。它抓杯子的时候，控制程序直接拿几百个压力数去调手指的力道，压重了就松一点，滑了就紧一点，一秒钟调几百次。那张五颜六色的图，是专门为人画的。机器在"摸"，人要"看"；中间那一层翻译，是因为人只信得过自己的眼睛。

她想起自己刚入行时的师傅说过一句话："数据不画出来，就等于没有。"当时觉得是至理名言，现在觉得这句话说出了一整个行业的习惯：没有变成图的，就不算知道。

她把这个想法讲给同事听。同事说："不看图看什么？总不能让你戴上手套去感觉机器人的感觉吧。"许蔓没有回答。这个问题，本书第四编会认真回答（见第十八章）。

还有一件事，是许蔓在实验室里顺口问出来的。她问：针尖摸久了，会不会磨钝？表面被针尖压过，会不会变形？

老师说会。针尖会磨损，会沾上东西；软的样品会被压出印子；空气里有一层薄薄的水，针尖靠近时会被水拉住。这些都会让图像出现"伪像"，要想办法减小，或者在处理数据时去掉。

请记住这个词：伪像。针尖和表面互相改写，留下的那些痕迹，在仪器的眼里是要被清除的噪声。清除之后，图像上显示的是一个"仿佛从来没有被摸过"的表面。

这正是本章要指出的那一步。原子力显微镜真的在摸，摸的过程里，手与物互相改写的那一份，也就是 E 最浓的那一份，被当成了干扰；留下来的，是一张可以静静地看、可以和别人一起看的图。

把这一章的三类仪器放在一起，可以看出翻译时丢东西的三种丢法。

第一种，把交换切成单边的读数。洛克的三盆水，手报告的是"我和水之间"，温度计只报告"水是多少"。手上的紧是"我拉它，它拉我"，试验机只报告"它受了多大的力"。原本是两头一起变的一件事，被切成了停在刻度上的一个位置。一个位置没有大小，它是一个点。

第二种，把依次来的变成并排摆的。声音一下一下地来，曲线把它们一次摆满屏幕；原子力显微镜一行一行地扫，扫完拼成一张图，人一眼看完。先后被翻成了左右，时间被翻成了一张可以同时看全的面。

第三种，把互相改写当成干扰。针尖磨钝、表面被压出印子，这些两边互相改写的痕迹，被叫作伪像，要被去掉。去掉之后，每一个格子只说自己那一格的高度，跟隔壁的格子互不相干。

这三种丢法，现在只是并排写在这里。到第十章，它们会各自对上一个名字：一个伞怎样收成一个点，伞与伞怎样互不重叠，信号怎样被当作一瞬间就到齐。那时读者会看到，这三种丢法并非仪器设计者的疏忽，它们来自眼睛本身的三种性质。仪器只是把眼睛的性质，忠实地带进了实验室。

还要说清楚一点。丢下这些，换来的是巨大的好处：读数可以存、可以比、可以传，可以让一万个人在一万个地方核对同一个结果。现代科学的可靠，有一半靠的就是这份翻译。本书后面所有的批评，都以承认这一半为前提。

那张原子力显微镜的形貌图，是由一个一个格子拼成的。每个格子一个高度，格子与格子之间互不干涉。为什么一张图可以这样一格一格地拼？为什么眼睛接受这种拼法，手却不太接受？这是下一章的问题。

> **带走的话**
>
> **仪器会摸、会听，可它交出来的报告，几乎都是写给眼睛看的。**

> **小　账**

- SDE 账：S 落在刻度、曲线、伪彩图这些给眼睛的显露上；D 落在被摊平成横轴的先后上；E 落在手与橡皮筋、针尖与表面互相改写，却被仪器当作伪像剔除的那一份上。
- 代签账：本章为铺垫——指出仪器"把触与听翻译成可看的"这一步，以及翻译时丢下的那个"回"；签字本身在第三编拆开。

◆

09

第 9 章

局部图像的可切割性：点性从哪里来

这一章的问题

数学里的数，是数轴上一个没有大小的点。这个"点"是从哪里来的？本章的回答是：从眼睛来。眼睛看到的局部图像可以一块一块切开，手摸到的不行。

◆ 一、光走直线，点对点成像

周末，罗朵朵的科学课作业是做一台"小孔成像盒"。这是我构想的场景。

罗明川陪她找来一只鞋盒，在一头用针扎一个小孔，另一头挖掉，蒙上一层描图纸。拉上窗帘，点一支蜡烛，把小孔对着烛火。描图纸上出现了一个小小的、倒立的火苗，还在一跳一跳的。

朵朵叫起来："它倒过来了！为什么？"

罗明川拿一支铅笔，在纸上给她画。火苗的顶上那一点发出的光，走直线，穿过小孔，落到纸的下面；火苗底下那一点发出的光，也走直线，穿过小孔，落到纸的上面。上下一交叉，像就倒了。

"那火苗中间那一点呢？"

"落在纸的中间。"

"每一点都只落到一个地方吗？"

"差不多。孔越小，越接近一点只落一个地方。"

朵朵这一问，问到了本章的根上。光走直线，一个小孔只放过一小束光，于是火苗上的一个点，对应纸上的一个点。这叫点对点成像。

两千多年前，《墨经》里就记过类似的现象，叫"景到"：光穿过小孔，影子是倒的。后来人们用透镜代替小孔，透镜能把一个物点发出的许多光线重新聚到一个像点上，像更亮、更清楚，但道理一样：物上一点，像上一点。

人的眼睛就是一台这样的盒子。前面有晶状体，相当于透镜；后面有视网膜，相当于描图纸。你看窗外一棵树，树上每一片叶子，都在你的视网膜上落成一个小小的像点；相邻的两片叶子，落在视网膜上相邻的两个位置。整棵树在视网膜上铺成一张小小的、倒立的地图。

眼睛是一台成像盒，这件事在欧洲是十七世纪初才讲清楚的。开普勒在1604 年出版的一部光学著作里指出，晶状体把外面的光聚到眼底，在视网膜上形成一个倒立的像。此前很多人以为，看东西是眼睛发出某种东西去"够"物体，或者物体发出一层薄薄的"影子"飞进眼里。开普勒之后不久，有人做过一个很直观的实验：取一只牛眼，把眼球后壁小心削薄，对着窗外，就能在那层薄膜上看到窗外景物倒立的小像。德国学者沙伊纳和法国的笛卡尔都描述过这个实验。

这个实验很值得回味。人们是用眼睛，去看另一只眼睛里的像。看的原理，被看懂了；而看懂它的方式，仍然是看。从那以后，"世界在眼底铺成一张图"成了常识，后来又成了照相机、显微镜、望远镜的共同底子。

当然，眼睛并不完美。光有衍射，眼球有像差，一个物点在视网膜上落下的其实是一个极小的光斑，不是数学上没有大小的点。可这个光斑小到什么程度？小到你能在一臂之外，分清报纸上两个挨得很近的标点。这一点后面还要说。

现在请把手放在桌面上。

手和桌面之间，没有透镜，没有小孔。桌面上没有哪一个点，被"聚焦"到你手指里的某一根神经上。指尖压在桌面上，接触的是一小片；压力从这一片传进皮肤、传进肉里，向四周散开。你的手感觉到的，是这一片一起发生的事。

耳朵也没有透镜。客厅里电视在响，厨房里水在烧，窗外有车开过，这些声音来自四面八方，末了都落在同一张鼓膜上。鼓膜只有一张，它跟着所有的声音一起振动。耳朵里面的耳蜗，能把高低不同的声音分到不同的位置上去，可它分的是高低，分不出"这一点来自左边那一个点"。听觉没有一张像视网膜那样的地图。

人当然也能听出声音从哪边来。闭上眼睛，有人在你左边叫你，你会往左转头。可耳朵是怎样做到的？靠两只耳朵比较：声音先到左耳、后到右耳，左耳听着响一点、右耳听着轻一点，大脑从这一点先后、一点轻重里，推算出方向。这是从"差一点点时间"里算出来的方向，粗略，而且要等声音持续一会儿。它给出的是一笔账，算不成一张图。

眼睛有一张图，图上每一点对应世界的一点。手有的是一片，耳朵有的是一团。这是三种感觉在"成像"这件事上最根本的差别。

这也可以帮读者回想第一编的那句话：视觉最容易让人觉察 S（见第三章）。一张铺开的图，每一处都同时显露着各自的样子，显露就格外醒目。手和耳朵当然也有显露，只是它们的显露总是和牵连、和先后裹在一起出来。

◆ 二、像素网与感受野

成像盒做完了，朵朵还不过瘾，拿着放大镜到处照。她照到爸爸的手机屏幕上，又叫起来。

放大镜底下，屏幕上那张照片不见了，只剩下密密麻麻的小格子，每一格里是红、绿、蓝三个小亮点，排得整整齐齐。离远一看，又是一张照片。

"原来照片是一格一格拼起来的！"

罗明川说："爸爸的工作也是这样。我要算一块钢板怎么受力，就先把它切成很多小格子，每个格子的角上放一个点，叫节点。电脑只算这些点。"他打开电脑给朵朵看，屏幕上是一块被切成无数小三角形的板，像一张渔网。

朵朵问："那格子中间呢？"

"中间的，用旁边的点去估。"

"如果格子切得特别特别小呢？"

"那就越来越接近真的。"

朵朵又想起一件事。她在平板电脑上用画图软件涂颜色，放大到最大，可以一格一格地点。她把一只小猫眼睛里的一个像素从黑改成红，旁边的像素一个都没变；她再改回来，小猫又是原来的样子。改这一格，不动那一格。

可是她在美术课上捏橡皮泥小猫的时候，想把眼睛那里压深一点，手指一按，旁边的脸颊也跟着鼓起来，鼻子也歪了。改这一处，那一处跟着变。

一张数码照片能被一格一格地修，一团橡皮泥不能。照片是给眼睛的，橡皮泥是给手的。朵朵后来说了一句很像样的话："照片的每一格都是自己的，橡皮泥的每一块都是大家的。"

这一问一答，几乎就是一部数学史的缩影。把东西切成格子，格子越切越小，小到没有大小，就成了点；全部的点排起来，就成了一条线、一张面。像素网、有限元网格、数轴，用的是同一个想法。

眼睛为什么能接受这个想法？要看视网膜本身是怎样的一张网。

视网膜上铺着两类感光细胞：一类叫视杆，管暗处，一只眼里大约有一亿两千万个；一类叫视锥，管颜色和细节，大约六百万个。视锥最密的地方，在视网

膜正中央一个很小的凹坑里，叫中央凹。你盯着一个字看的时候，那个字的像就落在中央凹上。

在中央凹，视锥挤得极紧，而且后面接的神经几乎是"一个视锥配一条线"。神经科学里有个词叫感受野，说白了就是一根神经细胞负责的那一小块地方。中央凹的感受野非常小。正因为小，人眼的分辨本事很高：正常视力的人，大约能分开视角相差一角分（一度的六十分之一）的两个点，换算到三十多厘米的读书距离，相当于分清相隔零点一毫米上下的两个小黑点。

再看手。手上最灵的地方是指尖。皮肤里有好几类感受压力和振动的小器官，有的感受野小，只有几毫米；有的感受野大，能覆盖整根手指，甚至半个手掌。

有一个大家都能做的小实验，叫两点辨别。罗明川拿两支削尖的铅笔，并在一起，让朵朵闭上眼睛。他用两支笔尖同时轻轻点在朵朵的指尖上，两个笔尖相隔三四毫米，朵朵说："两个。"他把两支笔尖拉开到三厘米，点在朵朵的后背上，朵朵说："一个。"

朵朵睁开眼，不相信。罗明川又做了一遍，她还是只感到一个。

指尖大约能分开相隔两三毫米的两个点；手掌要宽一些；后背要拉开到三四厘米以上，两个笔尖才分得出来。也就是说，人身上最灵的触觉，分辨本事也比眼睛的中央凹粗了一二十倍；身上的大部分皮肤，还要粗得多。

盲文的设计，正好从反面说明了这一点。一个盲文字符由几个凸点组成，同一个字符里相邻两个凸点的中心只隔两毫米半上下，恰好落在指尖能分开两个点的边上。再密，手指就分不出来了。眼睛读的印刷字，一个字里可以挤下十几道笔画；手指读的盲文，一个字符最多几个点。盲文设计得并不笨，手的格子就这么粗。

还要补一句公道话。盲人读盲文，手指是贴着纸面一路滑过去的。手指一动，指尖皮肤在凸点上一下一下地被顶起、放下，这一串先后的变化，让手读得又快又准。研究触觉的学者早就注意到，触觉的大本事在"主动地摸"：滑、按、捏、掂；手静静地贴着不动，反倒摸不出多少（参看 Kappers 与 Bergmann Tiest 2013 年的综述）。也就是说，手的长处本来就不在拍一张"静态的图"，而在一来一回的过程里。拿"一张图能分多细"去比手和眼，已经是在用眼睛的考卷了。

还有一件事也要说清楚。大脑里并非只有视觉有"地图"。管视觉的那片大脑皮层，确实按视网膜的位置排着，视网膜上相邻的两点，到了大脑里也相邻；可是管触觉的那片皮层，同样按身体的位置排着，手指挨着手掌，嘴唇占了好大一块，画出来是一个手大嘴大的怪小人。这幅"小人图"出自加拿大神经外科医生彭菲尔德在二十世纪三四十年代的研究。所以眼和手的差别，不在大脑里有没有一张图。差别在于，那张图上每一点收到的东西是什么。

视网膜上每一个感光细胞收到的，是从世界上某一个方向直直射来的一束光，它和隔壁细胞收到的那一束，在到达之前互不相干。皮肤里每一个感受器收到的，是皮肤和肉被压、被拉之后传到它那里的变形，这份变形在到达之前，已经和周围的变形搅在一起了。眼睛的图，是世界先切好、再送进来的；手的图，是世界搅在一起送进来、再勉强排开的。

这里要防一个误会。如果差别只在格子粗细，那么触觉只是"一张粗一点的像素网"，把格子做细就行了。机器人的触觉皮肤，确实在往这个方向走，传感点越做越密。

可是差别不只在粗细。

眼睛的格子，每一格看到的东西，跟隔壁那一格看到的东西，可以分得开。手的格子不行。下一节专讲这件事。

◆ 三、看此不改彼，按此却牵彼

这件事，我一直讲的那句话是：

"视觉数具有点性，是因为视觉本身具有'局部图像特征性'：你聚焦看一个很小局部，形成的图像和邻近的局部图像具有互相切割性，而触觉就没有。"

这句话有三个要点，我们一个一个拆。

第一个要点：聚焦看一个很小局部，会形成一个图像。

你盯着书页上的一个字，这个字就清清楚楚地显露出来，有笔画，有结构。它是一个完整的小图像。你把目光挪到旁边一个字，又是一个完整的小图像。局部看，局部就成像。一个局部有一个局部的样子，这就是"局部图像特征性"。

第二个要点：这个局部图像，和邻近的局部图像，可以互相切开。

拿一张纸，把书页上一个字盖住。旁边那个字变了吗？没有。笔画一笔不少，样子一点不变。再拿一把剪刀，把一张照片剪成九块，每一块上的内容还在原地，拼回去还是原来那张照片。左上角那块里的一只鸟，不会因为你剪掉了右下角那块里的一棵树，就少了一根羽毛。

这就是可切割性。眼睛看到的世界，是由一块一块可以分开的局部图像拼起来的；一块的样子，不依赖于另一块。

还有一层意思藏在里面：看，不改变被看的东西。你盯着那只鸟看了十分钟，鸟不会因为被看而变重一点。光确实会对物体施加一点点压力，可正午的太阳光照在一平方米上，压力加起来也只有百万分之几牛顿，日常完全可以不计。看此，不改此；看此，更不改彼。

这份"不改"，背后还有一个物理上的原因，朵朵在家里就能看到。

晚上关了灯，罗明川和朵朵各拿一支手电筒，让两道光束在半空中交叉。交叉的地方亮了一点，可两道光穿过彼此，各自照到对面的墙上，墙上的光斑和单独照的时候一模一样。光与光相遇，不撞，不拐，不溅。

第二天在小区里，朵朵和邻居家的孩子玩水枪，两股水柱在半空中撞上了，水花四溅，谁也没射到对面。

光束交叉而互不相扰，水柱交叉就撞在一起。日常尺度上，光几乎不跟光打架；物理学里光与光在真空中直接相撞的效应，要用极端的高能实验才测得到。这正是眼睛能把世界切成一块一块的物理底子：从这一点射来的光，和从隔壁那一点射来的光，一路上各走各的，到了视网膜上还是各落各的。眼睛收到的，是一束一束互不干涉的光。

手收到的，却是水柱那样的东西。压力会撞，会合，会推着旁边的东西一起走。

第三个要点：触觉没有这种可切割性。

朵朵有一只灌了水的气球，是上周美术课剩下的。罗明川让她把气球放在桌上，用一根手指按住左边。

"右边怎么鼓起来了？"

按的是左边，右边鼓了。按此，牵彼。

再换一个更贴身的例子。用一根手指按住自己的手背，按深一点。你感觉到的，不只是指尖底下那一小块。指尖周围的皮肤被拉着往下陷，手背上一圈都有了感觉。指尖底下的那根神经在报告，它旁边的一圈神经也在报告，因为它们所在的皮肤，被同一次按压连着拉动了。

这时如果你用第二根手指，紧挨着第一根再按下去，第二根手指感觉到的，跟单独按那里的时候，是不一样的。因为第一根手指已经把那片皮肤改写了：那里已经陷下去，已经绷紧。第二次按，是按在被第一次按过的地方上。

罗明川看着那只水气球，想到了自己的网格。他的网格里，节点也是互相牵连的：一个节点动了，旁边的节点会跟着受力。可是这份牵连是怎么来的？是先把钢板切成互不相干的点，再写一套方程，规定点与点之间怎样互相拉扯，用方程把切开的点重新缝起来。牵连不是网格自己有的，是方程补上去的。先切，再缝；切是眼睛的，缝是方程的。这一刀一针，第三编要专门拆开来看（见第十一章、第十二章）。

你没法拿一张纸，把"第一根手指的感觉"盖住，让第二根手指的感觉保持原样。你也没法拿剪刀，把一次按压剪成九块。手摸到的每一小块，都和旁边的一小块连在一起变。

这就是我那句话里的"而触觉就没有"。触觉有局部，可它的局部不能互相切开。按此必牵彼，牵彼又回头改此。用本书的话说，这里的 E 浓到切不开：对象与对象、手与对象，正在互相改写。

听觉也有类似的情形，只是表现不同。两个音同时响，在鼓膜上叠成一个振动。你不能"盖住"其中一个，让另一个保持原样地留下；你也不能把一个持续三秒的音，剪成三段各自独立的一秒，因为第二秒之所以是这个音高，靠的是第一秒已经在振。听觉的局部，在时间上连着；触觉的局部，在空间上连着；视觉的局部，空间上可以切开，时间上近乎一瞬（这一点留到下一章）。

读者也许会举出反例：眼睛看东西，不也会重叠吗？前面的人挡住后面的人，雾里的灯一团一团地晕开。

这两个反例很好，正好帮我们把那句话里的"聚焦"二字看清楚。

先说遮挡。前面的人挡住后面的人，眼睛看到的是前面那个人，后面那个人被挡住的部分，就是看不见。看见的归看见的，看不见的归看不见的，两者并不混在一起变成"半个前面的人加半个后面的人"。遮挡仍然是切开的：这一块属于前面那个，那一块属于后面那个。手却不是这样。两根手指同时按在一只水气球上，你感到的不是"这里归左指、那里归右指"，而是两股压力在气球里合成一股，哪一处都同时受着两边的力。

再说雾里的灯。罗明川近视，有一天晚上他摘了眼镜，带朵朵在阳台上看街景。远处的路灯、车灯，在他眼里全化成一团一团的光晕，互相晕染，分不出哪盏是哪盏。他对朵朵说："爸爸现在看到的世界，有点像手摸到的世界。"

这句话说得很准。眼睛一旦失去聚焦，局部图像就不再能互相切开，一盏灯的光晕溢进了另一盏灯的光晕。可见，可切割性要靠聚焦才有，"看"这件事并不无条件地给出它。而科学里的看，几乎全是聚焦地看：显微镜上那只调焦旋钮，望远镜上那只调焦旋钮，照相机上的对焦，都是为了把光晕收回成一个清楚的点。科学一直在拼命地让眼睛保持聚焦。

这就是为什么我那句话里，"聚焦看一个很小局部"是起点。聚焦，局部才成像；成像，局部才能切开；能切开，才有点。

"看此不改彼"还给科学送了一份大礼。既然看不改变被看的东西，那么今天看和明天看，你看和我看，看到的应当一样。观察可以重复，可以核对，可以由别人来验。科学里"客观"的那份底气，相当一部分就来自这里（下一章接上约纳斯，会把这一点说得更清楚）。

可是这份大礼有一个适用范围。到了极小的尺度，光不再只是轻轻擦过。要看清一个电子在哪里，就得用光去打它，而光一打，电子就被撞走了。这是海森堡 1927 年那个"显微镜思想实验"的大意。在那里，看此开始改此。眼睛的那份

清白，在微观世界里保不住了。这件事和"量子为什么怪"有多少关系，本书第四编会接着第 394 号《一次闪光是谁的？》来问（见第十九章）。这里只先记下：可切割性在日常尺度近乎完美，在微观尺度开始破损，而科学偏偏要用这份破损了的视觉，去看原子里面的事。

请注意，三种感觉都有局部，各自也都有完整的显露、差异和纠缠（见第四章）。差别在于：视觉的局部图像，天然地可以一块一块切开；触觉和听觉的局部，天然地彼此牵连。

现在可以回答本章开头的问题了。

欧几里得《几何原本》开篇第一条定义，通行的中译是"点是没有部分的"。这句话两千多年来被当作数学的起点。用本章的眼光重读，它说了两件事：点不能再往下切了，所以没有部分；点又是从别的东西里切出来的，所以是"一个"。一个不能再切、又已经和周围切开的东西，这正是聚焦的眼睛能给出的最小的那一块。

数学里那个没有大小、与邻居互不相干的点，是怎样来的？它是视觉局部图像可切割性被推到头的样子。你盯着一个局部看，局部成像；局部可以和邻居切开；切得越小，局部越小，小到没有大小，就是点。一条数轴，就是一排互相切开、各管各的点；一张网格，就是一片互相切开、各管各的格子。

罗明川画了二十多年网格。他的网格在大多数地方都工作得很好。可是在裂纹的尖端，经典的线弹性理论算出来的应力会冲向无穷大，力学里管这叫裂尖的应力奇异性。在那个地方，材料正在被撕开，一边的原子正在拉扯另一边的原子，"按此牵彼"到了极点；而点的想法，偏偏在那里算不下去。这件事和新数学是怎样从断裂问题里逼出来的有关，本书放到第二十五章去报账（见第二十五章）。

本章只记下一个结论：点性，是视觉的性格。眼睛把世界切成可以分开的小块，数学把小块切到没有大小，于是有了点。手不会自己想出点来。手想出来的单位，要是一片，而且这一片会牵动旁边的一片。

带走的话

点是眼睛切出来的；手按下去，按到的永远是牵连着的一片。

小　账

- SDE 账：S 落在聚焦处一块一块显露的局部图像上；D 落在这些局部可以并排分开、彼此划界上；E 落在手按此牵彼、局部互相改写而切不开上。
- 代签账：本章给出了伞参数 r 的来源——点对点成像与极小的感受野让 r→0，光束交叉互不相扰为　　ω（互不重叠）的来源做了铺垫；并指出网格"先切成点、再用方程缝回牵连"，这一缝，就是代签的落笔处。

◆

10

第 10 章

三重退化即视觉三性

这一章的问题

数学里的点有三个特点：没有大小，互不重叠，一下子全部给出。这三个特点是从哪里来的？本章的回答是：它们正好是视觉成像的三种物理性质。数学把眼睛的性格，当成了数的性格。

◆ 一、伞的三个退化条件

那天下午下大雨。罗明川去朵朵学校开家长会，散会时正赶上放学。这是我构想的场景。

他站在教学楼四楼的走廊上往下看。校门口挤满了来接孩子的家长，一人一把伞。从四楼看下去，红的、蓝的、黄的、黑的伞，一个挨一个，像一盘撒开的彩色圆点。他甚至可以一把一把数过去：门左边二十来把，门右边十几把。

他下了楼，挤进伞群里去找朵朵。到了地面，情形完全不一样了。

伞和伞是撞着的。他的伞沿碰着旁边一位妈妈的伞沿，两把伞互相顶着，谁也撑不直。前面一把大黑伞的边，罩在他的伞上面，雨水从黑伞上淌下来，正好浇在他的伞顶，再顺着他的伞流到他的肩膀上。有个孩子在人群里使劲甩了一下伞，水珠先溅到旁边的人身上，旁边的人一缩，又碰到了再旁边的人，一阵小小的骚动从伞群中间往外荡开，过了一两秒才传到他这里。

同一群伞，楼上看是一盘互不相干的点，楼下挤进去是一片互相顶、互相淋、一碰就荡开的伞场。

这一幕，几乎就是本书要讲的伞模型的一张素描。

第 344 号《意义数学的诞生》提出过一个想法：数学里的数，原本应当是一把伞；点，只是伞收拢之后的样子。

一把伞有三样东西。第一样是伞心，记作 x_0，说的是这把伞撑在哪里。第二样是伞半径，记作 r，说的是这把伞罩得多远，也就是它的作用范围。第三样是伞面分布，记作 φ，说的是这把伞在伞面上各处的分量怎样分布：是中心浓、边缘淡，还是从中心到边缘一样浓。夜里一盏路灯照在地上，正下方最亮，往外一圈一圈暗下去，那一摊光的明暗分布，就很像一个 φ。合起来，一把伞写成 $U=(x_0, r, \phi)$。

一群伞放在一起，就有了伞场。伞场里还要再看三件事。

一是半径 r，每把伞罩多大。

二是重叠度 ω。地上随便找一处，看它平均被几层伞罩着。ω=1，就是每一处恰好只有一层，伞与伞像地砖一样拼着，互不重叠；ω>1，就是有的地方被两层、三层伞罩着。

三是传播速度 v。一把伞那里起了变化，要多快才传到另一把伞那里。

第 344 号的判断是：传统数学，是伞在三个条件同时走到头时显露出来的稳定样子。这三个条件是：

$r\to 0$，伞收成没有大小的一点；ω=1，伞与伞互不重叠，各管各的；$v\to\infty$，一处的变化瞬间传遍，所有的伞同时给出。

这叫三重退化。

"退化"这个词，在数学里没有贬义。一个圆，半径越来越小，小到零，就退化成一个点。一个更丰富的东西，在某些参数走到极端时，样子变简单了，这就是退化。退化之后的东西照样好用，甚至更好用，因为简单。点比伞好算得多。

地图就是一个现成的例子。在全国地图上，长沙是一个小圆点，娄底也是一个小圆点。导航软件算两地之间多远、走哪条路，把城市当成点就够用了，而且算得又快又准。可你一旦开车进了长沙城，长沙就不再是一个点：它有几十公里宽，它的车流会堵到高速出口，它的雨会下到旁边的县里。点好用，是因为你离得远，只要一个大概的位置；凑近了，点就撑开成了伞。

那天在四楼，罗明川看到的正是一场三重退化。离得远，每把伞小得像一个点，r 近乎为零；从上往下看，下面的伞被上面的伞挡住，他只看见最上面的一层，一处只属于一把伞，ω 近乎为一；所有的伞同时摆在他眼前，一眼看全，v 近乎无穷。

到了楼下，三个条件一个都不成立。伞有大小，伞与伞互相罩着，一阵骚动要一两秒才荡过来。

楼上和楼下，是同一群伞。伞还是那些伞，变了的是罗明川和伞之间的关系：在楼上，他只用眼睛，而且隔得很远；在楼下，他用肩膀、用手、用耳朵，挤在伞中间。

伞模型的完整讲法，本书放在第五编（见第二十一章）。本章只用到这么多：一把伞有半径，一群伞有重叠和传播；传统数学的点，是这三样同时退到头的样子。还要补一句，"伞收拢就退回旧数学"并不是空想，已有研究证明：一类非局域的力学理论（近场动力学）在作用半径趋于零时，会收敛到经典的弹性力学。这一点到第二十五章再细说。

本章要追问的是：为什么偏偏是这三个条件？为什么数学不选别的极端，偏偏选了"收成点、不重叠、瞬间到"？

◆ 二、三性对三退化

要回答这个问题，先请出一位哲学家。

1954 年，德国出生的哲学家汉斯·约纳斯发表了一篇文章，题目叫《视觉的高贵》。他想弄明白，为什么西方哲学两千多年来那么偏爱眼睛。他的回答是：视觉提供的"图像"有三种别的感官没有的性质。

第一种是同时性。你拉开窗帘，整个房间、窗外的整条街，一下子同时出现在你眼前。左边的树和右边的楼，并不一个接一个地来，它们一起在那里。耳朵做不到：一句话要一个字一个字地听完。手也做不到：一张桌子要一处一处地摸过去。

第二种是因果的中立化。你看着桌上的杯子，杯子没有推你的眼睛，你的眼睛也没有推杯子。看的时候，你感觉不到对方在对你"用力"。看，把作用与被作用这层关系拿掉了。手不一样：你一摸杯子，杯子就顶着你的手，你也推着杯子。

第三种是距离。眼睛可以看很远的东西，远到天上的星星。而且看的人可以站在一边，不卷进去。你在岸上看河水流，不会被冲走。这种"站开"的距离，既是空间上的，也是心理上的。

约纳斯说，正是这三种性质，让人生出了"客观"的想法，生出了静观世界的理论态度，希腊人叫 theoria（见第六章）。他还另说了一句很重要的话：因果，原本是人在自己身体里经验到的。你推门，门有阻力，你用力，门开了，这个"用力—有阻—开了"，才是因果最早的样子。

这句话，朵朵也有体会。她家楼道的防火门很重，她得用整个身子去顶，门先是纹丝不动，她再使劲，门才慢慢开了。那一刻她知道，是她让门开的。这份"是我让它动的"，眼睛给不出来；眼睛只看到她靠过去、门开了，一前一后。英国哲学家休谟后来说，因果的联系本身是看不见的，人看见的只是前后相随。休谟和约纳斯，一个说眼睛看不见因果，一个说因果在身体里，第十一章会把两人放在一起（见第十一章）。

约纳斯的文章是哲学描述。他把视觉三性讲得非常透，却停在了那里。他没有把这三性接到数学的单位上，没有说科学后来怎样补上被中立化了的因果，也没有去建构触觉和听觉的科学。本书站在他之后，往前接三步。这一章先接第一步：把视觉三性，接到伞的三个退化条件上。

请看下面这张表。这是本书第二个承重概念的全部内容。

视觉成像的物理性质	约纳斯的图像三性	伞的退化条件	触觉	听觉
点对点成像，感受野极小	—	r→0	按到的永远是一片，r>0	一个音须持续，r随时间变
局部图像互相可切割，看此不改彼	距离；因果被中立化	ω=1（互不重叠）	按此牵彼，ω>1	声与声相叠，ω>1
光近乎瞬达，全场同时呈现	同时性	v→∞	压力传播慢，v有限	声速有限，必须依次到

一行一行看。

第一行。视觉是点对点成像，中央凹的感受野极小（见第九章）。世界上一点，落到视网膜上近乎一点。这就是 r→0 的来源：眼睛给出的最小单位，本身就几乎没有大小。约纳斯这一格是空的，他没有讲到这一层，这是本书补上的。手呢？手按下去，按到的永远是一片，r 大于零，而且收不到零：你不可能用手指摸到一个没有大小的点。耳朵呢？一个音必须持续一段时间才有音高，太短了

只是"咔"的一声，听不出是哪个音；这个"一段"随着音的起落在变，所以听觉的伞半径是随时间张合的（见第二十三章）。

第二行。视觉的局部图像可以互相切开，看此不改彼（见第九章）。这就是 ω=1 的来源：每一处只属于一个局部，局部与局部像地砖一样拼着，谁也不罩着谁。

这一行和约纳斯的哪一性对上？本书的看法是：对上两性，距离，和因果的中立化。

这里先把身份说清楚。约纳斯讲的是视觉图像的三种性质，他没有讲过伞，没有讲过重叠度，更没有说过"ω=1 就等于因果被中立化再加上距离"。把他的两性接到 ω=1 上，是本书自己的推演，责任由本书来负。下面两段是这个推演的理由，读者可以逐句去挑。

为什么"不重叠"就等于"因果被中立化"？想一想重叠意味着什么。两把伞在一处重叠，就是两样东西同时作用在这一处，这一处同时被两边改写。这正是因果发生的地方：甲在改写乙，乙也在改写甲。ω>1，就是因果在场。反过来，ω=1，每一处只归一个，谁也不碰谁，画面里就没有了"谁作用于谁"。因果没有被否认，只是从画面里退了出去，这就是中立化。

为什么"不重叠"又等于"距离"？因为不重叠不只发生在被看的东西之间，也发生在看的人和被看的东西之间。你看那条河，你的伞和河的伞不重叠，你站在岸上，河水罩不到你。看的人与世界之间，ω 也等于一。这就是约纳斯说的"站开"。

再看手。手按此牵彼（见第九章），一按下去，手指的伞和被按的东西的伞就叠在了一起，ω>1；手与物之间没有距离，手已经卷进去了。耳朵也一样，几

个声音同时响，在鼓膜上叠成一个振动，ω>1；而且你没法"站开"一个声音，它一响，就灌进你的耳朵里。

第三行。光跑得极快，每秒约三十万公里。房间里的光从墙上到你眼里，所需的时间短到日常完全感觉不到。于是整个视野同时呈现，一眼看全。这就是约纳斯的同时性，也就是 $v\to\infty$ 的来源：一切同时给出，好像信号一下子就传到了。

声音慢得多，在空气里每秒大约三百四十米。打雷的时候，闪电先看见，雷声后听见，隔几秒，就知道雷离得多远。朵朵小时候被雷吓哭过，罗明川就是这样教她数秒的。光的"一下子"，和声的"过一会儿"，在同一道闪电里分了家。耳朵里的世界，是依次到的。

在大操场上开运动会，站在远处看发令员，你先看到枪口冒烟，过一小会儿才听到"砰"的一声。站在体育场末排看演唱会，也会觉得台上歌手的嘴型和传到耳边的歌声，隐约对不太上。眼睛那边早已到齐的，耳朵这边还在路上。

手也是这样。压力在皮肤和肉里传开要时间；更要紧的是，手要摸清一样东西，必须一处一处地按、一下一下地掂，信息是一点一点攒起来的。v 是有限的。

三行看完，读者也许会问：这三性为什么总是一起出现？

因为它们来自光本身的三个脾气。光走直线，所以能点对点成像，给出 $r\to 0$。光与光相遇互不相扰（见第九章那两支手电筒），所以从这一点来的光和从那一点来的光各走各的，局部图像才能切开，给出 $\omega=1$。光跑得极快，所以整个视野同时到齐，给出 $v\to\infty$。直、不扰、快，这三个脾气属于同一样东西，于是三重退化总是捆在一起来。

声音和压力的脾气正好相反。声音会绕过墙角，你躲在门后也听得见有人叫你，它不走直线；两个声音会叠在一起变成一个振动，它们互相干扰；声音和压力都慢，要依次到。弯、扰、慢。拿这三个脾气去造数，造不出点来。

三行看完，可以说出本章的命题了。

伞收成点的三个条件，$r\to 0$、$\omega=1$、$v\to\infty$，并不是数学家随手挑的。它们是视觉成像三种物理性质的投影：点对点成像给出 $r\to 0$，局部可切割给出 $\omega=1$，光近乎瞬达给出 $v\to\infty$。

这是本书的第二个承重概念：三重退化，就是视觉三性。

读者要注意这个命题的身份。它是本书提出的一个主张，还没有被证明，算不上定理；表里第二行把约纳斯的两性对到 $\omega=1$ 上，更是本书的推演。它有一个可以检验的推论：如果三重退化真是视觉三性的投影，那么后来那些放宽 r、ω、v 中某一项的数学和物理理论，多数应由触觉或听觉问题逼出，例如断裂、撕裂、声音、热的传导；若主要由视觉问题逼出，承重二就错了。这一条预测，本书第二十五章报账（见第二十五章）。

还要防一个误会。说视觉三性让 $\omega=1$、让因果被中立化，并不否认视觉里有纠缠。看，同样有完整的显露、差异和纠缠：眼睛要聚焦，瞳孔要随明暗张缩，看久了会花，看的人和光一起在发生（见第三章、第四章）。只是视觉三性让 E 在画面里最不容易被觉察。触觉恰好相反，E 最先被觉察。三种感觉的差别是侧重的差别，不是有无的差别。

这张表还埋着一个后面要用的线索。如果三重退化是视觉的性格，那么一样东西偏离三重退化越多，r 越撑得开、ω 越叠得厚、v 越慢得下来，它就越是只有手和耳朵才把握得住的东西。中华传统里说的"气"，恰恰是这样一种看不清、却按得到、听得出的东西。本书在第五编会提出一个待验的想法：气的强弱，可

以读成伞的 r、ω、v 偏离三重退化的程度（见第二十一章）。这里只先把线头留下。

◆ 三、可切割，才能数

回到那天下午。

朵朵终于在人群里找到了爸爸。罗明川没急着回家，牵着她又爬上了四楼，站到走廊栏杆边，问："你数数，下面有多少把伞？"

朵朵趴在栏杆上，一把一把数，数到三十七。

罗明川又带她下楼，挤进伞群里，说："现在再数。"

朵朵数了几把就乱了。这把伞底下站着一个大人一个小孩，算一把还是算两个人？那边两把伞叠在一起，下面的那把被挡住一半，算不算？刚数过的一把，主人一转身又挪到另一边去了。她嘟着嘴说："在下面数不清。"

在楼上数得清，在楼下数不清。

数数这件事，有一个从来没人说出口的前提：要数的东西，必须一个一个地分开。一只羊是一只，两只羊是两只，因为羊和羊之间有一道缝，这只是这只，那只是那只。可是你试试数一团雾，数一锅粥，数一阵风。它们没有缝，你就不知道从哪里下刀，也就不知道什么叫"一个"。

窗玻璃上的雨滴也可以试。两滴雨珠顺着玻璃往下滑，滑着滑着碰在一起，合成了一滴。一加一，等于一。

这没有算错，是一加一等于二的前提不成立了。一加一等于二，要求那两个"一"互不重叠，合在一起时谁也不吃掉谁。这正是 ω=1。

朵朵的数学课上，老师让同学们用纸剪两个一样大的圆。两个圆分开放，总面积是一个圆的两倍。可是朵朵把两个圆叠了一半放，再问总共盖住了多大地

方，就不是两倍了，要减掉重叠的那一块。一旦重叠，"加"就不再是简单的加。ω>1 的世界，算术要换一种算法（见第二十二章）。

那么在楼下，该怎样数？朵朵数不清，并不说明楼下没有数。楼下的每把伞都还在，只是每一把都带着自己的大小，带着和邻居叠了多少，带着刚刚从哪边荡过来一阵骚动。要数楼下的伞，"一个"就不能只是一个记号，它得同时说出：这一个罩多大，和别的共用了多少，牵动传得多快。这样的"一个"，就是一把伞。第五编要做的，正是学会这种数法。

可切割，才能数。这句话是本章的落脚点。数，是从切开开始的。

罗明川的老本行里有一个工具，把这件事做得最彻底，叫 Voronoi 剖分（导论里提过）。在一块板上撒一把点，然后给每个点划一块地盘：离哪个点最近，就归哪个点。划完之后，整块板被分成一块一块的多边形，每一块恰好属于一个点，块与块之间只有边界，没有重叠。这正是 ω=1 的标准画像：一处只归一个，一个只管一处。罗明川以前觉得这种剖分很美，像蜻蜓的翅膀。现在他想，这种美，是眼睛喜欢的美。

这里有一段数学史，几乎像一个双关，却又不止是双关。数轴上的点那么多，有理数之间还有无理数，怎样才能把"连续的一条线"说清楚？1872 年，德国数学家戴德金给出了一个办法：在有理数排成的队伍里，从某处一刀切开，分成左右两半，每一种切法，就定义一个实数。这个办法写在他那本薄薄的《连续性与无理数》里，后来就叫戴德金分割。

连续，是用切来定义的。一条线上的每一个点，都是一刀。

微积分也是这样。一个函数，在每一点上有一个值；一个点上的变化率，只看这一点紧挨着的地方，挨得无限近，近到只剩这一点自己。物理学里的大多数

方程，都是这种"只看紧邻"的方程：这一点怎么变，只由它无限近的邻居决定，远一点的地方够不着它。这叫局域性。局域性，就是 r→0 在方程里的样子。

方程还有一种常见的写法：在某一时刻，给出所有点的状态，再看它们怎样一起往下走。所有点的状态在同一时刻全部给出，这就是一张快照，一眼看全，v→∞。

牛顿的引力也有这个味道：太阳一动，地球那头立刻受力，中间不用花时间，这叫超距作用。牛顿本人对此并不放心（见第十一章），后来的物理学用有限速度的场把它修正了。可这件事已经说明，三重退化里的 v→∞，曾经实实在在地写在物理学的根基上。

所以，从数数，到实数，到微积分，到方程，一路上用的单位都是：没有大小的点，互不重叠的点，同时给出的点。这三个"没有、互不、同时"，就是视觉的三性。

这也解释了，为什么数学和眼睛配合得那么好，和计算机配合得那么好。屏幕是像素，像素是互相切开的；计算机里的数据是一位一位的，一位就是一个切开的小格。今天的 AI 能那么快地学会视觉数学，原因之一也在这里：切开的东西，最容易编码（见第三十章）。

可是切开，就要切掉一些东西。

切掉了什么？第九章已经指了出来：按此牵彼的那一片，声与声相叠的那一团，依次到来的那一串。用伞的话说，切掉了 r>0、ω>1、v 有限的那三样。用感觉的话说，切掉的是触觉最先觉察的碰撞与牵连，是听觉最先觉察的节奏与先后。

奇怪的是，科学并不能不要这些。

物体会撞，会推，会拉；声音会传，会叠，会共振；热会流，气会走。这些全是 ω>1、v 有限的事。科学要讲力，要讲波，要讲热，就必须把被切掉的东西讲回来。

它拿什么讲回来？它的眼睛只能给出切开的点。它的手和耳朵，没有被带进实验室来亲身取得碰撞和节奏（见第八章）。于是它做了一件极聪明的事：在切开的点和点之间，写一个方程，规定它们怎样互相推、怎样依次变。第九章里罗明川的网格就是这样，先切成节点，再用方程把节点缝起来。

这一缝，缝回来的不是碰撞本身，也不是节奏本身，是眼睛替缺席的手和耳朵签下的一份假设。

本书管这叫代签。

方程签得很好，常常准得惊人。问题只在于，签久了，人就忘了这是代签，以为签名的就是手和耳朵本人，以为方程写下的就是"客观物理"。

从下一章起，本书进入第三编，把这份签名一笔一笔拆开来看：力是怎样被签进 F=ma 的，原子里的碰撞是怎样被签进势函数的，声音是怎样被签成一条曲线的。

那天傍晚，雨小了。罗明川收起伞，跟朵朵往家走。朵朵问他："爸爸，为什么在楼上数得清，在下面数不清？"

罗明川想了想，说："因为在楼上，你只用了眼睛。"

这句话说完，他自己愣了一下。他画了二十多年网格，撒点、剖分、列方程，几乎每一天都站在"楼上"。他的钢板、他的裂纹、他的试样，在他的电脑里全是一盘互不相干的彩色圆点。他算得很准，拿过奖，带出了学生。可是那天挤在伞群里，伞沿顶着伞沿、雨水从别人的伞上淌到他肩上的那几分钟，他第一次

觉得，自己算了一辈子的东西，原来一直是从楼上看下去的样子。楼下那一片，他天天走进去，却从没有把它算进来过。

带 走 的 话

可切割，才能数；数学的点，是眼睛的三种性格叠在一起的样子。

小　账

- SDE 账：S 落在楼上一眼看全、一把一把显露的伞点上；D 落在伞与伞切开、可以一个一个数出先后的分界上；E 落在楼下伞与伞互相顶、互相淋、一碰就荡开的伞场里，也落在被视觉三性推出画面的因果上。
- 代签账：本章给出了伞的三个退化条件 $r\to 0$、$\omega=1$、$v\to\infty$　各自的视觉来源（承重二），并点出代签的发生处：在切开的点之间，用方程替缺席的手和耳朵签下碰撞与节奏。

◆



第　三　编

代签：方程替手和耳朵签了字

导　语

本编命题：科学里的碰撞与节奏，从来没有被亲身取得，是方程替缺席的手和耳朵签下的字；代签好用，算得准，于是被当成了客观物理。第二编说眼睛怎样取得特征，本编说眼睛取不到的那一半，科学是怎样补上的——补的人是方程，签的是谁的名字。

11

第 11 章

力从来没被看见

这一章的问题

物理学课本里到处是"力"，可是有谁亲眼看见过一个力？如果谁也没看见过，课本上的那个 F，是从哪里来的？

◆ 一、苹果落下，看到的是轨迹

这是我构想的场景。

秋天的一个傍晚，罗明川带女儿罗朵朵去小区后面的果园摘苹果。朵朵九岁，三年级，刚在课外书上读到牛顿和苹果的故事。她踮着脚，够不着最高那一枝，就使劲摇树干。一只苹果"咚"地掉下来，在草地上滚了半圈，停在她脚边。

"爸爸，苹果为什么往下掉，不往上飞？"

"因为地球吸它。"罗明川随口答。

"地球怎么吸？用什么吸？我怎么没看见？"

罗明川愣了一下。他教了二十年材料力学，每学期第一堂课都在黑板上画一个方块，方块上画一根箭头，旁边写一个 F。他从来没被问过：那根箭头，你看见过吗？

我们把这一幕放慢来看。苹果离开枝头的那一刻，眼睛看到的是：苹果在这里，然后在稍低一点的地方，然后更低，越掉越快，最后落在草上。眼睛取得

的，是一连串位置，是一条从枝头到草地的线。物理学给这条线起了名字，叫轨迹。

眼睛还能看到更多。用高速相机拍下来，一帧一帧排开，能量出每一帧之间苹果走了多远，算出它越来越快的程度。伽利略在比萨斜塔上有没有扔过球，史家多有怀疑，这个故事出自他的学生维维亚尼在他去世后写的传记；但他在斜面上让小球滚下来、量时间、量距离，这件事是确实做过的。他看到的，也是位置和时间，是一串可以写在纸上的数。

可是"吸"在哪里？朵朵问得一点不错。在苹果和地球之间，眼睛什么也没看见。没有绳子，没有手，空气里没有一根线把苹果往下拽。眼睛看到的是结果：位置在变，变得越来越快。至于是什么让它变，眼睛交了白卷。

眼睛并没有偷懒，这是它的本性。第九章说过，视觉是点对点成像，看此处不改彼处，光几乎瞬间把全场摆在你面前。光擅长告诉你"东西在哪里"，不擅长告诉你"东西之间怎样互相推"。推，是要贴上去的；看，是要离开的。眼睛只有离开对象，才看得清对象。所以，凡是要贴上去才能取得的东西，眼睛都只能看到它留下的痕迹。

苹果落地这件事里，眼睛取得了一个非常漂亮的 S：一条清清楚楚的轨迹，从枝头一路显露到草地。D 也有：每一帧和下一帧不一样，排成先后。只是那个让苹果和地球互相改写的 E，眼睛够不着。它只看到 E 写在轨迹上的字，没看到写字的那只手。

有意思的是，牛顿自己对这件事心里有数。他算出了引力的大小怎样随距离变化，算得月亮和苹果服从同一条规律，可是引力"怎样"隔着空空的空间去拉一个东西，他说不出来。1713 年《原理》出第二版，他在书末加了一段"总释"，里面有一句后来很出名的话，大意是：引力这些性质的原因，我还没能从现象里推

出来，我不杜撰假说。拉丁原文只有三个词，hypotheses non fingo。早在1693年，他在给神学家本特利的一封信里还说过，一个物体不经任何中介，隔着真空作用到另一个物体上，在他看来是荒谬的，懂哲学的人不会信。

这就是说，引力这个"吸"，牛顿只交出了它的账目——多大、朝哪、随距离怎么变——没交出它的样子。他是一个极老实的人，他知道自己签的是什么字。

我们再往深一点看。苹果离开枝头之前，挂在那里，枝条被它压弯了一点。朵朵要是伸手托住那只苹果，会觉得手心往下一沉。那一沉，是她身体里冒出来的。苹果"重"，她先是手上知道的，然后才在书上读到"重力"。九岁的孩子背书包，书包一上肩，肩带往下勒，她不用看就知道今天带的书多。重，先是一种贴身的感觉，后来才变成天平上的一个读数。

可在物理课本里，这个次序反过来了。课本先画一条轨迹，先写一个加速度，最后告诉你：这里有一个力，等于质量乘加速度。手心那一沉，原本是第一手的；到了课本里，成了最后推出来的。

朵朵后来自己总结了一句："我只看见苹果在跑，没看见谁在推它。"

这句话放在三百多年前，牛顿大概会点头。放在今天的课堂上，多半会被当成一句孩子话，因为今天的学生从初中起就背熟了"力是物体对物体的作用"，背熟以后，就不再觉得力是一件需要被"看见"的东西了。它就在那里，像桌子椅子一样在那里。

这句话，是这一章的起点。

◆ 二、F=ma，碰撞被换成一个符号

1687年，牛顿出版《自然哲学的数学原理》。书里那条后来被叫作"第二定律"的话，大意是：运动的改变，和施加的推动力成正比，沿着力的方向发生。

今天课本上写成 F=ma，这个简洁的写法是后人整理出来的。牛顿本人用的是几何图形和比例，把它写成一组可以直接拿来列方程的式子，主要是十八世纪中叶瑞士数学家欧拉的功劳，他在 1750 年前后的一篇论文里把它当作力学的一般原理写了下来。

我们来看这条式子到底做了什么。

式子右边是 m 和 a。m 是质量，a 是加速度。加速度能看：它就是轨迹弯得多快、快得多快，用尺子和钟就能量。质量也能间接量：拿天平称，天平的读数是一根指针停在刻度上，也是看。右边这两样，都落在眼睛的地盘里。

式子左边是 F。F 量不出来吗？能量，用弹簧秤。可弹簧秤读出来的，是弹簧伸长了几厘米，是指针指到哪一格。你读的仍然是一个位置。弹簧被拉长，是因为有东西在拉它——这个"拉"，弹簧秤没有交给你，它只交给你拉的结果。

于是一个奇怪的局面出现了。F 是这条式子的主角，可它没有自己的读数。我们知道 F，是因为我们看到了 a，再用式子倒推回去。说得重一点：F 是从 a 里算出来的，不是从手上取得的。

奇怪的是，F=ma 这件事，人的手其实早就知道。

周末去超市，朵朵最爱推购物车。车空着，她一推就跑，跑得飞快；车装满了米和油，她得弯下腰、脚往后蹬，车才慢慢挪起来。她没学过牛顿第二定律，可她的手和腰知道：东西越沉，同样使劲，它就越难快起来。这就是 F=ma 在身体里的样子。在这里，"使劲"是第一手的，从掌心、手腕、腰、脚底一齐冒出来；"沉"也是第一手的，是车把往回顶她的那股劲；"快起来"反倒是她最后才看到的。

汉语里和"力"有关的词，几乎都长在身体上：力气、用力、吃力、费力、使劲、劲道。说的都是人自己在推、在扛、在顶。日常语言把力放在身体里，课本把力放在箭头上。从身体到箭头，中间隔着的，就是一次代签。

罗明川在有限元程序里对这件事最熟悉。他算一块钢板受拉，先把钢板划成网格，网格上每个节点是一个点，然后在边界节点上"施加载荷"——在输入文件里写一个数，比如 5000 牛顿。程序就开始算：每个节点挪多少，哪里应力集中，裂纹会从哪里长出来。算得很准，实验做出来，裂纹果然从那里长。

工科学生第一年就要学画"受力图"：把一个物体单独拎出来，画成一个方块，四周画上一根根箭头，重力朝下，支持力朝上，摩擦力贴着接触面。画得对，题就做得对。这张图教会人的，是把一切贴身的推挤都翻成箭头，再把箭头交给方程去加减。

可他自己清楚，那 5000 牛顿，是一个写进文件的数。程序里没有一只真的手在拉钢板。真正的拉，是试验机的夹头咬住钢板两端，液压缸一点一点地往外推，钢板里的晶粒一层一层地滑移、错开、撕裂。那里面有挤，有磨，有咬合，有一处松了牵动一大片。这一大堆贴身的、互相改写的东西，到了方程里，变成了一个字母：F。

物理学家里，也有人认真地想把"力"从力学里拿掉。奥地利的马赫在 1883 年的《力学史评》里主张，两个物体互相作用时各自的加速度之比，就可以拿来定义质量之比，力再由质量乘加速度来定义，用不着先假定有一种看不见的"推"。德国的赫兹 1894 年英年早逝，同年出版的遗著《力学原理》里，干脆尝试写一套不把"力"当基本概念的力学。他们的努力说明了一件事：最懂力学的人也知道，F 在那条式子里是一个可以被别的东西替换掉的位置。能被替换，说明它不是直接取得的读数。

另一条路走得更远，也更有视觉味。十九世纪的法拉第在磁铁周围的纸上撒一层铁屑，轻轻敲一敲纸，铁屑排成一道道弧线，从一极绕到另一极。他管这些线叫"力线"。后来物理学把看不见的推和拉，改写成布满空间的"场"，课本里的电场、磁场、引力场，都画成一根根带箭头的线，线密的地方力大，线疏的地方力小。

这一步很聪明：力看不见，那就把它画出来。可画出来的是什么？是铁屑的位置，是线的疏密。力被翻译成了图案，交给眼睛去读。朵朵要是把手放在两块同极相对的磁铁中间，会感到一股软软的、往外顶的劲，越靠近顶得越凶，像按在一个看不见的皮球上。那股顶劲，图上没有，图上只有几根弯弯的线。

我把这件事叫作**代签**。

签字，本来该由当事人签。碰撞这件事的当事人是谁？是两样东西贴在一起、互相推挤的那一刻，是只有贴上去才取得到的触觉特征。可是这一刻，科学的眼睛不在场——它只能站远了看。于是方程站出来，替缺席的手签了字：这里有一个力，大小是多少，方向朝哪边。签完，账就能往下算了。

打一个日常的比方。你出差在外，快递到了，你托邻居替你签收。签收单上有一个名字，时间、地点一清二楚，快递公司的账也就结清了。这张签收单是有效的，以后查起来，它能证明包裹确实送到了。可是邻居签字的时候，没有拆箱。箱子里是一双鞋还是一盒茶叶，鞋合不合脚，茶叶是不是受了潮，签收单上一个字也没有。你回到家，拆开箱子，摸到那双鞋，穿上走两步，才算真正"收到"。

方程签下的 F，就是那张签收单。

代签这个词要说清楚三层。

第一层，代签不是造假。方程签的字是有根据的：它看了轨迹，看了指针，从看得见的结果里推出那个看不见的原因。推得非常成功，几百年来，从炮弹到卫星，从桥梁到芯片，它都算得准。说它是代签，丝毫不减它的本事。

第二层，代签不是原件。签字的人不是当事人。F 这个字母，记下的是"如果有一个原因能产生这样的轨迹，它应该多大"；它没有记下那个原因本身是什么样子。手推门的时候，掌心先压扁，肘弯先吃劲，门轴先涩后松，这些都在原件里；F 只留下一个大小和一个方向。

第三层，错不在代签，在把代签当原件。账本用久了，人会忘了某一栏是别人代填的。看惯了 F，就以为世界里真的存在一根一根带箭头的力，像钢筋一样插在物体之间。这一步一迈，代签就悄悄变成了"客观物理"。第十五章会专门讲这一步是怎样迈出去的，这里先立下名字。

苹果落地是隔空的，有人会说，那是引力特殊。贴在一起的碰撞总该看得见了吧？

我们看台球。两只台球相撞，物理课本怎么处理？它用两条账：动量守恒，再加一个"恢复系数"。恢复系数是一个零到一之间的数，球撞完弹得越开，这个数越接近一；撞完粘在一起，这个数就是零。台球之间相撞，这个数大约在零点九以上，一团湿泥巴大约是零。

想一想这个数里面装了什么。两只球贴上的那一瞬，接触点先被压扁一小片，压扁的那一片往四周推开，球里面一阵细细的震动传过去又传回来，一部分变成热，一部分变成"啪"的那一声，剩下的才把球弹开。这一整段贴身的、在千分之几秒里互相改写的过程，课本把它压成一个数。这个数是从撞前撞后两段轨迹的快慢比出来的——又是看两段轨迹，再倒推中间那一下。

撞的那一下，眼睛没有在场。高速摄影能拍到球被压扁的一点点形变，可那拍下来的仍然是形状，是一帧帧的 S；那一小片里怎样挤、怎样推回来，图像只能给出它的外形，给不出它的"挤"。

用 SDE 的话来说，现代科学走的是一条单序：先看（取得 S），再列方程（排出 D），最后假设纠缠（补上 E）。力，就是被"最后假设"的那个 E。它排在最后，不是因为它最不重要，是因为眼睛最够不着它。

◆ 三、休谟看不见因果，约纳斯说因果在身体里

替缺席的手签字，这件事哲学家早就察觉到了一半。

十八世纪的休谟举过一个出名的例子：一个台球撞向另一个台球，第二个台球滚开了。你看到了什么？你看到第一个球在动，然后两个球挨在一起，然后第二个球在动。你看到了前后相随。可是"第一个球使第二个球动起来"里的那个"使"，你看到了吗？休谟说没有。因果联系本身是看不见的，你只见到一件事跟着另一件事，见多了，心里养成一个习惯，就说这是因果。

休谟这一刀很锋利，几百年来让很多哲学家睡不着觉。可是回头看，他在这个例子里只用了一种感官。他让你"看"台球。他从头到尾站在台球桌旁边，手插在口袋里。

假如休谟自己拿起球杆呢？

这是我们每个人都有的经验。手握球杆，往前一送，杆头碰上母球的那一下，手腕微微一震，虎口吃到一股回劲。那个"使"，你的手感受到了。你推一扇沉的木门，肩膀顶上去，脚底蹬住，门先不动，再一点点让开——"我在使它动"这件事，不是你看出来的，是你身体里一阵一阵冒出来的。

二十世纪的哲学家约纳斯在《视觉的高贵》一文里，把这一层说破了。他说视觉最高贵的地方，是它能让对象"同时"摆在面前，能隔着距离看，能看而不碰；正因为看而不碰，感觉作用里的因果被"中立化"了——看的人不推，被看的东西也不推回来，于是视觉给出一个干干净净、与我无关的世界，客观性就从这里长出来。约纳斯另外又主张，因果是在身体里发生的基本经验：我们之所以有"原因"这个观念，是因为我们自己用过力，推过东西，被东西推过。

把休谟和约纳斯放在一起，事情就清楚了。休谟说"看不见因果"，说的一点不错——视觉本来就把因果中立化了。他错在从"看不见"跳到"没有"，或者跳到"只是习惯"。因果没有躲起来，它待在另一个感官里。它在手上，在肩上，在脚底，在一切要贴上去才能取得的地方。

约纳斯走到这里就停了。他把视觉的三性描述得非常精彩，也指出了因果的老家在身体里，可他没有接着问下一句：既然视觉把因果中立化了，而现代科学又是靠视觉取得特征的，那么科学里的因果，是从哪里补回来的？

本书的回答是：从方程里补回来的。

视觉交给科学一个没有"推"的世界，只有一帧一帧的位置。科学要预言，要造桥、发射卫星，光有位置不够，它得知道下一帧会在哪里。于是它在位置与位置之间，插进一条式子：这一帧到下一帧之间，有一个原因，原因的大小是这样，方向是那样。这条式子就是力学定律，那个原因就是 F。休谟说因果看不见，科学并没有去反驳他，科学绕开了他——你看不见，我就替你写一个。

所以 F 是一个补丁，补在视觉中立化掉因果的那个洞上。补得极好，补完以后，世界又能往下推了。可补丁终究是补丁。它的形状，是照着洞的形状裁的：洞是"看不见推"，补丁就是"一个看不见的、只有大小和方向的推"。手上那一

沉、肩上那一顶、门轴那一涩，这些原件里的花样，补丁上一样也没有，因为洞里本来就没有它们——它们从来不在眼睛的地盘里。

这一步，是本书站在约纳斯之后多走的一步。他说视觉中立化了因果；本书说，被中立化的因果，由方程代签补回。

我们可以把这件事画成一条小小的账。

在推门这件事里，触觉 SDE 是完整的：E 最先让人觉察——掌心与门板贴在一起，你压它，它也压你，两者在互相改写；D 跟着显露——先涩，后松，再顺，一阵一阵不一样，排成先后；S 最后冒出来——"门开了"这个形状，从吃劲到松劲里成形。三维都在，只是 E 最先让人觉察。

到了物理课本里，这件事被重新排了一遍。先有 S：门的位置从这里到那里，画成一条弧。再有 D：位置随时间变化，写成速度、加速度。最后才轮到 E：这里一定有个力，记作 F。触觉里最先显露的那一维，到了视觉科学里排在了最末，而且是假设出来的，从没被亲身取得过。

说到这里，罗明川想起一件事。他年轻时在实验室做过钢材的拉伸试验，试样拉断前的那几秒钟，隔着防护罩，他能听到钢里"咯咯"的细响，脚下的地面有一点点发颤。那几秒里，他觉得自己"知道"钢要断了，比屏幕上的曲线先知道。可是这份知道，写不进论文。论文里只有一条应力—应变曲线，曲线的最高点标着"抗拉强度"，后面一个断崖。

"那几秒钟我知道的东西，"他说，"到论文里就剩一个数了。"

他还记得带他做实验的老师傅，在车间里干了一辈子，听压力机的声音就知道模具快不行了，摸一下刚出来的工件就知道淬火过了头。老师傅说不出公式，也写不了论文，可他的手和耳朵签的是原件。实验室的报告签的是代签。两份签字都有用，只是签字的人不一样。

这句话不是在抱怨论文。论文就该这么写，那条曲线是有用的，同行拿去就能复现，工程师拿去就能设计。它要说的只是：那个数，是代签。原件是那几秒钟里的细响、震颤、和身体里一点一点升起的"要断了"。

朵朵那天晚上又问了一句："爸爸，那你算的那个力，是真的吗？"

罗明川想了很久，回答说："它算得准。至于它是不是真的那样在那里，我不知道了。"

我觉得这是一个材料力学副教授能给九岁女儿的、最老实的回答。他没有说力是假的，也没有说力是真的，他说的是自己知道到哪一步为止。科学里最可贵的，往往就是这一句"我知道到这里"。知道到这里，才知道下一步往哪里走。代签算得准，这是真的；代签就是原件，这是我们一直以为、却没有验过的。本书往后的章节要做的事，是把这两句话分开，然后去问：原件能不能也被取得？

> 带走的话
>
> **眼睛只看见苹果在跑，没看见谁在推它；方程替缺席的手签了一个 F，签得很准，但签字的不是当事人。**

小账：

- SDE 账：S 落在苹果的轨迹与门的开合上，D 落在位置随时间的先后变化上，E 落在推与被推的贴身互相改写上——眼睛取得了前两样，第三样是方程补上的。
- 代签账：拆开了第一处代签——"力"，F 是从看得见的加速度倒推出来的符号，替缺席的触觉签字；立下"代签不是错，错在把代签当原件"。

◆

12

第 12 章

原子里的碰撞是模型假设的

> **这一章的问题**
>
> 化学课本上的分子，红球白球、灰色小棍，看上去像亲眼见过一样。原子是怎么"看见"的，原子之间那根棍子又是怎么来的？

◆ 一、球棍模型：小球是看的，小棍是猜的

这是我构想的场景。

朵朵的学校开了一门科学兴趣课，老师发给每人一盒分子模型：红色的球、白色的球、黑色的球，还有一把灰色的小塑料棍。那天的作业是搭一个水分子。朵朵拿一个红球，插上两根棍，每根棍另一头插一个白球，两个白球不在一条直线上，歪着，像一个张开的"人"字。老师说，这个角大约是一百零四度半。

晚上她把水分子举到罗明川面前，转来转去地看。

"爸爸，水里面真的有这么多小棍子吗？"

"没有棍子。棍子是表示它们连在一起。"

"那用什么连？胶水吗？"

"用……化学键。"

"化学键长什么样？"

罗明川又被问住了。

我们来认真地看一看这个小模型。它由两样东西组成：球，和棍。这两样东西的来历很不一样。

球，代表原子在哪里。原子在哪里，这件事是可以"看"的。本章后面会讲 X 射线衍射，第八章已经讲过扫描隧道显微镜和原子力显微镜：1981 年以后，人们能在屏幕上看到一排排原子像鸡蛋托里的鸡蛋那样排着。屏幕上那一颗颗亮点，就是模型里那一颗颗小球的出处。它们的位置、它们之间的距离、它们排成的角度，都有读数可依。说球是"看的"，指的就是这个。

棍，代表原子之间互相拉着、互相顶着、不让对方跑远也不让对方挤进来。这件事，屏幕上没有。屏幕上只有亮点，亮点之间是暗的。那根棍子画的是"它们之间有一种牵连"，这种牵连本身没有被看见，它是从"它们总待在这个距离上"推出来的：既然两颗亮点总保持这么远，中间一定有什么东西在拉、在顶。

这又是第十一章苹果的老故事。眼睛看到了位置，没看到推拉，推拉是补上去的。只不过在苹果那里，补上去的是一个 F；在分子这里，补上去的是一根小棍。

小棍还有一个毛病：它是硬的。塑料棍不会伸长，不会缩短，不会弯。真实的分子里，原子一刻不停地在抖，两颗原子之间的距离一会儿长一点、一会儿短一点，那个一百零四度半的角也一会儿张开一点、一会儿合拢一点。化学家当然知道这一点。他们说的"键长""键角"，指的是抖来抖去的平均值。可是模型盒里只有硬棍，没有会抖的棍。平均值被做成了塑料，原子之间那种一刻不停、贴身的互相推挤，在模型里消失了。

球棍模型的出身，本来就是给眼睛准备的。1865 年，德国化学家霍夫曼在伦敦皇家研究院讲演，拿涂了颜色的槌球当原子，用细金属棍把它们连起来，让听众一眼看出哪个原子连着哪个原子。差不多同一时期，凯库勒想出苯分子是六个碳原子连成的一个环。二十五年后，在为他举办的纪念会上，他讲了一个故

事，说自己是在炉火边打盹，梦见一条蛇咬住了自己的尾巴。这个故事是他晚年的回忆，史家对它的真假一直有争论。不管这个故事真假，它说明了一件事：化学家想象分子的时候，用的是眼睛里的形状。环是看出来的形状，蛇也是看出来的形状。

还有一种模型叫比例模型，每个原子做成一个大球，球和球挤在一起，互相嵌进去一块，看上去像一串粘在一起的汤圆。它不用棍了，可它用的是"球的边界"：两个球嵌进去多少，表示两颗原子能挨多近。这个边界也是一个约定。原子没有一层皮，没有一道墙，所谓"原子的大小"，是挤到某个程度就挤不动了的那个距离——"挤不动"，正是一种触觉。

朵朵试过把两颗塑料球用力往一块按，按不进去，"啪"地滑开了。塑料球的硬，是塑料的硬，一下子就到了头。原子之间的挤不动，按目前的模型说，是一点一点越挤越难，像按一只越按越硬的气球，前面还软，后面陡然变硬。这"越来越硬"到底是怎样一个硬法，前面软多少、后面陡多少，没有哪一只手亲自按过。模型给它画了一条曲线，下一节就讲这条曲线。

这件事，我常说的那句话是："分子里面的原子结构，里面的触觉特征，即互相碰撞的特征，是模型假设的；可是我们把那个模型当做客观物理。"

这句话里有三层，本章就按这三层往下走。原子之间的碰撞特征是触觉特征——这一节已经看到，棍子和球的边界说的都是"拉"和"挤"，都是要贴上去才取得到的。这些特征是模型假设的——下一节看假设怎样做出来。我们把模型当做客观物理——第三节看这一步怎样不知不觉地迈出去。

◆ 二、库仑力、Lennard-Jones 势、分子动力学力场

原子之间的推拉，科学是怎样写出来的？我们一层一层往里走。

最外面一层是库仑力。1785 年前后，法国人库仑做了一架扭秤：一根细丝吊着一根横杆，横杆一头有一个带电的小球，旁边再放一个带电的小球。两个球一推一拉，横杆就转过一个角度，细丝就扭一下。库仑读的是什么？是横杆转过的角度，是刻度盘上指针的位置。从角度倒推出推拉的大小，再看大小怎样随距离变，得出"距离加倍，力变成四分之一"。

库仑力是原子里推拉的总根子：原子核带正电，电子带负电，同号相推，异号相吸。可原子一多，算起来极其麻烦。化学家和物理学家要模拟成千上万颗原子，必须找一条省事的路。

第二层就是这样来的。1924 年，英国物理学家约翰·伦纳德-琼斯（那时他还叫琼斯，第二年才在姓前加上妻子的姓）发表了两篇论文，想从气体的实验数据里倒推出两颗不带电的原子之间怎样作用。他的写法是一项排斥加一项吸引，各自随距离的某一次方变化；次方是几，他拿气体黏度、气体压强的实验数据去凑，没有从原理里推，凑出来的排斥次方并不是今天课本里的那个数。

今天课本里的写法叫 Lennard-Jones 势，大意是：两颗原子离得远，几乎不相干；靠近一点，有一点轻轻的吸引；再靠近，突然出现极强的排斥，像撞上一堵墙。吸引那一项随距离的六次方衰减，排斥那一项随距离的十二次方猛涨。这个"十二—六"的样子，是到 1931 年他写综述《内聚》的时候才定下来的。

这里有一个很能说明问题的细节。吸引项为什么是六次方，有一个说得通的理由：1930 年前后，伦敦用量子力学算出，两颗中性原子之间的那种弱吸引（后来叫色散力），在远处正好随距离的六次方衰减。排斥项为什么是十二次方？这一项没有从理论里推出来。通行的说法是：十二正好是六的两倍，排斥项就是吸引项的平方，手算的年代平方一下就得到，省了很多工夫；后来的研究者评价这个选择，说它是"方便加上运气"，因为放开去拟合，排斥次方确实常落在十二附近，可量子力学的计算又提示，真实的排斥并不严格按哪一个次方变化。

停下来想一想。排斥项描述的，恰恰是两颗原子"撞上"的那一下，是原子之间最硬的那一次碰撞，是最典型的触觉特征——挤到这里就挤不动了。而这一项今天通行的样子，相当程度上是因为算得方便才留下来的。原子之间最贴身的那堵墙，它的软硬，是按计算的需要挑出来的。

这不是在挖苦伦纳德-琼斯。他做的事情非常聪明，这条曲线一百年来帮了无数研究者，用它算出来的气体性质、液体性质，许多都和实验对得上。这正是代签的典型样子：签字的理由带着几分"方便"，可签下来的账，大体对得上。

第三层是分子动力学的力场。要在计算机里模拟一个蛋白质怎样折叠，一块金属怎样开裂，人们把原子之间的推拉拆成几种零件：两颗相连的原子之间，当作一根弹簧，拉长了往回拽，压短了往外顶；三颗原子之间的角，也当作一根弹簧，张大了往回合，合小了往外张；再加上转来转去的扭转项，加上 Lennard-Jones 那样的远近作用，加上库仑那样的电荷作用。把这些零件拼起来，就得到一套"力场"。

每一根弹簧有多硬？每一个原子带多少电？那堵墙在哪里、多高？这些数叫参数。参数从哪里来？主要靠拟合：先拿一些已知的东西——液体的密度、蒸发要吸多少热、量子化学算出来的一批小分子的能量——然后去调参数，调到模拟出来的结果和这些已知的东西尽量对上为止。

这里面的"弹簧"二字，值得多看一眼。把化学键当成弹簧，最简单的写法是：拉长多少，往回拽的劲就成比例地大多少。这条规律是英国的胡克在宏观的弹簧、钢丝上总结出来的，1678 年正式发表，那是人的手拉得动、眼睛看得见伸长的尺度。力场把这条从手边总结出来的规律，原样搬进了原子之间。

换句话说，力场里唯一一点"手感"，是从宏观世界借过去的。原子尺度上的那一拉、那一顶，没有人亲手拉过，人们只是假定它和我们手里的弹簧差不多，再在拉得太长的地方打上补丁。借来的手感，签在原子的名下。

拟合，说白了就是倒推。和库仑读扭秤角度、牛顿读轨迹，是同一个路子：先有一个看得见的结果，再去调那个看不见的原因，调到原因能产生这个结果为止。

有人会问：既然力场是凑出来的，为什么不干脆从最根上算？从量子力学出发，直接算电子怎样分布，原子之间的推拉不就出来了吗？

确实有人这样算，而且越算越准。可是真正算起来，多电子的问题复杂得没法硬算，必须做近似。目前最常用的一类办法，要先挑一个描述电子之间相互影响的"泛函"，而这样的泛函已经数以百计，各有长短，研究者常常要看哪一种在类似的体系上和实验对得好，再决定用哪一种。从根上算，到头来也要在一张表里挑一份签字。这一层再往下，是原子本身用什么模型来想象的问题，那一段历史留给第十五章。

于是出现了一个耐人寻味的现象：同一个分子，在不同的力场里，参数并不一样。几套通用力场各有各的参数表，各有各擅长的场合，有的长于蛋白质，有的长于金属，有的长于小分子药物。研究者选哪一套，常常要看自己算的是什么东西，看哪一套在类似的问题上对得比较好。如果原子之间的推拉是一件已经被看清了的客观事实，它就只应该有一套答案。几套参数并存、各管一片，正说明它们是几份代签，各自签得都还算准。

罗明川自己就碰到过这件事。他前几年和研究生一起，用分子动力学模拟一条裂纹在金属里怎样往前走。裂尖那里，原子一排一排地被扯开。他们先用一种势函数，裂纹走得很脆，"嘶"地一下就裂过去了；换一种势函数，裂尖前面先冒出一圈乱糟糟的位错，材料表现得韧了许多。两种结果，差得不小。这段情节是构想的，不对应哪一篇论文；可在分子动力学里，同一种金属的裂纹算出来是脆是韧，会随所选的势函数而变，这是研究者常常讨论的事。

模拟算完，交出来的是什么？是一段动画。罗明川和学生坐在屏幕前，看几十万颗小球一颗颗挪动，看裂纹像拉链一样往前开。计算机里的推推挤挤，最后又被画成了一部给眼睛看的电影。这一圈走下来，起点是看（实验测得原子的位置），中间是签（挑一份势函数），终点又是看（把算出来的位置放成动画）。手，从头到尾不在场。

"到底是这块金属脆，还是我挑的那个势函数脆？"他问学生。

学生答不上来。他自己也答不上来。要回答这一问，得有人亲手去按一按裂尖那几排原子，可那里没有人去过。那天晚上他在笔记本上写了一行字：裂纹从哪里长出来，一半取决于金属，一半取决于我签了哪份字。

◆ 三、衍射给结构，碰撞靠方程补

有人会说：球棍模型是给孩子玩的，力场是计算机里的近似，真正的原子结构，是用 X 射线一点一点测出来的，那总是客观的了吧？

我们来看 X 射线测的是什么。

1912 年，德国的劳厄发现，X 射线穿过晶体，会在后面的底片上留下一组规则的斑点。第二年，英国的布拉格父子给出了从斑点倒推晶体里原子排列的办法。从那以后，晶体学家能从一张张斑点照片里，算出原子一层一层怎样排，盐里的钠和氯怎样一格一格地交错，后来连蛋白质那么大的分子，也能算出几千颗原子各自的位置。劳厄因此获得 1914 年诺贝尔物理学奖，布拉格父子获得 1915 年的同一个奖。

衍射给出的，是电子密度的分布图：哪里电子多，哪里电子少。电子密集的一团，就是一颗原子的所在。于是我们得到了原子的位置，得到了原子之间的距离，得到了角度。这是一份非常漂亮的 S，是一层一层显露出来的结构。

可是这份图里有没有"推"和"拉"？没有。它告诉你钠和氯隔着多远，没告诉你它们之间挤得有多紧；它告诉你两颗原子挨着，没告诉你把它们再推近一点要花多大劲。它连原子的抖动都只能记成一件视觉的事：抖得厉害的原子，在密度图上糊成一团，晶体学家用一个"温度因子"记下糊的程度。抖，本来是原子之间你推我、我推你的结果；到了图上，变成了"模糊"。一件触觉的事，被记成了一件视觉的事。

打个比方。小学毕业，全班拍一张合影。照片上谁挨着谁，谁站前排谁站后排，一清二楚。可是照片上看不出谁和谁手挽着手挽得有多紧，看不出谁站在谁旁边其实很别扭、肩膀一直往外让。十年以后有人翻出这张照片，说"他俩挨着站，那时候一定是最好的朋友"。这句话可能对，也可能错。挨着站是看出来的；关系好，是从挨着站猜出来的。衍射图就是原子的合影。原子之间挽得多紧、顶得多凶，要从"挨着站"去猜。

更有意思的是另一头。蛋白质那样的大分子，衍射数据往往不够细，单靠斑点算不准每一颗原子的位置。晶体学家在修正结构的时候，会加进一套"几何约束"：两颗原子之间的键长大约应该是多少，键角大约应该是多少，不许偏得太远。这套约束从哪里来？来自以前测得很准的小分子，来自化学家公认的经验——本质上就是一张"这里应该有一根多长的小棍"的表。

于是你看到一个小小的回环：力场的参数，部分是拿实验结构去拟合的；而实验结构的修正，部分又借助了关于小棍长短的经验约束。看的和猜的，互相扶着站起来。这算不上作弊；数据不够的时候，科学家也只有这样做才合理。只是我们读到"某某蛋白质的结构已被测定"的时候，很少有人会想到，那份结构里已经掺了几分"小棍应该多长"的代签。

还有一个例子，能看出"形状"和"推挤"之间的距离。一百多年前，德国化学家费歇尔打过一个比方，说酶和它要处理的分子，像一把锁和一把钥匙，那是

1894 年。形状对上了，就开；对不上，就不开。这是一个非常视觉的想法：比一比两个轮廓，看它们能不能严丝合缝。

到了二十世纪五十年代，美国的科什兰提出了另一种说法，叫"诱导契合"，那是 1958 年：钥匙插进去的时候，锁自己也在变形，两者一边贴近，一边互相改写，最后才咬在一起。锁不是一个等在那里的固定轮廓，它是在被碰的过程中才成为那把锁的。

后一种说法，恰好是触觉最先让人觉察的那件事：手按上去，被按的东西也在改变手。第一章摸小猫的时候，我们管这个叫 E。从"锁和钥匙"到"诱导契合"，生物化学自己走了一步，把一个看出来的形状匹配，改成了一个互相推挤的过程。可是这一步，是靠测反应快慢等间接数据推出来的，不是哪一只手摸出来的。它再一次说明：原子尺度上的推挤，到今天仍旧是从看得见的结果里猜出来的，只是越猜越细。

现在回到我那句话的后半句："可是我们把那个模型当做客观物理。"

这一步是怎样迈出去的？它不是哪一位科学家在某一天宣布的。它是在课本里一点一点沉淀下来的。课本说"水分子的键角是一百零四度半"，这是看的，没问题。课本接着说"氢和氧之间有共价键"，"键"这个字听起来像一样东西，像一根真的棍子。再往后，课本画一条 Lennard-Jones 曲线，说"这是两个原子之间的相互作用势"，用的是陈述句，像在描述一块石头的形状。学生读完，脑子里留下的，是一个由小球和弹簧组成的世界，小球是真的，弹簧也是真的。

小球确实有读数可依。弹簧呢？弹簧是拟合出来的。可是在学生的脑子里，两样东西一样真。这就是代签被当成了原件。

原子模型本身在一百多年里换过几次样子，这件事更能说明"客观物理"的处境，第十五章专门讲，这里先不展开。这一章只想立住一件事：在原子这个尺度上，我们的眼睛（经由仪器）已经走得很深，能看见原子在哪里；可我们的手一

步也没有跟进去。第八章说原子力显微镜其实是在"摸"，可它摸完交出来的是一张图；第十八章会讲到，有人把力反馈手柄接上探针，让人"摸"纳米世界，可那份手感是模型算好了推给手的。到今天为止，原子之间那一下"撞"，没有一只手亲身取得过。

这就留下一个可以检验的问题。如果有一天，触觉通道真正进入了微观——人能像看见原子一样，亲手取得原子之间推挤的特征——会发生什么？如果读出来的东西和力场一模一样，那说明这份代签恰好签对了，本书"代签"的说法就该收窄。如果读出来的东西，在某些地方逼着人去修改力场和势函数，那说明原件和代签之间确实有差。这是本书的第一条预测，第二十章会把几种可能的结局摆出来。

朵朵听完这一段，把她的水分子拆开，把两根灰棍子放在一边，只留下一个红球、两个白球，摆在桌上。

"那我就不插棍子了。"她说，"棍子是猜的。"

罗明川笑了，又把一根棍子插回去。"猜的也有用。不插棍子，你下次就不知道它们哪两个连着了。"

这一来一回，正好是这一章的意思：棍子要留着，可要记住它是猜的。记住它是猜的，将来有一天手真能伸进去，才知道该去摸哪里、对哪一份账。

> **带走的话**
>
> **原子在哪里，是看出来的；原子之间怎样撞，是猜出来的——猜得准，就被当成了看见。**

小账：

- SDE 账：S 落在衍射图与球棍模型的原子位置上，D 落在键长键角的差异与抖动的先后上，E 落在原子之间互相推挤、挤不动的那一下——前两样有读数可依，E 由势函数与力场参数补上。
- 代签账：拆开了第二处代签——原子之间的碰撞特征（Lennard-Jones 排斥项、力场参数靠拟合、结构精修借几何约束），落实我那句原话"把那个模型当做客观物理"；为预测一（触察修正）埋下检验点。

◆

13

第 13 章

声音被画成曲线

这一章的问题

声音是听的，可物理课本里的声音，全是画出来的——一条弯弯曲曲的线。耳朵听到的那些东西，有多少进了这条线，又有多少留在了线外？

◆ 一、波动方程：弦上每一点的位置

这是我构想的场景。

数学博士生曾一鸣那天傍晚来罗家讨论一个算法问题。讨论到一半，隔壁房间传来朵朵练歌的声音。她下周要在班上唱《小星星》，一遍一遍地唱："一闪一闪亮晶晶，满天都是小星星。"

曾一鸣来了兴致，掏出手机，打开一个录音软件，对着门口录了一段。屏幕上跳出一条密密麻麻、上下抖动的线。他把手机递给探出头来的朵朵看。

"这就是你刚才唱的。"

朵朵盯着看了半天："这是我唱的？怎么像一把梳子？"

"放大看，"曾一鸣把屏幕撑开，"每一个小齿，都是空气被你的声音推过来又拉回去一下。"

朵朵又看了一会儿，问："那哪一段是'亮晶晶'？"

曾一鸣找了好一阵，指着中间一段："大概是这里。"

"它看起来和'一闪一闪'没什么不一样啊。"

这一问，问到了这一章的心上。

我们先回到这条线是从哪里来的。物理学处理声音，有一条基本的方程，叫波动方程。十八世纪中叶，法国的达朗贝尔研究一根绷紧的弦怎样振动，在1747 年写下了它。方程说的是：弦上每一点离开原位多远，这个"离开多远"怎样随时间变，又怎样被左右两边的邻居牵动。

请注意方程里那个主角：弦上每一点"离开原位多远"。这是一个位置。拍一段高速视频，弦在每一帧里弯成一个形状，方程描述的，就是这些形状一帧一帧怎样变过去。和第十一章的苹果一样，方程交给你的，是一连串可以画出来的形状。

声音在空气里，也照这个路子处理。空气被推挤，这里密一点，那里疏一点，一密一疏往前传。物理学把每一处的空气压强比平时高多少、低多少，画成一条上下起伏的线，横轴是时间，或者是距离。这条线，就是朵朵在手机上看到的那把"梳子"。

要说公道话，波动方程有一样东西是对得上耳朵的：它承认声音要花时间才能走到。声音从朵朵的嘴边传到门口，有一个有限的速度，这一点方程里写得清清楚楚。第十章那张表里，视觉的一条性质是"光近乎瞬达，全场同时呈现"，听觉的对应项是"声速有限，必须依次到"。波动方程守住了这一条。

可是守住了速度，不等于守住了"依次"。方程写出来，时间 t 和位置 x 并排站着，像一张方格纸的横竖两根坐标轴。解出来的结果，可以画成一张图：横着是弦上的位置，竖着是时间，图上每一处的深浅表示那里那时弦离开原位多远。这张图一铺开，整段振动的从头到尾，同时摊在你眼前。

耳朵从来不是这样听的。耳朵在每一刻只得到这一刻；前一刻已经过去，后一刻还没来。第二章敲碗时说过，"叮"在先，"当"在后，"叮"过去了才有"当"，这个先后不能摊开，摊开就成了一张画。方程把听觉里只能一步一步走过去的先后，画成了一根可以从左看到右的轴。时间被当成了第二种空间。

打个比方。把一卷老电影胶片从盒子里拉出来，平铺在一张长桌上，每一帧都在那里，从第一个镜头到最后一个镜头，一格不少。可是电影没有在放。你沿着桌子从头走到尾，看到的是几千张静止的小画；那个让人提心吊胆、等着下一秒的电影，要把胶片重新卷起来，一格一格从放映机里过，才会回来。波动方程的解铺成一张图，就是那卷摊在桌上的胶片。

人类第一台记录声音的机器，就是为眼睛造的，那台只会写、不会放的声波记振仪，第八章已经讲过（见第八章）。波动方程走的是同一个方向，只是走得更远：记振仪把一段声音写成一条线，方程把一切声音都写成"位置随时间变"的一张图。

这张图有一个容易被忽略的后果。图上没有"现在"。耳朵永远站在某一个"现在"上，往后是刚刚听过、还在耳边留着余韵的那几下，往前是还没来、却已经被等着的那几下。图却是从一个不在任何时刻里的位置看过去的，像站在山顶看一条山路，起点、拐弯、终点一样清楚，哪一段都不比哪一段更"此刻"。走山路的人只知道脚下这一步，前面的拐弯要走到了才看得见。耳朵是走路的人，方程是站在山顶的人。

这就是声音的第一次代签：振动被记成位置，先后被记成坐标。

◆ 二、傅里叶：用视觉工具处理听觉对象

第二次代签更有名，来自傅里叶。

1822 年，法国的傅里叶出版《热的解析理论》。这本书讲的是热怎样在物体里传开，本来和声音无关。可书里有一个想法后来改变了整个科学：几乎任何一条起伏的曲线，都可以拆成一组简单的正弦曲线叠在一起。这个说法在傅里叶手里还不够严格，哪些曲线拆得开、拆到什么程度，是后来狄利克雷等数学家一点一点补证的。正弦曲线就是最规矩的那种波浪线，一起一伏，高低一样，间隔一样，一直重复下去。

先说一件比傅里叶还早的事。我们写下音乐的办法，本身就是视觉的。五线谱把每一个音画成一个小黑点，音高一点，黑点就画得靠上一点；音长一点，就在黑点上加一根尾巴，或者把它涂成空心。一首曲子写下来，是一张从左往右读的图。"高音""低音"这种说法，也把音放进了上下的空间里，好像声音真有一个高处和低处。并非所有语言都这样说。古希腊人管高音叫"尖"、低音叫"重"；有心理学研究发现，说波斯语的人习惯把音高说成"细"和"粗"。可见"高低"是一种借来的说法，借的是眼睛里的上下。乐谱非常有用，没有它，音乐很难传过几百年。可乐谱也是一份代签：它记下了每个音在哪里，记不下唱到这里时心里那一提。

这个想法被拿去处理声音，几乎是天作之合。一根弦振动，发出一个音，这个音可以拆成一个最低的基音，加上一串高一点的泛音，每一个都是一条正弦曲线。十九世纪，德国的欧姆提出，耳朵大概就是在做这样的拆分；后来亥姆霍兹在《论音调的感觉》里，用一组大小不同的共鸣球去"找"一个声音里各有哪些正弦成分。欧姆这个说法是 1843 年提出的，亥姆霍兹的书出版于 1863 年。从那以后，"声音＝一组正弦波之和"成了声学的家常话。

今天手机上的软件，还能把声音画成另一种图，叫声谱图：横轴是时间，竖轴是频率，每一处亮暗表示那一刻那个频率的成分有多强。朵朵唱的《小星星》，在声谱图上是一条条横着的亮带，一段一段往右排，像一片被风吹过的麦田。

为什么说傅里叶分析是一件视觉工具？

看它做的事情。它拿一条曲线，把它拆成另外几条曲线。拆之前，是一条可以画在纸上的线；拆之后，是几条可以画在纸上的线，外加一张"每一条有多高"的表。从头到尾，它在和形状打交道。它擅长回答的问题是"这个声音里有哪些成分、各占多少"，这是一个"有什么"的问题，是一份清单。第三章说视觉最容易让人觉察 S，说的就是这种"一眼看出里面有什么"的本事。

再看它的零件。正弦曲线是傅里叶分析的砖头。一条纯粹的正弦曲线，在数学上从无穷远的过去一直延伸到无穷远的将来，没有开头，也没有结尾，每一段都和别的段一模一样。这样的砖头，本身就没有先后。用没有先后的砖头去砌一段有先后的声音，先后藏到哪里去了？藏在砖头之间那些细微的错位里——数学上叫相位。最常见的频谱图只画每块砖有多大，不画它们怎样错位。于是把一整段旋律做一次傅里叶分析、只看每块砖的大小，从头唱到尾的那一段，和把它倒过来放的那一段，得到的图一模一样，数学上可以严格证明。耳朵一听就知道一个是正着唱，一个是倒着放。

朵朵后来自己试了一回。曾一鸣教她在软件里点"倒放"，她把自己唱的那一句倒过来放，笑得直不起腰："像外星人在说话！"倒过来的那一句，用的还是她那几个音高，每个音的成分几乎没变，只是先后翻了个个儿。音还是那些音，歌却没了。一个九岁的孩子一秒钟就听出来的差别，在整段只画强弱的频谱图上，一点也找不出来。这一笑，比什么论证都干脆：歌住在先后里。

工程师当然知道这个毛病。他们的办法是把声音切成一小段一小段，每一小段单独做傅里叶分析，再把结果一列一列排起来——声谱图就是这样来的。这又是视觉的老办法：先切成小块，每块单独看，看完拼起来。第九章说视觉的局部图像互相可以切割，看这一块不改那一块，点性就是从这里来的。声谱图把这套办法用到了声音上。

切，就有代价。切得太短，每一段太短，分不清是什么音高；切得太长，每一段太长，分不清是什么时候变的。时间分得越细，频率就分得越粗，两头不能兼得。这是一条数学上的限制，1946 年英国的加博尔把它写得很清楚，常被拿来和量子力学的不确定关系相比。

2013 年，美国洛克菲勒大学的两位研究者奥本海姆和马尼亚斯科发表过一个实验。他们让十二个人同时判断两件事：一个短音比前一个音高还是低，它出现在另一个音之前还是之后。他们报告说，被试常常超过这条界限，有时超过十

倍以上，主要赢在对时间先后的分辨上；成绩最好的是一位专业音乐人。作者据此推断，耳蜗做的是非线性的处理，不只是一台线性的切块分析器。这个结论后来受到质疑：有评论指出，这个任务测的未必就是加博尔那条界限本身，普通的分段傅里叶分析也能把这个任务做得很好。所以这件事在本书里只算一个线索，不算证据。本书真正倚重的，是下面那个谁都能去听的例子。

还有一件小事更能说明问题。我们手机里的音乐文件，大多经过压缩。压缩的时候，工程师不能只看曲线，他们必须把"耳朵听不出来的部分"去掉，而哪些部分耳朵听不出来，曲线自己不知道，要靠大量的人坐下来听、一项一项地测，才定得下来。这门学问叫心理声学，今天各种有损压缩的音频格式，里面都装着一套从它来的"耳朵模型"。也就是说，曲线要变得有用，还得把耳朵请回来签一次字。代签走到尽头，原件又被叫回了场。

今天的机器"听"声音，走的也多是这条路。不少语音识别和声音分类的程序，先把声音转成声谱图，再把声谱图当成一张图片，交给原本为识别图片设计的那类网络去处理；也有系统直接吃声音的原始起伏，做法不一，可声谱图这条路至今走的人最多。机器听一句话，是先把这句话画出来，再去"看"这幅画。这件事第三十一章还会说到，这里只记一笔：从斯科特的熏黑纸，到今天的声谱图，声音进科学的门，一直是先变成图。

耳朵自己的办法是什么样的？有一个日常的例子能让人摸到一点边。

给吉他或二胡调音，现在很多人用手机上的调音器：拨一下弦，屏幕上一根指针左右摆，指到正中，显示一个绿灯，就算调准了。老琴师不用这个。他把要调的弦和一根已经调准的弦一起拨响，侧着耳朵听。两个音差得多，声音里有一种"呜哇呜哇"的起伏，起伏得很快；他慢慢拧弦轴，"呜哇"越来越慢，"呜——哇——"，最后起伏没了，两个音融成一个，他就停手。物理学管这种起伏叫"拍"，两个频率差多少，每秒就起伏多少下：一根弦每秒振四百四十次，另一根四百四十二次，耳朵里就听到每秒两下的"呜哇"。

注意老琴师听的是什么。他听的不是哪一个音高是多少赫兹，而是"起伏在变慢"——这一下比上一下慢，下一下比这一下慢，一直慢到没有。他听的是一串先后里的变化，是 D 本身。调音器把这件事签成一个数和一根指针；老琴师的耳朵签的是原件。两个都能调准弦，可签字的人不一样，取得的东西也不一样：调音器调完了，屏幕一黑，什么也不留下；老琴师调完了，耳朵里留下了这把琴今天的脾气。

曾一鸣对这一段很有感触。他平时用 AI 做形式化证明，整天和符号打交道。他说："傅里叶这一套，在数学上是最干净的东西之一。可你这么一讲，我发现它干净，恰恰是因为它把先后这件最麻烦的事，变成了一张可以一眼看完的表。"

◆ 三、好听在曲线上找不到

回到朵朵的问题："它看起来和'一闪一闪'没什么不一样啊。"

我们把《小星星》第一句的音排出来：都、都、嗦、嗦、啦、啦、嗦。再往下是：发、发、咪、咪、来、来、都。

唱到"啦啦"的时候，你心里会起一点东西：它往上走了，接下来该落回来。果然，下一个"嗦"落回来了，拖得长一点，像在一个台阶上歇一口气。再往下，"发发咪咪来来"一级一级往下走，你知道它在找什么——它在找开头那个"都"。最后那个"都"一出来，整句歌就像进了家门，把鞋一脱，安稳了。

这里面有三样东西：先后，期待，回落。

先后：每一个音都踩在前一个音上，"啦"之所以是"往上走了"，是因为前面有"嗦"；离开了前面的"嗦"，单独一个"啦"无所谓上也无所谓下。

期待：唱到"啦啦"，还没唱出下一个音，你已经在等它落回来。这个"等"，是在声音还没发出来的时候就有了。

回落：最后那个"都"，和开头那个"都"，是同一个音高。放到频谱图上，两处的亮带在同一个高度上，粗细也差不多。可是在耳朵里，开头那个"都"是出门，结尾那个"都"是回家。同一个音，在曲线上一模一样，在耳朵里是两件完全不同的事。

还有一样东西更奇怪：停。

歌里有些地方要停半拍，或者停一整拍，乐谱上画一个小小的休止符。停的时候没有声音。放在曲线上，那是一段几乎平平的直线，什么也没有。可是在耳朵里，那一停一点也不空。朵朵唱"满天都是小星星"之前，会顿一下，吸一口气，整个教室的人都在那一顿里等着她往下唱。那一顿里装满了期待。一段平线和一口屏住的气，在曲线上是同一样东西，在耳朵里是两样东西。

再说合唱。朵朵在班上和同学一起唱《小星星》，起头总是参差不齐，有人快有人慢。唱到第二句，声音就慢慢拢到一起了。没有谁在指挥每一个人，每个孩子一边唱一边听旁边的人，听到别人快了，自己就赶一点；听到别人拖了，自己就等一点。几十个声音一边发出，一边互相改写，最后改成了一个声音。这就是听觉里的 E。录下来画成曲线，你看到的是几十个声音叠出来的一条结果；那一路你等我、我赶你的互相改写，曲线上找不到痕迹。

唱歌的人还要踩拍子。朵朵练歌的时候，右脚会不由自主地在地板上点，一下，一下，每一下落在一个字上。拍子并不单属于哪一个声音，它落在声音和声音之间那个一下一下的间隔上，是身体在里面跟着走的那个步子。曲线上能量出间隔有多长，量不出那个"步子"。第二章说 Drive 不是 D，动力来自两维之间的矛盾；拍子里那股往前走的劲，也不在任何一段曲线里，它是先后和期待互相顶出来的。

曲线上有什么？有每一刻空气的疏密，有每一段里各个频率的强弱。曲线上没有什么？没有"等"，因为曲线只记已经发生的，不记还没发生而心里已经有了

的；没有"回家"，因为曲线上的两个"都"是两段相同的形状，回家这件事不在任何一段形状里，它在从头到尾走过来的那一路先后里。

用 SDE 的话说，听觉是完整的 SDE，只是最容易让人觉察 D。旋律是 S，可这个 S 不是一个摆在那里的样子，它是随着一个一个音的先后冒出来、成形、最后结成一句的显露谱系；先后是 D，一个音和前一个音不一样，分得出高低，排成方向；E 也在——朵朵在浴室里唱，觉得自己唱得特别好听，她的声音碰到瓷砖弹回来，她听着回声又把下一句唱得更放开，声音和那间小屋子在互相改写。这三样分不开，分开谈只是为了说得清楚。曲线和频谱把 S 留住了一部分，把 D 摊平成了一根坐标轴，把 E 剩下的那一点，记成了一段混响时间的读数。

于是"好听"在曲线上找不到。

找不到的原因，第 387 号《好听是谁的？》（胡敏著）已经给过判语：好听不是听出来的，是唱进去的。那本书讲的道理，这里不重复。本书在这里只补一句：好听之所以不在曲线上，还有一层工具上的原因——曲线是给眼睛准备的，它把只能一步步走过去的先后，换成了可以一眼扫完的空间，期待和回落都住在先后里，空间里没有它们的位置。

这又是一份代签。物理声学签下的是"这个声音由哪些频率组成、各有多强"，这份签字非常有用：没有它，就没有电话、录音、扩音、降噪，没有今天的一切音响工程。可是它签的是声音的清单，不是音乐的那一路先后。把这份清单当成"声音的本来面目"，以为好听不好听最终都能从频谱里读出来，就是把代签当原件。

朵朵其实早就知道这一点。她在家里练了一个星期，每一遍的音高都差不多，可有一天唱完，她自己跑出来说："今天这遍最好听。"问她哪里好听，她说不上来，只说"今天唱到'亮晶晶'的时候，我自己也想往上飞"。那一遍和前一天那一遍，录下来放在一起比，曲线上也许分不出高下；她自己的耳朵分得出。

那天晚上，曾一鸣临走前，把手机上那段录音又放了一遍，然后把屏幕关掉，只让声音放着。

"闭上眼睛听，"他对朵朵说，"'亮晶晶'是不是跟'一闪一闪'不一样？"

朵朵闭上眼睛听完，说："不一样。'亮晶晶'是往上爬，爬到顶上又下来一点。"

"对。"曾一鸣说，"这个手机看不出来，你的耳朵听得出来。"

这一章到这里，第三编的三处代签都摆出来了。第十一章，力被签成一个 F；第十二章，原子之间的碰撞被签成势函数和力场参数；这一章，声音的先后被签成坐标轴和频谱。手的那一半，耳朵的那一半，都由方程代签。下一章再看热、压、气怎样被读成刻度，然后第十五章去问：这些代签，是怎样一步一步被当成原件的。

带走的话

曲线上的两个"都"一模一样，耳朵里一个是出门、一个是回家——好听住在先后里，曲线把先后摊成了空间。

小账：

- SDE 账：S 落在旋律一句一句显露成形上，D 落在音与音的先后、期待与回落上，E 落在唱者、听者与那间屋子的互相改写上——波动方程与频谱留住了 S 的一部分，把 D 摊平成坐标轴。
- 代签账：拆开了第三处代签——听觉的先后被波动方程记成位置与坐标、被傅里叶分析记成没有先后的正弦砖头；"好听"不在代签里（接第 387 号）。为第二十三章"听觉没有瞬间、伞随时间张合"铺路。

◆

14

第 14 章

热、压、气被读成刻度

这一章的问题

冷是"往里钻"的，暖是"贴着"的，火候是"到了"的。这些都是手和皮肤直接取得的东西。它们进了科学，为什么只剩下一个刻度上的数？

◆ 一、冷暖与刻度

这是我构想的场景。

腊月里，长沙下了一场冻雨。罗明川早上七点出门，手刚碰到楼道的铁栏杆，就缩了回来。那一下哪里是"凉"，分明是有什么东西顺着指尖往骨头里钻。他换了只手去扶旁边的木扶手，木头也冷，可那种冷是"待在表面"的，不往里走。

他是做材料力学的，心里马上有答案：铁和木头在同一个楼道里，温度是一样的。铁导热快，把手上的热一口气抽走；木头导热慢，抽得少。所以铁"更冷"，只是手的错觉。

这个答案没有错。可是请停一下，看看这个答案做了什么。

它先拿出一支温度计。温度计插在铁上，读一个数；插在木头上，读一个数。两个数一样。于是它宣布：两样东西"一样冷"，你手上感到的不一样，是"错觉"。

温度计给的，只是一个点数。它把一根玻璃管里液柱停下的位置，读成刻度上的一格。那一格没有方向，没有深浅，没有快慢。它不告诉你冷是往里钻还是贴在外面，不告诉你这股冷来得多急，也不告诉你它停在皮肤哪一层。

手给的东西多得多。

手感到的冷，有一个"往里走"的方向。有一个"多快抽走"的速度。有一片"从哪里到哪里"的范围：指尖先冷，掌心后冷，冷顺着手腕往上爬。手还感到冷和自己在互相改写：手越凉，铁就越不显得冷；握久了，铁被手捂热一点，手也被铁冻麻一点。手和铁，在一阵一阵地重新商量彼此是什么温度。

这就是触觉 SDE 的样子。冷一阵阵冒出来，是 S 在显露；先指尖后掌心、先急后缓，是 D 在排序；手和铁互相改写，是 E，是特征纠缠。三样分不开。只是在冷暖这件事上，人最先觉察到的是 E：那种"我和它粘在一起，谁也不让谁"的感觉。

温度计把这一切收成一格。

物理学当然知道"导热"。它有导热系数，有热流密度，有傅里叶在 1822 年写下的热传导方程（《热的解析理论》）。这些东西算得很准。可它们全是后来补上去的。物理学先用温度计取一个点数，再用方程把"往里钻"补回来。补回来的那部分，就是代签。

为什么要这样绕一圈？因为温度计的读数是给眼睛看的。液柱停在哪一格，你看得见，我也看得见，换一个人来看，还是那一格。手的冷，别人摸不到你的手。于是"往里钻的冷"被判为主观，"液柱停在第几格"被判为客观。

温度计本身的来历，也值得多看一眼。

最早的"测温器"，是一根倒插在水里的玻璃管，管顶一个玻璃泡。手一握泡，里面的空气胀开，水面往下退。人们看着水面的高低，说"热了""冷了"。这

种东西通常记在伽利略名下，时间在十六世纪末、十七世纪初；也有人认为它出自他身边的医生朋友圣托里奥，归属至今没有定论。它的妙处在于：把握在手里的暖，换成了一段看得见的水位。

可这样的水位还不是刻度。要成为刻度，还得定下"点"。后来的做法，是挑两个大家都看得见、都认得的时刻：冰开始化的时候，水开始滚的时候。在管子上各划一道线，中间等分成格。1742 年，瑞典的摄尔修斯提出的百分温标，用的就是这两个点；起初还是倒着标的，水滚是零度，冰化是一百度，后来才翻过来。

请注意，定点用的这两个时刻，冰化与水滚，都是看出来的。冰面出现水，水面冒出大泡，眼睛一看就认。没有人用"手放进去刚好不疼"来定点。手的感觉，在刻度诞生的那一刻，就被排除在定点之外了。

于是有了一个后来人人习惯的说法：手是不准的，温度计是准的。小学课本里有个小实验，左手泡热水、右手泡冷水，再一起放进温水，两只手一个说凉、一个说热。这个实验常被拿来证明"感觉靠不住"。

可这个实验也可以倒过来读。两只手说的不一样，正说明手感到的从来就没有一个绝对的点数，它感到的是"我"和"它"之间正在发生的那一场改写。左手刚从热水出来，它跟温水的那场商量是"往外走"；右手刚从冷水出来，它的商量是"往里来"。手报的是商量的方向和急缓，温度计报的是商量之后停在哪里。两样东西本来就不是同一件事。说手"不准"，是拿温度计的问题去考手。

还有一处，平常不太有人提。

冬天的天气预报，除了气温，还常报一个"体感温度"。风大的日子，气温零度，体感可能是零下好几度。这个体感温度，就是科学回头去追手和皮肤的冷。

它的算法，是拿风速、湿度、气温几个点数，代进一个经验公式，算出一个"相当于多少度"。

你看它的路子：先把人的冷判为不客观，再用几个客观的点数，算出一个"像人那样冷"的数。皮肤的冷没有被直接取得，是被公式代签出来的。

这不是坏事。体感温度很有用。它提醒老人别出门，提醒孩子加衣服。可是它的位置要看清楚：它是代签，签字的是方程，被代的是皮肤。

暖也是这样。

罗明川出门前，往大衣口袋里塞了一个热水袋。那种暖不往里钻，是"贴着"的，一片一片地铺开，像一只手按在你肚子上不走。一个温度计插进热水袋，读出四十几度。它读不出"贴着"，读不出"铺开"，读不出"不走"。

冷和暖，在温度计上只是一根数轴上的左右两边。在手上，冷有"钻"，暖有"贴"，它们根本算不上同一根线的两头。它们是两种不同的触觉显露。这是本书判断，不是已证结论：冷与暖在触觉里可能算不上一个量的正负，更像两种不同撑法的伞，钻的冷是伞往里收、往深处走，贴的暖是伞往外铺、在表层摊开。这只是一个比方。它能不能变成读数，要看第二十一章"气的读数"能不能把它接住。

◆ 二、气压、气流与火候

这是同一天晚上的事，也是我构想的。

罗明川想复原小时候母亲做的辣椒炒肉。他买了一把红外测温枪，对着铁锅打一下，屏幕跳出一个数。他心想，只要把锅烧到那个数，下肉，就能炒出那个味。

他炒了三次，三次都不对。

不是温度不对。测温枪每次都说锅到了他要的那个数。不对的是"那股气"。母亲的锅，肉一下去，"嗤"的一声，一团白烟裹着油香往脸上扑，人要往后仰一下。他的锅，也"嗤"，也冒烟，可那团烟是软的，不扑人。

广东人管这个叫"锅气"。湖南人不太说这个词，但人人都知道那股劲：辣椒炒肉要"有火气"，青菜要"炒得猛"。厨师说"火候到了"，指的并非锅上某一点到了某个温度。它指的是整口锅、一锅油、一把肉、灶下的火、人手上的翻动，一起到了一个"对"的时候。

罗明川把这事在微信上讲给许蔓听。许蔓在深圳做机器人触觉传感，她们公司前几年接过一个炒菜机器人的项目。

许蔓回他：我们那时候也以为是温度的事。锅底装了好几个温度探头，曲线记得清清楚楚。机器炒出来，能吃，就是"没锅气"。后来大家才发现，锅气至少还跟三样东西缠在一起：锅里的气流，就是热空气和油烟怎么从锅底往上翻；锅面上的压，就是食材贴锅贴得多紧、多久；还有翻锅的节奏，什么时候让肉离开锅，什么时候让它落回去。

她说的这几样，都是许蔓自己的经验，不是论文结论，本书只当一个工程师的现场转述来用。

许蔓接着说：温度我们会测。压力也能测，锅底贴一层压力膜就行。气流难一点，可以用烟雾加高速摄像，拍下来再算。可是把这三样分别测好，拼在一起，还是不对。

罗明川问：为什么？

许蔓说：因为老师傅手上的那口锅，温度、压、气流、节奏，是一个东西。他翻锅的时候，手感到锅沉了一下，耳朵听到"嗤"声变闷了，他就知道该颠了。

他不是在看温度，他是在跟锅商量。我们把商量拆成四条曲线，商量本身就没了。

这一段话只是人物的转述，证明不了什么。它的用处，是给本书承重三"先人后机"画一个厨房里的样子。两串、三串、四串切开的数据，拼不回原来的纠缠。这里先点到，第七编再展开。

我们回到气压。

气压这个词，本身就是一个代签的例子。人能感到"压"：上山耳朵胀，下雨前闷，坐飞机降落时耳朵疼。这些都是身体和空气在互相改写，是 E。可是科学里的"气压"，从 1643 年托里拆利那根水银柱起，就被读成了一个高度：水银柱高多少毫米。

压，本来是按在身上的。被读成了看得见的一段长度。

后来有了气压计、压力传感器、电子读数，形式一变再变，路子没变：把按在身上的压，翻成一个可以看的刻度。天气图上的等压线，是一条一条画出来给眼睛看的线。你看那张图，会觉得气压是一种"分布在地图上的东西"，像山的等高线。你不会觉得它是"压在你耳膜上的东西"。

气流也是这样。风吹在脸上，是一阵一阵的，有冲有歇，有冷有暖，有从左边来又从右边绕过去的。风速计给一个数，风向标指一个方向。天气预报说"东北风四到五级"。脸上那一阵一阵、绕来绕去的风，被收成了一个方向和一个等级。

收成刻度之后，科学再用方程把风"补"回来：流体力学有纳维—斯托克斯方程，能算气流怎样绕过一栋楼、一片机翼。这个方程很了不起。可它也是补上去的。风在脸上的那种"一阵一阵"，那种"绕"，在方程里被写成速度场里的一个个点上的矢量。每一个点，一个箭头。

你会发现一个反复出现的模式。

热，被读成温度计上的一格。压，被读成水银柱的一段高。风，被读成风速计上的一个数和一个箭头。每一样都先被换成一个看得见的、点状的读数，然后再用方程把被丢掉的"钻、贴、按、绕"补回来。

读数是给眼睛的。补回来的部分是方程签的。这一章的"刻度"，就是第八章说的"仪器把听和触翻译成可看的"在热、压、气上的具体样子。第八章讲的是仪器的共同本事，这一章讲的是：翻译完之后，那份被丢掉的触觉，是谁替它签了字。

◆ 三、为什么"气"进不了实验报告

罗明川第四次炒辣椒炒肉，换了一口旧铁锅，灶火开到最大，肉下得少一点，手腕抖得快一点。那团烟终于"扑"了一下。

他很高兴。第二天去学校，跟同事说起这事。一个做热工的同事笑着说：你这是火力大、单次投料少、表面温度下降小，美拉德反应来得快，挥发物多。很好解释。

罗明川点头。他知道这个解释对。

可他又想：如果我要写一份实验报告，报告"锅气"出现了，我该写什么？

他可以写锅的材料、灶的功率、投料的克数、锅面温度曲线、翻锅的频率。这些都是可以读成刻度的东西。他写不进去的，是那一下"扑"。

实验报告有一个默认的格式：凡是要写进去的，都必须是一个人读出来、另一个人也能读出同样数的东西。这个格式的根，在第七章讲过：视觉取得的特征稳定，你看得见别人也看得见。于是报告天然偏爱看得见的读数。那一下"扑"，

是脸、鼻子、手腕、耳朵一起感到的，是触觉和听觉和嗅觉缠在一起的显露。它不是一个刻度，没法让下一个人"读出同一个数"。

所以它进不了报告。它当然存在，只是报告的门只给眼睛开着。

第 346 号《人与 AI 一起发生新数学》已经讲过中餐与"气的数学"：揉面团、拍西瓜、中医，这些都在等一门摸的数学、听的数学。那本书说的是数学。本书往前推一步，说的是科学：在今天的科学里，气早已被代签过了，谈不上"还没被数学化"。热有温度，压有气压，流有速度场。每一样都签好了字，盖好了章。正因为签得太好，大家就以为气已经被科学处理完了，剩下的"锅气""火候"只是厨房里的玄话。

这才是气进不了实验报告的真正原因。气被科学碰过，只是被用视觉的方式碰过了，碰完之后，留下的签字被当成了气本身。

第 8 号《中华之气》说过一句很重的话：模型是气的运动被光学化之后的残迹。本书接着这句话，换一个词：代签。

"残迹"这个词，说的是结果，像一个人走过雪地留下的脚印。"代签"这个词，说的是一个机制：本该由手和皮肤亲自取得的东西，因为手和皮肤缺席，由一套视觉的读数加一组方程，替它签了字。签字的人不是坏人，签的字也常常算得准。但签字就是签字，不是原件。

换成"代签"，还有一个好处：它能被检验。

如果代签说得对，那么只要哪一天，触觉的通道真正进入某个过去只能靠代签的地方，就应该会冒出一些代签没算到、需要修改的东西。在热和气上，这个预测有一个已经看得见的影子：经典的热传导方程（傅里叶的那个）有一个怪性质，它让热的影响"瞬间传到无穷远"，只是远处很弱。物理学家后来提出有限传播速度的热传导模型，1948 年意大利的卡塔内奥写出过这样一个方程，后来又

有人沿着这条路接着做，专门处理那些"热一下子打进来"的场合，比如极短的激光脉冲。

注意这里和本书的对应。第十章说过，伞收成点的三个条件之一是 $v\to\infty$，信号瞬间传到；那是视觉"全场同时呈现"的投影。傅里叶方程里的"瞬间传到无穷远"，正是这个 $v\to\infty$　　留在热学里的印子。而手上的冷，从来不是瞬间传到的：先指尖，后掌心，一路往上爬。被逼着修正 v 的，是热，是一种触觉对象。

这正是本书预测二（退化溯源，见导论）要检验的一类事：放宽 r、ω、v 的理论，多数由触觉或听觉问题逼出；若主要由视觉问题逼出，承重二错。热传导的有限速度模型，看起来是一个正面的例子。但一个例子不算数，第二十五章要把这件事做成一张账，现在只先记下。

再往细里看一点"火候到了"这句话。

它说的是"到了"，是一个时候，不是一个值。锅面温度是一个值，可以停在那里；火候是一个时候，过了就没有了。厨师说"火候到了"，往往还连着一句"快起锅"。早一秒，肉是生的；晚一秒，辣椒就焦了。

一个时候怎样被判出来？罗明川回想母亲炒菜的样子：她并不盯着锅看。她一边翻，一边听。"嗤嗤"的声音由尖变钝，由密变疏，油星子溅到手背上的感觉由烫变轻，锅铲推过去的手感由涩变滑。几样东西一起变，变到某一处，她手一抬，菜就出锅了。

这里头听觉占了很大一份。声音的先后、疏密，是 D 最容易被觉察的地方，第二章讲敲碗时说过。手上的涩与滑，是触觉。两样缠在一起，判出一个"时候"。这正是第五章说的触与听的纠缠，只是换到了灶台上。

把这样的判断读成刻度，最自然的做法是给它一个时间戳：下锅后第几秒起锅。很多菜谱就是这样写的，"大火翻炒三十秒"（示意，非实测）。可是照着秒

数做的人都知道，换一口锅、换一块肉、换一天的湿度，三十秒就不对了。秒数是一个点，火候是一段正在张合的过程。用第五编的话说，火候更像一把随时间张合的伞，r 跟着锅里的状况在变；秒数把这把伞收成了时间轴上的一个点。

所以，就连"时候"这么一件事，进了刻度也被点化了。温度被点化成一格，时候被点化成一秒。

还剩一个问题：那该怎么办？不读刻度了吗？

不是。刻度要读，方程要用。本书从头到尾不劝人扔掉温度计。要做的是另外一件事：在刻度旁边，给手和皮肤留一个位置，让"钻""贴""扑""到了"这些东西，也有机会长成可以稳定、可以传、可以验的特征。这要一门新的数学，单位不是点，是伞。

这里先打两个比方，只是比方，不是读数。冷的往里钻，像伞往深处收；锅气的扑，像一大片伞在极短时间里重重叠叠地打开，叠得多，好比 ω 很大，来得急却仍有先后，好比 v 有限而急。比方好记，可它不能拿去量一口锅。

真正的读数在第二十一章。那里把气的强弱写成三项：伞半径比上最小分辨尺度，重叠度减去一，伞半径比上传播速度与观察时长的乘积。三项一起离原点越远，气就越强；三项都回到原点，伞就收成了点，气也就读不出来了。这是本书新提出的读法，标着"待验"。上面两个比方能不能落到这三项上，冷的"钻"是不是第一项在变，锅气的"扑"是不是第二、三项一起变，也要到那时才见分晓。

在这之前，一份实验报告其实已经能多做一点小事。

罗明川后来想了一个笨办法。他请母亲再炒一次，自己在旁边拿手机录音、录像，同时在锅柄上贴一片许蔓寄来的小压力贴。母亲每觉得"到了"，就喊一声。喊声和录音、压力曲线记在同一条时间线上。

这个办法没有把"锅气"变成一个数。它做的是另一件事：把人的判断当作一种数据，和刻度放在一起，不再把它当作刻度之外的"主观噪声"。哪一刻喊"到了"，那一刻声音、压力、温度各在什么样子，以后可以拿来对。对得多了，也许能看出"到了"并不落在任何一条曲线的某一点上，它是几条曲线一起拐弯的那一片。

这仍然只是一个家里的构想，不是实验结论。它的用处在于摆出一个次序：先有人判出"到了"，再有仪器去记，再拿记下的东西回来问人"是不是这样"。先人，后机，再回人。这个次序本书在第三十二章正式立起来；在厨房里，它已经是一件谁都能做的事。

这些现在还只是说法，不是读数。第五编才把它们写成数学，第六编才在脉上试做。这一章只把一件事钉住：热、压、气，进科学的时候，是先被眼睛读成刻度，再被方程签了字的。

带走的话

温度计告诉你锅有多烫，告诉不了你火候到没到；后一件事，一直是方程替手签的字。

小　账

SDE 账：冷一阵阵冒出、锅气一下扑来是 S 的显露；先指尖后掌心、先嗤后闷是 D；手与铁、锅与食材与人手互相改写是 E，冷暖最先让人觉察的正是 E。

代签账：拆开了热、压、气三处代签——热被读成温度计一格、压被读成水银柱一段、风被读成一个箭头，丢掉的触觉由热传导方程与流体方程补签；指出傅里叶方程的"瞬间传到"是 $v\to\infty$　　在热学里的印子。

◆

15

第 15 章

代签被当成原件

这一章的问题

方程替手和耳朵签了字，这件事并不难懂。难懂的是：签字的人为什么会忘了自己是代签？这一章说三件事：好用让人忘记来历；"客观物理"自己已经换过三次；重复得最稳的，是视觉的发生。

◆ 一、好用就忘了是模型

这是我构想的场景。

周六上午，罗朵朵趴在沙发上看一本儿童科普书。翻到"原子"那一页，她把书举到罗明川面前。

"爸爸，原子长这样吗？"

图上画着一个红色的小球，四周有三个蓝色的小球，沿着椭圆形的线绕圈，像太阳和行星。

罗明川张口想说"对"，话到嘴边停住了。

他想起自己读大学时，物理老师说过：那是很早的模型，早就不用了。他又想起自己后来做分子模拟，屏幕上原子是一个个彩色小球，小球之间有力，力的大小由势函数算出来。他天天看这些小球，看了二十年，已经很少想起它们是"画"出来的。

"不完全是。"他说，"这是一种画法。"

"那原子真正长什么样？"

罗明川想了很久，没有找到一个能让九岁孩子满意的答案。

先放下原子，说一件人人都有的经验。

坐过地铁的人都看过地铁线路图。线是横平竖直的，站与站之间等距，换乘站画成一个圆圈。这张图是有意不按实际距离画的，为的是一眼看清哪条线通哪里。设计它的人知道它是示意。

可是用久了，人就会照着图来想城市。图上挨着的两个站，你会觉得很近，走过去才发现要二十分钟。图上隔得很远的两站，地面上可能就隔一条街。你并没有被谁骗。你只是用这张图用得太顺，顺到忘了它是图。

还有一个更贴近本书用词的日常经验：快递的"已签收"。

手机上跳出一条消息：您的包裹已签收。你放心了，接着忙别的。晚上回家，门口没有。一问，是快递员放在了小区门口的柜子里，顺手点了"已签收"；或者是门卫替你签的。包裹没丢，过一会儿就拿到了。可是在拿到之前那几个小时里，你心里一直以为它"已经在家了"。

签收这件事，本该由收件人亲手完成：手接过来，掂一掂，确认是这个。代签的人替你完成了一个记录，记录很准，时间地点都对。错只错在你把记录当成了"东西到手"。

方程对原子做的，就是这样一份"已签收"。记录准，时间地点都对，后来也常常真能"拿到"——算出来的东西，在别的读数上被对上了。可是在那之前，手从来没有接过那个包裹。

模型被当成原件，走的就是这条路。

一张图、一个方程，刚提出来的时候，大家都知道它是个假设，是"就当是这样"。它开始好用：算得出，对得上，能预测。用的人越来越多，用的场合越来越广。每一次用对，都给它添一点分量。用到第一万次，就不会有人在每次用之前先说一句"就当是这样"了。"就当是"悄悄掉了，剩下"就是"。

这一步没有任何人宣布过。没有一天，物理学界开会表决"从今天起，模型就是实在"。它是在一次又一次的好用里，自己沉下去的。

用 SDE 的话讲：同一个差异序列（D）被反复走，走得越熟，显露出来的样子（S）就越稳。稳到一个地步，人就只看见 S，忘了 S 是在哪一场纠缠（E）里发生的。忘了 E，S 就像是自己站在那里，没有来历，于是被叫作"客观"。

这里说的"忘"，不是某个人粗心。它几乎是好用的副作用。一样东西越好用，你越不需要想它从哪里来。

这条路，罗明川自己就走过一遍。

他带研究生做断裂模拟。软件跑完，屏幕上出来一张"应力云图"：一块钢板，裂纹尖端一团红，往外依次是橙、黄、绿、蓝。红的地方应力大，蓝的地方应力小。学生们看这种图看惯了，汇报的时候会说"这里红了，所以要裂"。

有一次，一个学生指着屏幕说："老师，这块钢板里的应力就是这样分布的。"

罗明川问他："你摸过一块正在被拉的钢板吗？"

学生愣了一下，说没有。

罗明川自己其实也没有。应力是什么？是材料内部一处被另一处拉着、挤着的那股劲。它本来是一种"按此牵彼"的东西，是材料自己对自己的压和拉，最该用手去体会。可在他们的工作里，它先被切成一个个网格单元，每个单元里算出一个数，再把数换成颜色，铺成一张图给眼睛看。

这张图是三重的代签。网格把连在一起的材料切成互不重叠的小块，这是ω=1。每一块只给一个数，这是 r→0。整张图一下子同时铺开，没有"这处先吃劲、那处后吃劲"的先后，这是 v→∞。被代签的，是材料里那股看不见、摸不着的劲。

学生说"应力就是这样分布的"，并不是他学得不好。他学得太好了。他从进实验室第一天起，见到的应力就是云图。云图在先，劲在后；劲他从来没有碰过。对他来说，云图就是应力。

教学会把这种"忘"加快。课本讲原子，第一页就是电子云；讲应力，第一页就是云图。学生先见到签字，很久以后，甚至一直没有，才知道那是签字。一代人这样学，下一代人就更不会问。

还要补一句，免得读偏。忘记来历并不总是坏事。如果每次开车都要想一想方向盘背后的齿轮，人就没法开车。一门科学也一样，它必须让大部分模型"沉下去"，才能在上面盖新楼。问题只出在一处：当有人问"原子到底长什么样"的时候，沉下去的模型会抢着答话，说"就是我这样"。

罗明川没有让它抢着答。这是他那天上午做对的一件事。

◆ 二、客观物理换了三次

朵朵那本书上的图，有一个来历。

1909 年，盖革和当时还是学生的马斯登，在卢瑟福的实验室里用 α 粒子去轰极薄的金属箔，其中最出名的是金箔。绝大多数粒子穿过去了，极少数被弹了回来。卢瑟福据此在 1911 年提出：原子的质量几乎全挤在中心一个极小的"核"上，电子在外面。

这里有一个小细节，很适合本书。当时怎样知道粒子打到了哪里？靠一块涂了硫化锌的屏。粒子打上去，屏上闪一下微光。实验的人坐在暗室里，眼睛贴着显微镜，一下一下地数闪光。

原子核的发现，是一双眼睛在黑暗里数出来的。

数出来的，是闪光在哪里、有多少。这是视觉取得的特征，很稳，换一个人来数，大体也是这些。至于 α 粒子和金原子"碰"的那一下，是怎样碰的、碰到了什么、为什么弹回来，没有人摸到过。卢瑟福用库仑力去算：带正电的粒子，遇到带正电的核，按距离平方反比互相推开。算出来的散射角度分布，和数出来的闪光对上了。

于是，"电子绕核转，核与电子之间是库仑力"，成了原子的样子。朵朵书上那张图，就是它的后代。

这个样子有一个麻烦。按当时的电磁理论，绕圈的电子会不停地往外辐射能量，转着转着就该掉进核里。原子不该稳定。可原子明明是稳定的。

1913 年，玻尔给了一个办法：电子只能待在某几条特定的轨道上，在这些轨道上不辐射；它从一条轨道跳到另一条，才放出或吸收一份光。这个办法解释了氢原子光谱里那几条谱线的位置，比如可见光里那一组叫巴尔末系的线。

又是光。谱线是看见的。氢气放电，光透过棱镜或光栅，在屏上或底片上留下几条亮线。亮线在哪里，看得见，量得出。玻尔的轨道，是为了对上这几条看得见的线而立的。电子在轨道上"怎样待着"、核怎样"拉住"它，依旧没有人摸到，依旧是方程代签。

请留意，逼着卢瑟福的图让位的，是两样东西。一样是方程内部的矛盾：电磁理论说电子会掉下去。另一样是看见的谱线：氢原子只放出那几种颜色的光，不放出连续的一片。没有一样是手摸到了什么。

到这一步，卢瑟福的行星图就被降了一格。它不再是"原子的样子"，它成了"一个有缺陷的早期模型"。

1926 年，薛定谔写出了波动方程。同一年，玻恩给方程里的那个波一个读法：它的大小的平方，表示在某处找到电子的可能性有多大。电子不再有一条确定的轨道。它在核周围，是一团"可能在这里、可能在那里"的分布。画出来，就是课本上的"电子云"：近处浓，远处淡，有的像球，有的像哑铃。

逼着玻尔让位的，同样是这两样。轨道模型对氢算得好，换到稍复杂一点的原子就对不上谱线了，连只多一个电子的氦都算不好；另一边，德布罗意提出粒子也有波的一面。1927 年，美国的戴维森和革末用电子去打镍晶体，在某几个角度上量到弹回来的电子特别多；同一年，英国的汤姆孙让电子穿过金属薄膜，在底片上拍到了一圈一圈的衍射环。衍射的峰和环，又是一份给眼睛看的读数。

到这一步，玻尔的轨道也被降了一格。它成了"半经典的过渡模型"。

请把这三次连起来看。

1911 年，"电子绕核转"是客观物理。1913 年以后，它是一个有缺陷的模型；客观物理换成了"电子在几条量子化的轨道上"。1926 年以后，轨道也成了模型；客观物理换成了"电子云"。

每换一次，旧的"客观实在"就被降为模型。

这件事物理学家自己都知道，教科书也这么写。本书只想请读者在这里多看一眼：如果一个东西能被降为模型，那它在被降之前，就已经是模型了。它并不是在 1913 年那天"变成"了模型。它一直是。只是那时它太好用，大家把它当成了原件。

那么，它一直是什么的模型？

本书的回答是：它一直是一份代签。三次更换里，有一件事从头到尾没有变。取得特征的，始终是眼睛：数闪光、看谱线、读底片、看仪器的读数。被代签的，始终是同一样东西：粒子和核之间、电子和核之间那一下"碰"、那一份"拉"、那一种"缠"。这些从来没有被人的手直接取得。卢瑟福用库仑力签，玻尔用量子化条件签，薛定谔用波函数签。签字的笔换了三支，签的始终是缺席的触觉。

第十二章讲球棍模型时说过：小球是看的，小棍是猜的。三次更换，换的其实都是"小棍"那一边的写法：库仑力的连线，量子化的轨道，波函数的分布。小球那一边，也就是那些可以被看成一个个位置、一团团密度的东西，一直靠视觉的读数支撑着。

这就是我一直讲的那句话的意思：分子里面的原子结构，里面的触觉特征，即互相碰撞的特征，是模型假设的；可是我们把那个模型当做客观物理。

读到这里，一位物理学家可能会不服气：我们从来就知道这些是模型，谁把它当原件了？

这个反驳要认真对待。物理学里一直有一种态度，大意是：理论只是算东西的工具，好用就行，不必问它"真的"说了什么。这种态度常被叫作"工具主义"。持这种态度的人，确实不会把电子云当成原子的照片。

可是本书说的"代签"，和工具主义不是一回事。差别有两处。

工具主义说：别问后面有什么，问了也没用。代签说：后面有一样东西，是触觉本该取得而缺席了的；它不是不可问，是还没有被取。前者把门关上，后者指着门说：这里有一扇门，门那边原则上手能到。

工具主义对所有感官一视同仁地不问。代签则点名：缺席的是手和耳朵，到场的是眼睛。它给出一个方向，也就给出了一种可以落空的预期。如果有一天手

真的到了门那边，读到的和方程签的分毫不差，那就说明这份代签恰好签对了；那是代签说的一种结局，本书在第二十章把它列为四种结局之一。

另外，"我们知道是模型"这句话，在研究的前沿常常是真的；到了课堂、科普书、工程软件和日常谈话里，它常常就不再被说出口了。朵朵书上的那张图，没有一个字写着"这是模型"。罗明川的学生看着云图说"应力就是这样分布的"，他的老师也没有天天提醒他。代签被当成原件，很少发生在发明它的人那里，大多发生在用它的人那里。用它的人，比发明它的人多得多。

还要说清楚一点。电子云是不是也会被降为模型？本书不做这个预言。量子力学到今天仍是最精确的物理理论之一，它算出的很多数和实验对到了极小的误差。本书只说它的位置：它也是代签。它可能签得极好，好到永远不用换；但签得再好，签字也不等于手到了那里。

朵朵后来又问了一句："那为什么不直接去摸一摸？"

罗明川笑了："太小了，手伸不进去。"

"那用很小很小的手呢？"

罗明川没有再答。这个问题，本书留到第四编。

◆ 三、错置具体性与发现学

1925 年，怀特海在《科学与近代世界》里提了一个说法，叫"错置具体性的谬误"。大意是：科学为了思考方便，从具体的经验里抽出一些东西，比如"位置""质量""某一瞬间的状态"；这些抽出来的东西很有用，但人们后来把它们当成了最具体、最实在的东西，反倒把原来那个具体的经验当成了次要的、主观的。

把抽象当具体，这就是"错置"。

怀特海在同一本书里还批评过一个相关的想法，英文叫 simple location，中文常译作"简单定位"，和"错置具体性的谬误"一样，出在这本书的第三章《天才的世纪》：以为一块物质就简单地待在空间某处、某一时刻，跟别处别时没有本质的牵连。

这个说法和本书的"点性"几乎是同一件事的两种叫法。一样东西被看成"就在这一点上"，跟旁边无关，跟前后无关。在视觉里，这很自然：你盯着一处看，那一处的样子跟旁边一处可以分开；你一眼看全场，前后就压成了同时。在触觉里，这就不自然了：你按住面团的一处，旁边一处跟着动；你按下去，回应是一点一点来的。

本书的"代签当原件"，和怀特海是一路人。它们说的是同一类错。本书往前多走一步，在两处。

第一处：怀特海说抽象被当成了具体，没有特别追问抽象是从哪一种感觉里抽出来的。本书的回答是：主要从视觉。被抽出来的"位置"，是看出来的位置；"某一瞬间的状态"，是一眼同时看到的全场；"质点"，是聚焦到极小处的那一个点。第十章讲过，这正是视觉成像的三种物理性质：点对点、可切割、近乎瞬达。抽象并不是无色无味的"纯思维"，它带着眼睛的形状。

第二处：怀特海指出了错，没有给一个可以检验的说法。本书配了预测：如果代签说成立，那么触觉的通道一旦真正进入原子尺度，就会读出一些代签没算到、需要修正的东西（预测一）。如果长期只确认、零修正，本书就要收窄自己的话。

再接第 477 号《发现的发生学》。

那本书说：所谓"发现"，是一种发生重复得太稳。一个东西反复发生，每一次都一样，稳到人觉得它"本来就在那里"，等着被找到。于是本是发生出来的，被叫作"发现"了。

连"发现"这个词，都带着眼睛。汉语的"现"，古时就写作"見"，本义是显露出来、让人看见；英语的 discover，从拉丁语一路传下来，字面是"把盖子揭开"。揭开盖子，下面的东西就露出来给你看。这个词默认了：东西本来就在那里，只差一眼。

用这样一个词去说科学，会悄悄把"看见"当成"得到"的标准样子。一样东西若只能被摸到、听到，却不能被揭开盖子看一眼，它就很难被叫作"发现"。它只能被叫作"感觉""经验""手艺"。

本书沿着这句话问一个具体问题：在科学里，重复得最稳的，是哪一种发生？

答案几乎是现成的：视觉的发生。

想一想科学对"可重复"的要求。一个实验，换一个实验室、换一批人，要做出同样的结果。什么样的结果最容易"同样"？读数，曲线，图像，底片上的线，屏幕上的点。这些东西有三个好处。它们可以切开，一格是一格，互不牵连。它们可以同时摊给很多人看，你看我看他看，看到的是一张图。它们可以存下来，过十年再看还是那张图。这三个好处，恰好就是视觉的三性。

触觉的发生，很难这样重复。一位老中医四十年的手，在别人手上不能原样再来；母亲判出的"火候到了"，第二天换一口锅就要重新判。这不是触觉"不行"，而是触觉的显露本来就和这一只手、这一个对象、这一刻缠在一起，ω 大于一，v 有限。它不像视觉那样容易被切开、摊平、存住。

科学不是没有试过把触觉也弄得可重复。有一个小例子，家家都碰得到：砂纸。

砂纸的粗细，是一种手感。手一摸，就知道这张粗、那张细。可砂纸上标的，是一个"目数"，比如八十目、两百四十目。目数大致说的是筛磨料颗粒时用的筛网有多密。筛孔有多密，是可以看、可以数的。

于是，手上的粗糙，被一个看得见的筛孔数签了字。木匠用起来很顺手，八十目开粗，两百四十目打细。没有人觉得不对。可那个数说的是磨料颗粒有多大，说的不是手摸上去那种"刮"和"涩"。况且同一个目数，在不同国家的标准里对应的颗粒大小并不完全一样；换了磨料、换了底纸，手摸上去也会不同。

就连这么日常的触觉，要变得"可重复"，也是先借一个视觉的读数来签。这是今天科学让一样东西稳下来的通用办法。

所以，科学的"发现"里，重复得最稳的那一份，是视觉取得的特征。数闪光、看谱线、读刻度，一万次都一样，于是它们被认作"发现了的客观事实"。而原子里那一下"碰"，从来没有被重复取得过，连一次都没有。它只是被方程签了字，签名被印了一万次。

签名被印一万次，和原件被摸了一万次，看上去很像。都很稳，都可重复，都写进了教科书。差别在于：前一种稳，是同一支笔反复写同一个名字；后一种稳，才是手一次次到了那里。

今天的物理学，在原子内部，大量拥有的是前一种稳。

这句话有点重，要立刻加一句公道话：前一种稳并不廉价。一支笔反复写出同一个名字，还能和数万次独立的读数对得上，这本身就是了不起的成就。下一章专门说这份了不起。本章只是请读者别把它记错了：它是签名的稳，不是手到的稳。

代签被当成原件，会带来什么后果？本书在这里只点三件，后面各编分头展开。

第一件：不再去取原件。既然原子里的"碰"已经"知道了"，就很少有人觉得有必要亲手去摸一摸。让手进入微观的那条路，几十年里一直是一条小路，做的人不多，钱也不多。第十八章会讲那条小路上已经长出的苗。

第二件：拿代签去裁判别人。一门靠视觉读数加方程代签站稳了的科学，很容易把"可以读成刻度"当作"科学"的定义本身。于是一种主要靠手取得特征的学问，比如脉诊，就先被判为不合格。第二十七章会说，这样的裁判有一半是对的，有一半是把自己的片面当成了标准。

第三件：把怪事算到世界头上。我们到原子里去，几乎只能"用光去碰"，或者用和光同类的手段去碰。去碰的那一下，本身就改写了被碰的东西。第 394 号《一次闪光是谁的？》说过，读数与它的主人一起发生。本书补问一句：量子世界的一部分怪，会不会有几分来自我们只有这一种碰法？这是一个问题，不是一个结论，第十九章再谈。

三件事有一个共同的根：把签名当成了手到。只要把这一点重新分开，三件事都有了松动的余地。

罗明川那天晚上，把朵朵的科普书放回书架。他在书页那张原子图旁边，用铅笔写了一行小字："这是一种画法，画的是眼睛看到的，加上方程猜的。"

他想，等朵朵再大一点，再告诉她后半句：猜的那一部分，有一天也许能摸到。

他又想到自己那些学生。下学期第一次课，他打算先不放云图。他想让每人拿一根橡皮条，两手拉开，闭上眼睛，说一说哪里最紧、紧是从哪里传过来的、松手时哪一头先回去。说完了，再打开软件，看那张红橙黄绿蓝的图。

他不指望这一下就能改变什么。他只是想让学生在见到签名之前，先碰一下那个包裹。

带 走 的 话

能被降为模型的，从来就是模型；三次更换里没变的，是眼睛在取特征、方程在替手签字。

小　账

SDE 账：闪光、谱线、电子云图是被反复取得的视觉 S；数闪光、对谱线、解方程是一再重复的 D；粒子与核之间那一下"碰"所在的 E，从头到尾没有被直接取得，只被代签。

代签账：拆开了"客观物理"这一处总代签——卢瑟福、玻尔、薛定谔三支笔签的都是缺席的触觉；并指出"可重复"之所以偏爱视觉，是因为视觉特征可切割、可同时呈现、可存，正对 $r\to 0$、$\omega=1$、$v\to\infty$。

16

第 16 章

代签不是错：视觉科学的伟大与边界

这一章的问题

前五章一直在拆代签。拆到这里，必须回头说一句公道话：代签签得好不好？答案是，在很多地方好得惊人。那它在哪里够用，在哪里开始不够？

◆ 一、方程算得准

先说一件人人都知道、却很少有人停下来想的事。

人类把探测器送到了月球，送到了火星，送到了太阳系的边上。一个探测器从地球出发，飞上几个月、几年，要在某一天、某一刻，出现在一颗行星旁边预定的位置，借它的引力拐一个弯，再飞向下一颗。这件事做成了不止一次，二十世纪七十年代出发的旅行者号，就是这样一颗行星接一颗行星地借力飞出去的。

那颗行星，没有人摸过。探测器和行星之间那股引力，也没有人摸过。引力是什么，第十一章说过：它是被看见的轨迹，加上一个被代签的"力"。可是就凭这份代签，人算准了几亿公里外的一次相会。

再说一件更近的事。手机地图能把你定位到街道上的某一个路口。定位靠的是天上的卫星发来的时间信号。要定得准，计算里必须把相对论的修正算进去，不然误差会一天一天累积起来，一天下来就能偏到公里的量级。相对论里那些关于时间与空间的方程，也是代签：没有人摸过"时空的弯曲"。可是你每天出门导航，都在用这份代签，而且它没有让你走错路。

罗明川自己的行当，更是如此。

这是我构想的场景。他常带学生去湘江边看一座桥。桥是钢和混凝土做的，要扛住车、扛住风、扛住几十年的热胀冷缩。设计这样一座桥，要把它在电脑里切成很多很多小块，每一块列方程，算每一处吃多大的劲。罗明川对学生说：这里每一个数，都是网格和方程算出来的；桥建好以后，几十年没有出过大事，这就是那些数的分量。

他说这话的时候是自豪的。他有资格自豪。

还有你手里的这部手机。手机里的芯片，是在硅片上一层一层做出来的极小的开关。开关怎么开、怎么关，靠的是电子在晶体里怎样走。电子在晶体里怎样走，是量子力学和固体能带理论算出来的。没有人摸过一个电子在硅晶格里的路。可是照着这份代签，人造出了数以亿计的开关挤在指甲盖大小的地方，而且它们能用。

为什么本书一直用"签"这个字，而不用"猜"？

猜，是猜完了就算，对错无人负责。签，是要落名字的，落了名字就要认账。一份合同，代签的人签了字，出了事，要拿这份签字去对质。方程也是这样。它替缺席的手签下"这里的力是这么大""这里的碰是这样碰"，签完了，就要拿到读数面前去对质。对得上，它站得住；对不上，它要改。

所以，代签是一个有责任的动作。它不是蒙。科学的严肃，正在于它把每一次代签都送去对质。

这几件事放在一起，要说的是：代签不是乱签。

它为什么签得准？有两个原因，都值得记住。

第一个原因：它被对过账。第 407 号《被刻进世界的公式》说过，科学是理念和现实对账。方程签下的每一个字，都要拿去和读数对。对不上，方程就得改。几百年下来，签的字被对了无数次，对不上的大多被淘汰了，留下来的，是一次次对上了的。它的"准"，是被现实一遍遍逼出来的。

第二个原因：在很多场合，被代签的那份触觉，本来就只通过一些"看得见的平均效果"露面。行星和探测器之间的引力，你不必知道它"摸上去"是什么样，只要知道它让轨迹怎样弯。桥里的钢，在大多数时候、大多数地方，只要知道它整体上怎样伸、怎样弯。这种时候，代签只需要签对平均的效果，就够了。

这两个原因合在一起，造就了现代科学最伟大的一面：它在只睁开眼睛的情况下，替缺席的手和耳朵签出了一份份能用、好用、可以托付身家性命的字。

还有一份伟大，常被忘记，却和"视觉"二字分不开。

视觉取得的特征，可以摊开给所有人看。一条谱线，在伦敦的实验室里是这个位置，在东京的实验室里也是这个位置。一个读数，老教授读是这个数，刚进门的学生读也是这个数。这让陌生人之间可以不靠信任、不靠师承，就对一件事达成一致：你不信我，你自己去看。

这件事的分量很重。在很长的历史里，知识要靠权威、靠师傅、靠"我说了算"传下去。视觉科学给了另一条路：不管你是谁，只要看得见同一张图，就能检验同一句话。第七章说的"你看得见别人也看得见"，在这里长成了一种公共的规矩。现代科学能跨过语言、国界、门派，很大一部分靠的是这条规矩。

本书后面要给触觉、听觉立科学，头一样要学的，就是这一份本事：怎样让手上的特征，也能被陌生人检验。第二十八章讲的"稳定、可传、可验"，就是向视觉科学学来的。学它的规矩，不照搬它的单位。

本书拆代签，从来不是要撕这些字。一座桥扛了几十年，就是这些字最硬的辩护。

◆ 二、代签在哪里够用，在哪里失效

那么，问题来了：既然签得这样好，为什么还要说"代签"？直接叫"科学发现"不就行了？

因为签得好，是有条件的。

第十章讲过三重退化：伞收成点，要 r→0（作用范围小到可以当成一点）、ω=1（各处互不重叠，看此不改彼）、v→∞（信号瞬间传到，全场同时）。这三个条件，是视觉成像的三种物理性质。代签之所以准，是因为它照着这三个条件签字。

所以，代签够不够用，大致看对象本身离这三个条件有多近。

对象可以切割，这一块和那一块互不牵连，签成一个个点就不太吃亏。对象可以远观，看它不改变它，代签就不会被"看"这件事本身搅乱。对象的变化比信号传得慢得多，近乎瞬时地把全场一眼看完，也就不丢什么。

行星满足这三条。它离得远，你看它，它不在乎；它和别的行星之间隔着大片空无，彼此可以看成一个个点；它绕太阳一圈要一年，光从它那里过来只要几分钟。所以天体力学是代签签得最漂亮的地方。

这也许能解释一件科学史上的老事：为什么最早变得精确的科学，是天文学。古代许多文明都留下了相当精确的天象记录，能推算日食、月食，比如古巴比伦人靠长年的记录，已经能预报月食。天上的东西远、亮、互不打扰、走得慢，正是视觉三性最舒服的对象。科学最先在离手最远的地方站稳，大概不是巧合。

反过来，离手最近的东西，比如一块面团怎样被揉开、一根木头怎样被劈裂、一只手腕下的脉怎样跳，反而一直留在手艺里，很晚才被科学碰，碰了也碰得吃力。

桥在大多数时候也满足。钢的大部分区域，各小块之间虽然互相牵扯，但牵扯得平缓，切成网格不太失真；你测它，它也不太在乎；它的受力变化，比力在钢里传开要慢。

可是总有一些对象，离三个条件很远。

罗明川的老本行就碰到了一个。

钢板上有一道裂纹。按经典的弹性力学，裂纹尖端那一点上，算出来的应力是无穷大。这个无穷大，与其说是材料里的一股劲，不如说是方程在那里"签不下去了"。工程上有一整套办法绕过这个麻烦，用一些专门的参数去描述裂纹会不会长，比如应力强度因子。可是要模拟一道裂纹怎样长、往哪里拐、怎样分叉，就很难了。用网格算，裂纹常常只能沿着网格线走，网格一换，裂纹的路也跟着换。

罗明川做了二十年，对此再熟悉不过。

为什么会这样？用本书的话说，裂纹尖端是一个 ω 远大于一的地方。那里的材料，这一处被拉，旁边一处立刻跟着变；裂开的那一下，是一大片材料一起"商量"出来的。点性的方程，把它切成互不牵连的小块，商量就被切断了。

2000 年，美国学者西林（Silling）提出了一种叫"近场动力学"的理论。它不再说"每一点只受旁边无限近处的影响"，而是说每一点都和周围一定范围内的点直接相连，这个范围有一个半径。已有研究证明，这个半径趋于零时，这套理论收敛回经典的弹性力学。用伞的话讲：它把伞撑开了一点，r 不再趋于零；裂纹在里面可以自然地出现、长大、分叉，不必再事先告诉方程"这里有一道裂"。

请记住这个例子。它是一个触觉对象逼着数学放宽 r 的样板。断裂、撕裂，本来就是手最熟悉的事：撕一张纸，你的手比任何方程更早知道它要往哪边裂。预测二 说：放宽 r、ω、v 的理论，多数由触觉或听觉问题逼出；若主要由视觉问题逼出，承重二错。近场动力学是这本账上的一个正面例子。

第二个远离三条件的对象，是湍流。

拧开水龙头，开小一点，水流是一根光滑的柱子；开大，水柱就乱了，碎成一团一团。河水过桥墩，烟从烟囱冒出来，到一定程度都会乱成这样。描述流体的纳维—斯托克斯方程，写下来已经快两百年了（纳维在 1822 年、斯托克斯在 1845 年先后写出），可是它在三维情形下的解是不是总是光滑、不会突然"炸

开"，至今没有被证明，被列为数学界悬赏的千禧年大奖难题之一，2000 年由克雷数学研究所公布。

湍流难在哪里？大涡套着小涡，小涡套着更小的涡，一层一层，彼此牵连。这一处的一个小扰动，可以传到很远，改写那里的样子。它是 ω 大于一的，而且是在很多个尺度上同时大于一。点性的方程也能描述它，代价是要把网格切得极细极细，细到今天最大的计算机也常常算不过来。工程上于是发明了各种"模型"去近似那些算不动的小涡。

第三个对象，是生命体。

要用显微镜看清一个细胞的内部，常常要先把它固定、切片、染色。电子显微镜看得更细，但样品通常要处理成不再活着的样子。近年的冷冻电镜把样品急冻起来看，看得极细，可被看的东西也已经不再活着。看得越清楚，被看的东西就越可能已经不是原来那样活着了。

生物学家当然想了很多办法。给活细胞里的某种分子挂上会发光的标记，在显微镜下看它怎样动，最出名的是从水母里找到的绿色荧光蛋白。这样能看活的了。可你看，办法还是让它发光，还是给眼睛看。

更有意思的是另一类发现：细胞自己是"摸"着过日子的。2006 年，美国宾夕法尼亚大学的恩格勒等人在《细胞》杂志上报告：同一种间充质干细胞，放在软硬不同的底物上，会朝不同的方向分化，软得像脑组织的偏向神经一类，中等硬度的偏向肌肉，硬得像骨的偏向骨一类。细胞在"按"它脚下的东西，按出来的软硬，改写了它要长成什么。

一个靠触觉过日子的东西，被人用视觉去研究。这件事本身就说明了生命体为什么难签。

这是"可远观"这一条在生命体上出了问题。看，在这里不再是看此不改彼。要看清，就得先改它。活着的细胞，又恰恰是各部分互相牵动、处处在变的东西，离"可切割、可远观、近乎瞬时"三条都远。

第四个对象，就是本书反复提到的：脉，和火候。

湘中乡下的老中医邓守仁，切脉四十多年。他三根手指按在病人腕上，轻按一下，重按一下，再不轻不重地停一停。他说过一句很朴素的话（这句话是我为人物构想的）：脉是按出来的，你按的轻重不一样，它给你的就不一样。

一句话里，三个条件全不满足。按此牵彼：寸、关、尺三处，按一处，另两处跟着变，ω　　大于一。按的那一下本身就改写了被按的东西：没有"不碰就知道"的远观。脉的回应是一点一点来的，手要停一会儿才"等"到，v 有限。

邓守仁的事，本书只在这里作一个引子，第六编再细讲。这里只要说明：脉这样的对象，在三重退化的条件下签字，签不好，几乎是一定的。

火候在第十四章说过，不再重复。

把这些放在一起，可以列一张粗略的表。整张表都是本书判断，每一格都是粗估，不是已经被证实的结论。

对象（整表为本书判断）	可切割（ω≈1）	可远观（看不改它）	近乎瞬时（v≫变化）	代签的表现
行星与探测器	近乎满足	满足	满足	签得极好
桥梁大部分区域	大体满足	大体满足	大体满足	签得很好，需对账
半导体中的电子	单个电子切不开，按统计平均可以切	间接满足（靠电学读数）	大体满足	签得很好，靠量子力学
裂纹尖端	不满足	大体满足	部分满足	签不下去，需撑开伞
湍流	不满足（多尺度）	大体满足	部分满足	签得吃力，靠近似

对象（整表为本书判断）	可切割（ω≈1）	可远观（看不改它）	近乎瞬时（v≫变化）	代签的表现
活的细胞	不满足	常不满足	不满足	只能一段一段地签，拼不成一个活的整体
脉、火候	不满足	不满足	不满足	几乎签不了

这张表要读得稳。它不是说上面几行的科学"对"，下面几行的科学"错"。下面几行里，科学家做了大量了不起的工作，有很多办法、很多进展。表只说一件事：越往下，对象离视觉三性越远，代签就越吃力，越需要给方程打补丁。补丁打多了，就该问一句：是不是这里本来就要一种别的单位？

还有一件事值得一提：科学自己，其实已经在这些地方撑伞了。

近场动力学是撑开 r。第十四章提到的有限传播速度的热传导，是不再让 v 趋于无穷。湍流和材料研究里的"多尺度方法"，是承认大尺度和小尺度互相牵连，不能各算各的，相当于承认 ω 大于一。这些办法，都是科学家被对象逼着，一点一点从三重退化里往外挪。

本书对它们的读法是：这是触觉、听觉的科学在视觉科学内部已经冒出的芽。它们大多还被当作"对经典方法的修正"，好像只是给旧房子加几根柱子。本书想说的是：这几根柱子，可能是另一栋房子的地基。至于是不是，要看预测二那张账：放宽 r、ω、v 的理论，多数由触觉或听觉问题逼出；若主要由视觉问题逼出，承重二错。账要记全，反例也照写。相对论放宽了 v，光速不再无穷，可逼出它的是光自己的问题，这一笔记作"光自身逼出的特例"。图像处理里也有放宽 ω 的非局域算子，为的是把一张照片的噪点去得更干净，这一笔照记作反例。正例、反例、特例一起摆上桌，第二十五章再结总账；如果断裂、撕裂、声、热这一类占了多数，这几根柱子就不只是补丁。

代签在它的条件里，是对的，而且伟大。错只发生在一处：把代签的条件忘了，把它当成了在任何对象上都签得了的原件。

◆ 三、只睁开眼睛的科学

一个人睁开眼睛，能看得很远。能看见山那边的云，能看见夜空里几亿公里外的星。可是只睁开眼睛、手插在口袋里、耳朵塞着的人，有一些事是做不了的。他不能判断一只西瓜熟没熟；他不能知道一锅肉什么时候该出锅；他不能分辨一道裂纹下一刻往哪边走。

现代科学，就像这样一个人。

它的眼睛是自己的，而且越长越亮：望远镜、显微镜、各种把听和触翻译成图像的仪器，一次次给它扩容。它的手和耳朵，是方程借给它的：凡是碰撞、节奏、压、拉、热的往里钻，它都用一组方程去代签。借来的手和耳朵很好用，好用到它常常忘了是借的。把借来的当成世界，就叫客观物理。

这句话是本书的判词。说到这一章，第三编要收尾了，可以把它连着前面几章再走一遍。

第十一章说，力从来没被看见，看见的是轨迹，力是代签的。第十二章说，原子里的碰撞是模型假设的，小球是看的，小棍是猜的。第十三章说，声音被画成曲线，用视觉的工具处理听觉的对象，好听在曲线上找不到。第十四章说，热、压、气被读成刻度，丢掉的"钻、贴、扑、到了"由方程补签。第十五章说，代签好用到被当成原件，客观物理换了三次，每次换下来的都证明它一直是代签。这一章说，代签不是错，它在对象离视觉三性近的地方签得极好，在离得远的地方签得越来越吃力。

六章走下来，本书要守住两句话，缺一句都不对。

一句是：视觉科学是人类最伟大的成就之一。它算准了行星，撑住了桥，造出了芯片。任何想绕开它、贬低它的说法，本书都不赞成。

另一句是：视觉科学只睁开了眼睛。它的手和耳朵还没有长出来，是借的。在裂纹、湍流、生命、脉、火候这些地方，借来的手和耳朵越来越不够用。

这两句话合起来，就有了一个方向。不是把眼睛闭上，是把手和耳朵也睁开。

"睁开手和耳朵"，也要先说清楚它不是什么。

它不是说回到老师傅的直觉，凭感觉办事，不要读数。老师傅的手很宝贵，可是一只手的本事如果只能在一个人身上，传不出去、对不了账，它就还不是科学。

它也不是说给现有的科学多加几种传感器。许多仪器早就能测压、测振、测声了，第八章说过，它们几乎都把测到的东西翻成给眼睛看的曲线和图。多加传感器，只要还是这样翻译，就还是视觉科学，只是眼睛前面多了几副眼镜。

它要的是第三件事：让手和耳朵自己取得的特征，有它自己的单位，能稳定、能传、能验。单位不再是点，是伞；取得的次序是先在人身上实现，再交给机器模拟放大，再回到人的手和耳朵检验。这两样，第五编和第七编会细讲。

最难的地方，恰恰是第十二、十五章说的那里：原子里面。眼睛靠着显微镜、衍射、各种光谱，已经能"看到"原子的位置。手呢？手太大了，伸不进去。

罗明川那天从湘江边的桥上回来，想起上一章末尾那个他没答上的问题："那用很小很小的手呢？"

现在他想：如果真有一只很小很小的手，能像眼睛靠显微镜进入微观那样，靠某种仪器进入原子里面，亲手去碰一碰电子和核之间的那一下——那时候，方程签下的那些字，会被一个一个拿出来对。有的会对上，有的会对不上。对不上的地方，就是物理学要改写的地方。

这个假想并不是凭空来的。1981 年，宾宁和罗雷尔做出了扫描隧道显微镜；几年后，又有了原子力显微镜。原子力显微镜靠一根极细的针尖，一行一行地在样品表面"摸"过去，针尖和原子之间那股极微小的力，让它上下起伏。第八章说过：它真的在摸，输出的却是一张图。

后来还有人把这样的探针接上力反馈手柄，让人的手感到针尖碰到的东西，第十八章要讲的 nanoManipulator 就是一例。可是在那里，手感到的力，多半是模型先算好、再推给手的。手到了门口，门还是方程开的。

所以，"一只很小的手"已经有了影子。它缺的不是零件，是位置：让手取得的东西，不再先翻成图、不再先由方程算好，而是作为第一手的特征站出来。

这是一个假想，还不是事实。

可是假想也有它的用处。第四编就从这个假想开始：如果手能伸进原子，会发生什么。那是一场预演的物理学革命，本书不预言它一定发生，只把它可能的几种结局摆出来，并且说清楚：读出什么，就算本书错了。

带 走 的 话

代签签对了行星，签稳了桥，签出了芯片；它只在对象切不开、远观不了、来不及瞬时看完的地方，开始签不动。

小　账

SDE 账：行星轨迹、应力分布、能带是视觉取得并反复对账的 S；方程推演与网格计算是 D；裂纹尖端、湍流、活细胞、脉里那片切不开的互相改写，是代签最难触到的 E。

代签账：给出代签"够用与失效"的判据——对象离 $r\to 0$、$\omega=1$、$v\to\infty$　三条件越近签得越好，越远越吃力；以近场动力学为例，说明断裂这一触觉对象已逼出把 r 撑开的数学（预测二 的正例）。

◆

第　四　编

如果手能伸进原子：一场预演的物理学革命

导　语

本编命题：触觉一旦像视觉一样进入微观，被方程代签的 E 第一次能直接取得，物理学要改写。我常说的一句话是："假想有一天人类的触觉能力可以像视觉能力进入微观世界，即原子里面，此时物理学要发生颠覆革命。"

先把话说在前头：这一编是思想实验，是预案。今天没有哪台仪器已经让人的手真正伸进原子，本编也不假装它已经发生。我们做的事情，是在它发生之前，把会改写什么、可能怎样落空、读出什么就算本书错，一样一样摆到桌面上。

17

第 17 章

望远镜、显微镜、触觉镜：第三次感官扩容

> 这一章的问题
>
> 人类已经两次把感官扩到肉身够不着的地方，两次扩的都是眼睛。如果有第三次，扩的是手，那台仪器要做到什么，才配叫"触觉镜"？

◆ 一、许蔓的那颗草莓

这是我构想的场景。

深圳，一个周四的晚上九点，机器人公司的实验室里只剩许蔓一个人。她三十一岁，做触觉传感，每天的活儿就是让机器手指"知道"自己按到了什么。

台面上放着一颗草莓。机械手的两根指头慢慢合拢，指腹上贴着她调了半年的传感膜。屏幕上跳出一排数字，又画出一条曲线：压下去多少，弹回来多少，滑了没有。

曲线一拐，机械手停了。草莓没被捏破。

许蔓松了口气，伸手把草莓拿起来，在指间轻轻按了一下。这一下她什么都没想。软，凉，表皮有一点涩，按下去的地方带着周围一圈一起往里陷。她的手在一瞬间就"知道"了这颗草莓，比屏幕上那排数字知道得多。

她盯着屏幕想：我花半年，让机器的手学会了一点点人手的本事。可人手自己的本事，停在什么地方？

停在一个说小也不小的地方。手指按住不动，能觉出的最小凸起，大约是零点二毫米。手指滑过去，本事要大得多：2013 年瑞典的一项实验里，人能用指尖分出只有十几纳米高的细褶。可这已经到了头，而且摸到的是一大片细褶一起给手的效果。一个细胞单独站在那里，手取不到它；一个原子更不用说。人类对原子说的每一句话，没有一句是手亲自取得的。

这件事许蔓早就知道，那天晚上才第一次觉得奇怪。

◆ 二、两次扩容，都扩给了眼睛

先看历史上已经发生的两次。

第一次是望远镜。1609 到 1610 年，伽利略把自己磨的镜子对准夜空，看见了月亮上的山和坑，看见木星旁边有几颗小星星在一夜一夜换位置。眼睛第一次看到了肉身够不着的远处。

第二次是显微镜。1670 年代，荷兰的列文虎克用自制的小透镜，看见一滴水里有许多会动的小东西。眼睛第一次看到了肉身够不着的小处。

这两次扩容改变了一切。天文学从此有了新的天空，生物学从此有了新的身体。后来的照相底片、电子显微镜、各种成像设备，都沿着这两条路往前走，越看越远，越看越小。

可是请留意，两次扩的都是同一种感官。眼睛被一次一次加长、加细，手一直停在原处。

手停在原处，科学里那些要靠手才取得的东西怎么办？第三编已经讲过：由方程代签。看见行星的轨迹，用万有引力去补"拉"；看见晶体的衍射斑点，用势函数去补原子之间的"推"和"挤"。望远镜和显微镜让人最先觉察的是 S，是越来

越精细的显露；E 那一半，原子之间你推我、我牵你、彼此改写的那一半，从来没有被亲身取得过，一直由方程签字。

这就是视觉扩容的特点：它扩得越成功，视觉科学就越牢固。看得越清楚，代签就越像原件。

所以说，前两次扩容并没有给科学补上缺席的那半边身体，反而让它更习惯于只用一只眼睛。

不妨把伽利略看木星那几夜拆开来看。第一夜，木星旁边冒出几个小光点，这是 Show。连看几夜，光点有时在左、有时在右，有时少了一个，这是差异；把这些差异排成先后，才看出它们在绕着木星转，这是 Direction。到这一步，眼睛已经把 S 和 D 都拿到了。可"绕着转"背后那一下"拉"，木星和小卫星之间互相牵着的那份纠缠，伽利略看不见，后来的牛顿也看不见。牛顿给了它一个式子。式子算得极准，准到后人几乎忘了，那一下"拉"从来没有谁亲手感到过。

列文虎克那一滴水也一样。他看见小东西在游，看见它们撞到一起又分开。撞上那一下是什么滋味，是软的还是硬的，是黏住还是弹开，他只能从形状的变化去猜。显微镜越造越好，猜得越来越有根据，可手始终没有进去。

◆ 三、手本来就会的事

在说触觉镜之前，要先替手说一句公道话：手不是粗笨的器官，它本来就是一台精密的取证仪器，只是一直被关在指头自己的尺度里：指尖滑过去，觉得出十几纳米高的细褶，却分不出相隔不到两三毫米的两个点，更伸不进一个原子。

做触觉研究的人早就把手的本事列过账。荷兰学者 Kappers 和 Bergmann Tiest 在 2013 年写过一篇综述，把触觉能感知的东西归了类：粗糙，顺应（软硬），摩擦，冷暖，形状，曲率，甚至数目，闭着眼睛摸一把小球，能说出大概有几颗。这些都是手的本行。

同一篇综述也老实写了另一面：触觉有显著的错觉。比如同样重的两样东西，大小不同，手会觉得小的更重，这就是有名的大小—重量错觉。

这两面放在一起看，很有意思。手会出错，眼睛也会出错，视错觉的图谁都见过。可眼睛出错，科学的办法是造仪器、立标准、交叉核对，把看到的东西变稳。手出错，科学的办法往往是干脆不信手，把它的证词换成刻度，换成曲线，换成给眼睛读的数字。第二编第八章讲的就是这件事：仪器的共同本事，是把听和触翻译成可看的。

所以手被关在原子之外，有两道墙。一道是尺度的墙：手指太粗，伸不进微观。另一道是信任的墙：即便手取得了什么，科学也习惯先把它翻成图，才肯算数。

触觉镜要拆的是这两道墙。只拆第一道，造出一台能摸原子的机器，末了又把摸到的东西画成一张图交给眼睛去读，那就等于什么都没拆。

许蔓按草莓的那一下，在她自己身上是可信的。她知道这颗草莓熟了，知道再用力就会破。这份知道，没有经过任何一张图。触觉镜要让这份知道，有一天也能在原子尺度上被信。

◆ 四、"触觉镜"：本书给第三次扩容起的名字

现在假想第三次扩容。

我给它起一个名字，叫"触觉镜"。这个名字是本书构想的，世上还没有这样一种成型的仪器。用"镜"字，是为了和望远镜、显微镜排在一起，提醒读者它们是同一类事情：把一种感官送到肉身够不着的地方去。用"触觉"，是说明这一次送出去的是手。

那它要做到什么，才算数？

拿许蔓按草莓那一下来对照。那一下里，她的手同时取得了三样东西。

一样是软硬。按下去，草莓让多少，回顶多少。这叫顺应性，物理上说是对压力的回应。

一样是粘滑。手指在表皮上蹭一下，是涩还是滑，是粘住还是溜开。这叫摩擦，是两样东西接触面上的互相咬合。

一样是推拉的回应。按这里，旁边一圈也跟着陷下去；松开，它们一起回弹。这是按此牵彼，是特征在手和草莓之间互相改写。

三样合在一起，就是触觉最先让人觉察的那一维：E，特征纠缠。

触觉镜要做的，就是把这三样，原封不动地，从原子尺度送到人的手上。软硬、粘滑、推拉回应，都要让手直接取得。

这里有一个关键的分界。今天已经有许多仪器能"测"微观的力，它们的路子是：先取得一张图，或一串位移数据，再用模型把力算出来。这条路是先看、后算，算完再告诉人"这里的力是多少"。触觉镜要走的是另一条路：手先取得，图和方程后到。顺序一换，谁是原件、谁是对账单，就跟着换了。

用第二编的伞来说，这个分界更清楚。视觉把世界收成点，靠的是三重退化：作用范围收到零，$r\to 0$；局部之间互不重叠，$\omega=1$；信号瞬间传到，$v\to\infty$。触觉镜如果只是把一个力的读数推到手上，它在中途已经把伞收拢了，手接到的仍是一个点。真正的触觉镜要一路保住伞：手按到的是一片，r 大于零；按此牵彼，ω 大于一；回应一层一层传来，v 有限。三样少一样，它就退回了显微镜。

不妨做一个纯粹的思想实验，想象触觉镜已经造好，你的指尖被接到一块晶体的表面上。

指尖慢慢滑过去。先冒出来的是一个一个小鼓包，这里一个，那里一个，这是 Show。滑得多了，鼓包有了高低、有了间距，手知道哪里是一排、哪里是一个缺口，这是 Shape，再往后成了 Structure。鼓包一个接一个地来，有快有慢，有轻有重，排成一种节拍，这是手里的差异序列，D。最要紧的是第三样：你用力按住其中一个鼓包，旁边的几个也跟着往下沉，松手时它们一起回来，回来得还不一样快，这是按此牵彼，是 E。

这一下里，S、D、E 一样不少。这也提醒读者，触觉镜取得的并不只是 E。手和眼睛一样，有自己完整的 S·D·E，只是手最先让人觉察到的是 E。显微镜给的那张原子图，同样有 S、有 D、有 E，可它最容易让人觉察的是 S，是那一个一个排得整整齐齐的亮点；亮点和亮点之间互相怎样牵扯，图上是静的。

还要防一种误会。触觉镜不是来取代显微镜的。两样仪器摆在一起，一个给出最清楚的显露，一个给出最直接的纠缠，它们各是一个证人。本书从头到尾都保留视觉科学的那一半，第十六章已经说过：方程算得准，代签在许多地方够用。触觉镜要做的，只是让另一半不再缺席。

◆ 五、为什么第三次是"颠覆"，前两次只是"扩大"

我一直讲，触觉一旦进入原子，物理学要发生颠覆革命。这句话的分量，要放在前两次扩容旁边才看得出。

望远镜和显微镜带来的是巨大的发现，但发现的方式没变：看，记下来，列方程，推演。眼睛看到的东西越多，方程要解释的东西越多，方程也就越精致。科学的骨架始终是同一副：S→D→E，先看见显露，再排出差异序列，末了用模型去假设纠缠。

触觉镜要动的恰恰是这副骨架。它让 E 第一次可以先于方程到场。到那时，方程的地位就要重新商量。如果手摸到的跟方程算的一样，方程从此有了第二份

签名；如果不一样，那就有一处代签要改写。无论哪一种，物理学都第一次有了一个不经过眼睛的证人。

一门几百年来只有一个证人的科学，突然多了一个证人，这本身就是颠覆。证词对不对，倒是次要的。

罗明川是做断裂力学的，一辈子画网格。如果他坐在许蔓旁边，大概会问一句很实在的话：手那么粗，原子那么小，你怎么可能让手"伸进去"？

这句话问到了要害。人的手指不会变小。触觉镜不能把人缩小，只能把原子尺度的推拉、软硬、粘滑放大、放慢，换成手能接得住的尺度。放大和放慢本身，就要用模型。那么问题来了：用了模型的触觉镜，凭什么比"先看后算"的仪器更有资格叫原件？

这一问我不回避。我的回答分两层。

第一层，放大和放慢可以是"保形的"。就像把一段声音放慢十倍，音高变了，旋律的先后、轻重、叠合都还在。触觉镜要保住的是伞的形状：哪里软、哪里硬、哪里按此牵彼、牵多远、传多快。只要这些关系一路不被切成点，手接到的仍是一把伞，只是撑得大一些。

第二层，即便有模型参与，模型的位置也不同了。在"先看后算"的仪器里，模型负责"补"出力来，力本身是模型生产的；在触觉镜里，模型只负责"换尺度"，力的样子由微观那一头自己显露出来。一个是代笔，一个是翻译。代笔可以写出原文没有的东西，翻译要对原文负责。

翻译对不对原文负责，怎么知道？这里可以借一个朴素的办法：先拿手本来就懂的东西去校。把触觉镜的放大倍数调小，让它去摸一块橡皮、一片玻璃、一团面，这些东西人手直接摸过千百遍。如果经过触觉镜送回来的软硬、粘滑、牵连，和手直接摸到的一样，说明这一段翻译是保形的。再一级一级往小处调，每

调一级，都留一个能对照的东西。这就像学一门外语，先从两边都认识的词对起，再慢慢往生词里走。

这个办法不能保证到了原子尺度还不走样。它只能把"走样"变成一件可以追查的事：哪一级开始对不上，就在哪一级停下来查。能追查，翻译就有了信用；不能追查，它就和代笔没有分别。

这个区分做得到做不到，是触觉镜成不成立的命门。下一章看一个已经走了三十年的萌芽，就是要看它在这道门槛前停在了哪里。

◆ 六、第三次为什么迟迟没来

望远镜到显微镜，中间只隔了几十年。显微镜之后，三百多年过去，手还没有跟上。为什么这么慢？

一个原因在感官本身。眼睛是远感官，光自己飞过来，眼睛只管接。把光引导、聚焦、放大，就是透镜的全部工作。手是近感官，非碰不可，而且碰是双向的：手推出去，对方顶回来，两头同时在改。要把这种双向的往来送到原子尺度，再原样送回来，比把光聚一聚难得多。视觉扩容只需要一条单向的路，触觉扩容需要一条来回的路，而且来回都不能走样。

另一个原因在科学的习惯。既然方程已经能把力算得那么准，谁还需要亲手去摸？代签好用，就没人觉得原件缺席。一个领域如果从来不觉得缺什么，也就不会有人花三百年去造一样东西来补。

还有一个原因藏得更深：手的证词不好交给别人。第七章说过，视觉的稳定特征有一个大优点，你看得见，别人也看得见，一张照片可以传遍全世界。手按到的软，却留在手里。许蔓说这颗草莓熟了，旁人要信，得自己也按一下。触觉镜如果造出来，必须同时造出一种"让别人也按一下"的办法：同一块表面，不同

的人、不同的日子去摸，摸到的牵连关系要对得上。做不到这一点，手的证词就只是个人感受，进不了科学。

这三个原因，一个是技术上的难，一个是交接上的难，一个是心里不觉得难。第三个最顽固。技术上的难，要工程师一代一代去啃；交接上的难，要第六编讲中医时再细谈，脉诊在这件事上已经挣扎了两千年。本书写第四编，想先拆的是第三个：让人看见，这里确实缺了一个证人。缺席的东西一旦被看见，就会有人去补；从来没被看见，就永远只有方程替它签字。

◆ 七、第三次扩容，扩的不只是一种感官

还要多说一层。

望远镜和显微镜扩的是眼睛，也把"观察者"这个角色固定了下来。观察者站在远处，看着，不碰，不改。科学的客观性很大一部分就建立在这个姿势上：我看你，你不因为我看而改变。约纳斯把视觉的这种性质叫作"距离"，叫作"因果被中立化"。

触觉镜扩的是手。手没有那个姿势。手一碰就改变了被碰的东西，被碰的东西也同时改变了手。许蔓按草莓，草莓陷下去一点，她的指腹也被顶回来一点。这一下是两边一起发生的。

所以第三次扩容，扩出去的不只是一种感官，还是一种站法。科学家从站在远处的观察者，变成伸手进去的接触者。这件事要到第十九章再细说。这里只先记一笔：触觉镜一旦成真，被改写的除了几条方程，还有"做科学的人站在哪里"。

那天晚上，许蔓把草莓放回台面，在笔记本上写了三个字："触觉镜"。下面画了一个问号。

这一编要做的，就是陪这个问号走完：它要做到什么，已经有人做到了哪一步，做到之后会改写什么，没做到又说明什么。

> 带 走 的 话
>
> **望远镜和显微镜把眼睛送了出去，触觉镜要把手送出去；手第一次到场，科学才第一次有了不经过眼睛的证人。**

小账：

- SDE 账：S 落在两次视觉扩容带来的越来越精细的显露；D 落在"先看后算"与"手先到、方程后到"两种次序的对照；E 落在许蔓按草莓那一下的软硬、粘滑、推拉回应。
- 代签账：本章指出视觉扩容越成功、代签越像原件，并给出触觉镜的伞条件：一路保住 $r>0$、$\omega>1$、v 有限，任何一项在中途退化，它就退回显微镜。

◆

18

第 18 章

nanoManipulator：已有的萌芽为什么还不算

> **这一章的问题**
>
> 三十多年前，已经有人让手"摸"到了纳米世界。那为什么本书还说，触觉从来没有亲自进入微观？

◆ 一、罗明川收到的一段视频

这是我构想的场景。

长沙，十一月，一个阴冷的下午。罗明川刚批完一摞学生的有限元作业，手机响了一下。是许蔓，他前年在一次工程会议上认识的年轻人，做机器人触觉的。

她发来一段老视频的链接，后面跟着一句话："罗老师，您说手伸不进原子。可有人三十年前就在'摸'纳米管了。"

视频画面很旧。一个人坐在屏幕前，右手握着一根像台灯支架一样的机械臂，屏幕上是一片起伏的灰色表面，中间躺着一根细细的东西。那人手腕一动，屏幕上的细东西就被推着挪了一点。旁白说，操作者能通过手柄感到探针碰到了这根碳纳米管。

罗明川看了两遍，回了一句："感到的是什么？是那根管子，还是电脑告诉他的那根管子？"

许蔓过了很久才回："这正是我想问您的。"

这一章要回答的，就是罗明川这一问。

◆ 二、两台会"碰"的显微镜

要讲那只手柄，先要讲它接在什么东西上。

1981 年，IBM 苏黎世实验室的宾宁（Binnig）和罗雷尔（Rohrer）做出了扫描隧道显微镜，简称 STM。它的办法很巧：一根极细的金属针尖，靠近导电样品的表面，近到原子尺度，两者之间会流过一股微弱的隧道电流。针尖离表面稍近一点，电流就变大，稍远一点就变小。针尖一行一行地扫过去，把电流的变化记下来，就得到表面高低的分布。原子第一次以一个一个小鼓包的样子出现在人眼前。

严格说，STM 的针尖并没有"碰"到样品，它靠的是电流对距离的灵敏。几年以后，1985 到 1986 年，宾宁等人又做出了原子力显微镜，简称 AFM。它把针尖装在一根极薄的小悬臂上，针尖贴近或轻触表面，表面原子推它、拉它，悬臂就弯一点。再用一束光打在悬臂背面，看反射的光点挪了多少，就知道悬臂弯了多少。

AFM 是真的在"碰"。表面和针尖之间你推我拉，这正是触觉的本行，是 E。可第八章已经讲过它的结局：碰来碰去，输出的是一张图。悬臂的弯，被一束光读出来，变成一个光点的位移，再变成屏幕上的明暗。手的活儿让针尖干了，针尖的感受又交给了眼睛。

这两台仪器是二十世纪显微技术的高峰，宾宁和罗雷尔也因 STM 获得了 1986 年的诺贝尔物理学奖。它们让人类第一次"看见"了单个原子。1989 年，IBM 的研究者用 STM 的针尖把三十五个氙原子一个一个挪到指定位置，排出了"IBM"三个字母。挪原子，本是手的活；那一次传遍世界的，却是一张照片。请留意这里的动词：看见。

◆ 三、教堂山的那只手柄

美国北卡罗来纳大学教堂山分校，有一群做计算机图形和虚拟现实的人。1990 年代起，泰勒（Taylor）、布鲁克斯（Brooks）、罗宾内特（Robinett）等人做了一件当时很少有人想到的事：把扫描探针显微镜接到一只力反馈手柄上。他们给这套系统起名 nanoManipulator，意思是"纳米操纵器"。

力反馈手柄，就是那种会"顶"你手的机械臂。你推它，它可以按程序的指令往回推你，让你感到阻力、感到碰撞、感到滑过一道坎。电子游戏里方向盘会震、会沉，用的是同一类原理，只是精细得多。

接上之后，事情变了。操作者不再只是盯着屏幕上的表面图，他可以用手引导探针，在纳米尺度的表面上"走"。走到高处，手柄往上顶；走到坑里，手柄往下沉。在公开介绍里，这套系统被用来摸纳米表面的起伏，推动碳纳米管，在液体里拨动病毒颗粒。到 2014 年，系统的软件开源了，任何人都可以拿去用、拿去改。

这件事在教堂山有更早的根。布鲁克斯在 1967 年就起了一个叫 GROPE 的项目。起初做的是平面上简单的力场，后来因为计算机太慢停过好些年，到 1980 年代后期才做成完整的版本：化学家握着一只力反馈机械臂，把药物分子往蛋白质的"口袋"里塞，手上感到推挤与吸引。那时没有扫描探针，分子之间的力完全由公式算出：电荷之间的库仑力，加上第十二章讲过的 Lennard-Jones 势，预先算好存进一张三维网格，再推给手。这段前史很能说明问题：在这条路的源头，手感到的力就是方程的产物。后来接上了真实的显微镜，手接触到的表面是真的了，可"由模型算出力"的那个习惯，一并带了过来。

这是一件值得尊重的事。在它之前，纳米世界和人手之间隔着一整套只给眼睛看的流程；在它之后，人手第一次被放进了这条回路。许蔓发那段视频，是对的，这确实是触觉镜的萌芽。

可萌芽和花之间，还隔着罗明川那一问。

◆ 四、第一个停点：力是算好了才推给手的

手柄顶你的那一下，从哪里来?

把这条回路拆开来看。针尖在表面上与原子相互作用，悬臂弯了，或电流变了；仪器把这些信号记下来，变成表面的高度数据；电脑再根据这些数据和它的模型，决定在你手所在的位置应当给你一个多大的、朝哪个方向的力；手柄的电机照着这个决定，推你的手。北卡团队自己的论文写得很清楚：每一轮循环，程序拿针尖量到的表面高度，在你的手所在的位置拟出一小块平面，再按弹簧的规律，算出手该被这块平面顶回多少，一秒钟算上千次。手柄推手的力，并不是针尖碰到的那股力本身。

一句话说：手接到的力，是模型算好了才推过来的。

这就回答了罗明川的问题。操作者感到的，是电脑告诉他的那根管子。那根管子的软硬、它和表面之间粘不粘、推它一下旁边的东西动不动，凡是手柄能给出来的，都要先在模型里有一个位置。模型里没有的，手就感不到。

拿驾校里的模拟器打个比方。坐进去，方向盘会沉，过减速带会颠，急刹时座椅会往前一冲，几乎和真车一样。可是有一样东西模拟器永远给不了你：意外。程序里没有写的坑，你就永远颠不到。真车开在真路上，哪天轧到一块没人知道的碎石，方向盘会猛地一抖，这一抖不在任何人的预料里。

一份证词有没有分量，就看它能不能带来这样的一抖。这里要说得公道些。nanoManipulator 接的是真实的显微镜，表面上真有一个没人料到的坑，高度数据里会有它，手柄也会让手沉下去。在形状这一层，它能带来意外。难的是另一层：那个坑的边是软是硬，坑底粘不粘，按一下四周会不会一起塌，这些属于

E 的意外，要先在模型里有位置，才能推到手上。所以它能让手遇到意料之外的显露，很难让手遇到意料之外的纠缠。触觉镜要的，恰恰是后一种碎石。

用第三编的话说，这里仍是代签。只是代签的那一笔，从纸上的方程，挪到了手柄的电机上。从前，方程替缺席的手签字，给眼睛看；现在，方程替缺席的手签字，再推给手。手到场了，可它签收的仍是一份代签。

再用 SDE 的次序看。这条回路走的还是现代科学的老路：先取得表面的显露，S；再把显露排成高度数据，D；末了由模型给出力，E。E 依旧排在末尾，依旧是被推算出来的。手接在了这条链的末端，没能把次序倒过来。

所以说，触觉在这里仍附属于视觉与方程。它是一种更亲切的读图方式：把一张高度图，从"看"换成"摸"。这已经很了不起，但它还在第十七章那条命门的门外：模型在这里做的，是代笔，还谈不上翻译。

◆ 五、离 E 最近的一次：把一个分子拉开

在显微镜这一族里，还有一种做法，比摸表面更接近触觉的本行。

AFM 的针尖不仅可以横着扫，还可以竖着走：压下去，再拉起来。压的时候，表面顶它；拉的时候，表面可能粘住它，到某一刻"啪"地松开。把一路上悬臂弯了多少记下来，就得到一条力随距离变化的曲线，行内叫力谱。更进一步，研究者可以让针尖粘住一个长长的分子的一端，慢慢把它拉长，看它在哪里抵抗、在哪里突然松一截，据此推断分子内部是怎样折叠的。1997 年就有人这样一截一截地拉开过肌肉里的一种巨大蛋白。

这已经非常接近许蔓按草莓的那一下了：压进去，感到顶；拉出来，感到粘；拉到某处，一截一截地松。软硬、粘滑、推拉回应，三样都在。

可是请看它的去处。这一路的推拉，被记成一条曲线，画在坐标纸上，交给眼睛去读。研究者看曲线的拐点，再用模型去拟合，说这一段像一根弹簧，那一段像一把锁。手的本行，又一次被翻译成了给眼睛看的痕。第 407 号《被刻进世界的公式》说，仪器把现实变成可读的痕；这里可以补一句：这道痕是给眼睛的。

力谱比 nanoManipulator 更接近 E 本身，因为力是测出来的，不是按高度图算出来的。它的停点在另一头：取得了 E，却没有交给手，交给了曲线。nanoManipulator 把手接上了，推手的却是模型；力谱把真的推拉取到了，读它的却是眼睛。两样东西各走了一半，恰好没有在中间会合。

这一点对本书很要紧。触觉镜要的那两半，今天其实都已经有了萌芽：一边是"手在回路里"，一边是"推拉是实测的"。缺的是把两半接成一条：让实测的推拉，不先变成曲线，直接、保形地到达手上。

◆ 六、第二个停点：一根针尖和一只手

还有一层更朴素的限制，出在手本身。

先说尺度。人的指腹按下去，接触的是一片，上面密布着各种感受器，有的管压，有的管振动，有的管拉伸。手之所以能在一瞬间知道草莓熟没熟，靠的就是这一片里许多感受器同时在报，报的内容彼此牵连。第十七章说触觉镜要保住伞，手本来的伞，就长在这一片上。

可扫描探针只有一个针尖。无论它多灵敏，在每个时刻它只在一个地方。手柄把这一个点的力推给你，等于让你用一根筷子去摸世界。

这个比方值得多想一下。用筷子夹豆腐，你也能感到豆腐的软，能感到它快碎了。人用一根竹竿探路，也能分辨脚下是石头还是泥。单点触觉并非没有内

容。可筷子把手的一片收成了一个点，豆腐那一大块里哪里先裂、哪里牵着哪里，你只能靠一下一下地试，再在脑子里拼。

这正是伞的退化。指腹的作用范围大于零，筷子尖把它收到近乎为零，$r\to 0$；一片里多处同时牵连，ω 大于一，一个针尖只报一处，再一处一处排开，又回到了 $\omega=1$。手原本拥有的伞，在针尖上被收成了点。

伞的第三个参数也没逃过。手按草莓，压力从按下的地方往四周一层一层传开，旁边那一圈陷下去，比按下的那一点慢一拍；手感到的软，有一部分就藏在这一拍里。传播有速度，v 有限，回应才有先后。手柄这边，程序在每一个时刻，根据针尖此刻所在的那一点和事先存好的表面数据，算出此刻该推多大的力。整个表面像是同时回答了这一个点，没有"一圈一圈传过来"的那一拍。在模型的账上，信号是瞬间到齐的，$v\to\infty$。

三个参数，r、ω、v，三重退化一个不少。第二编说三重退化即视觉三性；这里看得更清楚：一台为手造的仪器，如果它的内部是按视觉的语法搭起来的，那么手接到的，仍是一把收拢了的伞。

再说带宽。手对振动的敏感有一个范围，太快的颤动，手就感不出，大致到一千赫兹上下就到头了。原子尺度的事件，往往快得多，也小得多，原子在晶格里来回振一次，只要万亿分之一秒上下。要让手接得住，就必须放慢、放大。放慢放大本身没有错，第十七章说过，它可以是保形的翻译。问题是放慢放大之后，留下什么、丢掉什么，由谁来定？

在 nanoManipulator 这类系统里，定的是模型和程序。哪些起伏值得推给手，哪些颤动当作噪声滤掉，力的大小怎样换算，这些都在手接到之前就决定好了。手只能在被选好的东西里感受。

这两层限制叠在一起：空间上，一片被收成一点；时间上，快的被选过、换过再送来。手到了现场，可它是戴着一层厚手套、捏着一根筷子到的。

◆ 七、萌芽为什么还不算

把第十七章给触觉镜立下的条件，一条一条拿来对照。

第一条，E 要能直接取得，软硬、粘滑、推拉回应要由微观那一头自己显露。nanoManipulator 给手的力，由模型算出，这一条没有过。

第二条，伞要一路保住，r 大于零、ω 大于一、v 有限。一根针尖、一处一处地报、按程序选择后送来，这一条也没有过。

第三条，手的证词要能交给别人，要能追查翻译在哪一级走样。就我能读到的公开介绍，这套系统做出过真东西：研究者推着碳纳米管在石墨上走，发现它们偏爱几个固定的朝向，像齿轮一样和底下的原子咬在一起；在液体里拨病毒颗粒，手比预先编好的程序拨得更准。可在这些工作里，手感的角色是帮人找到该推哪里、怎样推，拿来下结论的仍是记录下来、给眼睛读的数据与图像。手感本身没有被当作一份独立的证词，用来反过来检查模型。这一条还没有被提出来。

三条都没过，所以说它还不算触觉镜。

顺手把上面说的力谱也放进来对照。它在第一条上走得比 nanoManipulator 远，推拉是针尖实测的，不是从高度图里推算的；可它在第二条上同样只有一个针尖，在第三条上，它的证词交给了曲线和拟合，手根本不在场。一个是手在、E 不真；一个是 E 真、手不在。把两者都放在三条尺子下面量，结论一样：萌芽有了，触觉镜还没有。

这么说并不是贬低它。相反，它证明了一件极重要的事：人手和纳米世界之间，是可以接上一条回路的。三十年前就接上了，而且接得能用。剩下的问题，主要已经不在"能不能接"，而在"接上之后谁说了算"。

为什么做得最好的人也停在了这里？一个原因，大概在于大家怎样看待手柄的身份。在许多人眼里，力反馈是一种界面：让人更顺手地操控，更直观地理解，就像鼠标比键盘顺手。界面的任务是服务，把已经知道的东西更好地递给人。证人的任务不同，证人要带来别人不知道的东西，必要时还要和已有的说法唱反调。

手柄被当作界面，它就只需要把模型的意思推得逼真；手柄被当作证人，它就必须有能力推出模型里没有的东西。这两种期待，决定了仪器往哪个方向长。

许蔓那家公司做的机器人皮肤，走的是另一条路：一片上布满许多感受点，同时报压力，同时报滑动（具体传感方案为构想，不指具体产品）。如果有一天，类似的"一片"能做到纳米尺度，或者能把纳米尺度的一片推拉保形地放大到指腹上，那时的仪器才开始有资格当证人。这是工程的猜想，本书不替它定时间表。

nanoManipulator 的回路里，说了算的是模型。真正的触觉镜，要让微观那一头自己说话，让模型退到翻译的位置上，让手的感受能反过来查模型的账。

晚上，罗明川又给许蔓发了一条："我想了一下午。那只手柄像是给方程配了一个会推人的喇叭。方程说什么，喇叭就推什么。"

许蔓回："那触觉镜呢？"

罗明川想了想，打了一句："要让原子自己推。方程站到旁边去记账。"

他发完，自己也愣了一下。一个画了二十多年网格的人，第一次说方程该站到旁边去。他并没有觉得方程错了。他只是第一次想到，方程也许不该一个人既

当证人、又当法官、还替缺席的人签字。下一章要说的，就是方程站到旁边去之后，物理学里会有哪几件事被改写。

> **带 走 的 话**
>
> **三十年前，人手已经接上了纳米世界，可推那只手的是模型；触觉镜要等到原子自己推手、方程站到旁边记账的那一天。**

小账：

- SDE 账：S 落在 STM、AFM 给出的原子鼓包图；D 落在针尖一行一行扫出的高度序列；E 落在 AFM 针尖与表面的推拉，以及被模型算好再推给手的那份"力"。
- 代签账：本章拆开了 nanoManipulator 里的代签——方程的签字从纸上挪到了电机上；并指出针尖把手的伞收回了点（$r\to 0$、$\omega=1$），带宽换算由模型预先选定。

◆

19

第 19 章

触察世界：五件会被改写的事

> 这一章的问题
>
> 假定触觉镜真的造出来了，手第一次在原子尺度上当了证人。物理学里有哪几件事，从此不能照旧？

◆ 一、E 第一次能直接取得

这是我构想的场景。

周末，罗明川在客厅里改论文，九岁的罗朵朵趴在地板上玩一盒磁铁。那是学校科学课发的，两块红蓝相间的小长条。

她把两块磁铁的同一头慢慢往一起凑。凑到还差一指宽的地方，手里忽然有了东西，软软的，滑滑的，往外顶。她再用力，那股东西就更硬一点，一松手，两块磁铁"嗖"地各自跳开。

"爸爸，"她举着磁铁跑过来，"这中间什么都没有，它怎么推我？"

罗明川放下笔，想了半天，说："这个，叫磁场。"

"磁场在哪儿？"

"看不见。"

"可是我摸得到。"朵朵说，"它是软的，越近越硬。"

罗明川笑了，没再接话。他心里清楚，孩子说的是对的。那股推力，眼睛一点也看不到；手却直接取得了它：它在哪里开始，怎样随距离变硬，往哪个方向

偏，松手时怎样一下子释放。对一个九岁的孩子来说，"磁场"这个词是后到的，手里那一阵软软的顶，是先到的。

把这一幕缩小到原子里面，就是这一章要谈的第一件事。

第十二章讲过球棍模型：小球是看的，小棍是猜的。原子之间那根"棍"，它有多硬，拉长了是不是越来越费劲，压近了会不会突然顶死，推一个原子旁边几个跟不跟着动，这些都写在力场和势函数里。比如 1924 年提出的 Lennard-Jones 势，用一个简洁的式子描述两个中性原子之间远处略微相吸、近处猛烈相斥。这类式子算得很好，可它们的参数大多是用别的测量拟合出来的，没有谁的手按过那根"棍"。

触觉镜一旦成真，那根棍第一次可以像朵朵手里的磁力一样被直接取得：越近越硬，硬到哪里突然顶死，斜着推时往哪边滑，按住一个原子时旁边几个怎样跟着沉。E 第一次不必等方程补签，自己就到场了。

到场的会是些什么？不妨照许蔓按草莓的那一下，列几样手最擅长、方程最不擅长主动说出来的东西。

一样是方向。势函数常常只写两个原子之间的距离，好像推力只和远近有关。手推东西，却总是斜着、偏着、带着一点拧。斜着推一个原子，它是顺着滑开，还是先卡一下再滑，手会立刻知道。

一样是来回不一样。手压进去和拉出来，常常不是同一条路，压时顶得硬，拉时却粘着不放。这叫迟滞。一个只写"距离—力"的式子，来回是同一条线；手若摸出两条线，就说明那里还有一份纠缠没写进账里。

一样是牵连的范围。按住一个原子，旁边跟着沉的是两个还是十个，沉得一样深还是越远越浅，越远越慢。这几样，正好就是伞的三个参数：牵连多远，是

r；几处同时牵着，是 ω；牵得多快，是 v。触觉镜读出来的，不只是某一处的一个力，而是一把伞的样子。

第十五章说过，原子里的"客观物理"已经换过三次：卢瑟福的小太阳系，玻尔的一层层轨道，后来的电子云。三次更换，每一次都由新的看法、新的方程推动，证据多是给眼睛读的光谱和散射。触觉镜如果到场，下一次更换就可能第一次由一个不经过眼睛的证人推动。换不换是一回事，谁有资格提议更换，是另一回事。后一件事一旦改了，物理学的议事规则就改了。

这是第一件被改写的事。后面四件，都从这一件长出来。

◆ 二、方程从"原件"退位为"对账单"

E 能直接取得了，方程怎么办？

不会被扔掉。这一点要先说清。方程的本事一样也没少：它能压缩，一个式子装下千万次测量；它能预测，没摸过的地方也能先算出来；它能计算，把手摸不完的大系统一口气算完。罗明川这辈子做的数值模拟，靠的就是这几样本事，触觉镜来了，这些本事照样有用。

变的是方程的位置。

第 407 号《被刻进世界的公式》说，科学是理念与现实对账。这个说法很好，可在微观的 E 这一块，过去其实没有可对的那一头。力场是拟合出来的，拟合用的数据，来自衍射、光谱、气体与晶体的热学测量，再加上量子计算，读出来的都是给眼睛的刻度和图。算出来的结构对得上看到的结构，就算对上了账。至于那根"棍"本身是不是这么硬，没有第二个来源可以对。

方程于是在这一块身兼二职：既是记账的人，又是唯一的原件。第十五章说的"代签被当成原件"，在这里看得最清楚。

触觉镜来了，原件有了另一个来源：手。方程退回到它本来该在的位置，当一本对账单。

拿家里的账本打个比方。账本记得准，花了多少、剩多少，一翻就知道，比每次去数钱包快得多。可账本终究是账本，钱包里的钱才是原件。平时大家只看账本，这完全合理；一旦账本和钱包对不上，多半该改的是账本。当然也有另一种可能：钱包里混进了别人的钱，或者数钱的人数错了。所以对不上时，账本要查，手的证词同样要查，看是不是触觉镜在哪一级翻译走了样。

物理学在微观 E 这一块，过去几百年只有账本，没有钱包。不是谁偷懒，是钱包根本拿不到。触觉镜给了一只钱包。从此，力场和势函数就可以被拿去和手的证词对一对：对上的，方程多了一份签名，信用更足；对不上的，就知道哪一页账要改。

罗明川晚上睡前想到这里，有点不是滋味。他画过的每一张网格，算过的每一条应力曲线，在微观那一头的源头上，都靠一组从没被手对过账的参数。他翻了个身，又想：这也好，从今以后，至少知道该往哪里去查。

他做断裂模拟，裂纹尖端那一小块的材料参数，常常要从更小尺度的模型一级一级借上来：原子的力场给出分子的性质，分子的性质给出晶粒的性质，晶粒的性质再给出他网格里的那一个数。账本套着账本。最底下那一本，从没被钱包对过。触觉镜如果能在最底下那一层对一次账，上面每一层的信用都会跟着变：对上了，整座楼更稳；对不上，就知道裂缝从哪一层开始。

◆ 三、"不确定"要重新分辨

第三件事要换一种语气说。它是一段旁论，是一个更远的猜想，不当本书的主张；读者跳过这一节，后面的论证照样接得上。

量子力学里有一条著名的不确定关系：一个粒子的位置和动量，不能同时被确定到任意精确。1927 年，海森堡在提出这条关系的论文里，用过一个思想实验，后人常叫它"海森堡显微镜"：要看清一个电子在哪里，就得拿光去照它；光的波长越短，位置看得越准，可短波长的光打在电子身上，给它的那一下踢也越重，它的动量就越说不准。

这个思想实验有一个容易被忽略的细节：它从头到尾是"看"。要知道电子在哪儿，就得让光碰它。光是人类在微观尺度上唯一熟练使用的取证手段，这里就连"测量"的样子，也是照着"看"来想的。

先把本书的立场摆明。今天的物理学一般认为，不确定关系是量子态本身的性质，并不只是测量时把东西碰歪了。这一点本书不否定，也没有本事否定。量子力学的方程和实验，是二十世纪最成功的科学成果之一。

本书要提的，是一个更窄的问题，接着第 394 号《一次闪光是谁的？》往下问。那本书说，读数与它的主人一起发生，一次闪光不是单独属于粒子的。本书补问一句：量子世界让人觉得"怪"的那一部分里，有几分来自我们只能用光去碰它？

这么问是有来由的。视觉的语法，第二编讲过三条：点对点成像，看此不改彼，全场同时呈现。拿这套语法去等一个微观对象，就会期待它像一张照片那样：有一个确定的点，被看时不改变，所有性质同时摆在那里。结果它不配合，人就觉得怪。

触觉的语法本来就是另一套。手从来不期待"碰了不改"。许蔓按草莓，草莓陷下去，手也被顶回来；朵朵推磁铁，推的力和顶回来的力一起发生。在手的经验里，读数和对象一起改，本是家常便饭；按下去的那一片和四周牵连着，没有哪一个点能单独拎出来；回应一层一层来，没有"一下子全部到齐"。

日常里就有现成的例子。端起一碗刚出锅的粥，想知道它烫不烫，最直接的办法是用嘴唇碰一下，或者用手背贴一贴碗边。可就在碰的那一下，热从粥传到嘴唇，粥表面那一层也被吹凉了一点。你取得的"烫"，是粥和嘴唇一起改出来的。没有人因此觉得粥很怪，也没有人说"粥的温度不确定"。因为手和嘴唇本来就没指望过"碰了不改"。

那么，有没有可能，量子世界的某些"怪"，换到手的语法里，就没那么怪了？对象被碰时会改，这在手看来再平常不过；一个性质和另一个性质牵连着不能同时拎出来，也像按此牵彼。

这只是一个更远的猜想，不是本书要读者接受的结论。为了不被误读，说三句限制的话。一，它不主张触觉能绕过不确定关系；原子尺度的触碰同样要服从量子力学，手不是后门。二，它不主张量子力学的数学错了；它问的是我们对结果的理解和惊讶，有几分是感官习惯带来的。三，它要能被放弃：若触觉通道进入微观后，量子现象的描述没有出现任何新的触觉特征，这个猜想就放弃。它被放弃了，本章的另外四件事并不跟着倒，它们不靠它承重。

用一句话收住这段旁论：触觉镜不会让"不确定"消失；如果这个更远的猜想有几分道理，它会帮我们分辨，哪些不确定是世界本身的，哪些"怪"是眼睛带进去的。

◆ 四、科学家走进纠缠：观察者变成接触者

第四件事，关乎做科学的人自己站在哪里。

朵朵玩腻了磁铁，拉着罗明川去搬阳台上的小桌子，说要在那里画画。父女俩一人抬一头，桌子不重，可是怪，两个人走起来总是别扭：爸爸走快一点，桌子就往朵朵那边一拽；朵朵脚下一顿，爸爸手上就一沉。走了几步，两人不知不觉合上了拍子。

这一幕里，谁是观察者？没有。罗明川通过桌子感到女儿，女儿也通过桌子感到爸爸，桌子在两个人手里被一起改着方向。三方纠缠在一起，谁也没站在外面。

现代科学的标准姿势是观察者。约纳斯说视觉有"距离"，有"因果被中立化"：我看你，你不因我看而变，我也不因看你而被推一下。科学的客观性很大一部分就建立在这个姿势上。站得远，不碰，所以人人看到的都一样，所以可以叫客观。

触觉镜会动摇这个姿势。手伸进去，科学家就成了接触者。他推，对象顶；他慢下来，对象的回应也换了样子。他和他要研究的东西，在特征纠缠里一起发生。用本书的口径说：科学家自己走进了 E。

有人会担心，这样一来，客观性不就没了？

没有。约纳斯自己说过，因果是在身体里发生的基本经验。站在远处看，因果被中立化了，只剩下前后相随，休谟早就指出过这一点；伸手进去，因果反倒回来了，推是一下，顶是一下，都实打实落在手上。接触者丢掉的，是"我不在场"的那份客观；拿回来的，是"我在场、而且换一个人来也会在场"的那份客观。

后一种客观需要新的规矩。第十七章说过：手的证词要能交给别人。同一块表面，不同的人、不同的手、不同的日子去推，推出来的牵连关系要能对上；对不上的地方，要能分清是表面的事，还是手的事。观察的客观靠"人人看到一样"，接触的客观靠"人人推出来的关系一样"。

这还会改变实验记录的写法。观察者的记录，只记对象：几点几分，看到了什么。接触者的记录，必须连自己一起记：用多大的力推的，推得多快，从哪个方向，推了几次。因为对象的回应和手的推法一起发生，只记回应、不记推法，

就等于只记了半句话。罗明川想起搬桌子那几步：如果只记"桌子往左偏了"，不记是谁先快了一步，这条记录就没法让别人重做。科学家走进纠缠，他自己的那一份 D，手的先后快慢，也成了数据的一部分。第六编讲脉诊时会看到，这正是中医两千年来没有解决、也必须自己解决的问题。

◆ 五、需要一门触觉数学

第五件事，是前四件的账单到头来交到谁手里。

假定触觉镜摸遍了一块晶体，手的证词被记了下来。怎么记?

罗明川的第一反应，是他最熟的办法：撒点，划网格，每个节点存一个数，比如这里的刚度是多少。他做了二十多年 Delaunay 网格、Voronoi 剖分，每个节点都是没有大小的点。

可是一想就不对。手按下去的永远是一片，按这里牵着那里，回应一层一层传开。把它存成节点上的一个数，等于又把手的伞收回成了点：作用范围丢了，重叠丢了，传播的先后也丢了。触觉镜辛辛苦苦把伞一路保住，到了记账的这一步，三重退化又全回来了。

罗明川不服气，又想了一招：点多撒一些，密密麻麻，再用插值把点和点之间连起来，不就能还原一片了吗?

插值能把一堆点连成一张光滑的面，这是他的老本行。可它连出来的，是点和点之间"大概是什么样"，补不回"按这里时那里怎样跟着动"。牵连是按的时候才发生的事，它不在任何一个点上，而在点和点之间的互相改写里。先把一片切成点，再把点连回去，连回来的是一张静止的面，原来那份按此牵彼已经丢在切的那一刀上了。本书第三个承重概念说，把两串切开的数据拼回去，拼不出原来的纠缠；同一个道理，在一只手的掌心里就已经成立。

这就像录一首歌只记每个音的音高，不记它持续多久、和前后怎样连。纸上什么都在，歌没了。

所以，触觉镜一旦成真，立刻需要一门能接住它的数学。这门数学的单位，不能再是数轴上的一个点，而要是一把伞：有伞心，有伞半径，有伞面怎样分布，还要允许两把伞相叠、允许回应有速度。我常说："新的数学就是触觉数学：数不再是数轴上的一个点，而是一个圆，或者伞。"第五编会把这把伞正式撑开。

这里只先说一个次序上的要点。一般人以为，先有数学，再有仪器去测；在触觉这一块，次序很可能要反过来，手先到，数学跟着新生。望远镜和显微镜出来的时候，视觉的数学早已备好，几何、坐标、微积分，都在等着它们的数据。触觉镜出来的时候，等着它的数学还没有。这也是本书把第五编紧排在第四编后面的原因：仪器是预演，数学是它的另一半。仪器可以先在思想里预演，数学却不能只在纸上推；它要等手先把伞的样子摸出来，才知道该立什么样的单位。

五件事列完，可以回到朵朵的那句话："可是我摸得到。"物理学几百年来对原子里面的推和拉，都只能说"看不见，但算得出"。触觉镜要让物理学第一次有资格说一句九岁孩子说过的话。

> 带走的话
>
> **手一旦伸进原子，方程就从唯一的原件退成对账单，科学家从站在外面的观察者，变成站在纠缠里的接触者。**

小账：

- SDE 账：S 落在原子图上的鼓包与球棍；D 落在"越近越硬"的力随距离的差异序列；E 落在朵朵手里磁铁的顶、原子之间那根"棍"、父女抬桌子时通过桌子的互相改写。

- 代签账：本章拆开了力场与势函数的代签（参数来自给眼睛的痕，从未被手对账），并指出若用节点记录触觉证词，r、ω、v 三重退化会在记账一步重新发生。

◆

20

第 20 章

预案：触觉进入微观后的四种结局

这一章的问题

触觉镜还没有造出来，结局却可以先摆好。手伸进原子之后，可能读出哪几种结果？读出哪一种，就算本书错？

这是我构想的场景。

十二月，许蔓到长沙参加一个机器人展会，抽了一个晚上，和罗明川在湘江边的一家小馆子吃饭。两人从 nanoManipulator 聊到磁铁，又从磁铁聊到罗明川那些网格。

菜上齐了，罗明川忽然从桌上抽出一张餐巾纸，拿笔在上面画了四个格子。

"咱们做工程的，有个习惯，"他说，"方案没定之前，先写预案。万一怎么样，就怎么办。你那个触觉镜，我不知道哪年能造出来，可它造出来之后，无非这么几种结果，咱们先写下来。"

许蔓笑了："写下来干什么？"

"写下来，到时候就赖不掉。"罗明川说，"结果出来，对照这张纸，谁对谁错，一目了然。不先写，事后怎么说都有理。"

这一章就照着那张餐巾纸写。四个格子，四种结局。先说清楚：这是预案，不是预言。本书不知道哪一种会发生，也不替它们排定可能性的先后。本书只做一件事，就是在结果出来之前，把每一种结局意味着什么、对本书的承重概念有什么后果，先摆到明处。

◆ 一、结局一：代签恰好对

第一个格子，罗明川写的是"全对"。

意思是：触觉镜伸进原子，一处一处摸过去，软硬、粘滑、推拉回应、牵连的远近快慢，统统和既有的方程、力场、势函数算的一模一样。手读出来的，方程早就写好了。

这种结局完全可能。第十六章说过，方程算得准，视觉科学的伟大是实打实的。几百年来，它预言过没人见过的行星，算准过桥梁要承多重，设计过一颗又一颗至今还在工作的芯片。一套能做到这些的方程，在原子尺度的 E 上恰好也全对，没什么可惊讶的。

如果真是这样，"代签"这个词还用不用？还用，只是意思要收窄。

签字的过程没有变：那些方程当年确实不是手取得的，是视觉替缺席的手签下的。只是手后来到场一核，发现签的内容和本人要说的完全一致。这像一封代笔的信，主人后来读了，说："就是我想说的。"信仍是代笔的，可它没有写错一个字。

对本书而言，这意味着承重一要收窄为"代签恰好对"。它在来源上的判断依旧成立：微观 E 的知识过去从未被手取得。它在后果上的判断要退一步：把代签当原件，在这一块只是态度上的不严谨，没有带来内容上的错误。

这个结局下，物理学不发生颠覆。它得到的是一份迟来的第二签名，信用更足了，也让许多从前只能"算"的人，第一次能"摸"到自己算的东西。罗明川说，单这一样，对教学就是大事："学生摸一下那根棍有多硬，比我讲三节课都管用。"

不过，"全对"要能算数，还得先排除一个陷阱。第十七章说过，触觉镜要把原子尺度的推拉放大、放慢，换成手接得住的尺度，这一步要用模型。如果做这

一步翻译时，用的恰恰是那些待检验的力场，比如按势函数去决定怎样放大、哪些颤动该滤掉，那么手读出"全对"就是绕了一圈回到原地：方程先替手定好了能感到什么，手再报告说和方程一致。

许蔓听到这里，放下筷子说："这个我们做传感器的天天碰到。标定用的参照，不能是你要测的那个东西。"

所以结局一要成立，翻译那一步必须独立于被检的方程。第十七章给的办法是一级一级往小处校：先拿手本来懂的东西校，再往下走，每一级都留一个不依赖被检方程的参照。做不到这一点，"全对"只能算一次自己核自己，不入账。

即便"全对"成立，手也不是白去了一趟。罗明川想起自己第一次进车间，看老师傅凭手感判断一根轴装得紧不紧。那根轴的过盈量，他在图纸上算过不止一遍，数字一点没错；可老师傅一摸就知道的那份"紧"，他是在车间里摸了一年才有的。账本对，和手里有，是两样东西。只是这一样不进物理学的账：物理学的账只问方程要不要改。本书把它记在这里，是提醒自己别借它来给结局一添彩。结局一就是结局一，本书认它。

◆ 二、结局二：局部错，要修正力场

第二个格子，罗明川写的是"大多对，有几处不对"。

意思是：绝大部分地方，手读出来的和方程算的一致；可在某些地方，手摸到了模型没有预料的东西，迫使人们回头去改力场或势函数。

哪些地方最可能出这种事？本书不能替实验下结论，只能说说直觉上的候选：表面，缺陷，两种材料的交界，裂纹的尖端，软的、会流动的物质。这些地方有一个共同点：原子不在整齐的队列里，周围的牵连乱，按一处牵动的范围和方式最多变。用伞的话说，这些地方的 r、ω、v 最偏离规整，最不像一组整齐的点。而力场的参数，往往是在整齐的地方拟合好、再拿到乱的地方去用的。

罗明川听到"裂纹尖端"，筷子停住了。他做了一辈子断裂模拟，最头疼的就是尖端那一小块：网格要加得极密，参数要从更小的尺度借，算出来的结果还常常和实验对不齐，只好再调。"要是那地方让手摸一摸，"他说，"我那些年调的参数，说不定有一半能省了。"

这里要防一个误会。力场被修正，本是物理和化学里天天发生的事。新的光谱、新的计算一出来，参数就跟着更新。所以并非任何一次修正都能算进本书的账。

要算进本书的账，修正必须满足一个条件：它是由触觉特征逼出来的。所谓触觉特征，指的是手先取得、而给眼睛的痕（衍射、光谱、图像）没有标出来的那类东西。比如第十九章列的几样：斜推时的方向性，压进与拉出不同路的迟滞，按一处时牵连的范围与快慢。如果修正的起因是手先摸出了这样一个特征，人们才回头发现模型漏了它，这一次修正就算触察修正。

不妨设想一个样子，好让读者有个抓手。下面这一段是本书新造的设想，不是任何实验的结果。设想有一天，触觉镜的指尖按在一块金属的裂纹尖端，按住其中一个原子往里压。力场算的是：旁边两三个原子跟着下沉，越远越浅，很快平息。手感到的却是：下沉的范围比算的更远，而且远处那几个沉得晚，像有一阵慢慢传过去的波；松手时，它们回来得也比压下去时慢。用伞的话说，手读出的 r 比模型大，v 比模型小，ω 也更高。如果这样的读数在许多块样品、许多只手上都重复出现，模型就不得不回头去找：是哪一项牵连没写进去，是哪一个参数在乱的地方失了准。

再强调一次：这只是一个设想的样子，用来说明"触觉特征"长什么样，不是本书在预言裂纹尖端一定会这样。

这种结局下，物理学也未必颠覆，可它会出现一种新的工作方式：力场有了两个校对人，眼睛和手。哪里两个人意见一致，哪里就稳；哪里意见不一，哪里就是值得去挖的地方。

◆ 三、结局三：大面积错，要有新物理

第三个格子，罗明川犹豫了一下才写，写的是"整个不对"。

意思是：手读出来的东西，在大范围里、成系统地和既有的框架对不上，修补几个参数已经不够，需要新的概念。

这就是我那句话里说的"颠覆革命"。可是"整个不对"四个字太容易被说大，这里要说得克制些。

第一，"大面积错"指的是微观 E 的描述方式要换，并不意味着既有方程在它们管得好的地方突然失灵。牛顿力学在相对论之后，依然在它的范围内算得准；任何新物理都要在旧物理管得好的地方退回旧物理。第五编会讲，伞收拢时退回点，新数学收拢时退回旧数学，同一个道理。

第二，如果这种结局发生，它最可能的样子，是单位的更换先于方程的更换。今天描述原子之间的作用，习惯是"一个个点粒子，加上两两之间的势"。如果手成系统地摸出，牵连的单位是一片，几处同时牵着、彼此重叠，回应一层一层到来，那么"点加两两之间的势"这种写法本身就可能不够用了，需要一种以伞为单位的描述。先有伞，再有新的方程。

用 SDE 的次序看，这一点更清楚。现代科学走的单序是 S→D→E：先看见显露，再排出差异序列，末了用模型去假设纠缠。结局三若发生，次序会倒过来：手先取得 E，一处一处牵连的样子；再在许多次触碰里排出差异，哪里牵得远、哪里牵得慢、哪里来回不同路，这是 D；到这时，一种新的图景才一层层显露出来，先冒头，再成形，末了立成结构，这是 S。这正是本书主线所说的沉淀

型 E→D→S。旧物理是看出来再补上手，新物理会是摸出来再交给眼睛。眼睛并不失业，它在这条次序里排到了末尾，负责把手摸出来的东西画成大家都能看的图。

历史上，新仪器逼出新物理的事并不少见。望远镜让伽利略看见木星的卫星，地心说从此难以自圆；分光镜让人看见原子的光谱是一条一条的线，这些线后来成了量子理论的入口之一。只是这些例子里，逼出新物理的仪器都是给眼睛的。结局三若发生，会是第一次由一台给手的仪器逼出新物理。

第三，本书不预言这个结局会发生，也不知道它若发生，会落在哪一块。本书只说：如果它发生，最先察觉的很可能是手，最先改变的很可能是单位。

许蔓在格子边上加了一行小字："新物理也得能被别人的手重复。"罗明川点头，说这一行比格子里的字还要紧。第十九章说过，接触者的客观，靠的是人人推出来的关系一样。一只手摸出来的"新物理"，在第二只、第三只手重复之前，什么也不算。而且主张越大，门槛越高。结局二只要求某几处修正被重复；结局三要求一整套新单位在许多实验室、许多种材料上都站得住，还要先排除触觉镜自己在翻译时走了样。仪器出了毛病，最容易被误认成新物理，历史上这样的虚惊并不少。2011 年，意大利地下的一个实验报告说，中微子跑得比光还快；几个月后查出来，是一根光纤的接头没插紧。

◆ 四、结局四：读出什么，就算本书错

第四个格子，罗明川把笔递给许蔓："这一格你写。写什么情况下，这本书错了。"

这一格就是本书的预测一，原文照录：

凡触觉通道真正进入微观的领域（力反馈原子操纵、高分辨触觉传感），会出现模型未预期、需要修正力场或势函数的触觉特征。若长期只确认既有方程、零修正，承重一收窄为"代签恰好对"。

把这句话拆成普通话，有三处要说明。

"真正进入微观"，指的是第十七章给触觉镜立下的三条：手直接取得 E，伞一路保住，证词能交给别人。像 nanoManipulator 那样由模型算好再推给手的系统，读出"全对"不算数，因为它推给手的本来就是方程的意思，自然和方程一致。

"长期"，本书只给粗的层级：不是一台仪器、一个实验室、一两年，而是许多实验室、许多种材料、至少一代仪器的时间里，手的证词一直被当作独立的证人在用。

"零修正"，指的是在这段时间里，没有一次力场或势函数的修正是由触觉特征逼出来的。由仪器噪声引起的、由别的通道先发现再请手确认的，都不算。

现实多半不会这么干脆。更可能的局面，是修正有，但少，而且小，只出现在一两类材料里。遇到这种中间的局面，本书也先说好怎么读：承重一保留，但它的地盘要照实缩小，书里凡是暗示"微观 E 的代签处处有偏差"的口气，都要改成"在某几类乱的地方，代签有过可察的偏差"。证据给多少地盘，命题就占多少地盘。

如果真是"零修正"，本书怎么认账？结局一已经写了：承重一收窄为"代签恰好对"。本书不会换个说法说"那是因为触觉镜还不够好"。条件既已摆在餐巾纸上，就按纸上的办。

还要说清这一格输了之后，书里还剩什么。承重二说三重退化即视觉三性，它管的是数学的单位从哪里来，由预测二去检验；承重三说先人后机，它管的是

跨感官纠缠能不能拼回去，由预测三去检验。这三根柱子各有各的证据，一根收窄，另两根不跟着倒。第五编以下的论证，凡是靠承重一撑着的地方，到时要回头改写；靠另两根撑着的，原样保留。

罗明川看了许蔓写的那一格，说："这一格最要紧。前三格是你的书可能对的样子，这一格是它可能错的样子。一本书肯把错的样子先写出来，我才愿意读下去。"

◆ 五、四个格子摆在一起

那张餐巾纸，末了大致是这个样子：

结局	手读出什么	方程怎样	对本书意味着什么
一、代签恰好对	全与既有方程一致	多一份签名，不改	承重一收窄为"代签恰好对"
二、局部错	某些乱的地方有模型未预期的触觉特征	修正力场或势函数	预测一成立；力场有了两个校对人
三、大面积错	成系统地对不上，牵连的单位是一片	先换单位，再换方程	我所说的颠覆革命；需要伞式描述
四、判错线	长期只确认、零修正	不改	等同结局一，本书按纸认账

细心的读者会发现，第一格和第四格写的是同一件事，一个从物理学的角度说，一个从本书的角度说。这是故意的。对物理学而言，"代签恰好对"是一个好消息；对本书而言，它是一次收窄。一个好消息同时是一本书的退让，这本身就说明了本书的立场：本书不和方程作对，它只是不肯让方程一个人既当证人、又当原件。

还有一个问题：到时候，谁来对这张餐巾纸？

不该是我这个作者。一本书给自己判卷，总会手软。该对这张纸的，是那时真正在用触觉镜的人，是许许多多只手。本书现在能做的，只是把格子画清楚，把判错线写死，让后来的人拿起这张纸时不必猜作者原来是什么意思。

四种结局里，哪一种都不让人白等。结局一，物理学多一个证人；结局二，力场多一个校对人；结局三，物理学换一套单位；结局四，本书少一分口气，读者多一份确定。触觉镜无论读出什么，科学都比只有一只眼睛的时候多知道一点。

饭吃完，罗明川把餐巾纸折好，递给许蔓："你收着。哪天你那边真摸到原子了，拿出来对。"

许蔓把纸夹进笔记本，就夹在写着"触觉镜"三个字、画着问号的那一页旁边。

问号还在。可它现在有了四个可以落脚的答案，和一条认错的线。一个问号有了落脚处，它就从一句感慨，变成了一件可以去做的事。

预案写完了，仪器还没有来。而在仪器到来之前，有一件事现在就可以做，也必须先做：准备好接住手的证词的数学。手按到的是一片，账本不能再只记点。第五编要做的，就是把那把伞撑开。

> 带走的话
>
> **触觉镜还没有造出来，结局先写在餐巾纸上；肯把自己错的样子先写出来，代签与原件之争才配叫科学。**

小账：

- SDE 账：S 落在四种结局各自显露出的物理图景；D 落在"全对—局部错—大面积错—判错线"四格的差异序列；E 落在手的证词与方程之间互相校对、互相改写的那份纠缠。
- 代签账：本章给承重一立了判错线（预测一）：触察修正须由手先取得的触觉特征逼出；若长期零修正，代签的判断收窄为"代签恰好对"；结局三中伞（r>0、ω>1、v 有限）作为可能的新单位出场。

◆



第　五　编

触觉与听觉的新数学：从点到伞

导　语

本编命题：触觉数学的单位不是数轴上的点，而是伞；听觉数学的伞随时间一张一合。新数学收拢的时候退回旧数学，撑开的时候算出旧数学算不出的东西。前四编拆的是代签，这一编要动手造新的单位。

21

第 21 章

数不再是点：触觉数学的单位是伞

这一章的问题

数轴上的每一个数都是一个点，没有大小。人的手按下去，却从来没有按到过一个点。手按到的那一片，能不能自己当一个数？

◆ 一、手按到的永远是一片

这是我构想的场景。

星期六下午，罗明川在厨房里发面。早上和好的面团盖着湿布，在盆里放了四个钟头，鼓起来一大圈。他母亲在世时教过他一个法子：面发没发好，不用看钟，用一根手指往面团上戳一下。戳下去的坑要是马上弹平，说明还没发好；坑一点不回来，说明发过头了；坑慢慢回来一半，停在那里，就是正好。

他把食指洗干净，往面团中间按下去，按到第一个指节那么深，停一停，抽出来。

罗朵朵趴在灶台边看。她问：“爸爸，你按的是哪一个点？”

罗明川想了一下，答不上来。他这一辈子做的事，就是在零件上画网格。一个钢件，先剖成成千上万个小三角形，每个三角形的角上是一个节点。力加在节点上，位移算在节点上，应力也是从节点上插出来的。节点没有大小，只有坐标。他电脑里的世界，是一堆点和连接点的线。

可是他的手指按下去，按的不是一个点。指肚和面团贴在一起的，是一个指甲盖大小的圆。圆的中间压得深，边上压得浅，再往外，面团没碰到手指，也跟

着往下塌了一圈。他看得清清楚楚：坑的边缘不是一条线，是一道缓坡，缓坡外面的面皮起了细细的皱纹，像水面被扔进一块石头。

更要紧的是手上的感觉。手指没有先碰到一个点，再碰到旁边一个点，再碰到更旁边的点。整个指肚是同时被顶住的，顶回来的劲儿是一整片的劲儿。中间那一小块顶得硬些，边上软些，可是手指头分不出“中间的劲儿”和“边上的劲儿”各是多少，它只知道“这一下有点虚”或者“这一下很实”。

抽出手指以后，坑开始回弹。回弹也不是一个点一个点回来的。坑底和坑边一起往上走，边上走得快一点，坑底慢一点。前几秒回得快，后来越来越慢，到一半的地方差不多停住了。罗明川盯着那个坑看了半分钟，心里说：发好了。

朵朵又问：“它怎么知道要回来？”

这个问题比上一个更难。面团的每一小块，都被旁边的小块拉着、推着。中间被按下去，四周的面就把它往上扯；四周往中间收，又带动更外面的一圈。回弹是一整片面团互相拉扯的结果，谁也不是单独回来的。回弹要时间，是因为这种拉扯从一处传到另一处要时间，面团里有气泡、有面筋，传得慢。

罗明川当时脑子里冒出一个很不体面的念头：要是让他用有限元去算这个坑，他会把面团剖成网格，把手指的压力摊到几十个节点上，再给每个节点之间配一个弹簧。他算得出坑的样子，可他是在替手指作答。手指本来一次就知道的“虚”和“实”，在他的模型里要拆成几十个点的数，再拼回去。拼回去的东西，是他自己猜的。

这一节要留下的只有三件事。三件事都是厨房里看得见、摸得着的。

第一件：手按到的永远是一片，这一片有大小。皮肤上一个感受器管的是一小块，指尖上两个针尖要隔开两三毫米上下，人才分得出是两下而不是一下；换到手背、小腿，要隔开的距离还大得多。手指的“一下”，本来就有宽度。

第二件：按这里，旁边跟着动。坑外面那一圈面皮塌下去，回弹的时候也一起回来。按到的那一片，和没按到的那一片，是连着的。

第三件：回应有快慢。坑不是一下子弹平，而是一点一点回来，回来的快慢就是面团的“答话”。发得好的面，答得不紧不慢；没发好的面，答得太急；发过头的面，答不上来。

第 346 号《人与 AI 一起发生新数学》说过，揉面团是一种摸的数学。那本书讲的是“要有摸的数学”。这一章往前走一步：摸的数学的“一个数”长什么样子。上面三件事，正好是三个量。

◆ 二、伞心、伞半径、伞面分布、重叠

第十章在校门口的伞群里，已经把真伞撑开讲过一遍，这里不再撑真伞，只借它几个部件的名字，直接看手指。

手指按面团，就是撑开了一把伞。伞杆立在指肚的正中，伞面就是指肚压下去的那一片，中间压得深、边上压得浅，就是伞面上的布中间厚、边上薄。旁边一起塌下去的那一圈面，是这把伞的伞沿。

照第 344 号《意义数学的诞生》的记号，一把伞写成：

$U=(x_o, r, \phi)$

x_o 是伞心，就是伞杆立在哪里。r 是伞半径，就是这把伞罩多远。ϕ 是伞面分布，就是伞面上每一处有多少分量，数学上叫“核函数”。核函数这个名字听起来吓人，意思很简单：离伞心近的地方算得重，离伞心远的地方算得轻，到了伞沿以外就不算了。手指按面团，ϕ 就像一座小山包，中间高，四面往下缓。

伞不止一把。一张面团上可以同时按下好几根手指，一个手掌按下去，五根手指和掌心就是六把伞。好几把伞放在一起，就有了一个“伞场”。看一个伞场，要看三个数。

半径 r：每把伞罩多远。指尖罩一个指甲盖，手掌罩一个巴掌。

重叠度 ω：一个地方同时被几把伞罩着。两根手指离得远，各按各的，两个坑中间有一段面没动，那里谁也没罩，两把伞各罩各的。两根手指挨着按下去，中间那段面被两边同时往下拉，这里就被两把伞同时罩着。本书取一个朴素的读法：在伞场里随便挑一处，数一数它同时落在几把伞的伞面下，把这个数在整片地方上平均起来，就是 ω。互不重叠、刚好铺满，ω=1；叠得越多，ω 越大。

传播速度 v：伞心那里发生的事，多快传到伞沿，多快传到别的伞。手指按下去，坑边那圈面皮不是同一刹那塌下去的，是跟着塌的；手指抽出来，坑也是慢慢回的。这个“跟着”和“慢慢”，就是 v 有限。

这三个数，正好对上上一节的三件事：按到的是一片，是 r；按这里旁边跟着动，是 ω；回弹有快慢，是 v。下面这张表把它们放在一起，最后一列是数轴上那个旧的数。

白话	记号	手指按面团	数轴上的一个点
罩多远	r	一个指甲盖，r>0	r=0，没有大小
和别的叠多少	ω	两指相邻，坑与坑相连，ω>1	ω=1，各占各的位置
多快传到	v	回弹要几十秒，v 有限	v→∞，一出现就全有
伞面上怎么分	φ	中间深、四周缓	全部分量挤在一个位置上

最后一行要多说一句。数轴上的一个数，比如 3，用伞的语言说，就是一把伞心在 3、半径为零、全部分量都挤在伞心上的伞。数学家给这种“全部挤在一个位置”的分布起过名字，叫狄拉克的 δ 函数。旧的数并没有被扔掉，它是伞的一个特例：一把收紧了的伞。

罗朵朵听了这个说法，自己补了一句：“那数轴上的数，就是没撑开的伞。”罗明川说对，而且没撑开的伞还收得特别紧，紧到连伞布都看不见了。

伞面分布 φ 不是装饰。罗明川试过一个小把戏：同一根食指，一次直接按，一次隔着一块叠了几层的湿布按，按下去的深浅尽量一样。直接按，坑是一个陡一点的小碗；隔着布按，坑是一个浅浅的大盘子，边上塌下去的那一圈更宽。伞心没变，按的力气差不多，可伞面上的分量换了一种分法，面团的回答就换了一种样子。手也分得出这两下：前一下“扎”，后一下“闷”。旧的数只记“按在哪里、按了多重”，这两下在它那里是同一个数；在伞那里，是两把伞。

这样一来，“触觉数学的单位是伞”就有了一个不玄的意思：手的一下，要用三个以上的量才说得全——在哪里，罩多远，伞面怎么分；放在一群伞里，还要说叠多少、传多快。数轴上的点只回答第一个问题：在哪里。剩下的问题，点答不了，于是交给方程去补。方程替手补上的“罩多远”“叠多少”“传多快”，就是第三编说的代签。

伞模型做的事，是把这几个被代签的量收回到单位里来。单位里有了它们，手的一下就不用拆成几十个点再拼回去了。

◆ 三、伞收拢退回点

新单位要过的第一道关，是它不能把旧数学砸掉。旧数学算桥、算飞机、算卫星轨道，算了三百多年，算得准。一个新单位要是收不回旧数学，那它只是另起炉灶，不是往前走。伞模型的说法是：伞收拢，就退回点；伞场收拢，就退回旧数学。

收拢要同时收三样。

半径收到零，r→0。伞越撑越小，小到没有大小，伞心就是全部，这把伞变回数轴上的一个点。

重叠收到一，ω=1。伞和伞不再叠着，一处只归一把伞管，像地板砖一样一块挨一块、互不相压。这正是旧数学里“切成小块再加起来”的前提：微积分把一段曲线切成许多小段，每一小段各算各的，再相加。小段之间互不相干，加法才成立。

速度收到无穷，v→∞。一处发生的事，一刹那就传遍全场，不用等。旧数学里的“同一时刻”，就是这样一个全场同时到齐的时刻。

第十章已经讲过，这三个收拢条件不是数学家随手选的，它们是视觉成像三种性质的投影：点对点成像让 r 收到零，看这里不改那里让 ω 收到一，光近乎瞬达让 v 收到无穷。这里不再重讲，只问一个更硬的问题：伞收拢的时候，算出来的东西真的回到旧数学吗？

先看一个能写出来的式子。手指按面团，坑里每一处往上回弹，是被四周的面拉着。四周比它高，就拉它上去；四周比它低，就拉它下去。把“四周”这个词写清楚，就是一把伞：以这一处为伞心，伞面罩到哪里，“四周”就到哪里。写成式子是

$$L_K[u](x)=\int K(x,y)(u(y)-u(x))dy$$

别被符号吓住，一个一个读。u 是面团每一处的高度。x 是我们关心的那一处，y 是伞面下的每一个别处。u(y)−u(x) 是“别处比我高多少”，高了是正，低了是负。K(x,y) 是伞面分布，说的是 y 这一处的高低，对 x 算几分。最前面那个拉长的 S 形符号是积分，意思就是把伞面下每一处的“高多少乘以算几分”全加起来。加出来的结果 L_K[u](x)，就是四周拉 x 的那一股总劲儿。这个式子叫非局域算子：它在 x 这一处的值，要看一整片地方，不只看 x 自己。

现在让伞收拢。伞面越来越小，“四周”越来越近。设想伞面是对称的，左边和右边一样分量。面团在 x 附近要是一面高、一面低，像一道斜坡，那么左边“比我低”的和右边“比我高”的正好抵消，斜坡本身不产生拉力。抵消不掉

的只有一样东西：弯。坑底是往下凹的，四周都比它高，左右都在往上拉，加起来不为零。伞越小，剩下的就越只是 x 这一点的弯曲程度。

给愿意跟一步的读者，算一个最小的例子。只看一条线，不看一整片面团。设面团的高度在 x 附近像一条抛物线，$u(y)=y^2$。伞面取最简单的一种：伞心左右各 r 以内每一处分量一样，都是 c 除以 r 的三次方，伞沿以外为零。把 y 写成 x 加上一个小偏移 h，那么 $u(y)-u(x)$ 等于 $2xh$ 加上 h^2。$2xh$ 这一项是斜坡：h 为正时为正，h 为负时为负，左右一加，正好抵消。剩下 h^2 这一项，左右都是正的，抵消不掉。把它在 $-r$ 到 r 上按分量加起来，结果是三分之二的 c，和 r 没有关系。抛物线 y^2 的弯曲程度（二阶导数）是 2，所以这个结果正好是三分之一的 c 乘上弯曲程度。伞缩得再小，这个关系也不变。“分量除以 r 的三次方”那个放大，就是为了让伞缩小的时候，弯曲留下来的那一股劲儿不跟着缩没。

一般的情形道理相同：把伞面的分量按半径适当放大，让总劲儿不至于跟着伞一起缩没了，收拢到底，这个非局域算子就收敛到一个常数乘上经典的拉普拉斯算子。拉普拉斯算子是什么？它就是“一点和它无限近的四周平均起来差多少”，是热传导方程、扩散方程、弹性力学方程的心脏。旧数学里管“四周拉我”的那一项，原来就是一把收紧到零的伞。

这件事不是本书的猜想，是已经算清楚的数学。非局域扩散在核收缩时退回局部扩散，在数学文献里有严格的证明。力学里有一个更直接的先例：近场动力学（peridynamics）由西林（Silling）于 2000 年提出，专门用来算材料的断裂。它不让材料里的每一点只跟紧挨的邻点说话，而是让每一点跟一个有限半径之内的所有点说话，这个半径叫“作用视界”，就是伞半径。已有研究证明，作用视界趋于零的时候，近场动力学收敛到经典弹性力学。罗明川做了二十年断裂，对这件事一点也不陌生：裂纹尖端是旧方程最头疼的地方，导数在那里变成

无穷大，方程在那里说不下去；近场动力学不用导数，用伞面上的积分，裂纹走到哪里都照样算。

这里要分清楚三层，不能混。

第一层是已证的：非局域算子在伞半径趋零时退回经典算子；近场动力学在作用视界趋零时退回经典弹性力学。这是 r→0 那一条的严格先例。

第二层是有先例、但还没被放进同一张图里的：放宽 v 的，是有限传播速度的热传导一类理论，意大利人卡塔内奥 1948 年、法国人韦尔诺特 1958 年各自写过这样的方程；让伞的大小因地而异的，是多尺度方法（第二十五章细说）。放宽 ω 的先例最少，也最松：数值计算里有一类重叠区域分解，让相邻的计算区域叠着一块，可那份重叠是为了算得收敛，并不是说单位本身叠着。它们各自都在旧框架的某个角上松了一扣。

第三层是本书的猜想：r、ω、v 三条收拢是同一把伞的三个收法，三条一起收，才得到旧数学的全部；只收一条或两条，得到的是旧数学和伞数学之间的各种“半伞”数学。这一层标“猜想”，还要第二十五章去立门槛、去报账。

还有一处诚实话要说。上面那个式子里，只有伞半径，没有传播速度。y 那里高了，x 这里立刻就知道，中间不用等。也就是说，这个式子虽然撑开了 r，v 却还是无穷大。要把 v 也撑开，得让 x 在此刻收到的，是 y 在稍早一刻的样子，稍早多少，取决于 y 离 x 多远、v 多大。怎样写才既简单又收得回旧式子，本书只提出方向，不给定论，标“待验”。面团的慢慢回弹，就是在提醒我们：手摸到的伞，是一把三样都撑着的伞。

◆ 四、气的读数

伞模型撑开以后，可以回头去碰一个老问题：气。

厨房里有三个说法，谁都听过。一个是锅气：大火爆炒，菜出锅那一会儿，香、烫、脆、带一股焦边的劲儿，人人吃得出，温度计却读不出来（第十四章讲过锅气为什么进不了实验报告，这里不重复）。一个是手感：揉好的面“有劲”，没揉好的面“发死”，老师傅一按就知道，问他凭什么，他说不出数字。一个是脉：老中医说这个脉“有力”，那个脉“无力”，手指下面的东西，录成波形以后丢了大半（第二十六章专讲，这里不作任何诊断上的引申）。

三件事有一个共同点：说的人很有把握，旁人也大致认同，可是一问“读数是多少”，就卡住了。

第 8 号《中华之气》在这里给自己立过一条很硬的规矩：气若给不出独立于既有物理量的读数，就退化为修辞。这句话的意思是，如果“气”最后只能换算成温度、压力、流速这些已有的量，那它就只是给已有的量换了一个好听的名字，算不上一门科学的对象。这条规矩立得好，因为它把自己放在了可错的地方。本书要接着做的，就是给出一个读数，并且说清楚它在什么情形下作废。

本书提出的读数是这样的（待验）：

气的强弱，就是伞的 r、ω、v 偏离三重退化的程度。

一把伞收到点，三重退化，气为零，那里只剩一个可以单独读出的值。伞撑得越开、叠得越多、传得越慢，偏离就越大，气就越足。

要把它变成能读的东西，三样都得配一把尺子，因为“大”和“慢”都是相对的。半径大不大，要拿观察者能分辨的最小尺度来比，这一项读作 r 除以那个最小尺度。叠得多不多，就读 ω 比 1 多出多少。传得慢不慢，要拿观察者看一次的时长来比：信号走过一个伞半径要用 r/v 这么长的时间，再除以观察的时长。三项凑在一起，是一组读数，不是一个数。三项都是零，就是旧数学里那个点；离零越远，气越足。

拿锅气来试。同一个温度计读数，可以出现在两口很不一样的锅里（构想对照）。一口是大火铁锅，火舌包着锅底和锅壁，热从几面一起往菜上涌，翻锅的时候菜在空中走一圈又落回去，受热一阵一阵；另一口是平底电炉锅，热从底下均匀地上来，菜躺着不动。温度计插进去，读数可以一样。可是第一口锅的热，罩的面大，几面叠着，又一阵一阵地到；第二口锅的热，罩的面小，几乎不叠，平平地到。照本书的读数，第一口锅偏离三重退化更远，锅气更足。这个说法能不能成立，要拿真锅、真菜、真的品尝者去比，现在只是一个可做的对照。

拿手感来试。面团“有劲”，按本书的读数，是一按下去罩得开（r 大）、按此牵彼牵得远（ω 大）、回弹不急不躁（v 有限而适中）；面团“发死”，是按哪里只塌哪里，周围不跟，回弹又慢得没有回应。这些都是可以用一个压头、几个位移传感器、一块秒表去量的。

量法可以说得更具体一点，好让“待验”真的有东西可验。r 好量：压头按下去，看面团表面有多大一片跟着下沉，超过某个很小的下沉量就算在伞里，这一片的半径就是 r。ω 要用两个压头：一个按在甲处，在乙处放一个只量位移、不加力的探头，看甲按下去时乙动了多少，再把乙挪远一点、再远一点，画出一条“牵连曲线”。牵连曲线降得越慢，按此牵彼牵得越远，伞与伞叠得越多。v 用秒表就行：压头抬起来以后，坑回到一半深度要多少秒，旁边的探头比坑心晚多少才开始动。三样都不需要新仪器，只需要换一个问法：不问“这一点是多少”，问“这一下罩多远、牵多远、回多快”。

拿脉来试，本章只说到这里为止：“有力无力”也许可以读成按压深度变化时，回应罩多远、叠多少、来得多快的一组曲线。它到底怎么读、医师之间读得一不一致，交给第二十九章去设计小实验。这里不作诊断，也不给任何用药或治疗的意见；这个读数也不该拿去给任何人打分考核。

现在回答第 8 号那条规矩。这组读数独立不独立于既有物理量？

要说老实话：r 用米来量，v 用米每秒来量，单位都是旧的。可是这组读数说的不是任何一个既有物理量的值，而是一个量在场里怎样分布、怎样相叠、怎样传开的形状。温度是一个值；锅气是温度场偏离“一个值”的程度。同一个温度可以配上很不一样的 r、ω、v，所以知道了某一处的温度，并不能推出锅气。这是“独立”最弱、也最老实的一层意思：它是一个量场的二阶读数，不能被同一处的一阶读数替代。

这个回答有一处明显的软肋，要正面说出来。反驳的人会说：你讲的“罩多远”，不就是温度场在空间里变得多陡、要多远才平下去吗？用温度梯度和相关长度就能刻画。“叠多少”，是几股热从几个方向同时涌到一处，把各方向的热流算出来也就有了。“传多慢”，是温度随时间变得多快，用时间导数加上热扩散系数就能说清。这样一来，伞读数不过是温度梯度、时间导数和几个已有系数的一种组合，“独立”两个字站不住。

这个反驳在原则上是对的。伞的 r、ω、v 本来就是在一个已有的量场上读出来的：只要把场在每一处、每一刻都量全，梯度、导数、相关长度都算得出来，伞读数也就跟着算得出来。本书不能说伞读数是旧物理量算不出的东西，也不打算这样说。能说的只有两件小事。一件是：旧的读法通常停在一处一刻的值，至多是一处一刻的梯度；伞读数要的是这些值在一片、一段里怎样叠、怎样迟到的整体形状，并且对着观察者的手有多大、等多久去归一。另一件是：人判断锅气、手感的时候，用的也许正是这样一个整体形状，而不是哪一处的梯度。这两件都只是“也许”。如果真被替代了，伞读数就降为旧量的一种打包，打包可以好用，却算不上气的独立读数。

所以这个回答能不能站住，要看下面这件事。如果拿真实的锅、面团、脉去做，结果发现温度、压力、流速这些已有的量，连同它们的梯度、变化率和几种常见的组合，已经能把人对锅气、手感、有力无力的判断预测得和这组伞读数一样好，那么伞读数就是多余的，第 8 号的作废条件被触发，本书给气的这个读数

也一起作废。反过来，如果在已有的量相同的情况下，伞读数仍然能分出人分得出的差别，气就第一次有了一个不是修辞的读数。

还要说清这个读数的一个特点：它和观察者连在一起。偏离多少，是对着观察者的最小分辨尺度和观察时长说的。同一锅菜，换一个看得更细、等得更短的仪器，读数会变。这一点不是缺陷。第 394 号《一次闪光是谁的？》说读数与主人一起发生，伞读数把这个主人明明白白写进了尺子里：气是被谁、用多大的手、等多久感到的，读数里都有。视觉科学的读数，悄悄把主人设成了一只看得无限细、等得无限短的眼睛，所以它读出来的总是点。

罗明川那天把发好的面团揉开，切剂子，包了一笼包子。朵朵咬第一口的时候说：“好软。”她说的“软”，是牙齿咬下去一整片同时让开、又慢慢顶回来。那一口，也是一把伞。

> 带 走 的 话
>
> **数轴上的点是一把收紧的伞；手按下去，伞就撑开了，撑开多少，就是气有多足。**

小账：

- SDE 账：E 落在手指与面团互相顶住、按此牵彼的那一片；D 落在回弹由快到慢的先后；S 落在坑一点一点显露出的“发好了”。
- 代签账：给出伞的三参数 r、ω、v 与伞面分布 φ，拆开“四周拉我”一项由拉普拉斯算子代签的那一处，并提出气的读数（待验）。

◆

22

第 22 章

切不开：不可加性与重叠

这一章的问题

眼睛可以把一样东西切成许多小块，块和块互不干扰，于是可以一块一块地数、一块一块地加。手按下去，按这里牵着那里，切不开。切不开的东西，还能加吗？还能数吗？

◆ 一、按此牵彼

这是我构想的场景。

七月，娄底菜市场的东头，谭桂香的摊子上摆着两筐水蜜桃。她卖了三十年瓜菜，拍瓜一拍一个准，挑桃子也有她的一手。来买桃的是曾一鸣，一个读数学博士的年轻人，暑假回娄底，被母亲派来买菜。

曾一鸣伸手就去捏桃尖。谭桂香拦住他：“莫捏尖子，一捏就烂。你看我。”

她拿起一个桃子，不是用指头去掐，而是整个托在掌心里，五个指头虚虚地拢着，大拇指的指肚贴在桃子靠蒂的“肩膀”上，轻轻往里一压，停一停，松开。她说：“熟的桃子，你压它这里，它那边也软一下，整个桃子都在让你；生的，压哪里硬哪里，别的地方不晓得；熟过了的，一压一个坑，坑不回来，过两天就出水。”

曾一鸣照着试。他压第一个，手里像捏着一块木头。压第二个，大拇指下面那一小块往里陷了一点，掌心托着的另一面，好像也跟着松了一下，松完又慢慢鼓回来。他说不清楚那是哪一个点在动。好像整个桃子都动了一下。

谭桂香说：“对，就是那个。”

曾一鸣是做数学的，习惯先问能不能拆。他问：“阿姨，那能不能把桃子每一个地方的硬度都量出来，列成一张表，熟不熟就看表？”

谭桂香笑了：“你一个一个点去戳，戳完桃子就烂了。再说，你戳这里的时候，那里也在动，你量到的是哪里的硬？”

曾一鸣后来查到，果园和水果批发行里真有一种量桃子硬度的仪器，叫果实硬度计。最常见的一种，探头是一根短短的金属圆柱，测桃子多用直径八毫米上下的；先削掉一小块桃皮，把探头压进果肉，读出压到一定深度要多大的力。一个桃子测两三处，取个平均，就是这只桃子的“硬度”。

这个仪器很有用，批发行靠它定采摘的日子。可是它做的事，恰好是谭桂香说的那件“戳一个点”。探头细，伞半径被压得很小；削了皮，桃皮和果肉之间那层互相牵着的劲被切断了；压进去就不管回弹，只读一个力。三样一收，桃子在手里那一下“整个都在让你”，就被换成了几个点上的几个数。仪器读出来的数字，再拿去和“熟不熟”对照，中间那一段对照关系，是人事先定的标准替手签的字。签得大致不错，所以批发行用得放心；可是它签的，和谭桂香掌心里那一下，不是同一份东西。

这句话很朴素，却碰到了视觉数学最底下的一块砖。

用眼睛看这只桃子，事情很不一样。看桃尖那一抹红，桃肩的青不会因此变色；看桃肩的绒毛，桃尖的红也还在原处。眼睛聚焦在一个很小的局部，看到的那一小块图像，和旁边那一小块图像是互相切开的：看此不改彼。我常说，视觉

数具有点性，就是因为视觉本身有这种“局部图像特征性”——聚焦看一个很小的局部，形成的图像和邻近局部的图像互相切割，而触觉没有。第九章已经从光走直线、点对点成像讲过这种可切割性从哪里来，这里只用它的结果：凡是能被眼睛切开的，就能被一块一块地数。

手不一样。大拇指压在桃肩，桃子另一面在掌心里松了一下。被压的地方和没被压的地方，在手里是连着回答的。这一下“让”，不属于桃肩，也不属于掌心那一面，它属于整个桃子和整只手互相顶住的那个局面。SDE 的说法，这就是特征纠缠 E：桃子的果肉、桃皮、桃核，和手掌的托、拇指的压，正在互相改写。拇指一压，果肉往两边让；果肉一让，掌心那面的桃皮松了；桃皮一松，托着的手又感到了。这一圈是同时转起来的，拆不出先后。

曾一鸣挑了六个桃子。付钱的时候他说：“阿姨，你这个是不能用加法的。”

谭桂香没听懂，只说：“桃子论斤卖，怎么不能加。”

两个人说的都对。桃子的重量能加，六个桃子放在秤上，等于一个一个称了再加起来。重量是被视觉科学收拾得很好的那一类量：放上去，读刻度，不管桃子之间挨着还是隔着，都能加。桃子熟不熟，就不能这么加了。下面一节说清楚为什么。

物理学里本来就有不能相加的量。质量、体积这一类叫广延量，两份合起来就是相加；温度、密度这一类叫强度量，两杯六十度的水倒在一起，不会变成一百二十度。可是强度量在视觉科学里仍旧落在点上：每一点一个温度，每一点一个密度，一张温度分布图，就是一大片点各自标着一个值。桃子的熟度属于第三类。它不能相加，也不落在哪一个点上，它落在拇指和掌心之间叠着、牵着的那

一片上。本书把这一类量暂称“叠合量”（本书暂名）：量的是叠合本身，离开叠合就没有它。

◆ 二、整体不等于部分之和

“整体不等于部分之和”这句话，很多人都听过，说得太多，已经有点像一句口头禅。它常被说成亚里士多德讲的。亚里士多德在《形而上学》里的意思要朴素得多：一个整体，除了各个部分，还另有一点什么，就像一个音节不只是几个字母堆在一起。这一节不打算重复它，只想把它放到伞上，看它到底说的是什么。

先说旧数学里的加法靠什么。量一块地的面积，可以把地切成许多小格，每格算面积，再加起来。这件事能成，有一个前提：格和格互不相叠。数学里把这个前提写得很严：两块互不相交的地，合起来的面积，等于各自面积之和。这叫可加性，是现代测度论的地基。整个微积分，从求面积到求功，都是在这块地基上盖起来的。

“互不相交”就是 $\omega=1$。地切成格，格是可以被看清边界的，边界一画，这一格是这一格，那一格是那一格。视觉给了这条边界，可加性才站得住。

再看拇指压桃子。设想谭桂香用两根大拇指，一根压在桃肩左边，一根压在桃肩右边。两根拇指离得很远，各压各的，桃子的回答大致就是两次单压的回答加起来。两根拇指挨近了，事情就变了：左边一压，果肉往右让；右边也在压，右边的果肉正想往左让。两股让劲在中间撞上，中间那块果肉没处可让，就会顶得比单压时更硬，或者被挤得更软，取决于桃子熟到哪一步。两指同压的回答，不等于左指单压的回答加右指单压的回答，多出来或少掉的那一份，就在两把伞叠住的那一块。

桃子小，这件事不好看清。换一张旧沙发，人人都试过。一个人坐在沙发左头，屁股底下陷下去一块；另一个人坐在右头，右边也陷下去一块，两块各陷各的，中间那段坐垫还是平的。两个人挨着坐，事情就变了：两个坑在中间连成一个大坑，中间那段比左右两头陷得还深，两个人不由自主地往一块滑。挨着坐时沙发陷下去的样子，不是左边一个人的坑和右边一个人的坑叠加起来的样子。多出来的那一截下陷，和两个人往中间滑的那一点点，是两把伞叠住以后才有的东西。分开坐时没有它，挨着坐时它一下就冒出来了。

沙发和桃子说的是同一件事：两把伞离得远，回答可以相加；两把伞叠着，回答里就多出一份谁也不单独拥有的东西。

用伞的语言写，就清楚了。左拇指是一把伞 U_A，右拇指是一把伞 U_B。设合起来的回答记作 R(A 和 B)，单独的回答记作 R(A)、R(B)，那么

R(A 和 B) = R(A) + R(B) + I(A, B)

最后那一项 I(A, B) 叫重叠项。它的大小，大致跟两把伞的伞面叠住多少有关：把 A 的伞面分布和 B 的伞面分布在每一处相乘，再全部加起来，叠得多，乘出来就多；互不相叠，每一处至少有一个是零，乘出来是零，重叠项就消失。

这条式子有一个很要紧的性质：两把伞拉开，或者伞半径缩到零，重叠项自己就没了，式子退回旧加法 R(A 和 B)=R(A)+R(B)。旧加法没有被推翻，它是重叠项为零时的特例。上一章说伞收拢退回点，这里是同一件事的另一面：伞不叠，就退回可加性。

这里必须说清楚一件事，免得把别人做过的当成自己的。“不可加”本身不是新东西。物理学里早有非线性：两股力合在一起，效果不等于各自效果之和，这在非线性力学里处处都是。做断裂力学的人，天天碰到非线性。本书的说法和非线性有一处不同，值得单独拿出来。

非线性说的是方程：单位还是点，点和点之间的关系写成了不是一次的式子。本书说的是单位：单位本身就叠着。在非线性方程里，一个点仍然是一个点，它和邻点切得开，只是它们之间的“说话方式”复杂了；在伞模型里，一把伞和另一把伞根本切不开，它们共用一块伞面。两种说法在很多时候能算出差不多的结果，可它们问的问题不一样。前一种问“点和点之间按什么规则互相作用”，规则是方程替手猜的；后一种问“手的这一下罩到哪里、和那一下叠了多少”，叠多少是手直接感到的。

从点出发处理叠合，会留下一个看得见的痕迹。分子模拟里描述原子之间怎样互相推拉，最早只写两两之间的作用：甲和乙之间一条，乙和丙之间一条。后来发现不够，有些材料里三个原子凑在一起的效果，不等于三对两两作用之和，于是加上“三体项”，1985 年为硅写的 Stillinger–Weber 势就是一个出名的例子；再不够，后来又有各种更多体的修正。每加一项，都是在说：点和点切开以后，叠在一起的那一份没了，得一项一项补回来。补得越多，模型越准，也越说明当初那一刀切在了不该切的地方。伞模型换一个起点：叠合从一开始就在单位里，不用事后去补。哪一种起点算得更省、更准，要看具体问题，不能一概而论；可是两种起点里，哪一种是代签、哪一种更接近手里的原件，是分得清的。

把它说得再白一点。视觉科学先把世界切成点，再用方程把点重新缝起来；缝线越复杂，叫非线性。触觉科学不切，手里拿到的本来就是缝在一起的一块布。前者的缝线是代签，后者的布是原件。

公道起见，缝线也有缝线的好处。点和点切得开，计算机就好算：每个点只管紧挨着的几个邻居，一张大网拆成许多小块，各算各的，算得飞快。伞要管伞面下的一整片，邻居多了好几倍，算起来慢得多，用近场动力学算一条裂纹，计算量一般明显大于有限元，这是做这一行的人公认的难处。视觉的切割让世界变

得好算，这是它真实的功劳。本书不劝人把缝线扔掉，只提醒一句：好算，不等于手里拿到的就是那样。

曾一鸣回家以后，把六个桃子摆在桌上，两两挨着放成一排。他用一根手指压最左边那个，最右边那个当然不动；他再把六个桃子挤进一个小纸盒里，压最左边那个，最右边那个微微晃了一下。他忽然想到，挤在盒子里的六个桃子，算六个，还是算一盒？这就到了下一节的问题。

◆ 三、ω>1 时怎样数“一个”

数数，是人学会的第一门数学。小孩数苹果，伸出一根指头，点一个，念“一”；挪到下一个，点一下，念“二”。每点一下，指头都要离开上一个，落到下一个上。这个动作里藏着数数的全部前提：一个和一个分得开，点过的不再点，没点的还没点。用 SDE 的话说，数数是 D 走到了尽头的样子：先有不一样（Difference），再分得出（Distinction），再排成先后（Direction），一二三四就排出来了。

分得出，是要害。在视觉里，分得出几乎不要力气：桌上六个桃子，一眼扫过去，边界清清楚楚，每一个都有自己的轮廓，轮廓之间是空白。眼睛先切，手再点，嘴再念，数就出来了。整数的“一”，是视觉切割的结果被当成了起点。

曾一鸣那个纸盒子把这件事搅乱了。六个桃子挤在盒子里，压一个，旁边的跟着让，再旁边的也晃一晃。眼睛看，还是六个；手摸，就不那么肯定了。闭上眼睛，把手伸进盒子，掌心按在桃子上面，手说的是“一团，好几个，大概五六个”。手没有算错，它只是说出了一件眼睛不说的事：这六个，在手里没有六个那么分得开。

触觉研究里早就知道，人能靠手判断手里握着几样东西：有时一样一样地数，有时数目少，一把握住就知道（Kappers 与 Bergmann Tiest 2013 年的综

述把“数目”列为触觉能感知的性质之一）。至于东西挨得越紧、牵得越深，手报的数是不是越少，本书没有找到可以直接援引的结论，这正是本节要提出的猜想。第十章朵朵挤进伞群里数伞，说“在下面数不清”，说的也是这件事。本节要问的是：手数数，和眼睛数数，用的是不是同一个“一”。

曾一鸣自己又做了一回。他把一串葡萄剪成单颗，抓一把放进一只不透光的布袋，伸手进去摸，不许看，报个数；再把同样多的葡萄连着一小截梗放进去，又摸，又报。单颗的时候，他一颗一颗捏着往外拨，报得很准；连在梗上的时候，手里是一嘟噜，捏这颗那颗也动，他报的数明显少了。他把这个小游戏记在本子上，旁边写了一行字：手报的不是错数，是另一种数。这只是一个人随手做的小游戏，不是实验，不能当证据，只能当一个提问的起点。

那么，当 $\omega>1$，伞和伞叠着的时候，怎样数“一个”？本书给两个朴素的定义思路，都标“猜想”。

第一个思路：从“一个”是怎样冒出来的说起。

谭桂香托着一个熟桃子，压桃肩，掌心那面跟着松。整个桃子在她手里是一起回答的：压这里，牵动了它自己的每一处。桃子和旁边的桃子挨着，压这个，那个也晃，可是晃得少，晃得晚。这一“多”一“少”之间，就有了一条看不见、却摸得出的界：界里头牵得紧，界外头牵得松。

本书的猜想是：在触觉里，“一个”不是事先给定的，而是从牵连的强弱里显露出来的。一团东西，里面按此牵彼牵得明显比它和外面牵得紧，这一团就是“一个”。牵连的差距越大，这个“一”就越清楚；差距越小，这个“一”就越含糊，含糊到一定程度，两个就并成了一个。

这正合我一直讲的那句话里 S 的意思：S 是不停显露的显露谱系，D 一启动，S 就发生。谭桂香的手一下一下地压，这一串按压就是差异序列 D；每压一

下，哪一团跟着动、哪一团不跟，就多显露一点；压到第三四下，“一个桃子”就从手里显露出来了。视觉数学里，“一”是开头就有的；触觉数学里，“一”是压出来的。

这个思路还给了一个检查办法。做数值模拟的人画网格的时候，也要回答“哪些点算一个零件”，他靠的是图纸上的轮廓线。轮廓线是眼睛画的。要是换成手，他得一处一处压，看哪些地方一起回答，牵连曲线在哪里陡然变弱，那里就是边界。两种边界在钢件上多半重合，在面团、果肉、人体软组织这类东西上，就未必重合了。

第二个思路：直接给一个能算的“有效个数”。

第一个思路告诉我们“一个”从哪里来，没告诉我们“几个”是多少。要数，得有一个式子。本书提出的式子很简单，先讲意思，再给算法。

意思是：几把伞叠得越多，它们合起来越像少几把；完全不叠，几把就是几把；完全叠成一把，几把也只算一把。

算法是这样的。每把伞跟每把伞，包括跟它自己，都算一个“叠合度”：两把伞的伞面分布每一处相乘再加起来，再除以它们各自跟自己叠合的大小，让一把伞跟自己的叠合度正好是 1。两把完全分开的伞，叠合度是 0；两把一模一样、伞心也重合的伞，叠合度是 1；部分重叠，在 0 和 1 之间。有 n 把伞，就有 n 乘 n 个叠合度，把它们全部加起来，记作“总叠合”。有效个数定义为

有效个数 = n^2 ÷ 总叠合

试几个数。六把伞完全不叠，只有每把跟自己的六个 1，总叠合是 6，有效个数是 36÷6=6，就是整数的六。六把伞叠成一把，六乘六个叠合度全是 1，总叠合是 36，有效个数是 1。六个桃子在纸盒里排成一排，只有相邻的两个挨着，设相邻的叠合度是 0.1：总叠合是自己的 6，加上五对相邻、每对算两次的 10 个

0.1，一共是 7，有效个数是 36÷7，约等于 5.1。挤得紧一点，相邻叠合度到了 0.5，总叠合是 6 加 5，等于 11，有效个数约是 3.3。

六个桃子，挤一挤，“只剩”三个多。这个结论听起来很怪，可它说的正是闭着眼睛把手按进盒子时的那个感觉：好几个，没有六个那么分明。要强调，这里的数字是演示用的，0.1、0.5 都是随手取的，不是量出来的；手的判断是不是真的跟着这个有效个数走，是一件待验的事。

两把伞的情形最能看出这个式子的脾气。两把伞叠合度为 ρ，总叠合是 2 加 2ρ，有效个数是 4÷(2+2ρ)，也就是 2÷(1+ρ)。ρ=0，等于 2；ρ=1，等于 1；ρ 在中间，有效个数在 1 和 2 之间。用伞来算，一加一，得的是一到二之间的某个数，叠得越多越靠近一。只有伞不叠，一加一才稳稳地等于二。

这里要防一个误会。说“一加一在一到二之间”，不是要去改小学的算术课本。课本上的一加一等于二，说的是两个分得开的东西，那里 ρ 是零，式子给出的也正是二。伞计数只在东西叠着、牵着的时候才开口说话；它说的话，课本本来就没有管过。

这又是一次收拢退回旧数学：ω=1，所有叠合度都是 0，有效个数退回整数，伞计数退回小孩点着指头的数数。整数没有被推翻，它是互不叠合时的计数。

这个式子是借来的，应当说清借自哪里。统计学里，一批样本如果彼此相关，它们提供的信息就比同样多的独立样本少。美国统计学家基什（Kish）在 1965 年的《抽样调查》里讨论过这件事：一群样本两两之间的相关都等于 ρ 时，n 个样本只顶 n÷(1+(n−1)ρ) 个独立样本，分母那一截叫“设计效应”。把本书的式子用在 n 把伞两两叠合度都等于 ρ 的情形，总叠合是 n 加上 n(n−1)ρ，有效个数 n^2÷总叠合正好化成 n÷(1+(n−1)ρ)，和基什的式子一模一

样；叠合度各不相同时，本书的式子就是这个形状的一般写法，在统计里对应“相关样本平均值的有效样本量”。借来的是这个形状；本书改动的是它的意思，把“样本之间的信息重叠”换成“伞和伞之间的伞面重叠”。搬过来合不合适，要看它能不能预测手的判断，这正是它被标为猜想的原因。

曾一鸣在电话里把这个式子讲给他的同门听。同门问：“形式化证明系统里，自然数是从零和后继一步一步造出来的，一个就是一个。你这个三点三个，怎么放进去？”

这个问题问得好，回答也简单：放不进去，也不必放进去。自然数照样留在形式系统里，管那些分得开的东西：钱、人数、页码、步数。伞计数管另一类东西：面团里的气泡、桃子里的果肉、手底下连成一片的软组织、挤在一起的一团葡萄。前一类是视觉切得开的，后一类是手切不开的。两种计数在 $\omega=1$ 那里接上，这是新数学的规矩：撑开时说出旧数学说不出的话，收拢时一句不差地退回旧数学。

伞计数还有一处和点计数不同，值得记下。小孩点着数苹果，点的次序无所谓，从左数到右和从右数到左，都是六。手数伞就未必：先压哪一个，被压的那一个会把旁边的挤紧一点，后压的那一个就更“不像一个”。因为伞面的传播速度 v 有限，上一下的牵连还没散完，下一下就来了。这样数出来的有效个数，可能随按压的次序和快慢略有不同。这一点本书只提出来，不下结论：它也许是一个要消掉的误差，也许正是触觉计数自己的一部分。要分出是哪一种，得看同一个人换不同次序摸，报出的数目是不是稳定地跟着次序变。

还要说一句要守住的话。“一个”被写成可以含糊、可以不是整数，并不等于说世界没有确定的东西。谭桂香手里的熟桃子是确定的，确定在“整个桃子都在让你”。它的确定性不在边界画得多细，在于里面牵得多紧。视觉的确定，是

切出来的确定；触觉的确定，是牵出来的确定。第二十九章讲寸关尺三根手指压在一段脉上，三把伞叠着，到时候会再用到这里的有效个数，这里先不展开。

最后，这个猜想怎样才算错。如果让人闭着眼睛去摸挤在一起、彼此牵连程度不同的一组东西，人报出的数目始终贴着整数个数走，跟它们挤得多紧、牵得多深毫无关系，那么“触觉的一是牵出来的”就失去了它最直接的支撑，有效个数只是一个漂亮的式子。如果人报出的数目随着牵连加深而系统地变少，并且跟有效个数走得比跟整数走得近，这个猜想就算过了第一关。

> 带 走 的 话
>
> **眼睛的“一”是切出来的，手的“一”是牵出来的；伞不叠，一加一才等于二。**

小账：

- SDE 账：E 落在拇指、掌心与果肉互相改写的那一下“让”；D 落在一下一下的按压与“分得出”在 $\omega>1$ 时变弱；S 落在“一个桃子”从牵连强弱里显露出来。
- 代签账：拆开可加性背后“互不相交”的视觉切割（$\omega=1$），给出重叠项 $I(A,B)$ 与有效个数 $n^2 \div$ 总叠合两个记法（猜想）。

◆

23

第 23 章

听觉没有瞬间：一张一合的伞

这一章的问题

眼睛一睁，满眼的东西同时到齐，时间好像可以切成一个一个瞬间。耳朵却没有瞬间：一个音要响一会儿，才听得出高低。听觉数学的单位，是一把怎样的伞？

◆ 一、一个音要持续才有音高

这是我构想的场景。

罗朵朵在学校学竖笛，回家要练半个钟头。那天晚上她练烦了，吹得一下一下的，嘟一声就停。罗明川在书房里听着，忽然起了个念头。他走出来说：“朵朵，我们玩个游戏。你背过身去，我吹，你猜是哪个音。”

他先吹了一个长音，嘟——，吹了两三秒。朵朵说：“5，sol。”对了。

他又吹同一个音，这回只吹一点点，舌头一顶就收住，“噗”。朵朵想了想说：“听不出来，像放了个屁。”两个人笑成一团。

罗明川又换了几次，越吹越短。音越短，朵朵越猜不准；短到一定程度，什么音都像同一个“噗”，只有响和不响的分别，没有高和低的分别。

这个游戏好玩，背后是一件声学里早就清楚的事：音高要有时长才辨得出来。一个声音短到只振了一两下，人听到的只是一声“嗒”，像敲了一下；多振几下，开始有一点模糊的高低；再长，音高才稳稳地立起来。十九世纪法国的萨瓦尔就注意到，只要振上两次左右，音高感就开始冒头。要振多少下、合多少毫秒才算稳，随音的高低而不同，这里不报一个死数。罗明川是做数值计算的，当

晚就在电脑上写了几行程序，生成同一个频率、长短不同的几段声音放给朵朵听，结果和竖笛差不多：最短的那段，朵朵说是“嗒”；最长的那段，她跟着哼了出来。

为什么会这样？道理一点不玄。

音高，说的是空气每秒振动多少次。振得快，音高；振得慢，音低。要知道“每秒振动多少次”，总得听它振上几次。只振了半次，就像只看见一个人迈了半步，说不出他走得快还是慢。看他走上十步，快慢就清楚了。一个音也是这样：耳朵要等它振上若干次，才知道它振得多快。声音太短，还没振够，耳朵就只能报一个“响了一下”。

还有更细的一层。两个音要是高低差得很少，耳朵就得等得更久才分得开。调琴的师傅最懂这个。一根弦和音叉差一点点，两个声音合在一起，会出现一阵一阵忽强忽弱的“哇——哇——”，这叫拍音。差得越少，拍音越慢，一秒一拍、两秒一拍，师傅就得多听一会儿，等那一拍走完，才知道还差多少。差每秒一次振动，拍音大约一秒一拍，不听上一秒，就听不出这一拍。这件事可以说成一句很硬的话：想把两个频率分得越细，就得听得越久；时长和频率的分辨，此长彼消，谁也不能同时无限细。这是数学上的事实，1946 年加博尔（Gabor）在《通信理论》一文里把它写成了一条不等式，信号处理至今照用。

把这件事放到眼睛那里对照，会看到一件有意思的事。

颜色其实也是频率。红光、绿光、蓝光，是光波振动快慢不同。可是光振得太快了，每秒几百万亿次，人眨一下眼的工夫，它已经振了不知多少次。所以颜色看起来像是“一下子就有的”，不用等。眼睛当然也要一点时间才能看清东西，可是它不必像耳朵这样，等一个对象自己一次一次地振出来。

声音就不同了。人的耳朵能听到的声音，每秒振动从二十来次到两万次上下，慢到一个音的一次振动，就要用去几十分之一秒甚至更长。耳朵必须等。这一等，就把“瞬间”取消了。

家里人人都做过一个小动作，最能说明这件事。看视频看到一半，按一下暂停，屏幕上停着一张画面，人还在，景还在，你可以凑近去看画面里桌上摆着什么。听歌听到一半，按一下暂停，剩下的是什么？什么都没有，只有安静。画面可以定格，声音不能定格。照相机按一下快门，留下一个瞬间，几百年来人们习惯了“瞬间”这个词，以为世界本来就可以切成一张一张的瞬间；可是从来没有一台机器能拍下“一瞬间的声音”，因为一瞬间里根本没有声音。手机上的录音软件把声音画成波形，你可以把进度条停在任何一个位置，那个位置上只是一根竖线、一个数，你听不到它。

“瞬间”这个想法，是眼睛给的。

约纳斯说视觉的高贵在于“同时性”：许多东西同时呈现，不必依次到来。第十章已经把这一性对上伞的第三个退化条件 $v\to\infty$。这里再加一笔：视觉的同时性，除了光跑得快，还因为光振得快，快到它自己的“持续”被眼睛完全忽略了。听觉没有这份便宜。一个音的“这一个”，本身就是一段时间。

罗朵朵那天最后问了一句：“那一个音最短是多长？”罗明川说：“没有一个最短的音。只有短到听不出音高的声音。”他没往下说，可这句话已经把本章的意思说出来了：在耳朵里，没有一个音是没有长度的。

照本书对视觉三性与三重退化的对照（见第十章），落到听觉一边是三句话：一个音须持续，伞半径随时间变；声与声相叠，重叠度大于一；声速有限，声音必须依次到。这一节落实的是第一句。下面两节，一节把三句放进同一把随时间张合的伞里，一节回头看旧数学是怎样把这把伞收成点的。三句里没有一句

需要新的实验来证明，它们都是耳朵每天在做的事；新的只是问法：把这三件事当成听觉数学的单位本身，不当成方程以外的杂项。

◆ 二、r(t)：伞面随时间张合

第二十一章的伞撑在空间里：伞心是手指按在哪里，伞半径是按到的那一片有多大。听觉的伞撑在时间里。

一个音，有一个伞心，就是它响在什么时候，记作 t_o。它有一个伞半径，就是它从起来到散去，罩住了多长一段时间。它还有一个伞面分布，就是在这段时间里，它哪一段响、哪一段弱。照第二十一章的写法，一个听觉单位可以写成

$$U=(t_o, r(t), \phi)$$

和触觉的伞相比，这里多了一个括号里的 t。触觉的伞，手指按住不动，伞半径大致是定的。听觉的伞不一样，它在时间里自己会变：一个音起来的时候，伞一下撑开；响着的时候，伞面撑着；散去的时候，伞慢慢收拢。伞半径本身随时间张合，所以写成 r(t)。第 344 号《意义数学的诞生》说听觉数是“r(t) 随时间张合”的伞，这一节就把这句话落到耳朵上。

先听几样家里就有的声音。

拨一下吉他的弦，声音一下冒出来，很亮，然后慢慢变弱，拖上好几秒才没。这把伞撑得极快，收得很慢。

拉一下二胡的长弓，声音是慢慢起来的，起来以后稳稳地撑着，弓不停，它就不散；弓一停，它很快就收了。这把伞撑得慢，撑得久，收得快。

敲一下鼓，“咚”，起来快，散得也快。这把伞一张一合，前后不过一眨眼。

敲一面铜锣，“哐——”，起来快，散得极慢，嗡嗡的余音能撑上十几秒。

这四样声音，就算音高一样，人也一耳朵就分得出是什么乐器。分得出，靠的很大一部分正是伞怎么张、怎么合：一个音起头那一下的样子，对辨认乐器尤其要紧。二十世纪六十年代就有心理声学实验（常引 Saldanha 与 Corso 1964 年的研究），把乐器声的起头剪掉，只留中间稳定的那一段，人认对乐器的次数就明显少了。把伞的张合剪掉，伞就只剩一截布，认不出是谁的伞了。

中国人还有一样天天在用、却很少想到的听觉伞：声调。“妈、麻、马、骂”，四个字的声母韵母一模一样，分别全在音高怎么走：第一声平平地撑着，第二声往上扬，第三声先往下沉再往上抬，第四声从高处一落到底。声调不是某一刹那的音高，是一段时间里音高走出来的样子，也就是伞面在时间里的分布 φ。学汉语的外国人都知道，第二声和第三声最容易听混，两条路的前半截太像；一个字要是念得急，音高来不及走完那条路，分别也就跟着变小。小孩学说话，先学会的是这一道道起伏的弯，一个个音高的点，他们并不认得。一句汉语，就是一串张合不同、彼此叠接的伞；把它拆成点，每个点都不再是字。

再听一首曲子。

罗朵朵练琴，老师教她两种弹法。一种叫断奏，每个音弹完立刻抬手，音和音之间留一点空。一种叫连奏，前一个音还没抬手，后一个音已经按下，两个音中间有一小段是叠着响的。朵朵说，断奏像蹦蹦跳跳，连奏像在唱歌。

用伞的话说，断奏是一把伞收了，下一把伞才撑开，伞和伞在时间上互不相叠，ω 接近 1；连奏是前一把伞还没收完，后一把伞已经撑开，两把伞在时间上叠着，ω 大于 1。钢琴上还有一个踏板，一踩下去，弹过的音都不停，一个叠一个，伞叠得更多。朵朵踩着踏板乱按一气，声音糊成一片，她自己也说“太吵了”。ω 太大，耳朵就分不出一个一个的音，只剩一团。这一点，和第二十二章摸挤在一起的桃子是同一个道理，只是叠在时间里。

听一首熟悉的歌，常常前两三个音一出来，人就认出来了；听一首没听过的歌，要听完一整句，才知道它大概是什么调子，听完一段，才知道它的脾气。这是听觉里 S 的显露谱系：先是一个音冒出来（Show），几个音叠接成一句有起有落的样子（Shape），几句又排成一段有来有回的架子（Structure）。听觉最容易让人觉察的是 D，一个跟着一个的不一样；可它和触觉、视觉一样，有完整的 S·D·E。S 在耳朵里不是一张摆好的图，它跟着 D 一路显露，每多一把伞撑开，曲子就多显露一点。耳朵从来没有先拿到一首歌再去听；歌是在听的过程中一点一点发生的。

叠着有叠着的意思。一首曲子之所以是曲子，不只因为音一个接一个地来，还因为前一个音的余响染着后一个音。同样是从“do”走到“sol”，前面那个“do”还在耳朵里响着，“sol”一来，耳朵听到的是一个跨度，一种往上走的劲儿。我讲 D 的时候常说，差异序列走到 Direction，就排出了先后。听觉里的这个“先后”，不是两个点一前一后排在时间轴上，而是一把伞还没收、一把伞已经撑开，叠着的那一段，就是先后的连接处。把叠着的那一段剪掉，曲子就变成一串孤零零的音，先后还在，劲儿没了。

耳朵自己也有一把伞。声音进了耳朵，耳朵并不是一刹那一刹那地记录，而是把一小段时间里来的声音收拢起来，合成一个“听到”。很短的声音，响度听起来比同样强、稍长一些的声音要小，就是因为耳朵的伞还没收满；心理声学里把这叫响度的时间积分，耳朵收拢的这一段，大约在一两百毫秒以内。所以一个音被听到，是两把伞的事：声音自己的伞，和耳朵收声音的伞。两把伞叠在一起，才有“这一个音”。这就是听觉里的特征纠缠 E：不是一个声音摆在耳朵外面等着被测，而是声音的张合和耳朵的收拢在互相改写。房间也在里面。同一声“咚”，在空屋子里有回响，在铺满地毯、挂着厚窗帘的屋里就干干的，房间的墙让声音的伞收得慢或收得快。这里的房间不是背景，它参与了伞怎么合。

很多人都有这个经验：在浴室里唱歌，比在客厅里好听。瓷砖墙把声音一遍一遍弹回来，前一个音的回响还没散，后一个音已经起来，伞和伞在时间上叠得比平常多，声音听起来更圆、更满，唱得不太准的地方也被叠合抹平了一些。可是回响太多也不行，在空荡荡的大厅里说话，前一句的回声压着后一句，听的人就听不清。叠合有一个合适的度：太少，声音干瘪；太多，声音糊掉。这个“度”，正是 ω 在听觉里的读法。

最后说传播速度 v。声音在空气里每秒走三百多米，比光慢得多。站在山谷里喊一声，过一会儿回声才来，那一会儿就是 v 有限的直接后果。人有两只耳朵，一个声音从左边来，先到左耳、后到右耳，两只耳朵听到的时间差不到一毫秒，声音从正侧面来时最大，也就零点六七毫秒，人却能靠这一点点差，听出声音是从哪边来的。

这件事很值得多想一下。在视觉科学里，传播速度有限常常被当作一个麻烦：光要走时间，所以远处的星星是过去的样子，要修正。在听觉里，正是 v 有限，声音才分得出方向。快慢的差，本身就是读数。$v\to\infty$ 的那个世界，所有声音同时到齐，两只耳朵听到的一模一样，人就不知道声音从哪里来了。伞的三个参数在听觉里一个也不能收：r 收到零，没有音高；ω 收到一，没有曲子的劲儿；v 收到无穷，没有方向。

◆ 三、不把波翻成点的集合

第十三章讲过，现代科学怎样把声音画成一条曲线，又怎样用傅里叶的办法把曲线拆成许多正弦波。那里讲的是代签的来历，这里不重讲，只从伞的角度看一眼：这两种做法，各把听觉的伞收到了哪里。

先看那条曲线。声音被话筒接住，变成电信号，画在纸上或者屏幕上，是一条上上下下的波形。横轴是时间，纵轴是每一刹那空气压力比平常高多少、低多少。这条曲线，说穿了是一串点：每一个时刻，一个值。存进电脑的时候更明

显，一秒钟的声音存成几万个数，一个数管一个极短的时刻；CD 的标准，是每秒存四万四千一百个数。

现在问一个简单的问题：这几万个点里，哪一个点是“sol”？

哪一个都不是。上一节已经说清楚，一个点没有长度，没有长度就没有音高。音高不在任何一个点上，它在许多点之间：要把一长串点放在一起，看它们一高一低地重复了多少次，音高才算出来。也就是说，要从这串点里重新找回音高，必须先撑开一把伞——取一段时间，把这段里的点合起来看。曲线把伞拆成了点，听的时候，又得把点合回伞。点只是存放声音的办法，它本身不是听到的东西。

再看傅里叶。傅里叶把一段声音拆成许多正弦波，每个正弦波有一个确定的频率。频率确定到什么程度？确定到它必须从无穷远的过去一直响到无穷远的将来，一刻不停、一丝不变。一个只响了两秒的正弦波，频率就已经不是一个干净的点了，这正是上一节说的“时长和频率此长彼消”。所以傅里叶的每一个成分，在频率上是一个点，在时间上是一把无穷大的伞。

两样放在一起看，很有意思。波形曲线把伞在时间上收到零，每个点没有长度；傅里叶把伞在时间上撑到无穷，每个成分没有开头结尾。一个收到头，一个撑到头，都离开了耳朵。耳朵听到的一个音，既不是一个刹那，也不是永恒，它是一把有头有尾、在中间张合的伞。

而且傅里叶并没有把点性赶走，只是把点从时间轴挪到了频率轴上。时间上的点换成了频率上的点：一个频率，一根细细的谱线，就是一个点。视觉数学的习惯在这里很顽强：总要找一根轴，把东西摆成轴上的点。

这里要公道。在点和永恒之间，工程师和数学家早就找过中间的路。一种做法是短时傅里叶：不拆整段声音，只拆一小段，一小段一小段地往前挪，这一小段的长度叫“窗”。窗，就是一把伞。另一种做法是小波，二十世纪八十年代初

由法国地球物理学家莫莱（Morlet）和物理学家格罗斯曼（Grossmann）等人发展起来，它让高音用短窗、低音用长窗，伞的大小随音高变。这些都是听觉数学的真萌芽，本书不把它们当作自己的发明。

萌芽为什么还不算？有两处没走到。

一处是伞的大小由谁定。短时傅里叶的窗，是工程师事先挑好的，一段声音从头到尾用同一个窗，伞半径是死的；小波让伞随音高变，却还不随这个音自己的张合变。吉他声撑得快收得慢，二胡声撑得慢收得快，在这些方法里，这份张合不是单位的一部分，只是窗里算出来的一组系数。r(t) 还没有进入单位本身。

另一处是算完以后交给谁。这些方法算出来的结果，几乎总是画成一张声谱图：横轴时间，纵轴频率，颜色深浅表示多响。一张图，是给眼睛看的。第八章说仪器的共同本事是把听和触翻译成可看的，声谱图正是一例。伞被撑开了一下，用来算出图上的一个个像素，算完就收起来，最后留下的又是一片点。

本书提出的方向，是让伞留在单位里，不要算完就收（以下标“猜想”）。

一个听觉数，就是一把听觉的伞（t_o，r(t)，φ），连同它的张合一起，当作一个整体来对待。它可以和别的听觉数做三种事：叠，就是两个音同时响，像第二十二章那样，有一个重叠项；接，就是一个音接着一个音，前伞未收、后伞已张，接口处叠着的那一段算在接法里；变，就是看伞张合得多快，撑开的快慢、收拢的快慢，本身就是一个可以比较、可以运算的量。

按这个定义，两个声音“相等”，要在伞的层面上看，不在点的层面上看。有一个老现象正好说明这样做的必要。一个稳定的乐音由好几个频率成分合成，把其中某些成分的起点前后挪一挪，波形曲线会变得面目全非，可是人听起来，常常几乎是同一个音。十九世纪欧姆和亥姆霍兹就讨论过这件事：对稳定的乐音，耳朵对各成分的前后错位大体不敏感。后来的研究也找到了例外，低音、成分挨得很近的时候，错位是听得出的，所以这只能说“常常”。两条长得完全不

一样的曲线，在点上处处不相等；在耳朵里，它们是同一把伞。点的相等，和听的相等，不是一回事。听觉数学要先认的是后一种。

这个猜想收拢的时候，也退回旧东西。伞半径收到零，听觉数就退回波形曲线上的一个个采样点；叠合收到一，每个音各响各的、互不相染，就退回乐谱上一个一个孤立的音符；传播速度收到无穷，所有声音同时到齐，就退回不分方向、不分远近的那个理想声场。

说到乐谱，它恰好是一个现成的例子。五线谱上的每一个音符，是一个小小的黑点或圆圈，落在五条线的某个高度上，高度表示音高，符干符尾表示该响多久。这是一种把听觉写给眼睛看的办法：每个音一个点，点和点切得开。乐谱上写不出来的，正是伞的张合和叠合：这个音怎么起、怎么收，前后两个音叠多少、怎么连。这些，作曲家只能用“连线”“渐弱”几个小记号略略提示，剩下的全交给演奏者的耳朵和手去补。演奏者补上的那一份，就是乐谱的代签之外、只能由人亲身取得的东西。第 387 号《好听是谁的？》说好听是唱进去的，从伞的角度看，唱进去的正是这一份张合。

这样的听觉数怎样读出来，也可以说得具体些。r(t) 的读法：从一个音开始响起，一小段一小段地加长取来听的时长，看要多长，音高才稳定下来不再跳，这个时长就是此刻伞撑开的大小；音在衰减时再这样读一遍，就看得到伞怎样收。φ 的读法：一个音从起到落，响度怎样变化，画成一条起伏的轮廓。ω 的读法：前后两个音同时都还听得见的那一段，占了各自长度的几分。v 的读法最现成：同一个声音到两只耳朵、到屋里不同位置，先后差多少。这些量用今天的录音设备都量得出来。要换的仍是问法：不问“这一刹那压力是多少”，问“这一个音撑开多大、和邻音叠多少、怎样张合”。

这个猜想要能被错。如果人对两段声音“像不像”的判断，用波形上逐点的差，或者用傅里叶谱上逐线的差，就能预测得和用伞的张合、叠合来预测一样

好，那么“听觉数要以伞为单位”就是多余的，点的办法已经够用。反过来，如果有一类声音，点上相差很大、伞上相差很小，人一律听成相同；点上相差很小、伞上相差很大，人一律听成不同，听觉的伞就站住了第一步。

听觉的伞和触觉的伞，在拍西瓜、叩诊、弹琴的时候是缠在一起撑开的：手拍下去的那把伞，和耳朵收到的那把伞，叠在同一下里。那是下一章的事，这里不抢。

那天游戏玩完，罗朵朵拿起竖笛，吹了一个很长很长的音，一直吹到没气。她放下笛子说：“这个音最长，所以最清楚。”罗明川没纠正她。长不一定清楚，可她说出了这一章最要紧的一半：听到一个音，就是陪着它从撑开走到收拢。

> 带走的话
>
> **耳朵里没有瞬间；一个音，是一把在时间里撑开又收拢的伞。**

小账：

- SDE 账：E 落在声音的张合、耳朵的收拢与房间的回响互相改写；D 落在振动要重复若干次才分得出高低、前后音叠着排出先后；S 落在一个音从“嗒”到“sol”逐步显露。
- 代签账：拆开波形曲线（时间上 $r\to 0$）与傅里叶成分（时间上 $r\to\infty$、频率上仍是点）两处代签，给出听觉伞 $(t_0, r(t), \phi)$ 与叠、接、变三种运算（猜想）。

◆

24

第 24 章

触与听的纠缠数学

这一章的问题

拍一下西瓜，手上有一阵回弹，耳朵里有一声"嘭"。这两样东西能不能各算各的，算完再加起来？如果不能，数学该怎样写下"一起"？

◆ 一、拍、叩、弹：一个动作，两种感觉一起到

第五章里，我们在娄底的菜市场站了一会儿，看谭桂香拍瓜。那是我构想的场景，这里不再重讲。只回头捡起她手上那一下：掌心落到瓜皮上，手被弹回来一点，同时耳朵里冒出一声"嘭"。她判熟，靠的不是手，也不是耳朵，是两样东西一起到的那个样子。第五章已经说过，只摸不听不准，只听不摸也不准。

这一章要把这一下拿到数学里来。动手之前，先把视野放宽一点。拍瓜不是孤例。人类有好几门手艺，都靠同一个动作同时取得触觉和听觉。

一门是叩诊。医生把左手中指平贴在病人胸口或肚子上，右手中指弯起来，在左手指背上短促地敲两下。敲下去的那一刻，贴着身体的那根手指感到底下的回应：实的、空的、发闷的、发弹的；同一刻耳朵听到声音：清的、浊的、鼓一样的。叩诊是奥地利医生奥恩布鲁格在维也纳行医时琢磨出来的，1761 年他用拉丁文写成一本小书，书名就叫《新发明》。流传很广的说法是，他父亲在格拉茨开旅店，他小时候见过父亲敲酒桶，估桶里还剩多少酒；这只是传说，没有确凿的记载。这门手艺今天的医学生还在学。它有意思的地方在于：教科书上一般

把叩诊归到"听"那一栏，可真正上手的人都知道，贴在身上的那根手指也在报信。

一门是弹琴。弹古琴的人左手按弦，按得实一点虚一点，指下的弦有不同的顶劲；右手一拨，声音出来，左手再往上一滑，音跟着走。指下的顶劲和耳朵里的音，是同一件事的两头。弹吉他的人换品时，手指先感到弦压进品丝的那一下"到位"，再听到音准不准。初学的人常常听着不对，却说不出是手的问题还是耳朵的问题；练久了，手和耳朵合成一处，按下去就知道会出什么音。

一门是敲。老师傅敲瓷碗、敲墙、敲轮毂、敲铁轨，判有没有裂。手里那把锤子落下去，有一点反弹传回手腕，耳朵里有一声，裂了的东西，声音发哑，反弹也发"散"。这类敲法，工业上已经做成了仪器，归在无损检测一类。

拍、叩、弹、敲，四件事有一个共同的结构。一个动作打出去，世界同时用两种方式回话：一种贴着皮肤回来，一种隔着空气回来。人判断的，不是两句回话各自说了什么，而是两句回话之间的关系：手先松还是声先沉，回弹硬的时候声音是不是也跟着亮，声音拖长的时候手上是不是还有余颤。

用 SDE 的话说，这一下拍打里，S、D、E 都是完整的。E 是掌心与瓜皮、瓜瓤，还有瓤里的水与空隙，在那一瞬间互相改写；D 是这一下拍打展开成的一串先后：接触、压下、回弹、声起、声落；S 是"熟了"或者"还生"那个判断，随着这串差异一下一下显露出来。触觉让人更容易觉察 E，听觉让人更容易觉察 D，可这一下里，两种感觉各自都有完整的 S·D·E，它们又纠缠成一个更大的 S·D·E。这是第四章讲过的：侧重不是专属。

问题来了。现代科学处理这一下的办法，是把它拆成两串数据：一串是加速度计记下的回弹，一串是麦克风记下的声音。两串各自画成曲线，各自做频谱，各自抽特征，再把两组特征并排放在一张表里，交给统计或机器去判。这就

是"拼接"。这一章要问的，是拼接丢了什么，以及数学该怎样写下拼接写不下的那一部分。

拼接不是谁偷懒想出来的。第八章讲过，仪器的共同本事是把听和触翻译成可看的：温度计管冷暖，压力表管松紧，示波器管声音。每一种仪器生来只管一个通道，各有各的刻度、各有各的单位、各有各的学科。科学的分工跟着仪器走，声学一个系，力学一个系，各有期刊。等到要判一只瓜的时候，两路数据从两个系的仪器里出来，只能在纸面上会合。拼接，是视觉科学的分工留在数据上的指纹。

◆ 二、两把伞撑在同一处：跨模态重叠项

先把第二十一章和第二十三章的两把伞请回来。

触觉的伞，撑在手掌那一片上。掌心按到瓜皮，按到的永远是一片，不是一个点。这把伞有伞心（掌心落点），有伞半径（手掌贴住的那一片有多大），有伞面分布（掌心中间压得重、边上压得轻）。我们记作触伞，它的核是一个关于位置的函数，写成 K触(x, y)：在位置 y 发生的事，有多少分量传到位置 x 的感受上。

听觉的伞，撑在时间上。一声"嘭"要持续一会儿才有音色，第二十三章说过，听觉没有瞬间，伞面随时间一张一合。我们记作听伞，它的核写成 K听(t, s)：在时刻 s 发生的事，有多少分量进到时刻 t 的听感里。

现在两把伞撑在同一下拍打上。最省事的写法，是把两把伞相乘：

K拼(x, t; y, s) = K触(x, y) · K听(t, s)

这个式子的意思是：手上那一片的事，只按手的规矩传；时间上的事，只按耳朵的规矩传；两套规矩互不打扰，乘在一起就算"同时考虑了"。数学上，这叫

可分离的核。工程上的两串数据各自处理再拼起来，背后默认的就是这种可分离。

可是谭桂香的那一下不是这样。熟瓜在掌心底下的回弹，和"嘭"那一声的拖尾，是同一团瓜瓤在动。手压下去的轻重，会改变声音；声音那一拖，手上也有余颤。哪一片掌心先松，和哪一段声音先沉，是绑在一起的。这时候真正的核，应该是一个不能拆开的联合核：

K(x, t; y, s)

它说的是：手掌上 y 那一处、在 s 那一刻发生的事，有多少分量进到 x 那一处、t 那一刻的感受里。位置和时间在这里搅在一起，不能先算位置、再算时间。

联合核和拼接核之间的差，我给它一个名字，叫跨模态重叠项：

C(x, t; y, s) = K(x, t; y, s) − K触(x, y) · K听(t, s)

如果 C 处处为零，拼接就够了，两种感觉确实可以各算各的。如果 C 不为零，拼接就漏掉了一块，而且漏掉的这一块，恰恰是"一起"本身。

打个比方。公园里一对老人跳双人舞，男的往前一步，女的往后一步，手上一带，女的就转一圈。现在给两个人各绑一个计步器，男的那台记男的，女的那台记女的，回家把两份记录叠在一张纸上。步数都在，快慢都在，可是"手上一带、她就转"那一下不见了。那一下不属于男的，也不属于女的，属于两个人之间。两份记录各自再精确，也叠不出来。C 就是那"一带"。双人舞里的纠缠，在两个人分别被记录的那一刻就已经被切掉了；拼接，只是把切开的两半重新摆在一起。

第二十二章讲过重叠度 ω：触觉的伞，按此牵彼，ω>1；听觉的伞，声与声相叠，ω>1。那里的重叠，都发生在一种感觉内部。这里的 C 是另一种重叠：它

发生在两种感觉之间。可以把它叫作跨模态的重叠度，记作 ω触听。视觉科学默认 ω触听 等于零，因为在它那里，触和听根本不在场，在场的只是两条画给眼睛看的曲线。两条曲线画在两张纸上，当然互不重叠。

用第二十一章那个纠缠算子来写，就是把原来只在空间上的那个积分，推到空间和时间一起：

L_K[u](x, t) = ∬ K(x, t; y, s) (u(y, s) − u(x, t)) dy ds

这里 u 是拍打时瓜皮表面的起伏。读法和第二十一章一样：某一处、某一刻的感受，等于它周围一片、前后一段，各自和它差了多少，按联合核的分量加起来。差别只在于，这一回的"周围一片、前后一段"，是手和耳朵一起划出来的。

这里要说清楚三件事。

第一件，这是一个形式，不是一条定理。我只是说：如果要在数学里写下"触和听一起"，它至少要长成这个样子，不能更简单。至于 K 具体是什么函数，C 有多大，要从人身上、从瓜身上一点一点取出来。

第二件，C 不为零，这是猜想。我猜它在拍瓜、叩诊、弹琴、敲裂这一类事上明显不为零，因为这几件事里，手和耳朵碰的是同一团东西的同一阵动。可猜想就是猜想，要等检验。

第三件，C 不能被"多加几个特征"补回来。有人会说：把手的特征和耳朵的特征再做些交叉乘积，不就把关系补上了吗？能补一部分。可是交叉乘积是在两串已经切开的数据上做的，切开的时候，哪一片掌心对着哪一段声音，那个对拍已经丢了一大半。后补的交叉项，补的是丢剩下的影子。就算两路数据的时间轴对得分毫不差，丢掉的也不只是时间。麦克风听到的是整只瓜的一声，它不知道这一声是掌心哪一片拍出来的；力传感器记下的是一个点或几个点的力，它不知道这股力在声音里落成了哪一段。联合核里的 x 与 t 是搅在一起的，"哪一片对

着哪一段"本身就是信息。分开记录，这一份信息在源头上就没有被记下来，事后再怎么对齐，也对不出一份从来没有记过的东西。这一点，是承重三"先人后机"在数学上的样子：纠缠要在采集的那一刻就一起取得，事后拼不全。

◆ 三、身体自己就在做联合：羊皮纸手与"触键"

C 不为零，听上去像一个哲学主张。其实身体每天都在替我们做这件事，而且已经有实验把它逮住过。

有一个被叫作"羊皮纸皮肤错觉"的实验，是芬兰的约斯梅基（Jousmäki）与哈里（Hari）1998 年在《当代生物学》上报告的。让人两只手掌来回搓，麦克风把搓手的声音录下来，经过处理，再实时放进他戴着的耳机里。研究者把声音里的高频部分调强，搓手的人就觉得自己的手变干了、变糙了，像在搓一张羊皮纸。手还是那双手，皮肤还是那层皮肤，变的只是耳朵里的声音，可手上的感觉跟着变了。

这个实验说明了一件事：在身体里，手上的感觉从一开始就不是只由手决定的。耳朵听到的东西，会回过头来改写手上"摸到了什么"。用这一章的记号说，身体里的那把伞，K 拆不成 K触 乘 K听；改动听伞的一块，触的读数就动了。这是 C 不为零在人身上的一个旁证。它不证明拍瓜里的 C 一定大，但它说明，跨模态重叠项不是我凭空发明的东西，身体早就在用它。

弹琴那一头，有一个更日常的证据：钢琴老师谈音色，用的词就叫"触键"。英文里干脆就是 touch。一个钢琴家的音色好不好，行内说的是他的"触键"好不好。这个词本身就把手和耳朵绑在了一起：音色是耳朵听到的，可叫它的名字，是手。

围绕"触键"，物理学和钢琴家之间有过一场持续很久的争论，从二十世纪二三十年代起，物理学家就用机器击键做过不少测量。这里只转述大意。一派从钢

琴的机械结构出发，说琴槌在击弦前已经和琴键脱开，琴槌是飞出去撞弦的，所以弦能"知道"的只有琴槌撞上来时的速度，一个数而已；同一个速度，不管手指怎样按，出来的音应当一样。照这个说法，"触键"就是一个美丽的误会。另一派是弹琴的人，他们坚持手指落键的方式会改变音色：同样的响度，"压下去"和"砸下去"听起来就是不一样。

后来的研究给了一个有意思的回答：手指碰到琴键时那一下撞击声，键撞到底时那一下闷声，本身也混进了音里；手指怎样落键，会改变这些附带的声音，于是改变了人听到的整体音色。2004 年有研究者（Goebl 等）专门做过听辨：同样响的音，带着落键前那一下指键碰撞声时，一部分受过训练的听者分得出"压下去"和"砸下去"；把那一下碰撞声剪掉，就没有人分得出了。研究者自己也说，单靠耳朵，这份差别相当小。可这恰好说明，差别不在琴槌速度那一个数上，在手和键碰的那一下里。还有一层：弹琴的人自己听到的音，是和他手上的感觉一起到的，他判断"这个音好不好"，本来就是在一个联合核上判的。

这场争论在本书的框架里，读出来是这样的。物理学那一派，是用视觉科学的办法把一下按键压成一个数（琴槌速度），这正是三重退化：把手指落键那一片、那一段、那一阵牵扯，收成一个点。在这个点上，"触键"当然消失了。钢琴家那一派说的，是那把撑开的伞：手指、琴键、琴槌、弦、整台琴的木头，还有弹琴人的耳朵，在一下按键里互相改写。两派都没错，各自站在伞的不同撑法上。错只错在一方把那个收成的点当成了全部。

◆ 四、判瓜熟的最小模型

一个联合核，四个变量，普通读者看了难免发怵。我们把它压到最小，压到能在菜市场上讲清楚的地步。

谭桂香拍一下瓜，可以只留两样东西。

一样是掌心的回弹，记作 a(t)：拍下去之后，手被顶回来的那股劲，随时间怎样变。熟瓜和生瓜，这股劲的来去不同。

一样是那一声，记作 p(t)："嘭"那一声，随时间怎样起、怎样拖、怎样散。

拼接的办法，是分别给 a 和 p 打分，再加权相加：

$$m_{拼} = \int f(t)\, a(t)\, dt + \int g(s)\, p(s)\, ds$$

f 和 g 是两个权重函数，各管各的。m拼 是判出来的熟度。这是最朴素的拼接：手一个分数，耳朵一个分数，加起来。

稍微高级一点的拼接，是把两个分数乘起来，或者再加一个乘积项：

$$m_{拼}' = m_{拼} + \lambda \cdot \left(\int f(t)\, a(t)\, dt\right) \cdot \left(\int g(s)\, p(s)\, ds\right)$$

这已经承认了手和耳朵之间有关系，可它承认的方式，是先把手上的整段回弹压成一个数，把耳朵里的整段声音压成一个数，再让两个数见面。两段东西在时间上谁先谁后、谁对着谁，在压成一个数的时候已经丢了。

联合的办法，是让手和耳朵在时间上逐刻相见：

$$m_{联} = \iint w(t, s)\, a(t)\, p(s)\, dt\, ds$$

w(t，s) 是一个联合权重：手上 t 那一刻的回弹，和耳朵里 s 那一刻的声音，配在一起，对判熟有多大分量。

关键在 w 能不能拆。如果 w(t，s) 可以写成 f(t)·g(s)，那么 m联 就退回到上面那个乘积项，联合就白联合了。只有当 w 拆不开，比如 w 主要取决于 t 和 s 之间差了多少（手先松还是声先沉，差了多久），联合才真正多出东西来。

这就给了一个可以说给谭桂香听的猜想：

判瓜熟的读数，主要藏在手的回弹与耳朵的声音之间的先后与配比里，不在两者各自的大小里。

换成她的话，也许就是："手上一松，声音跟着沉下去，那就熟了；手上硬，声音却飘，那是还生；手上软，声音也发烂，那是过了。"这句话是我替这个模型试着翻译的，不是她说的，也不是任何人说的。第五章写她的时候，我刻意没有让她讲道理，因为会拍瓜的人通常讲不出道理，道理在手上。

这个最小模型里，可以看到三个伞参数怎样撑开。

伞半径 r：掌心贴住的那一片不是一个点，回弹 a(t) 是一片掌心一起感到的；声音 p(t) 要持续一段才成音色，r 随时间变。两边都不收成点。

重叠度　　ω：联合权重 w 拆不开，意味着手上的一刻和耳朵的一刻互相牵扯，跨模态的 ω触听 大于零。

传播速度 v：瓜瓤里的振动传到瓜皮、传到手、传成声，都要时间；手先松还是声先沉，正是因为两条路的速度不同。如果 v 趋于无穷，两样东西同时到，先后就没了，那个藏着熟度的"差了多久"也就没了。

所以，这一下拍打，在三个参数上同时偏离了三重退化。把它压回视觉科学的样子，要让掌心收成一个点（r→0），让手和耳朵互不相干（ω=1，跨模态的重叠为零），让振动瞬间到达（v→∞）。三个条件一满足，谭桂香就不用拍了，看一眼就够了。可我们都知道，看一眼判不准瓜。

同一个最小模型，可以原样搬到叩诊和敲裂上去。叩诊时，贴在身上的那根手指给出 a(t)，耳朵给出 p(t)；敲裂时，锤柄传回手腕的那一下给出 a(t)，锤声给出 p(t)。三件事的对象不同，瓜瓤、胸腔、瓷胎，可数学的骨架一样：一个动作，两路回话，判断落在两路回话的先后与配比上。如果这个骨架对，那么三件

事里的 w 都应当拆不开；如果有一件拆得开，就说明那件事里手和耳朵碰到的其实不是同一阵动，可以各算各的。这也是一个好处：最小模型不只给出一个猜想，它还告诉我们到哪里去找反例。敲一块实心的厚钢板，手上的反弹和锤声可能几乎各走各的路，C 也许很小。那里拼接够用，并不奇怪。预测三从来不说处处不可拼，它只说在拍、叩、弹、敲这类"手和耳朵碰同一团东西"的事上不可拼。

这里我要守住一条线：这个最小模型没有数据。我没有测过谭桂香的手，也没有录过一只瓜的声音。模型的用处，是把"一起"这件事写到可以被检验的地步。它说的是：如果你把 w 估出来，你会发现它拆不开；如果你发现它拆得开，这个模型就错了。

这个最小模型还接上了第二十一章的"气的读数"。那里说，气的强弱，就是伞的 r、ω、v 偏离三重退化的程度（待验）。拍瓜这一下，偏离同时发生在三个参数上，而且有一部分偏离只在手和耳朵之间才显露：ω触听。这并没有给伞添一个新参数，它仍旧是重叠度 ω，只是重叠的两块伞面分属两种感觉。菜市场上的人说一只瓜"有生气""水灵"，说另一只"死了""木了"，如果有一天能把这类说法和 ω触听 对上，气的读数就多了一个落脚的地方。这一句，我也只敢写成待验。

◆ 五、引出预测三：纠缠不可拼

到这里，导论立下的五条预测里的第三条，可以正式出场了。

预测三，纠缠不可拼：同一个判断任务（判瓜熟、叩诊判积液、听敲判裂），用联合采集的触听纠缠数据训练出来的模型，优于两通道分别采集、分别训练、再拼接的模型；人也如此。如果拼接稳定地不比联合差，承重三就错了。

这里的"联合采集"，意思是手上的回弹和耳朵里的声音，在同一下拍打里、按同一根时间轴、对着同一片接触面一起取下来，取下来的时候就不拆。"分别训练再拼接"，意思是两套传感器各记各的，各自训练出一个判断器，再把两个判断器的输出合起来。

许蔓在深圳一家机器人公司做触觉传感。假如她要做一台会拍瓜的机器，她手边最顺的路，几乎一定是拼接：公司里有现成的力传感器和现成的麦克风，各有各的软件，各有各的数据格式，各有各的工程师。把两路数据并在一起，是最便宜的工程。预测三说的是：这条便宜的路，在判瓜熟这件事上会碰到一个天花板，而那个天花板的高度，就是跨模态重叠项 C 的大小。

推翻它的大局面是什么？是这样一种局面：人们在拍瓜、叩诊、敲裂这类事上，反复做了联合与拼接的对照，拼接总是追平联合，或者只差在误差里。那就说明 C 小到可以忽略，手和耳朵在这些事上确实可以各算各的。真到那一步，承重三要收窄：先人后机的次序只在少数特别的事上成立，在大多数判断上，拼接就够了。

也要说清什么不算推翻，免得这条预测变成怎么说都对的话。联合的模型如果赢，必须是在数据量相同、传感器相同、训练功夫相同的条件下赢；如果联合只是因为多用了数据才赢，那不算数。反过来，拼接的模型如果输，也不能只怪工程师没调好，要换几拨人、几种瓜、几种机器去试。预测三赌的是一个结构上的差距，不是某一次比赛的输赢。结构上的差距有一个好认的特征：换了人、换了机器，它还在。

"人也如此"这半句，要单独说一说。它的意思是：让一个人只戴耳机听录好的拍瓜声，另一个人戴上隔音耳罩只用手拍，各自判，再把两人的判断合起来，合出来的准头，比不上一个人既拍又听。这件事看起来理所当然，可"理所当

然"正是视觉科学最容易放过的地方。它从来没有被当成一个需要检验的命题，因为在视觉科学的框架里，两个通道本来就是分开记录的。

怎样把这个实验做细，怎样挑瓜，怎样对齐时间轴，怎样防止判断者偷看，怎样让 AI 和人走同一套流程，这些留到第三十二章。那里会把预测三放进"先人、后机、再回人"的整条路上去做。这一章只做一件事：把预测三背后的数学写出来，让它不只是一句口号。

回到那一声"嘭"。视觉科学看这一下拍打，看到的是两条曲线。触与听的纠缠数学看这一下拍打，看到的是一把撑在手掌和时间上的伞，伞面上有一块是手和耳朵共有的。那一块，就是谭桂香三十年练出来的东西。它从来不在任何一条曲线上，它在两条曲线之间。

带 走 的 话

拍瓜的准头不在手上，也不在耳朵里，在手和耳朵之间那一块谁也拆不开的伞面上。

小　账

SDE 账： E 落在掌心、瓜瓤与声音的互相改写，D 落在接触—回弹—声起—声落的先后，S 落在"熟了"随这串先后一下一下显露；三者在一下拍打里不可分。

代签账： 拆开了"两串数据拼起来就等于一起感到"这一处代签；给出跨模态重叠度 ω触听　与跨模态重叠项 C＝K−K触·K听（猜想，待验）。

◆

25

第 25 章

新数学的门槛

这一章的问题

说"数是一把伞"，说"触觉数学""听觉数学"，怎样才不算比喻？一门新数学要跨过哪两道门槛，才配叫数学？

◆ 一、罗明川的网格：裂纹走到哪里，网格就重划到哪里

这是我构想的场景。

长沙，十一月，晚上十点多。罗明川还坐在书房里，屏幕上是一块带缺口的钢板，被划成密密麻麻的三角形。他做断裂力学和数值模拟二十多年，最熟的活儿就是画网格。网格的每一个节点，都是一个没有大小的点；每一个三角形，都由三个点围成。钢板受拉，缺口尖上开始出裂纹，他要算出裂纹往哪里走、走多快。

麻烦在于，裂纹每往前走一小步，裂纹尖附近的网格就得重新划一遍。裂纹尖上，弹性力学的方程给出的应力趋于无穷大（这叫裂尖奇异性），网格不在那里加密，算出来的东西就不可信。裂纹拐个弯，网格跟着拐；裂纹分个叉，网格就得在叉口上重新拼。罗明川开玩笑说，他这辈子不是在算裂纹，是在给裂纹铺路，裂纹走到哪里，他就得把路铺到哪里。

更深一层的麻烦是：方程自己不知道裂纹该不该长。经典弹性力学的方程里到处是导数，导数要求位移是光滑的，一处挨一处地连续变化。可是裂纹的意思恰恰是"这里断开了"，裂纹两侧的位移是跳着变的，导数在裂纹上根本不存在。

方程在裂纹上失了效，只好另外请一个判据进来：一块材料什么时候开裂，往哪个方向开裂，由能量或者应力强度这类判据单独规定：1921 年英国的格里菲斯提出能量判据，1950 年代美国的欧文提出应力强度因子，这两样至今是断裂力学的两根柱子。方程管裂纹两边，判据管裂纹本身。一个问题，两套规矩。

还有一件事，罗明川心里清楚，却很少写进论文：裂纹是有声音的。材料开裂时会放出极细的弹性波，工程上把它叫作声发射，做检测的人把传感器贴在构件上，"听"里面有没有裂纹在长。一座桥、一个压力容器，眼睛看不见里面的裂，耳朵（借着传感器）先听到了。可是到了罗明川的方程里，这声音没有位置。方程只管位移和应力，裂纹的那一声，被留给了另一个行当。

女儿罗朵朵九岁，那天晚上作业写完了，跑进书房，手里拿着一张作文纸，嚓地撕成两半。

"爸爸，纸自己就知道往哪里裂。你的电脑为什么不知道？"

罗明川笑了一下，没答上来。

孩子的话不承担证据，可这句话问到了点子上。撕纸的时候，手感到纸在指间一点点吃劲，吃到某一处，嚓地松开，耳朵里同时有一声。裂纹走到哪里，是纸和手一起决定的，不需要谁在旁边另立一条规矩。裂纹是被撕出来的，是一个触觉的、听觉的事件。罗明川的方程处理它，用的是一套视觉的办法：把钢板看成无数个没有大小的点，点与点之间只和紧挨着的邻居打交道（这就是导数的意思），信号瞬间传遍。三重退化在这里一条不落：$r\to 0$，$\omega=1$，$v\to\infty$。退化到了这个地步，裂纹自然就成了方程的盲区。

◆ 二、门槛一：收拢时，必须退回旧数学

罗朵朵的问题有一个答案，这个答案在罗明川那一行里已经出现了二十多年。可在讲它之前，要先立一道门槛。

本书第五编一路说下来：数不再是点，是伞；伞有半径、有重叠、有传播速度；视觉数学是伞在三重退化下显露的稳定态。这些话听起来很新，也很容易被说成一种诗意的比喻。比喻和数学的分界在哪里？第一道门槛是：**新数学收拢的时候，必须退回旧数学。**

道理不复杂。旧数学在过去三百多年里算准了行星、桥梁、电路、卫星，第十六章说过，代签不是错，方程照样算得准。一门新数学如果收拢以后退不回这些成绩，它就解释不了旧数学为什么好用。解释不了对手为什么赢的人，不配说对手有边界。物理学里有一个老规矩，叫对应原理：新理论在旧理论管用的地方，必须给出和旧理论一样的结果。相对论在速度远小于光速时退回牛顿力学，量子力学在大量子数时退回经典力学。新数学对旧数学，也要守这条规矩。

伞模型怎样跨过这道门槛？第二十一章的纠缠算子就是钥匙：

$$L_K[u](x) = \int K(x, y)\,(u(y) - u(x))\,dy$$

一处的变化，等于周围一片各处和它的差，按核 K 的分量加起来。这里没有导数，只有差。核 K 撑开的范围，就是伞的半径。现在让伞收拢：把 K 撑开的范围一点点缩小，同时按比例调整它的高度。已有研究证明，在合适的条件下，这个算子会收敛到经典拉普拉斯算子的一个常数倍。拉普拉斯算子是旧数学的心脏之一，热传导、静电、弹性、扩散，到处都有它。也就是说，伞收拢成点的那一刻，旧数学原样回来了。

罗明川那一行，有一个更具体的例子。2000 年，美国一位叫西林（Silling）的研究者提出了近场动力学（peridynamics）。它的想法和伞模型几乎一样：材料里的每一点，不只和紧挨着的邻居打交道，而是和一定范围内的所有点都连着"键"；这个范围叫作视界（horizon），记作 δ。一点受的力，取决于它和视界内各点的位移差，而不是位移的导数。已有研究证明，当视界 δ 趋

于零时，近场动力学收敛到经典弹性力学。伞收拢，罗明川熟悉的那套方程原样回来。

热传导上也有同样的例子。十九世纪傅里叶写下的热传导方程，说热流跟着温度的坡度走，坡度一出现，热流立刻出现。1948 年，意大利人卡塔内奥（Cattaneo）给它加了一项，1958 年法国人韦尔诺特（Vernotte）也独立做了同类的工作：热流不是立刻跟上，而是要"迟疑"一小段时间，这段时间叫弛豫时间，记作 τ。写出来是：

$$\tau \cdot \partial^2 T/\partial t^2 + \partial T/\partial t = \alpha \cdot \nabla^2 T$$

T 是温度，α 是热扩散系数。当 τ 趋于零，第一项消失，剩下的正是傅里叶方程。迟疑收拢成零，旧数学原样回来。

听觉那一头，也有一把能收拢、能撑开的伞，而且它已经在每一部手机里了。分析一段声音，最经典的办法是傅里叶变换：把整段声音拆成各种频率的正弦波，各有多强。这个办法有一个毛病：它告诉你这段声音里有哪些音高，却不告诉你哪个音高在什么时候出现。一首歌和它倒着放，傅里叶变换出来的强弱分布可以一样。于是人们想出加窗的办法：拿一扇有宽度的"窗"，在声音上一段一段地滑过去，每一段各做一次分析（这叫短时傅里叶变换）。窗的宽度，就是听伞的半径。

这把伞两头都能收拢。窗收到无限窄，你得到的是一个一个时刻上的声压读数，一串没有大小的点，那是视觉科学最熟的采样；窗撑到无限宽，你得到的是整段声音的傅里叶谱，时间被抹平了。两头都退回旧数学。只有在中间，窗有一个有限的宽度，你才同时听到"有什么音"和"什么时候响"。1946 年，加博尔（Gabor）在《通信理论》里，把这件事讲成了一条定理式的权衡：时间上分得越细，频率上就分得越粗，二者不能同时无限精确；他第二年又专门写过听觉里的"声学量子"。这条权衡在伞的语言里很好懂：听伞不能收成点，收成点就听不

出音高；也不能撑到无穷，撑到无穷就没了先后。第二十三章说的"听觉没有瞬间"，在这里有了一个已经被证明过的数学形状。

近场动力学放宽的是 r（视界有大小），卡塔内奥方程放宽的是 v（热有有限的传播速度），加窗分析给听觉的伞一个有限的、可以随时间调整的半径。三者都跨过了第一道门槛：收拢的时候，退回旧数学。

这道门槛还有一个不常被说出的用处：它防住了新数学自己。一个人说"我发明了一种全新的数学，旧数学全错了"，你只要问他一句：你的数学在什么条件下退回旧数学？他答不上来，你就知道那多半不是数学，是情绪。伞模型愿意先低头：它承认，在伞收得足够小、重叠可以忽略、信号快到可以当成瞬时的地方，旧数学是对的，而且是够用的。这一低头，给了它说话的资格。

第一道门槛对第二十一章的"气的读数"也是一次核对。那里说，气的强弱，就是伞的 r、ω、v 偏离三重退化的程度（待验）。照这个读法，伞收拢、三重退化成立的地方，气的读数应当归零。旧物理在那里够用，旧物理里也确实找不到气，两件事对得上。气若在三重退化成立的地方仍然读出不为零的值，那这个读数就和旧物理打架了，要么读数定义错了，要么旧物理在那里本来就不够用。两种情形都可以查，这正是一个读数该有的样子。

◆ 三、门槛二：撑开时，必须算出旧数学算不出的

只跨过第一道门槛还不够。一门新数学如果收拢时退回旧数学，撑开时也只是把旧数学的结果换个写法再算一遍，那它是一种新记号，不是一门新数学。第二道门槛是：**撑开的时候，必须算出旧数学算不出的东西**。

回到罗朵朵的那张纸。

近场动力学里，裂纹是怎样出来的？两点之间的键被拉长，拉长超过某个限度，键就断了。一处断的键多了，那一处就裂开了。没有导数，所以位移跳着变

也不碍事，方程在裂纹上照样成立；不需要另立判据，键断不断，就是材料自己的规矩。裂纹往哪里走、在哪里分叉、几条裂纹怎样互相干扰，都从键的断裂里自然出来。用罗明川能听懂的话说：裂纹不再是要他铺路的客人，是材料自己撕出来的。

这就是罗朵朵那句话的答案："纸自己就知道往哪里裂。"在近场动力学里，电脑也开始知道了。它知道，是因为它不再把材料看成互不相干的点，而是给每一点撑开了一把半径为 δ 的伞，伞与伞重叠，一处的拉扯牵动一片。按此牵彼，ω>1；伞有大小，r=δ>0。这正是第二十一章说的触觉数：r 固定大于零、ω 大于一、非局域的场。

罗明川第一次在屏幕上看到裂纹自己分叉的时候，也许会想起另一件事：他二十年来铺的那些路，都是因为方程从一开始就把伞收成了点。点上没有裂纹的位置，只好由他来安排。

他还会碰到一个让他意外的问题：视界 δ 到底该取多大？取得太小，伞几乎收成了点，近场动力学又退回经典方程，裂纹尖的麻烦跟着回来；取得太大，一点牵动的范围太广，细小的裂纹被抹平了。这个问题在旧数学里不存在，因为旧数学没有伞。在新数学里，它是第一个要回答的问题。这很像一个人学着用手去判断东西：用指尖，还是用整个手掌？按一颗葡萄用指尖，拍一只瓜用手掌。手的大小要配上对象的大小，伞的半径要配上材料里拉扯的尺度。所以伞的半径，说白了就是新数学里的"手有多大"，不能当成一个随便设的技术参数。

这里要守住诚实。近场动力学不是什么都好。它计算量大，每一点要和视界内的很多点打交道；靠近边界的地方，伞撑出了材料之外，需要专门修正；视界 δ 取多大，在许多问题里还要凭经验。这几样，都是这一行自己公开讨论的难处。它跨过了第二道门槛，但跨过以后，眼前还有一大片要开垦的地。

卡塔内奥方程算出了旧数学算不出的什么？傅里叶方程有一个怪处：在一根无限长的铁棒一端点一下火，按它算，铁棒另一头无论多远，温度在同一瞬间就升高了，哪怕只升高一点点。热传得无限快。这在日常的热传导里没有什么坏处，因为远处升高的那一点点小到测不出来。可它在原理上是一个漏洞：没有任何东西能传得无限快。卡塔内奥方程里多了那一项，热就变成以有限速度传播的波，速度大约是 α 除以 τ 再开方。远处的温度要等波到了才升高。

这件事并不只停在纸上。在低温的超流氦里，热真的以波的形式传播，物理学家把它叫作"第二声"：蒂萨和朗道先后在理论上预言，1944 年苏联的佩什科夫在实验里观测到。名字本身就有意思：热的传播，被叫成了"声"。在极短时间的激光加热、在纳米尺度的器件里，热的有限传播速度也开始被认真对待。旧数学在这些地方给出的是瞬间到达，新的方程给出的是依次到达。依次到达，正是第二十三章说的听觉的性质：声速有限，必须依次到。

多尺度方法是第三个例子。罗明川那一行里还有一种常见的做法：裂纹尖上一小块，用原子一个一个地算，因为那里的拉扯已经细到要看每一根原子间的键；离裂纹尖远的地方，用连续介质的方程算，因为那里的变形平缓，没有必要细分。这一路里有名的一种叫准连续介质法，1996 年由塔德莫尔（Tadmor）、奥尔蒂斯（Ortiz）、菲利普斯（Phillips）提出，题目就是分析固体里的缺陷。两块之间要接缝，接缝怎样做得不出假的力，是这一行几十年的难题。用伞的话说，这种方法让伞的半径因地而异：裂纹尖上，伞细到原子；远处，伞大到一片。它不再承认全场只有一种撑法。

三个例子放在一起，可以看清第二道门槛的样子。近场动力学让裂纹自然出现，不需另设判据；卡塔内奥方程让热以有限速度传播，补上了瞬间到达的漏洞；多尺度方法让伞的半径因地而异，算到了旧方法不肯细到的地方。每一个都在撑开伞的某一个参数，每一个都算出了旧数学算不出、或者要靠外加规矩才勉强算出的东西。

要说清，这三个例子都不是本书的发明。它们是别人在各自行当里一点一点做出来的。本书做的事情很小：把它们放进同一张表里，指出它们撑开的分别是伞的 r、v、以及 r 的分布，因而是同一件事的不同侧面。至于把三个参数同时撑开、并且让触和听在同一把伞上纠缠的数学，那是第二十四章的猜想，还没有人做出来。

◆ 四、退化溯源：预测二报账

两道门槛之外，还有一件事要做：报账。导论立下的预测二是这样说的：

预测二，退化溯源：放宽 r、ω、v 任一项的数学与物理理论（近场动力学、多尺度方法、有限传播速度的热传导与声学），多数由触觉或听觉问题（断裂、撕裂、声、热）逼出；若主要由视觉问题逼出，承重二错。

这条预测的逻辑是这样的。承重二说，三重退化是视觉成像三性的投影。如果这是对的，那么最先觉得三重退化"不够用"的，应当是那些眼睛帮不上忙、手和耳朵才碰得到的问题。裂纹是撕出来的，热是摸出来的，声是听出来的。反过来，如果放宽三重退化的理论多半是因为眼睛看的东西出了问题才发明的，那就说明三重退化和视觉没有特别的关系，承重二就错了。

先记下支持的一边。近场动力学，由断裂问题逼出：裂纹处导数失效，这是一个撕裂的问题。卡塔内奥方程，由热传导的无限速度问题逼出：热是触觉的对象。多尺度方法，主要由材料缺陷与裂纹尖的问题逼出：又是撕与裂。还有一类非局域弹性理论，常归于美国的埃林根（Eringen）1970 年代初的工作，他 1972 年的论文题目里就写着平面波的色散；动机之一是让连续介质能算出晶格里波的色散，也就是不同频率的振动跑得快慢不同，这是一个声的问题。加博尔的时频权衡，起于通信与听觉。后来的小波分析，源头之一是石油勘探里分析地震回波，1980 年代初，在法国石油公司做地震勘探的莫莱（Morlet）为此想出

了这种办法：往地下打一炮，听大地的回声，从回声的先后与长短里判断下面的岩层。这几乎就是一次放大了的叩诊，敲一下，听回话。

再记下不支持的一边，以及不好归类的一件。这一边不能藏，藏了，预测就成了宣传。

先说一件要单独记账的事：相对论。相对论放宽的正是 v：它说任何信号都有一个有限的极限速度。而这个极限速度，偏偏是光速。光速有限这件事，最早是 1676 年丹麦天文学家罗默用望远镜看木星卫星的掩食时间，从观测里推出来的；两百多年后逼出相对论的，也是光自己的问题：光在运动的物体之间怎样传播。这是一个放宽 $v\to\infty$ 的理论，逼出它的却不是碰撞，也不是声。我把它记作"光自身逼出的特例"，单独记一笔：它追问的不是眼睛看到的像，而是眼睛借以看见的那个信使本身跑多快；而且它只放宽了 v，却保留了点，事件仍是没有大小的点，世界线仍是没有粗细的线，$r\to 0$ 和 $\omega=1$ 原封不动。单独记一笔，不是替它开脱。它不进支持的一边，也不能从账上划掉，清点时要让读者看见它摆在哪里。

真正的反例来自图像处理。2005 年，布瓦德斯（Buades）等三位研究者提出了"非局域均值"去噪方法：给一张照片去掉噪点时，一个像素不只参考紧挨着的邻居，而是参考全图里和它周围长得像的那些小块。随后，图像处理里发展出了一整套非局域的算子。这放宽的是 ω：一处的值，和远处一片互相牵扯。而它要解决的，恰恰是眼睛看的东西。这一块，我记作反例，而且是实打实的一块。

账面就是这样：支持的一边有五六个例子，反例一块（非局域图像算子），另记光自身逼出的特例一件（相对论）。这远远不够下结论。要真正检验预测二，需要做一次大一点的清点：把放宽了 r、ω、v 任一项的主要理论列出来，一个一个查它最初是被哪一类问题逼出来的。查的时候有一条纪律：看的是"最初逼出它的那个问题"，不看它后来被用到了哪里。近场动力学后来也被用到了

图像上，非局域算子后来也被用到了力学上，这些都不算。而且，查的人最好不知道本书的预测，问题归哪一类，由几个人分别判，判完再对。

分类本身也要先立规矩，不然会变成看人下菜。我建议的规矩是：看逼出理论的那个问题，它的对象是什么。对象是碰撞、拉扯、断开、压与按、冷与热的，归触觉一类；对象是先后、节奏、回声、振动的传播与衰减的，归听觉一类；对象是像、影、亮度、颜色、位置、轨道的，归视觉一类。有的问题会落在交界上，比如地震回波，它是振动（听），也是岩层受压（触），那就两边都记，不硬塞。还有一类问题，起于数学自身，比如纯粹为了推广某个定理而放宽了条件，那就单列，不计入任何一边。这样分，难免有争议，争议本身也该写进账里，让读者看得见是怎样判的。

推翻的大局面也就清楚了：如果这样一次清点做下来，放宽三重退化的理论主要由视觉问题逼出，比如由图像、光学、天文观测这一类问题逼出的占了大半，那么承重二就错了，三重退化和视觉三性的对应，就只能降为一个好看的类比。

我愿意把话说在前头：图像处理那一块石头，比我原先以为的要硬。它提醒我，视觉自己也会遇到"点不够用"的时候：一张照片里，意义不在单个像素上，在像素和远处像素的相似里。也许这说明，视觉在看"意义"而不只是看"像"的时候，也开始需要伞。如果真是这样，承重二不必全错，但要改写成：三重退化是视觉成像三性的投影，而当视觉本身去追问意义时，它也会撑开伞。这个改写是退路，不是辩护；它要等清点做完再说。

◆ 五、罗明川的二十年

回到长沙那间书房。

罗明川的二十年，不是白画的。他铺过的每一段路，都让裂纹在经典方程里多算准了一点；他熟悉的每一个导数，在伞收拢的地方都是对的。第一道门槛说的正是这个：新数学要能退回他的数学。

可他二十年的辛苦里，有一大半是在替三重退化收拾后事。裂纹尖上的奇异性，是 r→0 的后果：没有大小的点上，应力当然可以无穷大。外加的断裂判据，是　ω=1 的后果：点与点只和紧挨着的邻居打交道，"断开"就成了方程之外的事。网格一次次重划，是因为整个框架默认信号瞬间传遍，一处变了全场都得重算。他以为自己在和裂纹打交道，其实一大半时间是在和"点"打交道。

罗朵朵撕纸的那一下，什么都没算，裂纹就走完了。那一下里有手的吃劲、有纸的拉扯、有那一声嚓，这三样东西没有一样是点。新数学的门槛，说到底就是两句话：伞收回来，要能变回罗明川的点；伞撑开去，要能撕出罗朵朵的那道裂纹。

带 走 的 话

新数学要过两道门槛，收拢时变回旧数学，撑开时撕出旧数学撕不出的那道裂纹。

小　账

SDE 账： E 落在材料各点之间的键与拉扯（伞的重叠），D 落在键一根根被拉长、断开的先后，S 落在裂纹从这串断裂里自然显露；方程把 E 收成邻点导数时，S 只好由外加判据代为安排。

代签账： 拆开了"断裂判据是材料自己的规矩"这一处代签（它是三重退化后外加的规矩）；给出两道门槛与预测二的账面（支持五六例；反例一块：非局域图像算子；另记光自身逼出的特例一件：相对论）。

◆

第　六　编

中医需要新生的科学

导　语

本编命题：今天的中医确实还不科学，可这并不说明中医不能科学化；毛病有一半出在科学的定义上，它只认眼睛取得的特征。中医的数据大半来自手指，中医需要的科学和数学，都必须是新生的。这一编从三根手指讲起，接着讲两头怎样一起动，再讲手上的特征怎样稳住、传下去，末了给脉一把伞。

26

第 26 章

脉诊是触觉 SDE

这一章的问题

老中医三根手指按在病人手腕上，按的那几分钟里，手指取到的究竟是什么？同一段脉，为什么一录成波形，就丢了大半？

先说清本章的边界：本章只讲手指怎样取得特征，不讲任何一种脉象主什么病，不作诊断，不给治疗或用药的建议。脉象和病证之间的对应，是医生的事，不是这本书的事。

◆ 一、邓守仁的三根手指

这是我构想的场景。

湘中乡下，一个落过雨的早上。邓守仁七十一岁，切脉四十多年。堂屋里一张旧方桌，桌上一只布面的小脉枕。邻村来了一个中年人，坐下，把左手手腕搁在脉枕上，掌心朝上。

邓守仁不急着按。他先让那人把袖子往上捋一捋，手腕放平，别使劲。然后他伸出右手，中指先落下，落在手腕掌后那块微微隆起的骨头（桡骨茎突）内侧，那一处叫"关"。中指定了，食指往手掌那头挨着落下，那一处叫"寸"；无名指往手肘那头挨着落下，那一处叫"尺"。三根手指并排，贴在同一条动脉上，前后不过两三寸。

这叫"独取寸口"，只在手腕这一小段动脉上取脉。一般认为成书于东汉前后的《难经》，开篇第一难问的就是"独取寸口"的道理；到了西晋，王叔和写《脉

经》，把脉象系统地整理了一遍。从那时到邓守仁，一千多年，这三根手指的位置没怎么变。

手指落下以后，看上去什么也没发生。邓守仁不说话，眼睛半闭，像在听什么。可是如果你凑近看，会发现那三根手指一直在动，动得很细。

它们先是轻轻搭着，几乎只是皮肤碰皮肤。过一会儿，稍稍压下去一点，停住。再过一会儿，压得更深，深到能感到底下骨头的硬。然后又慢慢松回来。中医管这三层叫"举""寻""按"：轻取、中取、重按。元代滑寿的《诊家枢要》把这三个字讲得很清楚：轻手循之叫举，重手取之叫按，不轻不重、委曲求之叫寻。

三根手指也不总是一起使劲。有时候三指一齐按下去，有时候只留中指，食指和无名指微微抬起；有时候单单把无名指往下沉一沉。今天的中医诊断教材里，一齐按叫"总按"，单按一指叫"单按"。手指还会在动脉上稍稍往左、往右挪一点，像在找那根管子的边。

还有一样东西容易被漏掉：邓守仁的呼吸。老派的切脉讲究医生自己先把气息调匀，用自己一呼一吸的长短，去数病人的脉在这一息里来了几下。《素问》里就有"人一呼脉再动，一吸脉亦再动"的说法，拿一呼一吸做计数的单位。这是一件很奇妙的事：在没有钟表的年代，医生拿自己身体的节奏当尺子，去量另一个身体的节奏。量的是快慢，是一串先后排成的疏密。这是脉诊里最像"听"的一部分。邓守仁半闭着眼睛"像在听什么"，也许不全是比喻。

几分钟以后，邓守仁换那人的右手，再来一遍。

这几分钟里，他取到的是什么？一个外行人看到的，是一个老人把手指放在别人手腕上，一动不动。一台仪器如果只记录他手指下的压力，会记下一串起伏的曲线。可是邓守仁自己知道，他做的事远比"放着"复杂。他在按、在松、在挪、在单按、在比较。他的手指在问，脉在答。

他为什么要按那么久？古书里有"五十动"的说法：《灵枢·根结》讲"五十动而不一代"，说的是数满五十下，看中间有没有歇止；张仲景在《伤寒论》的序里，也批评过切脉"动数发息，不满五十"的草率。不论这个数字怎样理解，它背后的道理用 SDE 说得通：脉象是一个显露谱系，要随着一下一下的脉来脉去，才慢慢显露、成形、立住。跳三五下就下判断，等于看了一眼影子就说出了整座山。S 要等 D 走够了才发生。

本书前面说过，触觉 SDE 最容易让人觉察 E：手和被摸的东西贴在一起、互相改写。脉诊是这件事在人类手艺里走得最远的一个例子。下面三节，拿脉诊里三组最常说的对子：浮沉、滑涩、弦紧，一组一组地看。每一组都是一个完整的触觉 S·D·E，不是一组对一维。

◆ 二、浮沉：按下去的深浅，是一串"问"

浮和沉，说的是脉在哪一层最显。轻轻一搭就感到它在跳，重按下去反倒弱了，这叫浮；轻搭感不到什么，要按到深处才觉出来，这叫沉。这是脉诊里最基本的一组对子。

用日常的事来体会。冬天穿了三层衣服，口袋里有一枚硬币。你隔着衣服摸，轻轻一碰，摸到的是外套的布；稍稍压下去，摸到毛衣的软；再压，才碰到那枚硬币的硬边。硬币在哪一层，你是靠一层一层压下去、比较每一层的回应摸出来的，一下摸不出。

浮沉也是这样。它是一整串深度上的回应排出来的样子；单看某一个深度上的读数，看不出浮沉。

先看 E。邓守仁的手指压下去，皮肤、皮下的肉、动脉的管壁、管子里一阵一阵涌过来的血，和他的指腹贴在一起。他压得越深，动脉被压得越扁，血流过时顶他手指的劲就跟着变；反过来，动脉一下一下的顶劲，也在改写他指腹上的

感受，让他知道该不该再压。手指和脉在互相改写。这就是 E：对象与场在互相改写。它不是"环境"，也不是"背景条件"，因为离开了这一按，就没有这一脉可言。

再看 D。举、寻、按，是一串由浅到深的差异。每一层和上一层比，跳得更显还是更隐，这是 Difference；哪一层最显，分得出来，这是 Distinction；从浅到深，或者从深回浅，排成一个次序，这是 Direction。没有这串差异，就没有浮沉。只停在一个深度上的手指，说不出浮沉。

再看 S。"浮"或者"沉"，是随着这串按压一点一点显露出来的。刚搭上的时候，只冒出一点跳动（Show）；压过两三层，"哪一层最显"开始成形（Shape）；三层走完，再松回来对一遍，这一脉在深浅上的整个样子才立住（Structure）。S 是一个显露谱系，不是一张一次拍下的照片。

三样东西分不开。分开来说，只是理念界的假想性切割。真实的那一刻里，手指压下去（E 在变），深浅在排开（D 在走），浮沉在冒出来（S 在显），是同一件事。

这一组对子还透露了一点：浮沉这个特征，必须由医生自己的动作去问出来。脉不会自己报"我在第几层"。它只在被按的时候，按不同的深浅给出不同的回答。你不问，它就不答。

把这一串问答画出来，会得到一条曲线：横轴是手指压下去的深度，竖轴是那一层上脉的回应有多显。浮的脉，曲线在浅处高、深处低；沉的脉，曲线在浅处低、深处高。浮沉是这一整条曲线的形状，不是曲线上的某一个点。这条曲线，第二十九章会把它叫作"按压深度—回应曲线"，给它数学。这里只记下它的来历：它是手指一层一层问出来的。

◆ 三、滑涩：指下的流动，是一串先后

第二组是滑和涩。

脉书上形容滑脉，说它往来流利、应指如珠，今天的教材常说"如盘走珠"，像一颗珠子在盘子里滚过去；形容涩脉，说它往来艰涩，"如轻刀刮竹"，像一把轻刀刮过竹子，一顿一顿。这些比喻在历代脉书里反复出现，明代李时珍的《濒湖脉学》把它们汇在了一处。

用日常的事来体会。夏天拿着浇菜的水管，手握着管子。水流得顺的时候，手心里是一股匀匀的、滑过去的劲；水里夹了气泡、或者管子里有沙，手心里就是一顿一顿、疙疙瘩瘩的劲。你不用看水，就知道水流得顺不顺。

滑涩说的就是这种流动在指下的样子。这一回，人最先觉察到的往往是 D：一下脉来，从起到落，是一串先后。滑的那一下，起得圆、过得快、落得干净；涩的那一下，起得滞、中间像被什么挡了一挡、落得拖。三根手指并排，还能感到这一下脉从寸到尺，或者从尺到寸，是一气滚过去，还是一段一段过去。差异在时间里排成先后，在三根手指之间排成先后。

可是滑涩同样是完整的 S·D·E，不能因为它最显 D，就说它"属于 D"。它的 E，是血流、管壁和指腹之间的摩擦与顶让：流动在推手指，手指的压力又在改变流动；按得重一点，同一脉可能就从滑里显出一点涩来。它的 S，是"珠"或者"刀"这个形状：随着一下一下的脉来脉去，那颗"珠子"先冒出一点圆（Show），再滚成形（Shape），几十下以后，"这是一脉滑的"才立成结构（Structure）。

这里有一个很容易被忽略的地方。"如珠走盘"和"如轻刀刮竹"都是比喻。比喻在视觉科学里常常被当成不精确的说法，好像只有一个数字才算精确。可是这两个比喻做的事，恰恰是在传递一个触觉 SDE 的整体：珠子的圆、滚的顺、盘子的平，一下子都给了出来。一个数字给不出这么多。古人选比喻，并非不会用

数字；他们手上的东西，一个数字装不下。第二十八章会讲，比喻怎样才能变成可传、可验的单位。这里只先记下：比喻是触觉特征在没有触觉数学的时候，找到的一种临时的伞。

还可以留意这些比喻的材料：珠子、盘子、刀、竹子、琴弦、绳索。几乎全是手摸得到、手用得着的东西，很少有"像一道光""像一片颜色"这类借自眼睛的说法。脉学的词汇，整个是一套手的词汇。这一点和导论立下的预测五（文明的感官词根）有关：如果把中医脉学的核心术语和西方生理学里对应概念的术语，拿来比一比各自借自哪种感官，也许能看出侧重的差别。这里只提一句，不作结论，那是一项要另外清点的工作。

◆ 四、弦紧：张力，是一根被按住的弦

第三组是弦和紧。

古书上形容弦脉，说它"端直以长"，这四个字出自《素问》；后世脉书又添上"如按琴弦"，手指按下去，像按在一根绷直的琴弦上。形容紧脉，说它"如转索"，像按在一根正在拧动的绳子上，这个比喻可以追到张仲景。

请注意这个比喻从哪里借来：琴弦。第二十四章讲弹琴，说按弦的手指感到弦的顶劲，同时耳朵听到音。中医形容一种脉，借的正是乐师手指下的感觉。这不是巧合。弦是人类手指最熟悉的一种张力，它绷着，按下去有一个干脆的反弹，按的地方挪一挪，张力还在，一直通到两头。

用日常的事来体会。晾衣绳。一根松松的晾衣绳，你按下去，它软软地让开；一根绷紧的晾衣绳，你按下去，它硬硬地顶回来，而且你在这一头按，另一头也跟着动。你摸的是一处，感到的是一整根。

弦紧最先让人觉察的，常常是那股张力本身，也就是手指和管壁之间的互相顶让，这是 E。可它的 D 同样要紧：弦脉之所以叫"端直以长"，是因为三根手指

从寸到关到尺，一路比下去，张力是连着的、直的，没有在哪一处断掉；单按一指和总按三指比，张力怎样变。这是在三个位置之间、在单按与总按之间排开的一串差异。它的 S，是"弦"这个形状：几下脉以后，一根绷直的线在指下显露出来，先是一点硬（Show），再是一条直（Shape），然后是从头到尾通着的一根（Structure）。

写到这里，读者也许会想：浮沉像是在说 E（按出来的），滑涩像是在说 D（流出来的），弦紧像是在说 S（显出一根弦）。请不要这样对。每一组对子都各含完整的 S·D·E，只是人在体会某一组时，最先抓到的那一维不一样。浮沉里有一串由浅到深的 D，滑涩里有一阵流动与指腹的 E，弦紧里有一根张力的 E 和三指之间的 D。拿一组对一维，就把脉又切回成三块，重犯了视觉科学的毛病。

还有一点：这三组对子在真实的一脉里不是分开出现的。邓守仁按下去，浮沉、滑涩、弦紧是同时在指下的，它们彼此牵扯。一脉沉下去以后，滑涩的感觉也可能跟着变；张力大的时候，深浅的层次也跟着变。脉书为了教，把它们分成几组；手指上，它们是一团。这一团，就是第二十九章要给它撑开的那把伞。

◆ 五、录成波形，为什么丢了大半

假如许蔓带着一台脉搏传感器来到邓守仁的堂屋。

许蔓在深圳一家机器人公司做触觉传感，她手里这台仪器，核心是贴在手腕上的一个压力传感器。用一条带子把它绑在寸口上，带子勒到一个固定的松紧，传感器就开始记录：每一下脉来，压力升一升、降一降，屏幕上画出一条起起伏伏的曲线，这就是脉搏波形。

这条曲线有用。在现代医学里，脉搏波的分析是正当而有成效的研究方向，比如用脉搏波在动脉里传播的快慢，来评估血管的硬度（叫脉搏波传导速度）。

这类研究和中医脉诊问的不是同一个问题，它不需要为中医负责，也不应该被拿来贬低。

可是如果把这条曲线当成"邓守仁手指下的那一脉"，就丢了大半。丢在哪里，可以一条一条说清楚。

第一，单点。传感器贴在一个点上，或者一小块上。邓守仁是三根手指，三片指腹，每一片都是一把伞，按到的是一片；三把伞前后挨着，彼此还有重叠：按关的时候，寸和尺也在牵动。一个点上的读数，取不到"三处之间怎样比""张力是不是一路连着""这一脉从寸滚到尺是一气还是一顿"。弦脉的"长"，滑脉的"走"，都是在几处之间才显露的东西。一个点上，它们不存在。

第二，单通道。传感器只记压力随时间的变化。邓守仁的指腹记的远不止这些：管子有多宽，管壁是软是韧，按下去往哪边让，皮肤是凉是温、是干是润，脉的边是清是糊。这些全都在同一下按压里，同时到达他的手指。一条压力曲线，把这一团感觉压成了一根线。这是把一把撑开的伞，收成了一个点上的一个数，再把这个数排成时间序列。

第三，去掉了"问"。这一条最要紧。仪器的带子勒到一个固定的松紧，就不再动了。可邓守仁的手指从来不固定：举、寻、按，单按、总按，往左挪、往右挪。他每改一次按法，脉就给他一个不同的回答；他判的，正是"我这样按，它这样答；我换个按法，它换个答法"这整场问答。心理学里早有人区分过"被动触觉"和"主动触觉"：东西被放到你手上，和你自己伸手去摸，取得的信息大不一样。这是美国心理学家吉布森 1962 年在《主动触觉观察》一文里讲开的。固定压力下的脉搏波，是把主动触觉换成了被动触觉，把一场问答换成了一段独白。

用本书的话说，这三条丢失，恰好对上了三重退化。单点，是 $r\to 0$：一片指腹收成了一个点。单通道而且三指拆开各记各的，是 $\omega=1$：本来互相牵扯的几处、几种感觉，被切成了互不相干的几路。第三条对 $v\to\infty$，对得不如前两条

直接，要说细一点。波形本身是有时间的，一下脉怎样起、怎样落，它都记着，不能说它把时间抹掉了。它抹掉的是两段有限的"迟到"。一段在三指之间：一下脉从尺到寸滚过三根手指，有先后，因为脉搏在动脉里传得有快有慢；只守一点，这一段先后就无从记起。另一段在按与答之间：手指换一个深浅，皮肉和管壁要过一会儿才让开、才回顶，这一会儿的长短本身就是回答的一部分；带子勒死不动，这一段迟到就从来没有发生过。两段迟到都不记，读这条波形的人就只能把它当成"这一点在这一刻的值"，好像别处的回应和换了按法以后的回应，都已经在这一刻齐了，不必等。这是 $v \to \infty$ 在这里的样子。我只能说到"相当于"：它是三条里最弱的一条，若有人证明这两段迟到对脉象毫无贡献，这一条对应就该撤掉，前两条不受牵连。脉从一场有来有回的对话，变成了一段只等着被读的记录。三重退化一满足，触觉 SDE 就被收成了一幅画给眼睛看的图。第八章说，仪器的共同本事，是把听和触翻译成可看的。脉搏波形，是这句话在中医里的一个例子。

换一个角度，还能看出两条路的次序正好相反。仪器那条路，是先得到一幅图（波形，这是 S），再在图上量出峰、谷、间隔这些差异（D），再用一个生理模型去假设图背后血管和血流是怎样互相作用的（E）。这是本书批判的那条单序 S→D→E：先看，再列式，再假设纠缠。邓守仁那条路，是先让手指和脉贴在一起、互相改写（E），在改写里按出一串深浅、先后、几处之间的差异（D），浮沉滑涩弦紧才随之显露（S）。这是沉淀型的 E→D→S。两条路取得的东西不一样，原因不在机器和手之分，在于它们从不同的一维起步。

这里要特别说一句，免得误会。现代医学自己也有一样东西，恰恰保留了"问"：测血压。袖带缠在胳膊上，先打气压紧，再慢慢放气，医生把听诊器放在袖带下面，听血流重新冲过去时的那几声。这几声叫柯氏音，是俄国医生柯罗特科夫 1905 年报告的。压紧、放松，是在问；那几声出现与消失，是在答。这

是一次标准的"按压深度—回应"的问答，而且是触与听一起的问答。可见问题不在中医西医之分，问题在一种仪器有没有把"问"留下。

许蔓如果真要做一台能取到邓守仁那一脉的仪器，这三条丢失就成了她的三条工程要求：用一排传感器替代一个点，让它像三根指腹一样有面积、有重叠；同时记录压力以外的几种量，而且同一刻、同一处地记，不分头记；让传感器自己按、自己松、自己挪，并且按照脉的回答决定下一步怎样按。这三条，没有一条是神秘的，都是可以动手做的工程。它们的难处在于：每一条都在逆着视觉科学的习惯走。

许蔓听到这里，也许会想到自己公司里的一件老难题。机器手去抓一只桃子，最省事的做法是给它设一个固定的握力，握到这个力就停。可这样的机器手，抓得住却分不出生熟，因为它只握不问。会挑桃子的人，手是一捏一松、再捏一下的。机器手的毛病和脉搏波形的毛病，是同一个毛病：把一场问答压成了一个设定值。这件事在第三十一章还会再碰到。

还有一层要诚实地说。邓守仁的手指不是一台完美的仪器。触觉研究早已表明，人的触觉能分辨粗糙、软硬、摩擦、形状、曲率，敏锐得惊人，同时也有一批明显的触觉错觉，手会被骗（Kappers 与 Bergmann Tiest 2013 年的综述）。老中医四十多年练出来的手，是在和一只只手腕的互相改写里被磨出来的，这是 E 不只改写脉、也改写医生的手；可磨出来的手也带着它自己的习惯和偏向。两位老中医按同一只手腕，说法不一，这在中医内部本来就是一个真问题。手指可贵，不等于手指不会错。正因为它会错，才需要一门触觉的科学去帮它稳住、传下去、验一验。

至于这样取到的特征能不能稳定、能不能在医生之间传下去、能不能被检验，那是第二十八章的事；中医到底算不算科学，那是第二十七章的事；脉的那把伞怎样写成数学，那是第二十九章的事。这一章只把一件事说清：脉诊取到

的，是一个完整的触觉 SDE，它在手指的问与脉的答之间显露。录成一条波形，留下的是答，丢掉的是问；留下的是一个点，丢掉的是一片；留下的是一根线，丢掉的是一团。

回到那间堂屋。邓守仁松开手指，那个中年人把袖子放下来。四十多年里，邓守仁大概按过成千上万只手腕。他手指上积下的，是成千上万场问答，那里面没有一条曲线。这些问答至今没有一种数学能把它们写下来。这不是邓守仁的缺陷，也不全是中医的缺陷。这是一门只睁开了眼睛的科学，还没有长出手的缘故。

带走的话

老中医的三根手指不是在读一条曲线，是在跟脉一问一答；录成波形，留下了答，丢掉了问。

小　账

SDE 账： E 落在指腹、皮肉、管壁与血流在按压中的互相改写，D 落在举寻按、单按总按、寸关尺之间排开的差异，S 落在浮沉、滑涩、弦紧随这串按压一点一点显露；三组对子各含完整 S·D·E，不对一维。

代签账： 拆开了"脉搏波形等于那一脉"这一处代签；把脉搏波形的三条丢失（单点、单通道、去掉问）对上三重退化 $r\to 0$、$\omega=1$、$v\to\infty$，为第二十九章的脉之伞铺路。

27

第 27 章

中医不科学，科学也片面

> **这一章的问题**
>
> 说"中医不科学"的时候，拿来量它的那把尺子，是谁做的？这把尺子哪里量得准，哪里根本量不到？

◆ 一、"你这算科学吗"

这是我构想的场景。

湘中乡下，一个秋天的下午。邓守仁坐在堂屋门口的竹椅上，面前一张旧方桌，桌上一个洗得发白的小布枕。七十一岁的人，手指还是暖的。来看他的是许蔓，三十一岁，在深圳一家机器人公司做触觉传感。她回娄底探亲，听说乡下有个切了四十多年脉的老先生，就带着一只笔记本找来了。

她问得很直："邓老，我做的是机器人的手指。我们一天到晚想的，就是怎样让一根硅胶手指知道自己按到了什么。您按了四十多年脉，我想问一句不太礼貌的话：您这个，算科学吗？"

邓守仁笑了一下，没有马上答。他把三根手指并拢，在布枕上轻轻按下去，又松开，又按下去。过了一会儿才说："我年轻的时候，也有人这样问我。问的人手里拿着一张化验单，说你看，白纸黑字，这才叫科学。我那时候答不上来，心里不服气。现在老了，答得上来一半。"

"哪一半？"

"我这三根手指头按出来的东西，确实没法交给别人照样再按一遍。我说'弦'，我徒弟也说'弦'，可我们俩说的是不是一回事，没人能拍胸脯。这一半，我认，它不算科学。"

"另一半呢？"

"另一半是，问我的人手里那张单子，是机器替眼睛写的。他拿眼睛的规矩来问我的手。手有手的规矩，可是手的规矩还没有人立起来。"

这段对话是构想的，可它说出的两层意思，正是本章要守住的。第一层是认账：今天的中医，确实还不科学。第二层是追问：说它不科学的那个"科学"，本身就只长了一只眼睛。

我一直讲的那句话，把这两层压在了一处："今天的中医确实不科学，但不是中医不能科学化，而是科学自己的定义片面了；中医需要的科学和里面的数学都必须是新生的。"

这句话两头都不讨好。说中医的人听了，会嫌前半句太重；说科学的人听了，会嫌后半句太狂。本章就是要把这句话一个字一个字地兑现，不躲前半句，也不夸后半句。

兑现之前，先把"不科学"三个字拆开。平常人说中医不科学，嘴里是一句话，心里其实装着三件不同的事。

第一件，是疗效没被检验清楚。某个方子到底有没有用，对哪些人有用，有多少用，说不出一个让旁人服气的账。

第二件，是理论接不上。阴阳、五行、经络、气，这些词和今天物理学、生物学的词对不上号，找不到它们在解剖台上、在显微镜下的位置。

第三件，是取证传不下去。同一只手腕，这位医生说"弦"，那位医生说"紧"，第三位说"有点滑"，谁对谁错，没有一个可以拿出来摆在桌上比的东西。

这三件事分量不同，来路也不同。第一件，后面一节会看到，现代科学已经有一套很公平的办法，中医并非完全走不通。第二件，本书不替它辩护，也不急着判它的死刑：一套理论的词接不上今天的词，可能是理论有问题，也可能是今天的词只够描述一部分世界。这要等更多工作，本书不越界。本书真正下刀的是第三件。原因很简单：第三件是另外两件的根。取证传不下去，"证"就立不稳；证立不稳，疗效就无从分组去检验，理论也就只能一直悬在半空。

而第三件，恰好是"感官"的问题。传不下去的，是手指头取得的特征。

◆ 二、拿眼睛的尺子量手的数据

先看一件很小的事：一位病人去医院，又去找老中医，他手里会有两样东西。

医院给的，是一叠纸。血常规是一张表，表上一排数字；心电图是一条曲线；超声是一张灰白的图。这些东西的共同点，第八章已经说过：仪器的本事，就是把听到的、摸到的，翻译成看得见的。数字是给眼睛读的，曲线是给眼睛看的，图更是。

老中医给的，是几句话：脉偏沉，偏细，按到底有点涩。这几句话从哪里来？从三根手指头和一段手腕贴在一起、一下一下按、一点一点松的那一两分钟里来。它是触觉 SDE 的产物：手指与脉管互相改写（E），按下去、松开、再按的一串差异（D），某种"沉""细""涩"的感觉在这串差异里慢慢冒出来、成形（S）。第二十六章已经讲过，这串东西一旦录成波形，就丢了大半。

现在把这两样东西放到同一张桌上，请一位按今天标准训练出来的评审来比。他会怎样评？

他会问：你的"沉"有没有一个数？你的"涩"能不能画成一条曲线？两个医生的"细"能不能对得上同一个刻度？问到这里，老中医的几句话就输了，输得很干脆。

可这场比赛的规则，是谁定的？

规则说：好的特征，要能被看见、被记下、被别人看见同样的东西。这三条，第七章讲过，正是视觉 SDE 的长处。视觉最容易觉察的是 S，是那个冒出来、成了形、能被别人看到同一个形的东西。眼睛看见的图，可以复印，可以传真，可以放在两个人面前同时看。于是"能被同时看见"，就悄悄变成了"客观"的定义。

触觉不是这样工作的。手按到的永远是一片（$r>0$）；按这里会牵动那里（$\omega>1$）；压力传过来要时间（v 有限）。第十章那张表已经把这三条和视觉的三性对齐了。用视觉的三性去要求触觉——要它收成一个点，要它互不重叠，要它一下子全部呈现——等于先把触觉变成视觉，再来判它及格不及格。

这就是"以一种感官的标准，裁判另一种感官的数据"。

打个比方。一场歌唱比赛，评委只看照片打分。照片上看得出歌手站得直不直、嘴张得大不大、衣服整不整齐，看不出音准不准、气息稳不稳。这样评出来，唱得最好的人很可能落选。你不能说照片是假的，照片很真；你也不能说评委不认真，他看得很仔细。错在用一种感官的取证，去裁判另一种感官的东西。

第 8 号《中华之气》早就看到了这一层。它说中医是气之科学，西医是光之科学；光让世界被看见，气让世界被感到。本书接着判，但要改一个字：把"是"改成"侧重"。

为什么要改？因为"中医是气之科学、西医是光之科学"一旦说死，就成了一种感官对一种医学。西医的医生不用手吗？外科医生摸腹部，判断硬不硬、有没有反跳痛；产科医生用手摸胎位；老一辈内科医生叩诊，一边敲一边听。这些都是触觉与听觉，而且是纠缠在一起的触觉与听觉（第五章讲过拍西瓜，叩诊与它同理）。

听诊器是更好的例子。它是一八一六年法国医生雷奈克发明的。据他自己的记述，那天他要听一位年轻女病人的心，不便把耳朵直接贴到她胸口上，就把一叠纸卷成紧紧的一卷，一头抵着胸口，一头贴着耳朵，没想到心音反倒比直接贴耳听得更清楚。一卷纸管，后来改成木头的直筒，再后来才长成今天挂在脖子上的那副双耳管。两百年过去，听诊器还挂在医生脖子上。它是一件耳朵的仪器：医生听的是一串先后到来的声音，是节律，是杂音什么时候插进来、多长、多响。后来有人把心音录下来，画成心音图，那是一次把耳朵翻译成眼睛的努力；可在病房里，大多数医生仍然直接用耳朵听。这说明一件事：西医自己的日常里，也留着一块没被眼睛接管的地方。只是这块地方，在"什么才算科学证据"的排行榜上，一直排在化验单和影像的后面。

排在后面，原因不是听诊不准，是听诊难以交接。一位老医生听得出的杂音，年轻医生要听上几百次才听得出，而且两个人听到的是不是同一个杂音，也常常要靠超声的图来裁决。你看，裁决的仍然是眼睛。耳朵和手在西医里也在工作，可一旦起了争议，最后的话总由眼睛来说。这正是"侧重"的意思：不是西医没有手和耳朵，是西医让眼睛坐了裁判席。中医也不是不用眼睛：望诊排在四诊第一位，看舌、看面色、看神态。

所以本书的说法是：每种感觉都含完整的 S·D·E，每种医学都三觉并用，差别在侧重。西医在走向现代科学的路上，把越来越多的取证交给了仪器，而仪器几乎全部输出给眼睛看的东西（第 407 号《被刻进世界的公式》说仪器把现实变

成可读的痕，本书补一句：那道痕几乎全是给眼睛看的痕）。中医则把最要紧的一环，留在了医生的手指上。一个侧重往眼睛那边走到了底，一个侧重还停在手上。两种侧重本身没有高下。问题出在后来：走到眼睛那一头的一方，把自己的侧重写成了"科学"的定义。

这里要非常小心，不能滑到另一头去。说科学的定义片面，不等于说西医错了，更不等于说西医不如中医。西医用眼睛的科学，救了无数的人，这一点没有任何可以打折扣的地方。第十六章已经讲过：代签不是错，方程照样算得准。视觉科学的伟大是实打实的。片面说的是它的定义，不是它的成果。

◆ 三、公正的反方：疗效检验并不偏向视觉

说到这里，一个认真的读者一定会站起来反驳。他的反驳很有力，必须正面接住。

他会说：你讲的"视觉偏见"，也许在取证那一头成立，但科学检验一个疗法，用的不是眼睛，用的是结局。随机对照试验（把病人随机分成两组，一组用这个疗法，一组不用或用别的，最后比两组谁好得多）只问一件事：用了的人是不是好得更多。病人好没好，可以是活下来没有，可以是还疼不疼，可以是睡不睡得着觉。这些结局，有的是化验单上的数，有的就是病人自己的感受。它不管你的特征是摸来的还是看来的。你说科学只长了一只眼睛，在疗效检验这一环，说不通。

这个反驳是对的。本书认这个账。

疗效检验的核心，是"先说清楚你预期什么，再让结局来对账"。这个结构本身不偏向任何一种感官。它是比较，是对账，是不让人自己骗自己。第 407 号说科学是理念与现实对账，这个对账的动作，对眼睛、对手、对耳朵一样公平。

还有一个小细节很有意思。好的对照试验，常常要"设盲"：病人不知道自己吃的是真药还是像药的假药，有时连给药的医生、评结局的人也不知道。英文里这就叫"盲"。也就是说，检验最讲究的一步，恰好是故意蒙上眼睛，不让人看见自己想看见的东西。这件事提醒我们：科学最硬的那一环，靠的从来不是"看得更清楚"，靠的是"不让偏心插手"。偏心可以从眼睛进来，也可以从手进来。一位医生如果知道眼前的病人用了他看好的方子，他的手指按下去，也难免按出他想按的东西。设盲对手同样有用。

所以，凡是把中医的问题简单说成"中医不肯被检验"的人，说错了一半；凡是把它说成"检验本身就欺负中医"的人，也说错了一半。检验的逻辑是公的。

而且有一个现成的例子，说明中医的经验能走通这道检验。

二〇一五年，屠呦呦因为发现青蒿素，获得诺贝尔生理学或医学奖；同年这个奖的另一半，由研究寄生虫病的坎贝尔和大村智共享。青蒿素是今天治疗疟疾的重要药物。据她本人后来的叙述，她和同事在翻检古代医书时，读到东晋葛洪《肘后备急方》里用青蒿治疟的记载："青蒿一握，以水二升渍，绞取汁，尽服之。"古人是用冷水泡、绞出汁来喝，并不煎煮。她由此想到，高温可能破坏有效成分，于是改用沸点较低的乙醚，在较低的温度下提取，才取得突破。

这件事说明了什么？说明中医积累了上千年的经验里，确实有东西能被现代的检验接住，并且接得住、站得稳。它不是"中医不能科学化"的反例，恰恰是"中医能科学化"的正例。

那么本章前面那一节是不是就塌了？没有塌，但要说得更准。

请仔细看青蒿素这条路走的是哪一段。它从古书里取出一味药，从药里取出一个分子，再用药理实验和临床试验去检验这个分子治疟疾有没有效。这一路下

来，被检验的是"青蒿里的某种成分对疟原虫有没有作用"。被检验的不是"邓守仁那样的医生，按一按脉，判出一个证，再开一剂方"这一整套东西。

换句话说，青蒿素走通的，是把一味药从中医的整体里拿出来，放进现代药理学的框子里检验。这条路是真的，也很了不起。可它有一个代价：脉没有进去，证没有进去，手指头按出来的那几句话没有进去。走通的部分，恰好是最容易离开手的部分。

第 382 号《中医是不是科学？》有一句话：一剂方是问题，证是回答。本书换一把刀来读这句话：证从哪里来？在中医里，相当一部分来自脉，来自四诊里那根手指头。一剂方要被检验，必须先说清楚它是开给哪一种"证"的；而"证"要说清楚，必须先让判证的那几句话——"沉""细""涩"——在不同医生之间对得上。对不上，随机对照试验就不知道该把哪些病人分到同一组。

所以疗效检验本身是公平的，它在终点等着所有人。可要走到这个终点，先得在起点立住"我们说的是同一个证"。而起点那一环——取证、立特征、立单位——今天的科学只给眼睛造好了工具。手指头的特征，没有现成的单位可用。结局那头不偏，起点这头偏。

这就是本书要接住反方之后，依然坚持的一点：片面不在检验的逻辑，在取证的单位。

◆ 四、两头一起动

既然起点这头偏，路就只有一条：两头一起动。

中医这一头要动的，是立住稳定、可传、可验的触觉单位。

这句话说起来轻，做起来重。它意味着中医要承认，"我按了四十年，我心里有数"不够。心里有数，是这位医生自己的 S 显露得很稳；可这个 S 只活在他

一个人的手指和记忆里，他一走，就跟着走了。中医自己也一直在为这件事发愁：师带徒的路子，一个师傅一辈子带不了几个徒弟，徒弟学到几成，师傅自己也说不准。这不是外人强加给中医的难题，这是中医内部早就有的难题。第二十八章会专门讲它。

科学这一头要动的，是承认触觉与听觉的取证。

承认，不等于降低标准。科学仍然要稳定，要可传，要可验，一条都不放。要改的是另一件事：不再默认"稳定、可传、可验"只有一种实现办法——变成图，变成刻度，变成给眼睛读的数。触觉的特征可以有触觉自己的稳定办法。盲人读盲文，就是触觉单位立起来的现成例子，它不靠眼睛，照样能一个人写、另一个人读，读得分毫不差（第二十八章还会回到这个例子）。科学要做的，是给这类单位留出位子，并且帮它们长出来。

两头一起动，还有一个意思：哪一头都不能等另一头先动。

如果只要求中医动，中医就只能一样一样地把自己翻译成图和数，翻译得过去的留下，翻译不过去的扔掉。这条路会留下很多分子，扔掉大半个手指头。如果只要求科学动，科学就会被要求无条件地收下"我心里有数"，这等于取消科学。两样都不行。

这里正好可以把第 8 号留下的一个说法往前推一步。第 8 号说，模型是气的运动被光学化之后的残迹。"残迹"这个词说出了丢失，却没说出丢失是怎样发生的。本书第三编给了一个机制：代签。放到脉诊上看，代签是这样发生的。

一台脉象仪压在手腕上，录下一条随时间起伏的曲线。工程师拿这条曲线去算：主波多高，重搏波在哪里，波与波之间隔多久。算出来一组数，再拿这组数去和医生说的"弦""滑"对照，看哪个数最像"弦"。到这一步都没错，这是认真的研究。错是在下一步悄悄发生的：当人们开始说"所谓弦脉，就是某某指标大于

多少"的时候，那条曲线就从"手指感觉的一个替身"变成了"弦本身"。替身签了字，大家便把签字当成了本人。

这个替身缺了什么？缺了按。手指不是只停在一个深度上等着脉来撞，它会往下压，压到某处又松一点，三指之间还会互相照应。曲线录的是一个固定压力下的起伏，等于让手指只按一个点、只按一次。第二十九章会说，这恰好是把一把伞收成了一个点。代签就这样完成了：一个本来张开的触觉特征，被收成视觉能读的一条线，然后这条线被当成了原件。

看清了这一层，"两头一起动"就有了具体的样子。中医那头，要回答"你的弦，在不同的按法下，各是什么样，能不能让别的医生也按出来"；科学那头，要回答"我的曲线，丢掉了按的哪一部分，丢掉的那部分能不能用别的单位接回来"。两个问题指向同一个地方：一个尚未被立起来的触觉单位。

第 422 号《发生的身体》里有一座"断桥"：它说视、听、触给身体着色，但推不出"中华重触、印度重听、西方重视"那样的文化主张。本书在第六章接过这座断桥，用预测五去检验，不过就降为修辞。这里要补一句：就算文明与感官的对应最后被证明只是修辞，本章的论证也不倒。因为本章不靠"中华是触觉文明"这个前提。本章只靠两件可以当面看到的事：脉诊的数据来自手指；今天科学立特征的工具几乎全是给眼睛的。

回到那个下午。许蔓听完邓守仁的话，在本子上写了一行字。她念给老先生听："您的一半我认，我那一半您认不认？我们那边的科学，手指头确实做得不好。我们的机器人手指，按出来的数，最后也是拼成一张图给工程师看。"

邓守仁说："那你回去，给手指头立个规矩。立好了，拿来给我按。"

这句话也是构想的。可它指的方向是真的：触觉的科学，要新生，就得有人去给手指头立规矩。立的不是图，是手自己的单位。这件事中医一家做不成，现

代科学一家也做不成。它需要按了四十年脉的手，也需要会做传感器、会做统计的人，坐到同一张方桌旁边。

我那句话的后半句，说的是"中医需要的科学和里面的数学都必须是新生的"。为什么连数学也要新生？因为今天现成的数学，单位是点。拿以点为单位的数学去给手指头立规矩，立出来的规矩也会是一个个点：一个深度上的一个值，一个时刻的一个读数。这样立，又把伞收成了点，又回到了那条波形。所以手的单位要立稳，算它的数学也得换一个单位。第五编讲的伞，就是为这件事准备的；第二十九章会把伞放到三根手指上。

这里再把三条边界说清楚。本章说中医需要新生的科学，不是说任何一种中医疗法今天已经有效或无效，也不对任何一种病给出看法；本章不对医疗制度、医保、行医资格作任何表态；后面几章即便提出读数，那些读数也只用于研究，不进任何考核。

> 带 走 的 话
>
> **中医还不科学，是因为手指头的单位还没立起来；科学片面，是因为它只给眼睛造了尺子。**

小账：

- SDE 账：S 落在医生指下冒出又成形的"沉、细、涩"，D 落在一按一松的差异序列，E 落在手指与脉管的互相改写；本章的冲突发生在取证单位这一环。
- 代签账：拆开了"能被同时看见＝客观"这一处代签——它把视觉的同时性（$v \to \infty$）写成了科学的定义；疗效检验本身不在代签之列。

◆

28

第 28 章

触觉特征怎样稳定、可传、可验

> 这一章的问题
>
> 一位老中医指下的感觉，要具备哪几样本事，才配叫"科学的特征"？这几样本事，能不能不靠变成图来取得？

◆ 一、今天按和明天按：稳定

这是我构想的场景。

曾一鸣二十六岁，数学博士生，每天的工作是让 AI 帮着把数学证明写成计算机能逐行检查的形式。寒假回乡，他陪奶奶去邓守仁那里坐坐。奶奶和老先生说家常，他坐在一边，看老先生给一位邻居按脉。看了一会儿，他忍不住问："邓爷爷，您今天按出来的，和您明天按出来的，会一样吗？"

邓守仁说："你这个问题，比'科学不科学'问得好。"

他讲了自己的一个老习惯。每天清早起来，先洗手，搓热，坐定，调几口气，然后按一按自己的左手腕。他说这不是给自己看病，是"对一对手"。手冷的日子，指头木，按什么都浅；手太热的日子，指头躁，按什么都快。人累了、心里有事，指头也会跟着走样。先按一按自己，知道今天这双手是什么状态，再去按别人。

这件小事里藏着本章的第一个词：稳定。

稳定说的是，同一个人，对同一个对象，在不同的时候，取得的特征要大致一样。用研究里的话说，叫"同一评定者的重复一致性"。一杆秤今天称一斤苹果，明天还称一斤，这杆秤才可用；一位医生今天说这只手腕"偏沉"，明天在同样条件下按同一只手腕还说"偏沉"，他的手才可用。

中医在这件事上其实早有讲究，只是没有被当成"科学的规矩"来读。《素问·脉要精微论》开头就说"诊法常以平旦"，意思是诊脉最好在清早。原文接着讲理由：那时阴气还没动，阳气还没散，饮食还没进，气血还没乱，所以才诊得出有病的脉。说白了，就是挑一个被按的人最"静"的时候。还有一条更妙：用医生自己的呼吸当钟。《素问·平人气象论》讲，常人一呼脉跳两次，一吸也跳两次，一呼一吸之间脉来几次，就以此论快慢；而且要求医生先把自己的气调匀了，才拿自己的呼吸去量别人。

请停在这里想一想。在没有钟表的年代，要给"快慢"立一个稳定的标准，古人没有去找一个看得见的刻度，而是找了一个身体里自带的节律——医生自己平静的呼吸。这是一个听觉式的单位（D 的先后与间隔），被拿来校准一个触觉的特征。它谈不上精确，一个人的呼吸有长有短；可它的思路很清楚：先稳住取证的那个人，再去取证。

这和邓守仁每天早上"对一对手"，是同一个思路。触觉的稳定，第一步不在被按的那只手腕上，在按的那只手上。手是取证的仪器，仪器得先校准。

用 SDE 的话说，触觉 SDE 里，E 是手指和脉管互相改写的那一片纠缠。改写是双向的：脉在改写手指的感觉，手指的冷暖、软硬、按的力度，也在改写脉被按出来的样子。所以手的状态一变，E 就变了，从 E 里显露出来的 S 也就跟着变。视觉里这个问题小得多：你今天心情好坏，看一张图，图上的线还在原处。触觉的稳定之所以难，恰恰因为触觉最容易让人觉察 E——取证者自己就在纠缠里面。

所以触觉要稳定，不能学视觉那样假装"观察者不在场"。它得把取证者放进来，给取证者自己立规矩：什么时候按，按之前做什么，怎样知道今天的手是"正常的手"。这是触觉科学第一块要立的单位：取证者的状态单位。

曾一鸣听完，说："那可以试一试。您闭上眼睛，我让奶奶和两位邻居轮流把手伸过来，顺序我打乱，一天按几回，过几天再按，看您前后说得一不一样。"

邓守仁说："可以。只是你别拿这个去给我打分。"

他这句话，本章最后还会回来。

曾一鸣的试法，听起来简单，做起来马上撞到一个难处。秤称苹果，苹果放一夜不会变重；可人的手腕放一夜，脉就不是昨天的脉了。走了几步路，喝了一杯茶，说了几句急话，脉都会变。那么邓守仁前后两次说得不一样，到底是他的手走了样，还是那只手腕本来就变了？

这是触觉稳定最刁钻的地方：被按的对象是活的，按的人也是活的，两头都在动。你没法只看结果就分清是谁动了。

视觉科学遇到类似的问题，有一个老办法：找一个不会变的东西当靶子。照相机要校准，就去拍一张印好的标准色板；色板不会因为天气变色，拍出来偏了，就知道是相机偏了。触觉也需要这样一个靶子：一个软硬、弹性、起伏都固定不变的东西，让医生今天按、明天按、下个月再按。按它说得前后一致，才说明手稳；手稳了，再去按活的手腕，前后说得不一样，才可以放心地说是脉变了。

这个"不会变的靶子"，乡下没有。邓守仁每天按自己的手腕，是他能找到的最好的替代，可他自己的脉也在变。古人用呼吸当钟，也是同样的处境：钟本身

会快会慢。所以触觉的稳定，迟早要求一样新东西——一个专门为手做的、不变的参照物。这一节先把这个需要说出来，本章第四节再说它长什么样。

◆ 二、你按的和我按的：可传

稳定只是一个人的事。科学要的不止于此。一个特征，要能从一个人手里交到另一个人手里，交过去还是原来那个东西，这叫可传。用研究里的话说，叫"评定者之间的一致性"。

这是中医自己的真问题，不是别人强加的难题。

这不是外行的印象。二〇一九年，美国《替代与补充医学杂志》上发表过一篇系统综述（雅各布森等人），把测量中医师之间判断一致性的实验研究收拢起来一并看，脉、舌这类诊察体征也在其中。它的结论是：一致性大多在低到中等之间，少有例外；而且多数研究本身在方法和报告上就有不小的缺陷。这件事中医行内的人并不陌生。同一位病人，两位医生说的脉不一样，开的方也不一样，在中医里很常见。有人说这是"辨证的灵活"，有人说这是"标准的缺失"。本书不替任何一方下结论，只指出一点：如果连"这只手腕现在是什么脉"都对不上，后面的一切——立证、分组、检验——都没有了地基。

曾一鸣对这个问题特别敏感。他说："我们做形式化证明，最在乎的就是这个。一个证明，我说它对，你说它对，都不算数；要每一步都能被一个不认识我、也不信我的程序检查一遍。这样我写的东西，到了地球另一边，还是那个东西。数学之所以传得了两千年，就因为它每一步都能被别人照着走一遍。"

邓守仁想了想，说："我们也有传的办法。古人讲脉，不说数，说像什么。"

这是真的。中医讲脉象，最常用的办法是比喻。后世的脉书和今天的中医诊断教材，常这样形容：弦脉"如按琴弦"，滑脉"如盘走珠"，涩脉"如轻刀刮竹"。

西晋王叔和的《脉经》列出二十四种脉，明代李时珍的《濒湖脉学》列出二十七种，讲到每一种，几乎都要借一样东西来比。

请注意这些比喻是什么。它们几乎全是触觉的，有的还是触觉和听觉缠在一起的。按琴弦，指下是绷紧的、有弹回来的力，耳边似乎还有一声；珠子在盘里滚，指下是圆的、溜的、一颗接一颗；刀刮竹子，是一顿一顿、不顺滑的阻力。古人没有办法把手指的感觉画出来，于是借了一件大家都摸过、都听过的东西，当作共同的参照。

这是一个聪明的传法。它的道理是：我没法把我的手递给你，但我可以指一件你也摸过的东西，说"就像那个"。我们两个人的手，通过那件共同的东西，对上了号。

可它的弱点也在这里。你摸过的琴弦，和我摸过的琴弦，不是同一根。二胡的弦和吉他的弦，绷紧的程度天差地别。"盘走珠"的盘有多大，珠有多重，滚得多快，谁也没规定。比喻借来的参照物，本身是不固定的。于是两个人都说"如按琴弦"，心里按的却是两根不同的弦。

所以可传的问题，说到底，是缺一个固定的、大家都能按到同一个的参照物。

这里要说清楚：缺参照物，不能证明手不可靠。手完全可以很可靠，只要参照物立住了。下一节之后，我们会看到一个现成的例子。

还要说清楚另一件事：可传，不等于每个医生按得完全一样。两个看同一张X光片的放射科医生，也常常意见不一。可传要的是，分歧可以被说清楚、被追到源头：是按的深度不同，是按的时候对方刚走完路，还是两人用词不一样。说得清分歧在哪里，才谈得上缩小分歧。今天的脉诊，分歧常常说不清在哪里，这才是可传真正的难处。

比喻之外，中医还有一条老传法：师傅带徒弟。邓守仁说起他年轻时学脉的情形（这仍是构想的场景）：师傅让他和自己同时按同一个人，师傅按左手，他按右手，按完师傅问"你按到什么"，他说一句，师傅点头或者摇头。几年下来，他的手慢慢"对上了"师傅的手。

这个办法是有效的。它其实就是在现场立一个临时的参照物：师傅的手。徒弟每按一次，都拿自己的感觉去和师傅的判断对一次。可它有三个限度。一是离不开现场，师傅和徒弟必须按同一个人，同一个时候。二是一对一，师傅一辈子带不了几个人，每个徒弟对上的又只是自己那一位师傅。三是没法回头查，某年某月某天师傅点的那一下头，当时按的是什么，事后谁也复不了原。

拿它和数学比一比，就看得出差别。曾一鸣说，一条定理的证明写出来，一百年后的人还能一行一行重新检查；他不必见过证明的人，也不必相信证明的人。师带徒传下来的脉，离开了那个人、那个下午、那只手腕，就查不回去了。

医案是中医想补上这一缺口的另一种努力：把每次按到的、判的、开的、后来怎样，用文字记下来。医案很珍贵，可它记下的是词，"脉弦细"三个字。三个字一落到纸上，就又回到了比喻的老问题：读医案的人，只能用自己手上的"弦"和"细"去猜写医案的人当时手上的"弦"和"细"。

所以比喻、师带徒、医案，三条路都在努力解决可传，三条路都卡在同一个地方：缺一个离开了人和现场，仍然固定不变、人人按得到的参照物。

◆ 三、按出来的和后来发生的：可验

稳定、可传之后，还差一样：可验。

可验说的是，这个特征要能和一件后来发生的、不由医生说了算的事情对账。稳定与可传，都只在医生之间打转；可验要跳出去，让现实来说话。

讲一个与医无关的例子。乡下老人常说"蚂蚁搬家要下雨"。这句话可验吗？可验。办法很简单：每次看见蚂蚁成群搬家，先在本子上记一笔"预计下雨"，过一两天再记一笔"下了没下"；没看见蚂蚁搬家的日子，也记下雨没下。记上一两年，就知道这句话是灵验、是半灵验，还是碰巧。这里面的关键，是先记下判断，再看结局，而且结局要由天来定，不由记的人来定。

脉诊的特征要可验，道理一样。一个"沉"或"弦"，如果它真的说出了身体里的某种状态，那么它应该和后来某件可以独立观察的事，有说得出的关联。这件事是什么，要由懂行的研究者去提，本书不替任何病去提，也不对任何一种脉说它预示什么。本书只说结构：先说清楚这个特征预期什么，再让结局来对账；结局不由按脉的人来判。

这个结构，就是上一章讲的疗效检验的结构。上一章说，检验的逻辑是公的，偏在起点。现在可以看清楚起点和终点是怎样接起来的：可验在终点等着；可是要走到终点，路上必须先过稳定和可传两道门。一个特征今天按和明天按不一样，你不知道该拿哪一次去对账；你按的和我按的不一样，你不知道该把哪些人分到一组去对账。所以三道门有先后：先稳定，再可传，才可验。

可验还有两个容易踩的坑。

一个坑叫"自己跟自己对账"。如果一位医生按出"弦"，过几天又是这位医生按出"不弦了"，就说"你看，我判的弦后来好了"，这不叫对账。对账的那件事，必须不经过按脉的那双手。好比验证"蚂蚁搬家要下雨"，下没下雨要看天，不能问那个看蚂蚁的人"你觉得下了没有"。

另一个坑叫"对不上就换说法"。对账对不上，是最有用的消息：它说明这个特征，或者这种按法，或者这个词，要修改甚至放弃。可人很容易在对不上的时候换一个解释——"那是因为这个人体质特殊""那是因为季节不同"。偶尔这样说

也许有道理，次次这样说，特征就永远不会错，也就永远验不了。本书的预测四说得很清楚：若伞式特征的一致性不高，触觉科学化须另找单位。本书对自己提的单位也守这一条：对不上，就认。

这里正好说回邓守仁那句"你别拿这个去给我打分"。

为什么不能打分？表面上是一个老人的面子，底下是一条科学的道理。研究一致性，是为了找出哪一种描述办法、哪一种按法更稳、更传得下去。一旦把一致性拿来给医生排名、评级、发证，事情就变了：医生们会很快学会说一样的词，哪怕他们指下的感觉并不一样。词对上了，手没对上，一致性的数字涨了，可它量的已经不是手，是嘴。读数一进考核，读数就开始骗人。所以本书一切读数，只用于研究，不进任何考核。这一条既是对人的尊重，也是对读数的保护。

◆ 四、不变成图，立触觉自己的单位

现在可以回答本章开头的第二个问题了：稳定、可传、可验，能不能不靠变成图来取得？

有人会说：何必这么麻烦，把脉录成波形，波形是图，图稳定、可传、可验，问题不就解决了？第二十六章已经说过，录成波形丢了大半。上一章又说了丢的是什么：丢的是"按"——随压力深浅的变化，三指之间的牵连。所以变成图，是用丢掉触觉的办法来让触觉合格。

那么，有没有一种触觉的东西，从来没有变成图，却已经稳定、可传、可验？

有。就在我们身边，盲文。

盲文是一个个凸起的小点，排在一个固定的小格子里，每个格子里点的位置不同，就代表不同的字母或字。读的人用指尖从左往右滑过去，一格一格地读。

这套办法出自法国人路易·布莱叶。他三岁时在父亲的皮具作坊里伤了眼睛，后来失明，在巴黎的盲童学校里读书。那时盲童读的是把普通字母压凸出来的大字书，又厚又慢。他还是个少年，就着手改造一套军中夜里传令用的凸点记号，一八二九年把自己的六点方案刊印出来，此后又修订过，渐渐传遍世界。

盲文身上，三道门都过了。

稳定：同一个人今天读这一页，明天读这一页，读出来是同一段话。

可传：一个人在北京打出来的盲文，另一个人在长沙读，读得分毫不差。不用见面，不用比喻，不用"就像那个"。

可验：读出来的对不对，可以和原文一字一字对账。

它是怎样做到的？靠的不是把点变成图给眼睛看，而是把点本身立成了标准：点有多高，点和点隔多远，格子和格子隔多远，都有规定，许多国家和机构都为这些尺寸定过规范。这些规定，是按指尖的分辨能力来定的——点太密，指尖分不开；太稀，一个字太占地方。换句话说，盲文的单位，是照着手的本事立起来的，不是照着眼睛的本事立起来的。

这就是本章想说的：触觉 SDE 要成为科学，需要的不是变成图，而是立触觉自己的单位。

盲文给了我们三个提示。

第一个提示：单位要做成"可以被手按到的标准物"。眼睛有色卡：印刷厂、油漆店里，一本色卡摆出来，大家指着同一块颜色说话。手也可以有它的"卡"：一组做好的、软硬张弛固定的标准物，不同医生都去按同一组，先对一对"这叫一级弦，这叫二级弦"。这就是把比喻里那根不固定的"琴弦"，换成一根人人按得到的同一根弦。今天的仿生材料和传感技术，已经让做这样的标准物成为可能，下一章许蔓会出场。

这条路并非空想，别的行当已经走过一段。纺织业很早就为"手感"发愁：一块布摸上去是挺括还是软塌，是滑还是涩，是暖还是凉，买家卖家常常说不到一块儿去。行内的做法，一是请一组有经验的人组成评定小组，二是备一套标准布样，评的时候先摸标准样，再摸待评的布，说"比标准样软一级"或"差不多"。一九七〇年代，日本学者川端季雄等人建起一套办法，常称 KES 体系：用几台专门的仪器去测布的拉伸、剪切、弯曲、压缩和表面摩擦，再拿这些数去和评定小组的手感对照。

这段经历里有两点值得中医借鉴。一是标准样：它让"软"不再是每个人心里的软，而是"比这块软"。二是对照：仪器测出来的数，要拿去和人手的评定对一对，对得上的保留，对不上的修改。仪器在这里是帮手，不是裁判；裁判仍然是那一组人的手，只是这组手先对着同一块标准样校准过。

还有一点不该借鉴：纺织业最后常常把手感简化成几个仪器数，摆在一张表里，表又成了给眼睛看的东西。这一步对卖布也许够用，对脉诊就不够，因为脉诊里最要紧的那一部分——随按压深浅的变化、三指之间的牵连——正是几个单独的数装不下的。

第二个提示：单位要配一套按法。盲文规定了点，也默认了读法：指尖从左往右滑。脉的标准物也需要配一套按法：按到多深，停多久，三指怎样分工。没有按法，标准物再好，不同的人还是会按出不同的东西。按法就是取证者的规矩，接回本章第一节邓守仁的"对一对手"。

第三个提示：单位要照着手的分辨力来立，不能照着眼睛的分辨力来立。眼睛能分辨一张图上很细的两个点，手不能；可手能分辨压下去时阻力怎样一点点变化，眼睛不能。照着眼睛立单位，单位就会是一个个点；照着手立单位，单位多半是一片，是一条随压力变化的曲线。这一点，是下一章"脉的伞数学"的出发点。

三个提示合起来，还有一个次序不能颠倒：标准物要先由人手去认，再交给机器去复制。不能先让机器造一组"科学的脉"，再要求医生去学着按出它。那样做，等于又让方程替手签了一次字。正确的次序是，几位按了几十年的医生，围着一组候选的标准物反复按，反复说，挑出他们公认"这就是"的那几件，立为样；然后机器去测这几件样的软硬起伏，把它们照原样再造出一百件、一千件，送到各地；再由各地的新医生按这些复制品，再由老医生按一遍核对，看复制得像不像。先人，后机，再回人，本书第七编要讲的这个次序，在一组脉的标准物上就能先走一遍。

曾一鸣回城之前，又去看了一次邓守仁。他说他想明白了一件事："您的手和我们的程序，其实在找同一样东西——一个别人照着走一遍也能走到的地方。我们把证明拆成一步一步，您得把按脉拆成一层一层。只是我们拆的是点，您拆的不能是点。"

邓守仁没接这个话，只问他："你说的那个打乱顺序的试法，什么时候来做？"

> 带走的话
>
> **手可以很可靠，只要给它立一根大家都按得到的同一根弦。**

小账：

- SDE 账：S 落在指下显露的脉象，D 落在一次次按、一位位医生之间的差异序列，E 落在取证者的手与脉互相改写——触觉的稳定之所以难，是因为取证者本身就在 E 里。
- 代签账：拆开了"稳定可传可验只能靠变成图"这一处代签，指出触觉单位须照手的分辨力立成可按的标准物加按法。

◆

29

第 29 章

脉的伞数学

这一章的问题

寸、关、尺三根手指按到的，如果不当成三个点，该当成什么？这样当了，能不能用一个实验，把它说对或者说错？

◆ 一、三根手指，三把伞

这是我构想的场景。

许蔓第二次来，带了一副她自己做的指套。很薄，像三片创可贴，各贴在一根指腹上，每一片里埋着一层压力传感膜，细线连到一台笔记本电脑上。她对邓守仁说："邓老，您照平常那样按，我什么都不问，只看屏幕。"

邓守仁戴上，在许蔓自己的左手腕上按下去。

屏幕上出来三块小色斑，一根手指一块。许蔓指给他看："您看，每块都不是一个点。您指腹按下去，压到的是一小片，中间压得重，边上压得轻。"她又说："再看这里——您食指按寸的时候，中指底下的那块也跟着动了一下。"

邓守仁说："那当然。三个指头挨着，按这个，那个就知道。"

他觉得这句话不值一提。可在本书里，这句话分量很重。

先说第一层：每根手指按到的都是一片。用第二十一章的话说，这是一把伞。一把伞有三样东西：伞心，伞半径，伞面分布。伞心就是指腹正中对着的那个位置；伞半径就是指腹实际接触到的那一片有多大；伞面分布就是这一片上哪

里压得重、哪里压得轻——许蔓屏幕上那块中间深、边上浅的色斑，画的就是它。寸、关、尺三根手指，就是三把伞。写成记号，可以写 U寸、U关、U尺，每一把都有自己的伞心、半径和分布。

伞心落在哪里，也不是随便的。中医讲按脉要用"指目"，就是指尖与指腹之间感觉最灵的那一小块。这等于说：伞心要对准脉管，伞面最敏感的那一处要压在最要紧的位置上。手指稍稍偏一点，伞心偏了，伞面分布也就变了，按到的东西跟着变。许蔓的屏幕上看得很清楚：邓守仁的手指每次落下，色斑最深处几乎都压在同一条线上，那是四十年练出来的伞心。一个新手按下去，色斑最深处常常偏在一边，自己却不知道。这件小事已经提示了一个可传的入口：伞心对没对准，是可以量、可以教、可以对一对的。

这和视觉里的点完全不同。第九章讲过，眼睛聚焦一个很小的局部，成的像和旁边的像互相可以切开；所以视觉的单位可以缩成一个点，半径趋于零（$r \to 0$）。手指缩不成点。你把手指削得再细，按下去也有一片皮肉贴着皮肉。触觉里，r 永远大于零。

再说第二层：三把伞是交叠的。按寸牵关，按关牵尺。邓守仁说"按这个，那个就知道"，许蔓屏幕上那块跟着动的色斑，说的都是这件事。用伞场的话说，三把伞的重叠度大于一（$\omega > 1$）。第二十二章讲过，$\omega > 1$ 的时候，整体不等于部分之和：三指同时按出来的东西，不等于分别单按三次再加起来。

中医自己恰好有一对词，说的正是这个区别：单按和总按。单按是一根手指单独按一个部位，总按是三指同时按。为什么要分？因为按出来的东西不一样。只用单按，等于假定三把伞互不重叠；只用总按，又分不清是哪把伞在说话。两种按法轮流用，正是在一个 $\omega > 1$ 的场里，想办法既看见整体，又分出部分。古人没有伞的数学，手却早就在做伞的数学要做的事。

这一节可以先落一句话：脉诊的单位，不是三个点，是三把交叠的伞。

◆ 二、浮中沉是一条曲线

许蔓又请邓守仁做一件事："您从最轻按起，慢慢加力，一直按到最重，再慢慢松开。"

屏幕上，压力的数一点点涨上去。随着压力涨，指下脉搏起伏的强弱也在变：一开始很弱，按到某个深度最明显，再往下压，又弱了，压到底几乎没了。许蔓把这一段画成一条线：横着是按的轻重，竖着是脉搏起伏的强弱。线像一座小山，有起，有峰，有落。

邓守仁看了半天，说："这就是浮、中、沉。"

中医诊脉讲"浮、中、沉"三候：轻按得之为浮，稍重为中，重按为沉。平常讲起来，像是三个位置，三个点。可许蔓屏幕上那条线说的是：浮、中、沉不是三个点，是一条曲线上的三处。医生在三个深度上停一停，等于在这条曲线上采了三个样。

把它写得再明白一点。设按的轻重为 p，从零开始往上加。在每一个 p 上，手指感到的脉搏起伏，记作 A(p)。那么"按压深度—回应曲线"就是这一串：A(p)，p 从轻到重。浮、中、沉，就是 A(p) 在轻、中、重三个 p 上的值。

一条曲线比三个点多出什么？多出形状。峰在浅处还是深处；峰尖还是峰宽；上坡陡还是下坡陡；有一座峰还是两座。两只手腕，浮中沉三个值可能差不多，曲线的形状却可能很不一样，就像两座山在三个高度上量的宽度相同，一座是尖的，一座是平顶的。

这里还有一层更要紧的意思：这条曲线不是在一把固定的伞上量出来的。按得越重，指腹压扁得越多，接触的一片就越大，伞就撑得越开；压力在指下的分

布也跟着变，伞面在变形。所以按压的过程，就是伞随压力一张一合的过程。第二十三章讲听觉的伞随时间张合，写作 r(t)；脉诊的伞随压力张合，可以写作 r(p)。前者的变量是时间，后者的变量是按的轻重，道理相通。

许蔓让邓守仁慢慢松开的那一段，屏幕上也画了一条线。奇怪的是，松开时的线和按下时的线并不重合：同一个压力，按下去经过时是一个强弱，松开回来经过时是另一个强弱，两条线围出一个窄窄的圈。许蔓说，她们做机器人皮肤时天天碰到这种圈，软材料都这样，按下去和放回来走的不是同一条路。

对眼睛来说，这个圈很难理解：同一个位置，怎么会有两个值？对手来说，这再自然不过：你刚才按过，皮肉记住了你按过，回来的路就变了。这正是触觉最容易让人觉察的 E——对象和手在互相改写，而且改写会留下痕迹，回过头来又影响下一步。用三原理的话说，这是回写。中医讲按脉有"举、按、寻"，举是轻提，按是重压，寻是不轻不重、左右前后地推寻，等于本来就要求手在一条路上来回走。那么伞式特征就不该只取按下去的一条线，要把按下与松开围成的这个圈也算进去。圈有多宽，是伞的又一个形状特征。它也只描述，不对应任何病名。

还有第三个参数：传播速度 v。手指按下去，回应并不是一下子全到的。压力要穿过皮肤、皮下、血管壁一层层传开，脉的搏动也要从近心端一路传过来。邓守仁有时候按下去要"等一等"，等的就是这一段。眼睛看图时，全场几乎同时出现（$v\to\infty$）；手指按脉，回应总要过一会儿才稳下来，v 是有限的。

现在可以回指第二十一章提出的"气的读数"了。那一章说：气的强弱，就是伞的 r、ω、v 偏离三重退化的程度。三重退化，是 $r\to0$、$\omega=1$、$v\to\infty$，即收成一个点、互不重叠、瞬间到达。放到脉上，就成了三个可以去量的问题。

第一，伞随压力张合的幅度有多大：曲线是平的、窄的（像是一个点），还是有起伏、有宽度（伞撑得开）。

第二，三指之间的牵连有多强：按寸时关、尺跟着动多少（ω　偏离一有多远）。

第三，回应来得多慢、要等多久才稳（v 偏离无穷有多远）。

这三个问题，每一个都能用许蔓的指套量出一个数，也能让医生用手按出一个判断。第二十一章给这三项各配了一把尺子，因为"大"和"慢"都是相对的。放到脉上，尺子也现成。伞撑得开不开，对着指腹能分辨的最小尺度去比。牵连多不多，第二十一章用两个压头、一个按一个量，画一条"牵连曲线"；脉诊用不着另找压头，三根手指本身就是三个探头，按寸的时候，关和尺那两根手指就是不加力、只感觉的那两个探头。来得慢不慢，对着一次按的时长去比：按一次一两分钟，回应要等几搏才稳，就是 v 在说话。第二十一章说过，老中医口中的"有力""无力"，也许可以读成这样一组曲线；本章把它落到了三根手指上。

本书把这三个数合起来，暂称为脉上的"气的读数"。这是本书新提出的，标为待验：它能不能稳定、能不能在医生之间对得上、能不能和独立的结局对账，一样都还没有做过。

必须说清楚两条边界。其一，这些读数不对应任何病名，也不对应任何证，本书不作这种对应，更不据此给任何人提建议；哪一种曲线形状意味着什么，要由懂行的研究者用大量对账去回答，不由本书来猜。其二，读数大不代表好，读数小不代表坏；"偏离三重退化的程度"是在描述伞撑得怎样，不是在给人打分。

◆ 三、一个可做的小实验

说到这里，伞的说法听上去很顺。顺，正是要警惕的时候。一个说法要算科学，得能被一件事说错。本书五条预测里的第四条，就是为这一章准备的：脉诊

若改用伞式特征，医师之间的一致性，应当高于单点波形特征；若不高，触觉科学化须另找单位。

为什么本书敢预测伞式特征会更一致？理由要先摆出来，不然预测就只是一句愿望。

理由在"停在哪里"。每位医生按脉，都会在某个深度上停得最久，那是他觉得"最能说话"的地方。可这个地方因人而异：有的医生手重，习惯停得深；有的手轻，习惯停得浅；同一位医生，今天手冷也会停浅一点。单点波形特征，就是在这个"停得最久"的深度上取的一段波形。停的深度一变，取到的波形就变，因为它只是一条曲线上的一个点，点挪了，值就挪了。两位医生按同一只手腕，单点特征对不上，很可能并不是他们按到的东西不同，而是他们停在了曲线的不同位置。

打个比方。两个人去量同一座山。一个人在半山腰量山有多宽，一个人在山脚量，两人报上来的宽度当然不一样，吵起来，好像山有两座。如果让两人都从山脚走到山顶，各自画出整座山的轮廓，两张轮廓多半就像得多。伞式特征就是让每位医生都"从轻按到重"，取整条曲线的形状；停在哪里，对形状影响小得多。

这就是预测四背后的机制：单点特征把"停在哪里"的个人差异，混进了"按到了什么"里面；伞式特征把这两样分开了。机制想得通，不等于实验会过关。也许医生们加力的方式差得太远，整条曲线也对不上；也许脉在一两分钟里自己就变了，曲线前后不是同一条。所以要做。

下面把一个可以检验它的小实验，写到普通读者能看懂的程度。它是本书的提议，还没有人照此做过。

要问的只有一件事：同样是这几位医生按同样这几只"手腕"，用两种办法把按到的东西记下来，哪一种办法记下来的，医生和医生之间更对得上？

按什么：分两步。第一步，不按活人，按标准物。就是上一章说的那种为手做的参照物：在软硅胶里埋一根有弹性的细管，用一台小泵打出有节律的搏动，管子埋得深浅、硅胶软硬、搏动强弱都可以调。中医院校里本来就有给学生练手用的脉象模拟装置，思路可以借来，只是这里要的不是"模拟出某种病脉"，而是一组设定清楚、可以反复按的参照物。许蔓这样的工程师做得出来。做它一组，比如八件，每件设定不同，设定记下来封好，医生不知道。用标准物的好处是：它不会因为走了几步路、喝了一杯茶就变，前后按的是同一个东西。第二步，再请健康的志愿者，事先讲清楚做什么，本人同意，才伸出手来。

谁来按：请一组医生，比如十来位，最好来自不同的师承，年资有长有短。为什么要不同师承？因为同一位师傅带出来的几个人，手法本来就像，一致性高也许只说明他们是一家人，说明不了伞式单位好。要看单位本身能不能跨过门派传下去，就得让不同门派的手来按。彼此不交流，不知道别人怎么说。每件标准物、每位志愿者，按的顺序都打乱；同一件东西隔一阵子再混进来按一次，顺便也看看每位医生自己前后稳不稳（上一章的"稳定"）。

怎样记：每位医生戴着许蔓的指套照平常按。传感膜把三根手指上的压力和回应全程记下来。然后从同一次按里，取出两套东西。

甲套，单点波形特征：在医生停得最久的那一个压力上，取一段脉搏起伏的波形，量它的高低、宽窄、上升快慢。这是今天脉象仪常用的那一类特征，等于一把伞收成了一个点。

乙套，伞式特征：取整条"按压深度—回应曲线"的形状（峰在哪、宽多少、坡陡不陡），再加上三指之间的牵连（按一指时另两指跟着动多少），再加上回应来得多慢。这就是上一节说的伞随压力的张合、三伞的重叠、有限的传播。

还可以加一套丙，不用传感器，也不用说话：每位医生按完一件，再去按一排事先做好的标准样，指出"最像哪一件"。这是用手回答手，绕开了词，也绕开了图。

怎样比：对同一件东西，十来位医生的甲套彼此有多接近，乙套彼此有多接近。研究里有现成的一致性指标（组内相关系数、加权 kappa 一类），可以把"接近"大致算成一个零到一之间的数，越接近一，越一致；用哪一种，开按之前定好。不必懂公式，记住一句就够：两套特征，哪一套在医生之间算出来的数更高。丙套的一致性也一并算，作为旁证。

再加一道独立性的检查：这一道是替第二十一章、也是替第 8 号做的。第 8 号说，气若给不出独立于既有物理量的读数，就退化为修辞。放到这个实验里，就要问：脉率、脉压的高低这些今天已经量得很好的量，如果两只"手腕"完全一样，伞式特征还能不能把它们分开，而且分得和医生的手一致？做法是在标准物里专门做几对"双胞胎"：搏动的快慢、强弱完全相同，只有埋管的深浅、周围硅胶的软硬不同。如果单点特征分不开这几对，伞式特征分得开，医生的手也分得开，伞读数就第一次显出了它"独立"的那一面。如果伞式特征也分不开，或者分开了而医生的手分不开，那么至少在脉上，"气的读数"就要收窄，第二十一章的作废条件在这一处被触发。

先说好再按：这一步最要紧。开按之前，就把"乙套要比甲套高出多少，才算高"写下来，交给一个不参加实验的人保存，最好公开。按完之后，不准再改这条线。上一章说过，对不上就换说法，是可验最大的坑；先写下来，就是先把这个坑填上。

怎样算对，怎样算错：乙套的一致性明显高于甲套，达到事先写下的那条线，预测四过关，伞式单位值得往下做——做更多医生、更多志愿者，再去和独立的结局对账。乙套与甲套差不多，甚至更低，预测四就错了。错了不是坏事，它告诉我们：手指之间对不上，原因不在"把伞收成了点"，触觉科学化要另找单位。也许单位在时间节律那一侧，也就是更靠听觉的那一面（每一搏之间的先后与间隔）；也许在别处。到那时，本章要改，第二十一章的"气的读数"在脉上的这一种撑法也要跟着收窄。

成败两头，还都要带着一条局限写进报告。乙套是传感器从医生的按里取出来的，它比较的是"医生的按法，加上按到的东西"，不纯是医生指下的手感。所以过了关，只能说"用伞的写法记下来的按与回应"在医生之间更对得上，不能径直说医生的手感更一致了；没过关，也只能说这种记法没有帮上忙，不能据此断定医生的手感本身对不上。手感本身对不对得上，要靠丙套那种"用手回答手"的办法去旁证；乙套与丙套的结果若方向一致，这条局限才算松了一扣。

三条守住的事：这个实验只问"描述在医生之间对不对得上"，不问"谁按准了什么病"，不作任何诊断。结果里不出现任何医生的名字，不排名次，不进任何考核。志愿者的数据只用于这项研究。

有一个疑问值得先回答。有人会问：乙套是传感器从医生的按法里取出来的，它量的到底是医生的手，还是传感器？回答是：两者都量，而这正是要的。同一件标准物，十来位医生按，每个人加力的快慢、停顿的深浅、三指的分工都不一样，传感器记下的就是每个人"怎样按"以及"按到了什么"。如果伞式特征在医生之间更一致，说明医生们的按法虽各有不同，按出来的那把伞却更接近同一把；如果单点特征更一致，说明医生们其实在某个固定深度上更有共识。哪一种结果都是关于手的消息。

◆ 四、要是伞也撑不开

实验还没做，结果谁也不知道。本书不能把一个待验的猜想写成已成的事实，所以要预先想一想：要是伞也撑不开，这一编还剩什么？

反过来，也要预先想一想：要是伞撑开了，实验过了关，又说明了什么？

说明得很少，这一点要先讲清。它只说明一件事：用伞式特征来记，医生和医生之间更对得上。照上一章的三道门，这只是过了稳定与可传，还没有走到可验。它不说明任何一种脉象对应任何一种身体状态，不说明哪一个证立得住，更不说明哪一剂方有效。要走到那一步，还得拿伞式特征去和独立的结局对账，那是懂行的研究者用多年工作才能回答的事，本书不替他们回答。所以即便实验过了关，也不能拿它去说"中医已经科学了"。能说的只是：中医科学化的路上，有一块地基可能立住了。

那么，要是伞也撑不开，这一编还剩什么？

还剩三样。

其一，剩下"取证的单位要照着手的本事立"这一条。伞是本书提的一种立法，不是唯一的立法。伞若不灵，盲文的路、标准样的路还在，要换的是单位的形状，不是"立触觉单位"这件事。

其二，剩下对代签的看清。即便伞式特征不比单点特征更一致，也不能反过来证明"脉就是那条波形"。实验能说明哪一种记法让医生更对得上，说明不了脉本身只有一个点那么大。

其三，剩下一个次序：先人，后机，再回人。这个实验从头到尾都是这个次序。医生的手先按，传感器后记；记出来的特征，末了又回到医生之间去比。第七编会说，AI 要接手触觉与听觉的数学，必须走同一个次序。这一章的小实验，是这个次序在一副指套上的第一次预演。

那天傍晚，许蔓收拾指套，邓守仁看着屏幕上那条小山一样的线，问她："你这条线，能把我按出来的东西全装进去吗？"

许蔓说："装不全。可它比那一个点装得多。"

邓守仁点点头，说："那就先装这么多。装不下的，你再来按我的手。"

这句话是构想的。它说的分寸，却正是这一章要的：伞不是终点，是比点多走的一步；走不通，就回到手上，再找。

带走的话

浮中沉不是三个点，是一把随按压一张一合的伞；它对不对，让十来位医生的手去说。

小账：

- SDE 账：S 落在按压深度—回应曲线上冒出又成形的那座"小山"，D 落在从轻到重的一串按压与三指之间的先后牵连，E 落在三把交叠的伞与脉管的互相改写。
- 代签账：给出了脉上的三个伞参数——伞随压力张合的幅度 r(p)、三指重叠度 ω>1、回应的有限传播速度 v——并以预测四配了一个可以说错它的实验；拆开的是"脉就是一条固定压力下的波形"这处代签。

◆

第　七　编

AI 包揽视觉数学之后：先人、后机、再回人

导　语

本编命题：视觉数学正被 AI 接走；触觉与听觉的纠缠，AI 没有亲身经历，必须人先实现，AI 再模拟，再回到人检验。前六编说的是，现代科学只睁开了眼睛；这一编说，眼睛这一半的数学活，正一件一件交到机器手里，手和耳朵那一半交不出去，只能由人先做出来。

30

第 30 章

视觉数学正在被 AI 接走

> 这一章的问题
>
> 为什么 AI 最先接走、接得最顺手的，恰恰是视觉数学？接走以后，数学家站在哪里？

◆ 一、曾一鸣的夜班

这是我构想的场景。

曾一鸣二十六岁，数学博士生，读的是代数方向。他的导师那一代人，证一个引理要在草稿纸上熬几个星期，纸写满了一摞，能留下来的只有两页。曾一鸣的书桌上没有一摞纸。他的屏幕分成左右两半：左边是他用中文和数学符号写下的思路，右边是证明助手里的形式化证明。证明助手是一种专门检查证明的软件，Lean 是其中常用的一种。中间夹着一个 AI，它把左边的思路翻成右边的代码，一行一行往下试。

右边每过一行，软件就打一个绿色的勾。不过的那一行，标成红色，后面跟着一句机器的报错。曾一鸣的夜班，大多是在看红色：看 AI 卡在哪一步，改一改提示，让它换个办法再试。到凌晨两点，一个他原以为要证一个月的引理，绿勾从头连到了尾。

那一刻他有两种感觉。一种是松快：这个引理终于不用再惦记了。另一种说不清，像一个木匠看见机器替他把榫头凿好了，凿得比他还整齐。他关了电脑，

在宿舍楼下走了一圈，心里转着一个念头：一个月的活一夜就做完了，那我这五年学的，到底是哪一门手艺?

这个念头不只曾一鸣有。今天许多年轻的数学工作者都碰到了它。本章不急着安慰他，先把一件事讲清楚：AI 接走的是哪一种数学，为什么偏偏是这一种。

◆ 二、点可以切割，所以可以编码

回到第九章和第十章。那里说，视觉成像有三种物理性质：光走直线，点对点成像，感受野极小；局部图像互相可以切割，看这一处不改那一处；光几乎瞬间到达，整幅画面同时摆在眼前。传统数学的单位是点，正是这三种性质的投影：点没有大小（$r\to 0$），点和点互不重叠（$\omega=1$），整个推理可以同时摊开来看（$v\to\infty$）。

一套数学，一旦是用点搭起来的，它就天生可以被切成小块。一个证明是一串符号。每个符号是一个点，占一个位置，不和邻居重叠。一行推理对不对，只看这一行和它引用的前几行，不看别处。曾一鸣屏幕上的绿勾，就是这样一行一行打出来的：第七行对不对，只由第七行和它引用的东西决定，第十二行写了什么，和第七行无关。

这就是"看此不改彼"在逻辑里的样子。

这套切法不是一天长成的。欧几里得给点下的定义，是"没有部分的东西"。没有部分，就切不坏，也不会和别的点长在一起。两千年后，笛卡儿给平面画上两根数轴，曲线从此可以写成一对一对的数，形状被切成了坐标。到了十九、二十世纪之交，数学家们还想再走一步：把证明本身也写成有限长的符号串，让检查一个证明，变成像对账一样的机械活，谁来查都得出同一个结果。那时候没有能干这活的机器，这个想法只能停在纸上。

AI 处理文字，也是先切。一段话被切成很多小片，叫"词元"（token）。每个词元编成一个编号，再变成高维空间里的一个点，叫"向量"。机器的全部运算，就是这些点之间的加加乘乘。点和点之间可以靠得近，可以离得远，但永远是两个点，不会长到一起。

两边一对，事情就明白了：视觉数学本来就是切好的，AI 本来就是吃切好的东西长大的。它接走视觉数学这么顺手，要紧的原因不在它聪明到了哪一步，而在两边用的是同一种单位。欧几里得的点、笛卡儿的坐标、那个"机械对账"的旧梦，等了一百多年，等来了一个真能吃下它们的东西。

下面这张表把三条对上：

视觉成像的性质	传统数学里的样子	形式证明与 AI 里的样子
点对点成像，感受野极小（r→0）	点没有大小	一个符号、一个词元占一个格子
局部图像可切割（ω=1）	点和点互不重叠	每一行单独检查，对错不牵动别行
全场同时呈现（v→∞）	整个推理可以摊开同看	整个证明同时存在，检查器可以跳到任何一行

表里没有一项是 AI 发明的。三条都是视觉科学几百年攒下的家底，AI 一进门就全部继承了。第 346 号《人与 AI 一起发生新数学》已经说过，今天的数学是视觉的。本书接着补一句：正因为它是视觉的，它才最先被机器接走。

◆ 三、拼图和揉面

讲到这里，换一个家里的例子。

一盒一千片的拼图，是视觉数学最好的模样。每一片有自己的形状和图案，和左右上下四个邻居咬合。一片对不对，只看它和四个邻居合不合缝，不用管拼图另一头。拼错了一片，拆下来换一片，别处不受牵连。整幅图的样子印在盒盖

上，随时可以拿来比对。这三条，正是 r→0、ω=1、v→∞ 的家常版本：每片边界分明，片和片互不重叠，全图同时可见。这样的活，机器做得又快又好，今天已经有能拼拼图的机械臂和程序。

一团面就不同了。揉面的人手掌一压，整团面都在动：这边陷下去，那边鼓起来；面筋一层一层拉开，又一层一层回弹。你没法说"这一下只揉了左边三厘米"，因为左边那三厘米一动，右边就跟着变。面揉到了没有，也不是看一眼就知道的，要按下去，等它慢慢弹回来，弹的快慢就是答案。面团没有"片"，没有盒盖上的全图，也不能拆下一块换一块。

拼图能交给机器，揉面交不出去，差别不在难易。很多拼图比揉面难得多。差别在单位：拼图的单位是一片一片切开的，揉面的单位是一把一把连着的伞。视觉数学是一盒很大很大的拼图，AI 越来越会拼。第五编讲的触觉数学，是一团面。

◆ 四、接走了什么：计算、证明、搜索

机器接手数学，不是从今天开始的，大致分三批。

第一批是计算。从手摇计算器到电子计算机，算数、解方程、做数值模拟，早就交出去了。二十世纪中叶以前，"计算员"还是一种职业，许多人整天坐在桌前按规则算表格；对数表、三角函数表也曾是一个国家的科学家耗费多年编出来的大工程。这些活后来都被机器接了，计算员这门职业也消失了。罗明川那一代做断裂模拟的人，一辈子都在和计算机配合：人画网格、列方程，机器算。一九七六年，美国伊利诺伊大学的阿佩尔和哈肯证明了四色定理（任何一张地图，四种颜色就够把相邻的国家涂成不同的颜色），证明里有一大块，是靠计算机把上千种情形一个一个检查过去完成的。当时很多数学家心里不踏实，觉得一个没人能亲手看完的证明，算不算证明。几十年过去，这种不踏实已经淡了。

第二批是证明。证明助手把证明写成机器可以逐行检查的形式。它原先只是"查账"的：人写，机器查。这种查账很累人，纸上一页的论证，写成机器能查的样子，往往要长出好几倍，所以多年来只有少数人愿意干。近几年 AI 开始自己"记账"：人给出命题和大致思路，AI 补全中间的步骤，再交给证明助手查。最累人的那部分，一下子轻了。曾一鸣的夜班，就站在这一批的中间。

第三批是搜索解法。一个难题，可能的推法多得数不清，人一条一条试，一辈子试不完。机器可以同时铺开成千上万条路，走不通的剪掉，走得通的留下，再从留下来的里面挑。下棋的程序是这样赢人的，解题的程序也在学这一手。搜索能铺得开，有一个前提很少有人提：每一步可走的招数，得能一个一个列出来。棋盘上有多少个格子，下一步就最多有多少种落法；证明里能引用的定理有多少条，下一步就最多有多少种推法。招数是点，能数，才能铺开。揉面的下一下该怎么按，按多深、按多久、手掌偏几分，没法列成一张清单，搜索也就无从铺起。

这三批进展得很快，快到具体成绩几个月就变一次。本书不报任何比赛名次和得分，这些数字写进书里，书还没印出来就旧了。要紧的不是哪一年哪一项做到了几分，而是方向：凡是能写成符号、能逐行检查、能大量铺开搜索的数学，正在被机器一项一项接走。我一直讲的那句话是："视觉数学已经将被 AI 包揽，新数学就是进入触觉和听觉。"这句话的前半句，每个月都在被新消息坐实一点。

◆ 五、数学家的位置被改写

数学家原来站在哪里？站在点上推演。他拿着一套定义好的点和规则，一步一步往下走，走出一条别人没走过的路。这条路走得越长、越险、越漂亮，他就越是好数学家。导论里说过，我做了二十年网格，每个节点都是没有大小的点；那二十年里，好的工作就是在点上把推演做得又准又快。

这个位置，正在被改写。推演本身交给了机器，而且机器推得越来越快。人如果还守着推演，就会像曾一鸣那晚一样，看着绿勾，心里发空。计算员的故事说明，一门手艺被机器接走，干这门手艺的人并没有消失，他们挪了位置；问题只在挪到哪里。

有人说，人可以退到"出题"和"判断"上：机器负责推，人负责问什么、判断哪个结果重要。这话不错，但还不够。出题和判断，如果还是在点上出、在点上判，机器迟早也能学会。它看过的题比任何人都多，它见过的"重要结果"长什么样，也比任何人记得全。

本书给的回答更具体一点：机器接不走的，是视觉数学之外的那一块。它在第五编里有了名字：触觉数学的单位是伞，伞有半径，伞和伞重叠，伞面的消息传得有快慢；听觉数学的伞随时间一张一合。这些单位不能先切成点再拼回去，一切开，r、ω、v 就被拍回了三重退化。机器擅长的那套切法，正好是触觉、听觉数学最怕的那一刀。

曾一鸣那晚在楼下走的那一圈，其实碰到过这一块。他后来回想，自己琢磨那个引理的头几个星期，并不是在纸上推出来的。卡住的时候，他常有一种"手里攥着个东西，还没捏出形状"的感觉；那感觉对不对，是他在走路时、在洗碗时慢慢"摸"出来的。等到能写成符号，事情其实已经过了一大半。AI 接走的，是写成符号以后的那一小半。

◆ 六、交出去的，是晾干了的数学

还有一层，要往深处说一句。

湖南人喝茶，知道鲜叶和干茶是两样东西。鲜叶摘下来，香气一阵一阵在变，捏一把是软的、潮的，放一夜就不一样了。要运出山、要装袋、要按克称了卖，就得先杀青、揉捻、烘干。干茶好存、好运、好比较，一斤和一斤可以放在

一起称。可鲜叶在手里那一阵一阵变的东西，烘干时就散掉了，干茶袋子上写得再详细，也写不回来。

发表出来的数学，是晾干了的数学。一篇论文的样子，是定义、引理、定理、证明，一条一条排好。作者在哪里卡了三个星期，走过哪几条死路，哪一天洗碗时忽然觉得"形状对了"，这些都不写进去。也不能写进去：期刊要的是谁都能逐行查验的东西，查验的标准就是第二节那三条，单位是点，行和行可切，全文同时摊开。教科书更是晾得透透的干货。

AI 学数学，吃的正是这些干货。几百年的论文、教材、习题解答，加上证明助手里一行一行的代码，是它的全部口粮。它从干货里学会了干货的样子，学得比人还熟。所以它接走视觉数学，接得几乎没有损耗：数学交到它手上之前，鲜的那部分早就晾掉了，它接的本来就是干的。

这就碰到了第三编说的代签。一位数学家在脑子里摸索时，手里攥着的那团东西，有分量，有松紧，有先后，它更像一团面，而不像一盒拼图。等他写成论文，符号替那团东西签了字。签得很好，别人照着签字可以把结论一步不差地重走一遍。久而久之，大家只认签字，忘了签字背后还有过一团面。形式证明是这份签字最严格的版本，AI 是最勤快的签字员。

这样看，AI 的长处和短处是同一件事。它从未见过那团面，因为那团面从来没有进过数据。这不是说那团面神秘到不能说，只是说至今还没有人把它立成可以记录、可以传授、可以检验的单位。没有单位，就进不了数据；进不了数据，机器就学不到。要让它进数据，得有人先在自己身上把它做成单位，第三十二章叫这一步"先人"。

还要防一种倒过来的危险。机器把干货做得又快又好，人很容易反过来学机器：只留下能写成符号的那部分思考，把手里那团面当成可有可无的草稿。那

样，人会越来越像一台慢一点的证明助手，而数学里本来最可能长出新东西的一块，就在人身上也晾干了。

曾一鸣第二天做了一个小试验。他想把那几个星期里"攥着的感觉"告诉 AI，看它能不能接着摸下去。他打了好几行字，写得很吃力：这个对象有点紧，像一头被拽住了；换一个角度松一点，可是松了以后另一处又鼓起来。AI 很快回了他一大段，把这些话翻成了三个候选的不等式，每个都写得整整齐齐。三个他都试了，都对不上。他说不清哪里不对，只觉得味道不对，像有人照着他对一碗汤的描述，端上来一碗颜色一样、喝起来不是那回事的汤。

这个小试验什么也没证明，它只让曾一鸣看见了一道缝：他手里那团东西，一说出口就被切成了词元，一翻成数学就被切成了点。切开以前它是一团，切开以后它是一堆，从一堆再拼回一团，机器没有办法，他自己也没有办法。

这一章先停在这里。那"手里攥着的东西"到底是什么，为什么 AI 没有，数学家怎样把它带进数学，是后面三章的事。

> 带 走 的 话
>
> **AI 接走视觉数学最顺手，因为视觉数学本来就切好了，机器本来就吃切好的东西。**

小账：

- SDE 账：S 落在证明一行行显露成可检的结构上，D 落在符号排成先后的推理序列上，E 被压成"引用了哪几行"这种最薄的关系，几乎看不见。
- 代签账：本章指出形式证明把三重退化（$r\to 0$、$\omega=1$、$v\to\infty$）写进了机器检查本身，视觉三性第一次被机器原样继承。

◆

31

第 31 章

AI 没有跨感官纠缠

> **这一章的问题**
>
> 今天的 AI 能看图、能听声，机器人的手也开始能"摸"了。为什么还说 AI 没有跨感官纠缠？它缺的到底是什么？

◆ 一、AI 也是视觉数学出身

上一章说，AI 接走视觉数学最顺手，因为两边的单位是同一种单位。这句话反过来也成立：AI 自己，就是视觉数学养大的孩子。

先看它怎样吃一张照片。照片进了机器，先被切成像素，一个像素是一个小方格，格子里记着几个数，表示红、绿、蓝各有多亮。一张照片就是一大张数的表格。机器在这张表格上一小块一小块地扫，找出边、角、纹理，再一层层往上拼，拼出"这是一只猫"。这套办法很像第九章说的眼睛：点对点成像，局部可切，整张同时在手。它能做得这么好，正是因为视觉本来就是这样切的。

再看它怎样吃一段声音。声音是空气一阵一阵的压紧和放松，本来是连着的、依次到来的。可在许多常见的做法里，机器先把声音按很短的时间切成一小段一小段，每一小段做一次频率分析，再把结果排成一张图：横轴是时间，纵轴是频率，颜色深浅表示强弱。这张图叫声谱图。也有一些做法直接吃原始的声波，可那一串声波同样先被切成一个个等距的采样点。声音被画成了一张图，然后交给看图的那套办法去处理。第十三章说，傅里叶用视觉工具处理听觉对象；到了机器这里，这一步做得更彻底，声音干脆变成了一张照片。

再看触觉。机器人手指上的触觉传感器，大多做成一张"触觉皮肤"：薄薄一层上面排着许多小小的感压点，每个点读出一个压力数。一次按压，读出来的是一张压力分布图，常有人管这些感压点叫"触觉像素"。

三样东西进了机器，都成了一张一张的表格，表格里是一格一格的点。看、听、摸三种感觉，进门时被同一把刀切成了同一种形状。这把刀，就是视觉数学的刀。

这样说并不是挑剔工程师。把东西切成格子，是今天能让机器算起来的几乎唯一的办法。只是要看清楚：AI 能看、能听、能摸，不等于它有了三种感觉；它有的，是一种感觉的切法，套在三种信号上。好比一个只会用尺子的人，量完了桌子，又拿尺子去量一首歌，量出来的每个数都很准，可量的已经不是那首歌了。

◆ 二、两张表格并排放，不等于纠缠

既然看、听、摸都成了表格，能不能把它们合起来？能，今天叫"多模态"。最常见的合法子，是给几张表格打上同一个时间戳，对齐了，再一起送进一个更大的网络。工程上有"早融合""晚融合"的说法：早融合是一开始就把几路数据并在一起，晚融合是各路先单独算出判断，再把判断合起来。

不管早还是晚，起点都一样：先有几串分别采好、分别切好的数据，然后再想办法让它们碰头。这里有一个容易漏掉的地方。

举一个家里的例子。两个人抬一张大桌子下楼梯。前面的人往下走一步，桌子一沉，后面的人手上一紧，跟着放低一点；后面的人一放低，前面的人觉得桌子往后拽，脚下就慢一点。两个人谁也没说话，桌子稳稳地下了楼。

现在设想有人想用数据"复原"这次抬桌子。他先让前面的人单独抬着一个装了传感器的桌角走一遍，记下他手上的力；再让后面的人单独抬一遍，也记下

来。然后把两串记录按时间对齐，并排放好。这两串数据，每一串都很准，对齐也对得一秒不差。可是桌子是怎么稳稳下楼的，在这两串数据里找不到。因为两个人分开抬的时候，谁也没有被对方的手牵着，那一沉一紧、一拽一慢的来回，根本没发生。

这就是"两串切开的数据拼不回纠缠"的意思。纠缠不在任何一串里，它在两串互相改写的那一来一回里。分开采集，这一来一回就没有了；采完再对齐，对齐的只是时间，不是那一来一回。

拍西瓜也是这样（见第五章）。拍瓜的人手掌落下去，瓜皮回弹到掌心，同时"嘭"的一声传进耳朵。声音一闷，她下一掌就会稍稍重一点、换个地方；手上一觉得发空，她会侧过耳朵再听。手改写了耳朵听到的东西，耳朵又改写了手的下一掌。如果把"拍瓜时手上的压力"和"拍瓜时的声音"分别录下来，再并排放，那一下一下互相改写的来回，就丢了。

厨房里也有一样的事。老一辈人剁肉馅，两把菜刀轮着落，砧板"笃笃笃"地响。剁到后来，刀下的手感从"一块一块地硌"变成"一片软软地粘"，砧板的声音也跟着从脆变闷。剁的人不是先摸一摸、再听一听、然后把两样结论加起来，她是手上一软、耳朵里一闷，同一刻知道"差不多了"，刀就慢下来。刀一慢，声音又变了，她再听一下，又剁几刀。手和耳朵在一块砧板上互相催着往前走。把刀柄上的力和砧板上的声音分两次录、分两路算，算出来的是两条很好看的曲线，那个"差不多了"不在任何一条上。

◆ 三、机器的口粮几乎全是给眼睛的

还有一个更大的原因，让 AI 偏向分开、偏向视觉。它吃的东西，本来就是给眼睛准备的。

今天的大模型，学的是海量的文字和图片。文字是什么？是写下来给眼睛读的符号。一个字一个字排在纸上、屏幕上，局部可切，整页同时可见，正是视觉的样子。图片更不用说。互联网上也有很多声音和视频，可是视频里的声音，往往也要先变成声谱图、变成字幕，才更好被机器使用。至于触觉，互联网上几乎没有。没有人拍下自己揉面时手掌每一刻的压力，也没有人上传切脉时三根指头的起落。

联合采集的触听数据就更少了。要采到它，得有一只戴着传感器的手，和一只贴在同一处的麦克风，在同一下拍、同一下按里，同时记下手和耳朵两边，还要记下这一下之后的下一下怎么变。这样的数据，要一下一下在真实的瓜、真实的面、真实的器物上去采，没有现成的仓库可以搬。

这就是说，AI 的口粮，从根上就偏。人类几千年攒下的可以交给机器的东西，大部分是视觉的痕：文字、图形、照片、表格、曲线。第 407 号《被刻进世界的公式》说，仪器把现实变成可读的痕；本书在第八章补过一句，那些痕几乎都是给眼睛看的。到了 AI 这里，痕又成了口粮。机器吃着视觉的痕长大，长成一个视觉的胃口，再回头看触觉和听觉，也就只会用视觉的办法去嚼。

这里不是说机器"不配"学触觉和听觉。只是要看清：它没有从小吃过那一来一回，因为人类从来没有把那一来一回存成它能吃的样子。

◆ 四、许蔓的指尖

这是我构想的场景。

许蔓三十一岁，在深圳一家机器人公司做触觉传感。她的工作是给机械手的指尖做那层"触觉皮肤"。公司要的是一只能在流水线上挑水果、在仓库里拿易碎品的手。

她入行头几年，最头疼的一件事叫"串扰"。按住皮肤上的一个点，旁边几个点也跟着有读数。对工程师来说，这是缺陷：你想知道压在哪里、压了多重，邻居乱跳，读数就不干净。于是她和同事想尽办法压低串扰：把感压点隔开，在点和点之间加隔层，再用算法把邻居的"多余"读数减掉。一代一代产品，串扰越来越小，指数越来越漂亮。

有一年春节，她回老家，在厨房帮母亲包饺子。她捏着饺子皮，忽然停了一下。手指按在面皮一处，指肚旁边一圈都跟着有感觉，那一圈的感觉告诉她这块皮厚了还是薄了，捏紧了还是没捏紧。她自己的手，处处都在"串扰"。而且正是靠这种"串扰"，她才知道饺子捏好了没有。

她回到深圳以后，看自己的产品就不太一样了。她们花了几年工夫去掉的，正是第二十二章说的"按此牵彼"，也就是 ω>1。工程目标是让每一个感压点只管自己那一小块，邻居互不打扰。这个目标说穿了，是把触觉做成一台照相机：点对点，感受野极小，看此不改彼。她们在把手改造成眼睛。

她翻出几年前的旧样品，那时串扰还很大。她拿它去按一块硅胶，再按一块海绵，再按一个刚出笼的馒头，把每次按下去时邻居们的读数一圈一圈画出来。三样东西画出来的圈不一样：硅胶的圈小而陡，一处按下，影响很快就收住；海绵的圈大而缓，影响一路摊开去；馒头的圈最怪，一边大一边小，大概是因为底下有一处没发好。她盯着这三张图看了很久。被当成噪声去掉的那一圈，原来记着被按的东西是什么样的：影响摊多宽，就是伞的半径 r；一处和另一处的影响叠了几层，就是重叠度 ω；影响从按点往外走得快还是慢，就是传播速度 v。第二十一章说，伞有伞心、伞半径和伞面分布；许蔓画出来的，正是一把一把不同的伞面。

这只是她在实验台上随手做的比较，样品少，没有对照，什么也证明不了。可它让她明白，自己的行当里有一个颠倒：工程师花大力气消去的东西，可能正

是触觉最值钱的那一部分。照相机要的是每个点干干净净；手要的，恰恰是点和点之间不干净的那一圈。

许蔓还注意到另一件事。公司的机械手上也装了麦克风，用来听东西有没有碰坏、零件有没有卡到位。可是麦克风那一路归另一个组管，数据格式不同，采样节奏不同，两路数据要到系统很靠后的一层才碰头。手上的感压和耳朵里的声音，在机器人身上是两个部门。这是许蔓在工作里看见的样子，不代表所有公司都如此；可它的方向很清楚：触觉和听觉在机器里是分开长的，长成之后再拼。

这里要说清楚：许蔓和她的同事没有做错什么。在流水线上，干净的读数就是好读数；分开的模块好维护、好升级、好查错。代签在这里照样好用。问题只在于，一旦有人想让机器去做谭桂香、邓守仁那种判断，这套做法就碰了顶：它从传感器那一层起，就把纠缠当成噪声去掉了。

◆ 五、"没有体会"是什么意思

我常说："AI 没有体会触觉和听觉的互相纠缠。"这里的"体会"两个字，要说准。

体会不是"有数据"。AI 有很多触觉数据，也有很多声音数据。体会也不是"有感受"那种玄乎的东西，本书不讨论机器有没有内心。体会说的是一件很实的事：自己的手在那一来一回里。手的这一下改变了耳朵听到的，耳朵听到的又改变了手的下一下；这一来一回发生在同一个身体里，而且这一来一回本身，就是判断的依据。

拿 SDE 说：触觉和听觉各有完整的 S·D·E，拍瓜时它们不是两套 S·D·E 并排走，而是长成了一套。手掌每一下落点和力道排成的差异序列，和耳朵里一声一声的差异序列，互相咬着往前走；瓜熟没熟这个"显露"，是从两串咬合的序列

里冒出来的；那份咬合，就是触与听之间的特征纠缠。机器手现在的样子，是两套 S·D·E 各走各的，到很靠后才把两个结果放在一张桌子上。

机器人当然也有来回。它的手会根据传感器读数调整力道，这叫反馈控制。可这个来回是工程师事先用方程设计好的：读到多大的压力，就把力减小多少。来回的规则是代签进去的，机器只是照着签字执行。拍瓜人的来回不是这样，她下一掌怎么拍，没有人事先写好规则，规则是在拍的过程中自己长出来的，长出来以后，她也说不全。

学骑自行车的孩子最能说明这一点。把世界上所有骑车的视频都给一个孩子看，把车把、车轮、重心的力学方程都讲给他听，他还是不会骑。他得自己坐上去，车往左一歪，屁股和手同时感觉到，身体往右一扳，车又正过来，耳边的风声、车链子的响声也跟着变。摔几次，那一来一回就在他身上长成了，以后几十年都忘不掉。可是你要他说清楚自己是怎样保持平衡的，他说不出来。那份"会"，不在视频里，不在方程里，在他身上那一来一回里。机器人今天学平衡，靠的是工程师写好的控制方程，加上大量的模拟练习；它学得很好，但它学的是方程签过字的平衡，不是孩子摔出来的那一种。两种平衡在平地上看不出差别，在没人见过的路面上，差别才会冒出来。

所以，说 AI 没有跨感官纠缠，说的是三层意思。第一层，它的数据从采集起就是分开切好的。第二层，它的传感器设计把纠缠当噪声去掉了。第三层，它身上的来回是方程代签的，不是在一来一回里自己长出来的。三层叠在一起，机器离那种纠缠就隔着好几道墙。

这几道墙不是机器永远翻不过去。只是翻墙得有梯子，梯子要有人先搭。

梯子是什么？是那一来一回被立成了单位，能记、能传、能比。谭桂香身上有这样的单位，只是没有写下来；邓守仁三根指头上也有，传给徒弟时靠的是手

把手。机器缺的，正是这些还长在人身上、没有被立出来的单位。它不缺算力，不缺数据量，缺的是一份从纠缠里直接采出来的、带着那一来一回的样本，和一个告诉它"这一下和那一下算同一件事"的单位。这两样，都得先从人身上来。下一章讲谁来搭这把梯子、怎样搭。

> 带走的话
>
> **两串切开的数据，对齐得再准，也只是并排；纠缠在那一来一回里，分开采集时它就没发生。**

小账：

- SDE 账：S 是瓜熟这一类判断从咬合的序列里显露出来，D 是手的力道序列和耳朵的声音序列互相咬着排出先后，E 是触与听在同一身体里的互相改写，机器把它切成了两路数据。
- 代签账：本章拆开了机器里的两处代签：传感器把 $\omega>1$ 的串扰当噪声消去，反馈控制用方程替那一来一回签了字；并指出被消去的串扰圈里，记着伞的 r、ω、v。

◆

32

第 32 章

先人、后机、再回人

这一章的问题

既然两串切开的数据拼不回纠缠，触觉、听觉的新科学从哪里起步？为什么次序必须是先人、后机、再回人，倒过来不行？

◆ 一、一句话，三步路

我一直讲的那句话是："AI 没有体会触觉和听觉的互相纠缠，只有人首先实现，然后 AI 再来模拟。"

这句话里藏着一条路，本书把它走全，补上第三步，就是三步：先人实现，再机模拟，再回到人检验。三步各有各的活，少一步，路就断。

先人，是让纠缠在一个人身上稳定地发生，而且被这个人立成一个能说、能记、能教的单位。后机，是把这个单位交给机器，让机器照着单位去采数据、去学、去放大。再回人，是把机器学出来的东西送回人的手和耳朵，看它对不对味，有没有让人的手变得更好。

那句话只说了前两步，第三步是这本书补上的。补它的理由很朴素：一个模型做出来，总有人急着拿去用，很少有人愿意再把它送回老手的手里，听一句"对头"还是"不对头"。三步里最容易被省掉的就是这一步，所以要单独写出来。

听起来简单。难处在每一步都有一个现成的捷径，走捷径就会走回视觉科学的老路。下面一步一步说。

◆ 二、先人：纠缠先长在人身上

人身上本来就有这样的纠缠，前面已经见过两回。谭桂香在娄底菜市场拍瓜三十年，手掌落下去、"嘭"的一声回来，手和耳朵在同一下里咬在一起（见第五章）。邓守仁三根指头按在寸关尺上，指下一浮一沉，同时又在等那一下一下的来去，按压和节律互相牵着（见第二十六章）。这两位已经实现了纠缠，这里不再重讲。

可是"实现了"还不够。谭桂香一拍一个准，她的本事长在她身上，她一走，本事就跟着走。要让机器能学，纠缠还得被立成单位。单位是什么？是一份大家可以对上号的约定：这一下和那一下，算不算同一种"一拍"；这一声和那一声，算不算同一种"闷"。没有单位，数据采得再多，也只是一大堆说不清彼此关系的读数。

这是我构想的场景。

上一章说到许蔓画出了被消去的串扰圈。那以后她给自己派了一件事：在把机器弄明白以前，先把自己弄明白。她每周去小区门口的水果摊买两个瓜，拍了再买，买了切开，切开尝，尝了在本子上记一笔。头一个月，她拍十个错六个。她发现自己拍的时候，眼睛总盯着瓜皮的花纹，好像能看出点什么来；她试着闭上眼睛拍，反而准了一点。

第二个月，她开始注意自己的手。她发现，自己并不是每一掌都拍得一样。头一掌是探路的，轻一点；听到声音以后，第二掌会自己换个位置、换个力道。真正起作用的往往是第二掌、第三掌，而第二掌怎么拍，是第一声"教"出来的。她在本子上写下一句：一拍不是一下，是一串，后一下由前一声定。

第三个月，她给"一拍"立了一个粗粗的单位。一拍＝一组，三到五下；每一下记三样：手掌贴住瓜皮的面有多大，瓜皮回弹到掌心用了多久，声音从响到消

用了多久；再记一样：下一下比上一下改了什么。她看出来，这四样里，前三样分开看都说明不了多少，第四样才是关键，它记的正是那一来一回。

用第五编的话说，她给自己的拍瓜立了一把伞：手掌贴住的那一片是伞半径 r，回弹在瓜皮上一处牵着一处是重叠度 ω，回弹和声音一前一后到来是传播速度 v，声音一张一合的那段是听觉的伞 r(t)。最要紧的是第四样，它把触觉的伞和听觉的伞连成了一把。这个单位粗得很，还谈不上科学。可它是从她自己身上那一来一回里长出来的，不是从方程里抄来的，也不是从照片里看出来的。

"先人"的意思就在这里。新科学的第一个单位，得由一个真正实现了纠缠的人，在自己身上立起来。它可以很粗，可以以后被推翻，但它的来路必须是那一来一回本身。

为什么是许蔓来立，而不是谭桂香？谭桂香的手早就实现了纠缠，可她不需要把它说出来，三十年里也没有人要她说。许蔓的手远不如她，可许蔓一边拍一边问自己：我这一下为什么换了位置？立单位往往要两样东西凑在一起：一只真正实现了纠缠的手，和一个肯追问这只手的人。两样长在同一个人身上最好；不在同一个人身上，就要两个人坐到一处，一个拍，一个问，问到拍的人自己也愣一下，"咦，我是这样拍的？"。单位常常就是在这一愣里立起来的。这一步慢，急不得，也省不得，更不能拿别处现成的单位来顶。它是新科学里最像手艺的一步，也是机器最帮不上忙的一步。

◆ 三、后机：机器照着单位去采、去学、去放大

单位立住了，机器才有东西可学。

许蔓回到公司，做了一只粗糙的试验手套：掌心贴一片保留了串扰的触觉皮肤，掌根贴一只小麦克风，两路信号用同一个时钟记，一点都不分开。更要紧的

是，手套记的不是单独的一下，而是她立的那个单位：一组三到五下，连同每一下之后手怎么变。数据从采集起就是一份，不是两份。

这就是"联合采集"。它和上一章说的"分别采集再对齐"差在哪里？差在采数据的时候，那一来一回有没有真的发生。戴着手套拍瓜，手在被声音牵着，声音在被手改着，采下来的就是那一来一回的痕。分别采集，是把手和耳朵先拆开，各自去采，那一来一回根本没发生，也就采不到。

有了这样的数据，机器能做人做不到的几件事。它能拍上千个瓜，记住每一组的细节，找出人说不清的规律；它能把不同人立的单位放在一起比，看谁的"一拍"更稳；它还能把拍瓜学到的东西，试着挪到别的地方去，比如敲一敲瓷器听有没有暗裂，敲一敲墙面听里面是不是空的。这一步叫"放大"：人立了一个单位，机器把它用到人一辈子都拍不完的那么多东西上。

这里也有一条捷径。机器可以不等人立单位，直接把手套里的读数一股脑儿吃进去，自己找规律。这样做也能学出点东西，但它找出来的"规律"，往往是在读数里最容易切开的那几个特征上打转，又回到了点的老路上。人立的单位，是给机器一根拐杖，告诉它从哪一来一回里去找。

"模拟"两个字，也要说准。机器模拟的，不该只是"手上的读数"和"耳朵里的声音"这两样东西，而是那一来一回本身。这就要求机器自己也能拍：一只机械手拍下第一掌，麦克风听见第一声，机械手根据这一声换个地方、换个力道拍第二掌。它下一掌怎么拍，不是工程师用方程事先写死的，而是从人立的单位和联合采集的数据里学来的。机器有了自己的一来一回，才算模拟到了纠缠；只会读两路信号、给出一个判断，那还是在看，不是在拍。这样的机械手今天还很粗，它离谭桂香很远，但方向对了：它学的是人的手怎样被声音牵着走，不是声音曲线和压力曲线各长什么样。

◆ 四、再回人：送回手和耳朵里对账

机器学出了东西，事情还没完。

第一种回法，是切开对账。机器说这个瓜熟了，切开尝一尝，看对不对。这一步谁都会做，但要看清它的分量：切开以后的对账，用的是舌头和眼睛，瓜瓤红不红、甜不甜，这是在用别的感官给触听的判断记分。它很要紧，却只能说结果对不对，说不出机器是不是真学到了那一来一回。

第二种回法，是送回手上。把机器学到的东西变成提示，交给一个刚学拍瓜的人：你第二掌往左挪一点，轻一点，再听。看这个人的手是不是因此长得更快。如果机器真学到了那一来一回，它的提示应该能帮人的手长出自己的一来一回；如果它学到的只是某几个读数的巧合，它的提示会把人的手教成一台读表的机器，人只会盯着提示，不再听自己手下的那一声。

第三种回法，是对味。把机器的判断拿给谭桂香这样的人看，不是让她打分，而是让她说"对头"还是"不对头"，说不出为什么也不要紧。老手说"不对头"的地方，往往就是单位还没立准的地方，要退回第一步重新立。

"再回人"守的是一道闸门：不让机器学出来的东西，变成一份新的代签。第三编说过，方程替缺席的手和耳朵签了字，签得太好用，大家就把签字当成了原件。机器学出来的模型，也会签得很好用。如果不送回人的手和耳朵对账，几年以后，大家会说"瓜熟就是模型输出大于零点七"，那就是又一次把代签当原件。

◆ 五、预测三：把实验讲给普通人听

这一节报预测三的账。它说：同一个判断任务，用联合采集的触听数据训练的模型，比两路分别训练再拼接的模型更好；人也是这样。如果拼接稳定地不比联合差，承重三就错了。

这个实验怎么做？用拍瓜讲，讲到谁都能懂。

准备一批瓜，几百个〔数量为示意〕。每个瓜都要在拍完以后切开，由几个不知道前面结果的人尝，定下"熟""不熟"。这是对账的底。

机器这一边，分两组。

联合组：戴许蔓那样的手套拍，手和声音用同一个时钟记，按"一组三到五下、连同下一下怎么变"的单位存。用这份数据训练一个模型。

拼接组：同一批瓜，分两次采。一次只采手：拍的人戴上隔音耳罩，听不见声音，只凭手拍，手套记下手上的读数。一次只采声：用一个固定力道的小锤子敲，麦克风记下声音，没有人的手在里面。两份数据各训练一个模型，再把两个模型的判断合起来，合的办法可以挑最好的那一种。

两组模型去判同一批没见过的瓜，和切开尝出来的结果比，看谁判得准。

人这一边，也分两组。找一批没拍过瓜的新手。

联合组：跟着老手正常学拍瓜，手和耳朵一起用。

拼接组：一半时间戴耳罩只练手，一半时间只听别人拍瓜的录音练耳朵，两样各练足了，再让他们自己把两种本事合起来用。

练习时间一样长。到时候两组新手判同一批瓜。

预测三说，联合组会更准，机器和人都如此。如果拼接组一样准，或者更准，而且换了瓜、换了人、换了叩、敲、弹这些别的任务，结果还是一样，那就说明两串切开的数据能拼回原来的东西，纠缠并不像本书说的那样拼不回，承重三错了。本书认这个账。

为什么人这一边也要做？只做机器，结果可能只说明今天的拼接算法还不够好，明年换个算法，差距就没了。人这一边，没有算法可换：两种本事分开练、再合起来用，如果真能和一起练一样好，那就说明人身上的触和听，本来就可以

拆开再装回去，纠缠只是一个好听的说法。机器和人两边一起看，才分得出"拼接技术还不成熟"和"纠缠根本拼不回"这两种情形。

结果也可能不黑不白。比如联合组只在难判的瓜上胜出，在一眼就能看出熟没熟的瓜上，两组差不多。这样的结果不推翻承重三，反倒给它划了边：纠缠在容易的判断里不显，在难的判断里才见分晓。本书事先说明，这种情形照实写进报告，不把它说成全胜。

这个实验要防几处偏。拼接组的锤子力道是固定的，联合组的手是会变的，比较的就不只是"联合还是拼接"，还掺着"有没有那一来一回"。这正是本书想检验的东西，不算偏，但要在报告里写明白。切开以后用舌头和眼睛定熟不熟，等于拿别的感官当裁判，这一处没法完全避开，只能请多个人尝、互相不通气。叩诊判积液这类任务只作为题目类型列出，本书不在这里谈任何诊断。

◆ 六、次序为什么不能倒

有人会问：机器那么能干，为什么不让它先来？先让机器在海量读数里找规律，人再去学机器找出来的规律，岂不更快？

倒过来走，会出两件事。

第一件，机器先来，它只能吃已经切开的数据，因为联合采集的单位还没有人立。它从切开的数据里学到的，是切开以后剩下的东西。它会很快给出一个看起来很准的答案，准在那些最好切的特征上。

第二件更麻烦。人去学机器的答案，学的就是切开以后的东西。新手不再听自己手下的那一声，只盯着屏幕上的数。一代人学下来，人身上那一来一回就少了一点；再一代，就更少。到那时，机器想回头找人立单位，已经找不到实现过纠缠的手了。谭桂香这样的手，是三十年一下一下拍出来的，没有了就没有了，机器补不回来。

所以次序不能倒。先人，是因为纠缠只在人身上发生过；后机，是因为机器能把人立的单位放大到人做不到的规模；再回人，是因为只有人的手和耳朵，能说出机器学的是那一来一回，还是又一次代签。

拍瓜只是一个例子。揉面、切脉、弹琴、剁馅、叩墙、听轴承，凡是手和耳朵在同一下里咬在一起的判断，都可以照这三步走。每一样都要先找到一只实现了纠缠的手，立起一个粗单位，再交给机器去采去学，学完再送回手里。这活很慢，一样一样地做，没有一张总表可以一次填完。触觉、听觉的新科学，大概就是这样一块一块长出来的。

> **带走的话**
>
> **纠缠先长在人身上，机器才有东西可学；学完还得回到人的手和耳朵里，才知道学没学对。**

小账：

- SDE 账：S 是"熟"从一组三到五下的拍里显露，D 是"后一下由前一声定"的差异序列，E 是手与耳在同一下里互相改写；先人立单位，就是把这份 E 立成可记的单位。
- 代签账：本章给出拍瓜的第一把粗伞（贴住面 r、回弹牵连 ω、回弹与声的先后 v、声的张合 r(t)），并用"再回人"一步防止机器模型成为新的代签。

◆

33

第 33 章

数学家的手和耳朵

这一章的问题

视觉数学交给 AI 以后，数学家还要做什么？他要把什么带进数学，才是机器接不走的？

◆ 一、爱因斯坦的一封回信

一九四五年，法国数学家阿达马出了一本小书，叫《数学领域的发明心理学》。他想弄明白一件事：数学家和科学家想出新东西的那一刻，脑子里到底在发生什么。他给许多同行写信提问，其中一封回信来自爱因斯坦。

爱因斯坦在信里说，写下来或说出来的词语，在他思考的过程中似乎不起什么作用。起作用的，是一些可以随意唤起、随意组合的"元素"。这些元素，按他自己的说法，"是视觉的和某种肌肉型的"。至于通常的词语和符号，要等到后面一个阶段，才费力地去找来，把已经在那里的东西说出来。

这几句话常被引来证明"大科学家靠直觉"。本书读它，看的是另一处：爱因斯坦把自己思维的元素分成了两种，一种是视觉的，一种是肌肉型的。肌肉型是什么？是用力、推拉、绷紧、放松，是身体在动的时候自己感觉到的那一类东西，离触觉很近。也就是说，二十世纪最会想物理的人之一，脑子里的物理有一半带着肌肉。

可是他写出来的物理，是方程。方程里只有视觉的那一半：符号一个一个排开，局部可切，整页同时可见。肌肉型的那一半，在"费力去找词语和符号"的那

个阶段，被符号签了字。签得很好，别人照着方程能把他的结论一步不差地算出来；可那一半肌肉，就这样留在了他自己身上，没有进数学。

第三编说，方程替缺席的手和耳朵代签。爱因斯坦的回信让人看见，这份代签有时就发生在一个人的脑子里：他自己的肌肉想到了，他自己的笔替它签了字。第十一章引过约纳斯的话：因果是在身体里发生的基本经验。爱因斯坦的"肌肉型"，是这句话在一位物理学家身上的一个旁证。旁证不承担证据，它只提醒我们：数学里那一半肌肉，不是从来没有过，是有过、被签掉了。

站外最近的邻居，是莱考夫和努涅斯二〇〇〇年的《数学从哪里来》。他们说，数学来自身体的认知，是从身体经验经过概念隐喻一层层长出来的：数数来自把东西归拢成堆，数轴来自沿着一条路走。这和爱因斯坦的信方向一致：数学的根在身体里。可他们停在了两处。一处是不分感官，看、摸、走、听统统叫"身体经验"。另一处是没有问：既然数学来自身体，为什么它的单位偏偏是没有大小的点？身体按到的从来不是点。本书站在他们后面，接着问了这两句。爱因斯坦把"视觉的"和"肌肉型的"分开说，正好替这一问开了个头：身体里不止一种来路，而写进数学的，只有视觉那一路。

◆ 二、曾一鸣在罗明川的实验室

这是我构想的场景。

曾一鸣那晚的念头一直没有放下。他托人打听，认识了长沙一所大学做断裂研究的罗明川。罗明川四十八岁，一辈子画网格、列方程，算材料什么时候裂、从哪里裂。他请曾一鸣去实验室看一次拉伸试验。

一根金属试样夹在机器上，两头慢慢往外拉。屏幕上一条曲线往上爬，那是力和伸长的关系。罗明川没看屏幕，他站在机器旁边，侧着耳朵。过了一阵，他抬手示意曾一鸣也听：试样里传出很细很细的"噼、噼"声，隔一会儿响一下，后来响得越来越密。又过了一会儿，"啪"的一声，试样断了。

罗明川说，这细声他听了二十多年，老技术员管它叫"材料在叫"。行内有一套专门的技术，叫声发射检测：在试样上贴传感器，把材料内部微小裂纹冒出来时发出的弹性波收下来，变成计数和曲线。工程上常用它来盯压力容器、桥梁和试样里的裂纹有没有在长。这套技术很有用。可罗明川自己心里清楚，他耳朵里的那一串"噼、噼"，和计数曲线还不是一回事。他听的是疏密，是一声和下一声之间的那一段，是声音越来越急时心里那一紧。这些，在他画了一辈子的网格里没有位置。他的网格每个节点是一个点，裂纹在网格上是一条线；材料"叫"的那一串，在方程里是被代签的。

他还给曾一鸣看了一样东西：一根铁丝，来回弯折，弯到第七八下，手上忽然觉得"软了一下"，再弯一下就断。那"软了一下"，他的方程算得出断裂的时刻，却算不出手上那一下是什么。

罗明川还说起他们这一行的一桩老难处。用网格算裂纹，裂纹怎么走，常常跟着网格走：网格画得粗，裂纹走一条路；画得细，又换一条路。裂纹本来是材料自己的事，算出来却像是网格的事。他们想了很多办法补救。后来有一类办法，干脆不让每个点只跟紧挨着的邻居打交道，而是让一个点和周围一片范围里的点都互相牵着，这就是近场动力学一类的方法；已有研究证明，这片范围缩到零的时候，它退回经典的弹性力学（见第二十五章）。罗明川说，他第一次读到这个想法时，心里一动：这不就是手按下去时那种"一按一片"的感觉吗？他算了半辈子点，那一刻才觉出点的边。

曾一鸣听着，没有插话。他想起自己屏幕上的绿勾：每一行只管自己和引用的那几行。那也是一种"只跟紧挨着的邻居打交道"。

曾一鸣回去的路上想，自己证引理时"手里攥着的那团东西"，和罗明川手上的"软了一下"、耳朵里的"噼、噼"，是不是同一类东西？都是还没被符号签字的那一半。区别只在于，罗明川的那一半来自真的铁丝和真的声音，他自己的那一

半来自脑子里的推拉。这一想，他倒觉得自己的路宽了一点：数学家缺的手和耳朵，原来有一部分可以去实验室、菜市场、医馆里借回来，不必只在脑子里摸。

◆ 三、数学家要做的三件事

我常说："AI 需要数学家的触觉和听觉加入。"加入什么？本书把它落成三件事。

第一件，带进特征。数学里原来没有的东西，要有人把它带进来。罗明川耳朵里的疏密、手上的"软了一下"，谭桂香掌心的回弹，邓守仁指下的浮沉，这些都是触觉、听觉取得的特征，今天的数学里没有它们的位置。机器自己找不到它们，因为它的口粮里没有（见第三十一章）。数学家要做的，是到有这些特征的地方去，让它们先进自己的手和耳朵，再把它们带进数学的大门。这一步，数学家不能只坐在书桌前，他得像许蔓那样，去拍、去按、去听。去的时候，最好先空着手去，不急着架仪器、开摄像头。仪器一架上，特征就先被翻成了给眼睛看的痕（见第八章）；手和耳朵先到，才知道那里到底有什么值得记。

第二件，立下单位。带进来的特征，要立成数学能用的单位。第三十二章说过，单位先由实现了纠缠的人粗粗立起来；数学家的活，是把粗单位磨成可以算、可以比的单位。这里用的就是伞：一把伞有伞心、伞半径和伞面分布，伞场有半径 r、重叠度 ω、传播速度 v。罗明川的"噼、噼"，可以试着写成一把随时间张合的听觉伞；铁丝上的"软了一下"，可以试着写成一把半径在变的触觉伞。磨单位有两条规矩。一条是收拢时要退回旧数学：伞的 r 趋于零、ω 回到一、v 趋于无穷，算出来的要和老方程一样（见第二十五章）。另一条是撑开时不能又切回点：一旦为了好算，把伞拆成一堆点再加起来，r、ω、v 就被拍回了三重退化，带进来的特征就又丢了。两条之间怎么走，是真正的数学难题，比如 ω>1 时怎样数"一个"，至今还没有好的回答（见第二十二章）。

第三件，判断对味。机器照着单位算出了东西，数学家要回到手和耳朵里判断：对不对味。曾一鸣看那三个不等式，觉得"味道不对"；罗明川看一条断裂曲线，会说"这条不像真材料"。数学家向来有自己的味觉，过去这份味觉多半是视觉的：对称、简洁、漂亮。今后要长出另一份味觉：手上按着觉得对，耳朵里听着觉得顺。第三十二章说"再回人"，在数学里，回的就是数学家的这份味觉。

味觉也会错。老手说"不对头"，有时是单位没立准，有时是老手自己的手习惯了旧材料，碰到新东西反倒不认。所以对味不是一票否决，它是一个记号：标出哪里该回头再查。查的办法还是那几样，切开对账、回到新手手上看帮没帮到、换一批材料再试。味觉指路，账本定案，两样缺一样都不行。

三件事有一个共同点：每一件都要数学家自己的身体在场。带进特征，要手和耳朵先取到；立下单位，要知道这单位从哪一来一回里来；判断对味，要手和耳朵还记得原来的样子。这三件，机器都可以帮忙，没有一件能交给它独自去做。

◆ 四、一个小样：把"噼声"写成一把伞

三件事说得抽象，拿罗明川的"噼、噼"做一个小样，看看第二件"立下单位"大致是什么样子。这只是示意，不是成形的数学，下面的写法都标作待验。

用视觉数学的老办法，"噼"声会被记成时间轴上的一个个点：第几秒响了一下，第几秒又响了一下。然后数一数每秒响了几下，画成一条往上走的曲线。曲线越陡，离断就越近。这办法有用，可它把每一声都压成了没有长短的点，r 趋于零；两声挨得再近，也只是两个点，互不重叠，ω 等于一。

换成伞的写法，每一声"噼"是一把小小的听觉伞。伞心是它响起的那一刻；伞半径是它从响到消散的那一小段时间，它不是零，因为声音要持续才听得见（见第二十三章）；伞面分布是这一段里声音怎样由强变弱。一开始，"噼"声稀，一把伞和下一把伞隔得远，各响各的。后来越来越密，前一声还没散尽，后

一声就来了，两把伞的伞面叠在一起，ω　开始大于一。罗明川耳朵里"越来越急"、心里"一紧"的那个感觉，在伞的写法里有了一个可以去量的对象：不是每秒几声，而是伞面叠了几层、叠得多厚。

重叠度在这里照第二十三章的读法来读：前后两声同时都还听得见的那一段，占了各自长短的几分。由此可以提一个待验的猜想：断裂之前，伞面的重叠度 ω 会出现一个比"每秒几声"更早、更稳的抬头。如果真是这样，听觉伞就从老办法丢掉的那一块里，取回了一个有用的特征。如果不是这样，ω 抬头并不比计数更早，这个小样就算失败，单位得重新立。

这个小样也显出第二件事的两条规矩。伞收拢时，每把伞的半径缩成零，叠层就消失了，剩下的正是"每秒几声"的老曲线，旧数学原样退回来。伞撑开时，不能为了好算，把每把伞再切成一串更细的点去加，那样叠层又被拆没了。要算叠层，得用第二十一章那类纠缠算子，让一处的值和一片范围里的值一起算。这一步怎么做得又严又好算，是数学家要接手的活，机器可以帮忙算，单位得由人来定。

◆ 五、从在点上推演的人，到把手和耳朵带进数学的人

过去几百年，数学家的样子大致是一个在点上推演的人。他坐在桌前，面对一张纸或一块黑板，手里是定义好的点和规则，脑子里是一条一条推下去的路。他的手只用来写字，他的耳朵在思考时最好什么也别听见。导论里说过，我做了二十年网格；那二十年，就是在点上推演的二十年。点很好用，这本书从头到尾没有说它不好用。

新的数学家，样子会变一点。他还会推演，但推演会越来越多地交给机器。他要多出一双手和一对耳朵：去揉面的案板旁、拍瓜的摊子前、切脉的桌边、拉伸试验机旁，让触觉和听觉的特征先进自己的身体；再回到桌前，把它们立成伞，交给机器去算；算完了，再用手和耳朵去尝。他的工作室里，除了屏幕，可

能还要有一块面、一个瓜、一根铁丝、一只麦克风。这些东西摆在数学系里，看着有点怪；可在许多老一辈数学家年轻的时候，数学系里摆满电脑，看着也一样怪。

这不是让数学家改行去做工匠，也不是要他们放下证明。证明还是数学的骨头，形式化证明还会越来越重要。说的只是：视觉数学交给机器以后，数学家要去补的那一块，在手和耳朵那里；不去补，数学就只剩下视觉那一半，而那一半，机器做得越来越好。

曾一鸣后来常去罗明川的实验室。他在那里没有证出什么定理，至少还没有。他做的事很小：跟着罗明川听试样"叫"，记下自己听到的疏密，试着给"一串噼声"立一个粗单位，再回宿舍想怎样把它写成一把张合的伞。有时候他也想，这算不算数学。他的导师大概会说不算。导师的理由也站得住：数学要的是能写下来、能让别人逐行查验的东西，耳朵里的疏密写不下来，就还不是数学。曾一鸣不跟导师争。他知道，导师说的是数学的出口，出口处一切都得写成符号，这一条不会变；他在做的是数学的入口，入口处有什么，决定了出口能写出什么新东西。入口要是只有眼睛，出口就只能写出视觉数学，而那一种，机器写得越来越快。可他想起爱因斯坦那封信：词语和符号是后来费力去找的，前面那一段，本来就是视觉的和肌肉的。他现在做的，就是前面那一段，只不过这一回，他想让肌肉的那一半也留在数学里，不被符号签掉。

> **带走的话**
>
> **AI 接走了在点上推演的那一半，数学家要把手和耳朵带进来，补上被签掉的另一半。**

小账：

- SDE 账：S 是新单位从手与耳的特征里一点点显露成形，D 是"带进特征—立下单位—判断对味"这一串排成先后的工序，E 是数学家的身体与材料、声音之间的互相改写。
- 代签账：本章拆开了发生在一个人脑子里的代签（爱因斯坦的"肌肉型"被符号签掉），并给出两把待验的伞：断裂前"噼声"的听觉伞 r(t)，弯折铁丝"软了一下"的触觉伞。

◆

结语

三觉科学：从一只眼睛长成一个身体

这一章的问题

读到这里，这本书到底给出了什么，又欠着什么？一门只睁开眼睛的科学，怎样长成一个有手有耳朵的身体？

◆ 一、回到孩子的三句话

这是我构想的场景。

一个周末的晚上，罗明川在家里改学生的论文，九岁的罗朵朵趴在沙发上，一只手在猫背上一下一下地顺着毛。猫打着呼噜，她的手掌贴着软软暖暖的一片，顺着毛滑过去是一种感觉，逆着毛又是一种。过了一会儿，她跑去厨房拿了两个碗，用筷子"叮、当、叮"地敲，敲着敲着敲出了一小段调子。第二天一早，她被窗帘缝里的光叫醒，看着屋子里的东西一样一样从灰里冒出来：先是一团影子，后来是柜子的形状，再后来是柜子上贴的那张她自己画的笑脸。她揉着眼睛想，昨晚那张笑脸明明就在那里，怎么天一黑它就不见了，天一亮它又一点一点回来，像是光把它从柜子上重新画了一遍。

导论里那三句话，就是这三件事：摸小猫，敲碗，看天亮。那时候说，这三句话可以把 SDE 讲给孩子听。现在回头看，它们还多讲了一件事。

摸小猫时，手和猫毛贴在一起，一下一下滑过去，软和暖一阵阵冒出来。这一件事里有完整的 S·D·E，只是最先让人觉察的是 E：手和猫在互相改写，猫一弓背，手就跟着换了感觉。敲碗时，"叮、当、叮"一声跟着一声，也有完整的

S·D·E，最先让人觉察的是 D：不一样，分得出，排成先后，曲子就从这串差异里冒出来。看天亮时，影子、形状、笑脸一层层显露，还是完整的 S·D·E，最先让人觉察的是 S：一个显露谱系，随着光一点点亮起来，不停地往外长。

三件事各有一套完整的 S·D·E，没有哪一件只占一维。这是全书守住的一条线。可是现代科学挑了其中一件：看天亮。它把看的本事练到了极致，望远镜看远，显微镜看小，仪器把冷暖松紧都翻成给眼睛看的刻度。摸小猫的那一件、敲碗的那一件，它没有亲自去取，而是用方程替它们签了字。一个孩子每天都在三觉里长大，一门科学却只用了一觉。这本书就是从这个落差里写出来的。

◆ 二、视觉典范、触觉典范、听觉典范

第 342 号《科学发生的结构》把典范写成了模型：AI 时代科学的基本单位是"典范模型"，一个典范一个模型，常规科学与典范之间的碰撞同时运转；它要做的，是把库恩那条走到"典范替代"就断掉的线，接成一个圈。它还说，统一的大模型求平均，平均就是单一化。本书不改它的判，只给典范的多样加一根轴：感官。典范之别，可以出在理论上，也可以出在用哪一种感觉去取特征上。顺着这根轴，至少能分出三种典范。

	视觉典范	触觉典范	听觉典范
取特征的办法	看，观察	按、拍、揉，触察	听、叩、敲，听察
数学的单位	点（r→0，ω=1，v→∞）	伞（r>0，ω>1，v 有限）	随时间张合的伞 r(t)
最易觉察的一维	S	E	D
今天的处境	成熟，正被 AI 接走	萌芽，触觉镜尚无	萌芽，声多被画成图

这张表要读对。三种典范不是三个互相取代的朝代，视觉典范也不会因为另外两种长出来就作废。本书从导论起一再说，代签不是错，方程照样算得准；视觉科学的那一半，本书一个字都不想拿掉。三种典范更像孩子身上的三种感觉：

各有完整的S·D·E，侧重不同，又常常在同一件事里纠缠在一起，拍西瓜就是触与听纠缠，切脉是按压与节律纠缠。

所以，"三觉科学"的意思，是科学从一只眼睛长成一个身体：眼睛照旧看，手开始按，耳朵开始听，三者在同一个判断里互相牵着。第七编说的先人、后机、再回人，是这个身体长出手和耳朵的次序。

三个圈最值得看的，是它们叠在一起的那一块。只用眼睛就能办好的事，视觉典范已经办得很好，不必另起炉灶。新科学最可能先冒头的地方，是那些眼睛办不好、又离不开手和耳朵一起上的事：瓜熟没熟，墙里空不空，材料快不快裂，脉下浮还是沉。这些事在视觉典范里，一向被看作"经验""手艺""土办法"，进不了教科书；在三觉科学里，它们是三个圈的交界，是典范模型最可能碰出新东西的地方。第342号说一个典范一个模型，碰撞让科学接成圈地发生；本书补一句：最值得碰的，常常是长在不同感官上的模型。一门只用眼睛取特征的科学，哪怕分出一百个典范，也像一百个人戴着同一副眼镜在争论；它求的平均，是视觉的平均。

对一个普通读者，这一节也有一点用处。下次有人说某位老师傅的手感"不科学"，你可以多想一层。今天的手感确实还不是科学，它还没有立成能传、能验的单位；可科学的定义也窄了，它只认眼睛取到的东西。两头都得动：手感要往单位上走，科学要往手和耳朵那边让出地方。第二十七章讲中医时说过这句话，在这里它适用于所有长在手上、耳朵里的本事。

◆ 三、本书最弱的三处

一本书要老实，先得说清自己哪里站不稳。本书最弱的有三处。三处之外，还有许多小处，正文里拿不准的史实与数字，都逐条核过，核不实的已收成概

括；凡标着"待验""猜想"的，是本书自己提出、还没有人去检验的东西，读者见到一处，就当作本书欠下的一笔小账。

第一处，文明的对应只是待检的假说。第六章用了我"光的世界——西方文明"的说法，也接了第 8 号《中华之气》西方光逻辑、中华气逻辑的判。本书把"一文明一感官"改成了"每种感觉都有完整 SDE，文明之别是侧重之别"，可即便是侧重之别，到现在也只是一个假说。第 422 号《发生的身体》早已指出，从身体的三觉推不出"中触、印听、西视"的文化主张，那里有一座断桥。本书没有把桥修好，只是给它装了一道检验，就是预测五；检验没做之前，这一条只能当作待检，不能当作结论引用。

第二处，触觉镜还不存在。第四编整整一编，讲的是如果手能像眼睛一样伸进原子，物理学会怎样改写。那是思想实验和预案。今天已有的 nanoManipulator 一类系统，是把显微镜接上力反馈手柄，人能"摸"到纳米表面，可手上的力是模型先算好再推过来的，触觉还附在视觉和方程后面。真正能让手直接取得微观特征的触觉镜，还没有人造出来，本书也不知道它会长成什么样子。第四编里每一个"会改写"，都应读作"如果有了触觉镜，就会改写"；第四编的分量，要等它出现了才见分晓。

第三处，伞的计数定义还没成形。第五编说，触觉数学的单位是伞，伞有半径、重叠度和传播速度；可是当 $\omega>1$，伞和伞叠在一起，怎样数"一个"、怎样数"两个"，第二十二章只给了一个借来的猜想式（有效个数＝n^2÷总叠合），还没有严格的定义。气的读数也一样：本书提出气的强弱就是伞的 r、ω、v 偏离三重退化的程度，用来回答第 8 号自设的作废条件，可这个读数还标着"待验"，还没有在一只真的手、一次真的脉上量出来过。没有计数，伞就还只是一个好用的说法，离一门数学还差着一大截。

这三处，任何一处被推翻，本书都要跟着改。

◆ 四、五条预测报账

导论里立过五条预测，全书一路报账，这里一条一条收。每一条只说一件事：什么大局面出现，就算本书错。

预测一，触察修正。凡触觉通道真正进入微观的领域，力反馈原子操纵、高分辨触觉传感，会冒出模型没预期到、需要修改力场或势函数的触觉特征。如果长期只确认既有方程，一处也不用修，承重一就要收窄成"代签恰好对"。账面：未到期。触觉镜还没有，今天的 nanoManipulator 一类系统，手上的力是模型先算好再推过来的，它确认了什么、修正了什么，都还不算触察的账（见第十八、二十章）。

预测二，退化溯源。放宽 r、ω、v 任何一项的数学和物理理论，比如近场动力学、多尺度方法、有限传播速度的热传导与声学，多数由触觉或听觉问题逼出；若主要由视觉问题逼出，承重二错。账面：第二十五章做过一次粗清点，支持的一边有近场动力学、有限传播速度的热传导等五六个由断裂、撕裂、声、热逼出的例子；不支持的一边，两笔照写进账。一笔是相对论，它放宽了 v，逼出它的却是光自己的问题，记作"光自身逼出的特例"；一笔是图像处理里的非局域算子，它放宽了 ω，要解决的是眼睛看的东西，记作反例。这次清点是本书自己做的，样本小，也没有盲判，只能算预备账；真账要等不知道本书预测的人去翻发明史。

预测三，纠缠不可拼。同一个判断任务，判瓜熟、叩诊判积液、听敲判裂，用联合采集的触听数据训练的模型，比两路分别训练再拼起来的模型更好，人也一样。如果拼接稳定地不比联合差，承重三就错了。账面：未做。第三十二章给了机器两组、人两组的做法，也事先说好了"不黑不白"的结果怎样记。

预测四，脉的伞单位。脉诊如果改用伞式特征，按压深度和回应的曲线、寸关尺三处的重叠，医师之间的一致性会比用单点波形特征更高。如果不高，触觉

的科学化就得另找单位，伞这条路在脉上走不通。账面：未做。第二十九章给了标准物、指套和三套记法，也写明了一条局限：伞式特征取自传感器，比的是"按法加上按到的东西"，不纯是手感，所以成也好、败也好，都要带着这条局限报。

预测五，文明的感官词根。只作粗层级的比较：西方科学的核心术语里，带视觉词源的比例，明显高于中华、印度传统里对应的概念。如果看不出差别，"光的世界＝西方"就降为修辞，第一处弱点就坐实了。这一条数的只是词根，不评任何一种文明的高低。账面：未做。第六章举过几个词源，那只是举例，不是清点。

五条收下来，总账很简单：一条有了一次预备账，账上已经记着反例；四条还没有开账。本书没有一条预测是已经赢了的。

五条里，没有一条要求读者先信 SDE。每一条都只要一个大局面出现或不出现，谁去看都看得见。本书愿意被它们中的任何一条推翻。

五条的远近不一样。预测三和预测四离得最近：一批瓜、一副手套、一只麦克风、几位愿意配合的老手和新手，就能把预测三粗粗做一遍；几位医师、一套能记按压深度的装置、一批自愿参加的人，就能把预测四里"一致性高不高"粗粗看一遍，看的只是医师之间判得齐不齐，不涉及任何诊断和治疗。预测二和预测五要的是图书馆：前者翻理论的发明史，看是谁、被什么问题逼出来的；后者数术语的词源，看视觉的词根占几成。它们费工夫，但不费仪器。预测一离得最远，它要等触觉通道真正伸进微观，那一天什么时候来，本书说不准。

本书希望有人去做，尤其希望做的人不是本书的作者。一条预测由提出它的人亲手检验，总让人不太放心；换一双不相干的手和耳朵去做，账才算得清。

◆ 五、从一只眼睛长成一个身体

罗朵朵第二天放学，在门口问她爸爸，猫为什么顺着摸是软的、逆着摸是扎的。罗明川想了一会儿，没有拿出纸来画，伸手让她再摸一遍，自己也摸了一遍。他一辈子画网格，网格上每个节点都是点；那天他的手掌贴在猫背上，按到的是一片，暖的，会动的，按这边那边也跟着动。

这本书从一个做了二十年网格的人摸不到一个原子开始，到一个画了一辈子网格的人伸手去摸一只猫结束。中间走过的路，大致是这样：现代科学用眼睛取得了稳定的特征，这是它的伟大；它让方程替缺席的手和耳朵签了字，这是它的办法；它把签字当成了原件，叫做客观物理，这是它的盲点。视觉数学的点性，是视觉成像三种性质的投影；视觉数学正被 AI 接走，接得这样顺手，正因为它本来就切好了。触觉和听觉的纠缠，AI 没有体会过，要人先实现、立成单位，机器再模拟，再回到人的手和耳朵里对账。中医、拍瓜、断裂前的噼声、数学家脑子里那一半肌肉，都是同一件事的不同入口。

一个孩子生下来，三种感觉是一起长的。一门科学走了几百年，才发现自己只长了一只眼睛。这不丢人，眼睛是它最早练好的本事，也是它至今最可靠的本事。要做的是让手和耳朵也长出来，长成和眼睛一样稳、一样可传、一样可验的本事，再和眼睛长在同一个身体里。

这件事不只是科学家的事。我常说，真正学 SDE，要在看、听、触三种亲身的感知里学：看是光，听是音，触是气。合上书以后，读者不妨做三件小事。去菜市场挑瓜时，闭上眼睛拍一拍，听一听，再睁眼看看自己判得对不对。晚饭后拿两只碗，用筷子轻轻敲，听声音怎样一声跟着一声排出先后。揉一回面，留意手掌按下去时，整团面是怎样一处牵着一处动的。每一件都含着完整的 S·D·E，只是让你最先觉察的那一维不同。做完这三件，再回头翻第三编，看方程替哪一样签了字，你会比读任何一章都明白。

概念在体验之后。这本书讲了二十万字的概念，它真正想交给读者的，是那三件小事里自己的手和耳朵。

眼睛是自己的，手和耳朵是方程借的。借来的手和耳朵替科学干了几百年的活，干得很好；从今往后，手要自己去按，耳朵要自己去听，它们会长出自己的单位、自己的数学、自己的科学，和眼睛一起，长成一个完整的身体。

> 带走的话
>
> **科学从一只眼睛长成一个身体，靠的是让手和耳朵自己长出来，不再借方程的。**

小账：

- SDE 账：S 是三种典范在同一个科学身体上一层层显露，D 是看、按、听三条差异序列各自排开又互相咬合，E 是三觉在同一个判断里的互相改写。
- 代签账：本章把全书拆开的代签收成一句判词，并把伞的三参数、气的读数与五条预测一并列为待验的账。

◆

参考书目

只收正文实际引用、且经核实的文献与史料。站上专著见附录三，不再列入。

中文古籍

- 佚名．尚书·洪范．先秦．
- 孔子弟子及再传弟子．论语·里仁．先秦．
- 墨家后学．墨子·经下（墨经）．战国．
- 佚名．周易·序卦．先秦．
- 佚名．黄帝内经素问·脉要精微论、平人气象论．先秦至汉．
- 佚名．灵枢·根结．先秦至汉．
- 秦越人（托名）．难经·一难．汉．
- 许慎．说文解字．东汉．
- 张仲景．伤寒论·序．东汉．
- 王叔和．脉经．西晋．
- 葛洪．肘后备急方．东晋．
- 滑寿．诊家枢要．元．
- 李时珍．濒湖脉学．明，1564．

中文文献

正文未引用站外的现代中文著作，本组从缺。

外文文献

哲学、思想史与认知

- Plato. Republic（《理想国》），卷七. 古希腊.
- Aristotle. Metaphysics（《形而上学》）. 古希腊.
- Euclid. Elements（《几何原本》），卷一定义一. 古希腊.
- Descartes R. Meditationes de prima philosophia（《第一哲学沉思集》），第三沉思. Paris，1641.
- Locke J. An Essay Concerning Human Understanding（《人类理解论》），第二卷第八章第 21 节. London，1690.
- Hume D. An Enquiry Concerning Human Understanding. London，1748.
- Whitehead A N. Science and the Modern World（《科学与近代世界》）. New York: Macmillan，1925.
- Eddington A S. The Nature of the Physical World（《物理世界的本质》）. Cambridge: Cambridge University Press，1928.
- Hadamard J. The Psychology of Invention in the Mathematical Field（《数学领域的发明心理学》）. Princeton: Princeton University Press，1945.
- Merleau-Ponty M. Phénoménologie de la perception（《知觉现象学》）. Paris: Gallimard，1945.
- Merleau-Ponty M. Le visible et l'invisible（《可见的与不可见的》）. Paris: Gallimard，1964.

· Boman T. Das hebräische Denken im Vergleich mit dem griechischen（《希伯来思想与希腊思想比较》）. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht，1952.
· Jonas H. The Nobility of Sight: A Study in the Phenomenology of the Senses（《视觉的高贵》）. Philosophy and Phenomenological Research, 14(4): 507–519，1954.
· Jay M. Downcast Eyes: The Denigration of Vision in Twentieth-Century French Thought（《垂目》）. Berkeley: University of California Press，1993.
· Lakoff G, Núñez R E. Where Mathematics Comes From（《数学从哪里来》）. New York: Basic Books，2000.

光学、观察与仪器

· Kepler J. Ad Vitellionem Paralipomena. Frankfurt，1604.
· Galilei G. Sidereus Nuncius（《星际信使》）. Venice，1610.
· Scheiner C. Oculus, hoc est: fundamentum opticum. Innsbruck，1619.
· Descartes R. La Dioptrique. Leiden，1637.
· Hooke R. Micrographia（《显微图谱》）. London，1665.
· Rømer O. Démonstration touchant le mouvement de la lumière. Journal des sçavans，1676.
· Leeuwenhoek A van. 致伦敦皇家学会的书信（1673 年起陆续刊于 Philosophical Transactions）. 1673–1723.
· Scott de Martinville É-L. 声波记振仪（phonautographe）法国专利. 1857.

- Richter C F. An instrumental earthquake magnitude scale. Bulletin of the Seismological Society of America, 25(1): 1–32, 1935.
- Binnig G, Rohrer H, Gerber Ch, Weibel E. Surface studies by scanning tunneling microscopy. Physical Review Letters, 49(1): 57–61, 1982.
- Binnig G, Quate C F, Gerber Ch. Atomic force microscope. Physical Review Letters, 56(9): 930–933, 1986.
- Eigler D M, Schweizer E K. Positioning single atoms with a scanning tunnelling microscope. Nature, 344: 524–526, 1990.
- Brooks F P Jr, Ouh-Young M, Batter J J, Kilpatrick P J. Project GROPE: haptic displays for scientific visualization. Computer Graphics (SIGGRAPH '90), 24(4): 177–185, 1990.
- Taylor R M II, Robinett W, Chi V L, Brooks F P Jr, et al. The nanomanipulator: a virtual-reality interface for a scanning tunneling microscope. Proceedings of SIGGRAPH '93, 1993.
- Rief M, Gautel M, Oesterhelt F, Fernandez J M, Gaub H E. Reversible unfolding of individual titin immunoglobulin domains by AFM. Science, 276: 1109–1112, 1997.
- Falvo M R, Taylor R M II, Helser A, et al. Nanometre-scale rolling and sliding of carbon nanotubes. Nature, 397: 236–238, 1999.

力学、热学与物质结构

- Hooke R. Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring. London, 1678.

· Newton I. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica（《自然哲学的数学原理》）. London, 1687；第二版"总释", 1713.
· Newton I. 致理查德·本特利的信. 1693.
· Euler L. Découverte d'un nouveau principe de mécanique. Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 6: 185–217, 1752（约1750年写成）.
· Coulomb C-A. Premier mémoire sur l'électricité et le magnétisme. Histoire de l'Académie Royale des Sciences, 1785.
· Fourier J. Théorie analytique de la chaleur（《热的解析理论》）. Paris, 1822.
· Mach E. Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt（《力学史评》）. Leipzig, 1883.
· Hertz H. Die Prinzipien der Mechanik（《力学原理》）. Leipzig, 1894.
· Fischer E. Einfluss der Configuration auf die Wirkung der Enzyme. Berichte der Deutschen Chemischen Gesellschaft, 27: 2985–2993, 1894.
· Geiger H, Marsden E. On a diffuse reflection of the α-particles. Proceedings of the Royal Society of London A, 82: 495–500, 1909.
· Rutherford E. The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom. Philosophical Magazine, 21: 669–688, 1911.

- Friedrich W, Knipping P, Laue M. Interferenz-Erscheinungen bei Röntgenstrahlen. Sitzungsberichte der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 1912.
- Bohr N. On the constitution of atoms and molecules. Philosophical Magazine, 26: 1–25, 1913.
- Bragg W H, Bragg W L. The reflection of X-rays by crystals. Proceedings of the Royal Society of London A, 88: 428–438, 1913.
- Griffith A A. The phenomena of rupture and flow in solids. Philosophical Transactions of the Royal Society of London A, 221: 163–198, 1921.
- Jones J E（Lennard-Jones）. On the determination of molecular fields, I、II. Proceedings of the Royal Society of London A, 106, 1924.
- Schrödinger E. Quantisierung als Eigenwertproblem. Annalen der Physik, 79: 361–376, 1926.
- Born M. Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge. Zeitschrift für Physik, 37: 863–867, 1926.
- Heisenberg W. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. Zeitschrift für Physik, 43: 172–198, 1927.
- Davisson C, Germer L H. Diffraction of electrons by a crystal of nickel. Physical Review, 30(6): 705–740, 1927.
- Thomson G P, Reid A. Diffraction of cathode rays by a thin film. Nature, 1927.

· London F. Zur Theorie und Systematik der Molekularkräfte. Zeitschrift für Physik, 63: 245–279, 1930.
· Lennard-Jones J E. Cohesion（《内聚》）. Proceedings of the Physical Society, 43(5): 461–482, 1931.
· Tisza L. Transport phenomena in helium II. Nature, 141: 913, 1938.
· Landau L. Theory of the superfluidity of helium II. Journal of Physics USSR, 5: 71–90, 1941.
· Peshkov V. "Second sound" in helium II. Journal of Physics USSR, 8: 381, 1944.
· Cattaneo C. Sulla conduzione del calore. Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Università di Modena, 3: 83–101, 1948.
· Irwin G R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. Journal of Applied Mechanics, 24: 361–364, 1957.
· Koshland D E. Application of a theory of enzyme specificity to protein synthesis. Proceedings of the National Academy of Sciences USA, 44(2): 98–104, 1958.
· Vernotte P. Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 246: 3154–3155, 1958.
· Eringen A C. Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. International Journal of Engineering Science, 10(5): 425–435, 1972.

- Stillinger F H, Weber T A. Computer simulation of local order in condensed phases of silicon. Physical Review B, 31(8): 5262–5271, 1985.
- Tadmor E B, Ortiz M, Phillips R. Quasicontinuum analysis of defects in solids. Philosophical Magazine A, 73(6): 1529–1563, 1996.
- Silling S A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 48(1): 175–209, 2000.
- Engler A J, Sen S, Sweeney H L, Discher D E. Matrix elasticity directs stem cell lineage specification. Cell, 126(4): 677–689, 2006.

数学、信号与声学

- d'Alembert J le R. Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration. Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin, 3, 1747 年写成, 1749 年刊.
- Dirichlet P G L. Sur la convergence des séries trigonométriques. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 4: 157–169, 1829.
- Ohm G S. Über die Definition des Tones, nebst daran geknüpfter Theorie der Sirene und ähnlicher tonbildender Vorrichtungen. Annalen der Physik und Chemie, 59: 513–565, 1843.
- Helmholtz H von. Die Lehre von den Tonempfindungen（《论音调的感觉》）. Braunschweig: Vieweg, 1863.

· Dedekind R. Stetigkeit und irrationale Zahlen（《连续性与无理数》）. Braunschweig: Vieweg, 1872.
· Hart H C, Fuller M W, Lusby W S. A precision study of piano touch and tone. Journal of the Acoustical Society of America, 6: 80–94, 1934.
· Gabor D. Theory of communication（《通信理论》）. Journal of the Institution of Electrical Engineers, 93(26), Part III: 429–457, 1946.
· Gabor D. Acoustical quanta and the theory of hearing. Nature, 159: 591–594, 1947.
· Saldanha E L, Corso J F. Timbre cues and the identification of musical instruments. Journal of the Acoustical Society of America, 36(11): 2021–2026, 1964.
· Kish L. Survey Sampling（《抽样调查》）. New York: Wiley, 1965.
· Appel K, Haken W. Every planar map is four colorable. Illinois Journal of Mathematics, 21(3), 1977.
· Morlet J, Arens G, Fourgeau E, Giard D. Wave propagation and sampling theory. Geophysics, 47(2): 203–221, 1982.
· Grossmann A, Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 15(4): 723–736, 1984.
· Goebl W, Bresin R, Galembo A. Once again: the perception of piano touch and tone. Can touch audibly change piano sound

independently of intensity?. Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics (ISMA 2004)，2004.

· Buades A, Coll B, Morel J-M. A non-local algorithm for image denoising. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2005), 2: 60–65，2005.

· Oppenheim J N, Magnasco M O. Human time-frequency acuity beats the Fourier uncertainty principle. Physical Review Letters, 110(4): 044301，2013.

触觉、感知与医学

· Auenbrugger L. Inventum Novum（《新发明》）. Vienna，1761.

· Laennec R T H. De l'auscultation médiate. Paris，1819.

· Braille L. Procédé pour écrire les paroles, la musique et le plain-chant au moyen de points. Paris，1829.

· Korotkov N S. 关于测量血压方法的报告. 圣彼得堡帝国军医学院通报，1905.

· Katz D. Der Aufbau der Tastwelt. Leipzig: Barth，1925.

· Penfield W, Boldrey E. Somatic motor and sensory representation in the cerebral cortex of man as studied by electrical stimulation. Brain, 60(4): 389–443，1937.

· Gibson J J. Observations on active touch（《主动触觉观察》）. Psychological Review, 69(6): 477–491，1962.

· Kawabata S. The Standardization and Analysis of Hand Evaluation（2nd ed.）. Osaka: The Textile Machinery Society of Japan，1980.

· Jousmäki V, Hari R. Parchment-skin illusion: sound-biased touch. Current Biology, 8(6): R190, 1998.
· Hollins M, Risner S R. Evidence for the duplex theory of tactile texture perception. Perception & Psychophysics, 62(4): 695–705, 2000.
· Zampini M, Spence C. The role of auditory cues in modulating the perceived crispness and staleness of potato chips. Journal of Sensory Studies, 19(5): 347–363, 2004.
· Tu Y. The discovery of artemisinin (qinghaosu) and gifts from Chinese medicine. Nature Medicine, 17(10): 1217–1220, 2011.
· Kappers A M L, Bergmann Tiest W M. Haptic perception. Wiley Interdisciplinary Reviews: Cognitive Science, 4(4): 357–374, 2013.
· Skedung L, Arvidsson M, Chung J Y, Stafford C M, Berglund B, Rutland M W. Feeling small: exploring the tactile perception limits. Scientific Reports, 3: 2617, 2013.
· Jacobson E, Conboy L, Tsering D, et al. Experimental studies of inter-rater agreement in traditional Chinese medicine: a systematic review. Journal of Alternative and Complementary Medicine, 25(11): 1085–1096, 2019.

附录

附录一

术语小词典

SDE：显露（S）、差异序列（D）、特征纠缠（E）三维。三种感觉各含完整的S·D·E，只是最易觉察的一维不同：触觉最易觉察E，听觉最易觉察D，视觉最易觉察S。是侧重，不是一维对一感。

显露谱系：S的读法。S不是摆在那里的样子，是随D启动不停显露的一串：Show（冒出来）→ Shape（成形）→ Structure（结构）。结构只是它的第三层。主讲见第三章。

差异序列：D的读法。三层：Difference（不一样）→ Distinction（分得出）→ Direction（排成先后）。Drive（驱动）不是D；动力来自两维之间的矛盾。主讲见第二章。

特征纠缠：E的读法。对象与场在互相改写，手和猫毛"你改我、我改你"。E不是"环境""背景""条件"。主讲见第一章。

假想性切割：S、D、E本来分不开，想事情的时候在理念界把它们切开来看，这一切只是假想。好比一首歌分不出声音与旋律。主讲见第四章。

三方程：S＝F(D,E)，D＝G(S,E)，E＝H(S,D)。意思是三维互相生出对方，每一维都由另两维一起决定。见第一章、第四章。

六路径：三维排先后的六种次序。现代科学走的是S→D→E的单序：先看，再列方程，末了假设纠缠；本书主线走沉淀型的E→D→S：先在纠缠里沉下去，再分出差异，新的样子随之显露。

三原理：两维之间的矛盾推动第三维改变，经过张力积累、形状改变、回写三步。敲碗时曲子和碗声对不上，就去添水，是S与D的矛盾推动E。见第二章。

伞：本书新数学的单位，记作 $U=(x_0, r, \phi)$。伞心 x_0 是它的位置；伞半径 r 是它的作用范围，手按下去罩住的那一片有多大；伞面分布 ϕ 是这一片里各处分量怎样分配，即核函数。主讲见第二十一章。

重叠度：记作 ω，一处地方同时被几把伞罩着。$\omega=1$ 是伞与伞像地砖一样拼着、互不重叠；$\omega>1$ 是按此牵彼、声与声相叠。

传播速度：记作 v，一把伞那里起了变化，多快传到伞沿、传到别的伞。光近乎瞬达，压力和声音都要走一段时间。

三重退化：伞收成点的三个条件同时成立：$r\to 0$、$\omega=1$、$v\to\infty$。收成一个没有大小的点，互不重叠，信号一下子传到。传统数学就是伞在三重退化下显露的稳定态。

视觉三性：视觉成像的三种物理性质：点对点成像、感受野极小；局部图像互相可切割，看此不改彼；光近乎瞬达，全场同时呈现。本书的承重二说，三重退化正是视觉三性的投影。主讲见第十章。

代签：方程替缺席的触觉（碰撞）与听觉（序列）签下的假设。代签不是错，方程照样算得准；错在把代签当成原件，那就是"客观物理"。第三编逐处拆开。

触觉镜：本书给第三次感官扩容起的名字，世上还没有这样一种成型的仪器。它要把软硬、粘滑、推拉回应从原子尺度原样送到人手上，让手先取得，图和方程后到；一路保住 $r>0$、$\omega>1$、v 有限，任何一项在中途退化，它就退回显微镜。主讲见第十七章。

叠合量（本书暂名）：既不能相加、也不落在哪一个点上的量，量的是叠合本身，离开叠合就没有它。桃子的熟度是一例。见第二十二章。

气的读数（待验）：气的强弱，就是伞的 r、ω、v 偏离三重退化的程度。读作一组三项：r 比上观察者能分辨的最小尺度，ω 比 1 多出多少，r/v 比上观察时长。三项都是零就是旧数学里的点，离零越远气越足。若既有物理量连同梯

度、变化率与常见组合能把人的判断预测得一样好，这个读数作废。主讲见第二十一章。

先人后机（先人、后机、再回人）：跨感官纠缠须先在人身上实现并立成单位（先人），机器照着单位去采、去学、去放大（后机），学完送回人的手和耳朵里对账（再回人），防止机器模型变成新的代签。主讲见第三十二章。

附录二

五条预测与作废条件一览

预测	什么局面出现，算本书错	出现在哪几章	目前账面
一、触察修正：触觉通道真正进入微观的领域（力反馈原子操纵、高分辨触觉传感），会出现模型未预期、需要修正力场或势函数的触觉特征	许多实验室、许多种材料、至少一代仪器的时间里，只确认既有方程、零修正；承重一收窄为"代签恰好对"	导论、第十二章、第十五章、第二十章、结语	未到期。触觉镜还没有；nanoManipulator 一类系统手上的力是模型先算好再推过来的，确认或修正都不算触察的账
二、退化溯源：放宽 r、ω、v 任一项的数学与物理理论，多数由触觉或听觉问题（断裂、撕裂、声、热）逼出	若主要由视觉问题（图像、光学、天文观测一类）逼出，承重二错	导论、第十章、第十四章、第十六章、第二十五章、结语	预备账（本书自做的粗清点，样本小，未盲判）：支持五六例（近场动力学、卡塔内奥方程、多尺度方法、非局域弹性、加博尔时频分析、小波与地震回波）；光自身逼出的特例一件（相对论，单独记账，不进支持边，也不划掉）；反例一块（非局域图像算子）
三、纠缠不可拼：判瓜熟、叩诊判积液、听敲判裂，联合采集的触听数据训练的模型，优于两路分别训练再拼接的模型，人亦如此	拼接稳定不劣于联合，承重三错	导论、第五章、第二十四章、第三十二章、结语	未做。第三十二章已给机器两组、人两组的做法，并事先说好"不黑不白"的结果怎样记

预测	什么局面出现，算本书错	出现在哪几章	目前账面
四、脉的伞单位：脉诊改用伞式特征（按压深度—回应曲线、寸关尺重叠），医师间一致性高于单点波形特征	不高，触觉科学化须另找单位	导论、第二十八章、第二十九章、结语	未做。第二十九章已给标准物、指套与甲乙丙三套记法；局限：乙套取自传感器，比的是"按法加上按到的东西"，成败都要带着这条报
五、文明的感官词根（粗层级）：西方科学核心术语的视觉词源比例，明显高于中华、印度传统里对应的概念	无差异，"光的世界＝西方"降为修辞	导论、第六章、第二十六章、第二十七章、结语	未做。第六章的几个词源只是举例，不是清点

总账：一条有了一次预备账，账上已记着反例；四条还没有开账。没有一条预测已经赢了。

附录三

与站上专著的碰撞

本书接着站上各部专著往下判，不改它们的判，也不重复它们已说过的主张。

站上专著	它判了什么	本书接着做了什么	在哪几章
第 8 号《中华之气》（王德生、秦莉）	光让世界被看见，气让世界被感到；西方是光逻辑，中华是触觉与气逻辑；中医是气之科学，西医是光之科学；模型是气的运动被光学化之后的残迹；自设作废条件：气若给不出独立于既有物理量的读数，就退化为修辞	给气一个读数（伞三参数偏离三重退化的程度，待验）并写明作废条件；把"一文明一感官"改成"每种感觉都有完整 SDE，文明之别是侧重之别"；把"残迹"写成"代签"机制并配预测	导论、第六章、第十四章、第二十一章、第二十七章、第二十九章、结语
第 346 号《人与 AI 一起发生新数学》	今天的数学是视觉的，要有听的数学、摸的数学；拍西瓜、揉面团、中医、气的数学	从"数学"推进到"科学"：方程是代签，客观物理是代签被当原件；补上触觉镜与"先人、后机、再回人"的次序；揉面团另取一指按压、松手回弹的角度	第十四章、第二十一章、第三十章
第 344 号《意义数学的诞生》	传统数学是伞的三重退化；视觉数、触觉数、听觉数是同一把伞的三种撑法	说出三重退化的来源：视觉成像三性；把听觉伞写成随时间张合的 r(t)	导论、第十章、第二十一章、第二十三章
第 422 号《发生的身体》	视、听、触给身体着色；明言推不出"中触、印听、西视"的文化主张，那里是一座断桥	正面处理这座断桥：用预测五检验，不过就降为修辞；中医章的论证不靠文明对应撑着	导论、第六章、第二十七章、结语

站上专著	它判了什么	本书接着做了什么	在哪几章
第 407 号《被刻进世界的公式》	仪器把现实变成可读的痕；科学是理念与现实对账	追问那道痕属于哪种感官：几乎全是给眼睛看的痕；对账的动作，对手和耳朵也一样成立	第八章、第十六章、第十八章、第十九章、第二十七章、第三十一章
第 382 号《中医是不是科学？》	一剂方是问题，证是回答	换一把刀：证有相当一部分来自脉，脉诊是触觉 SDE；中医未完成科学化，科学定义也片面，两头一起动	第二十七章
第 394 号《一次闪光是谁的？》	读数与它的主人一起发生	补问量子的怪异有几分来自"只能用光去碰"；伞读数把主人（手多大、等多久）写进尺子里	第九章、第十五章、第十九章、第二十一章
第 342 号《科学发生的结构》	AI 时代科学的基本单位是"典范模型"，一个典范一个模型；把库恩走到"典范替代"就断的线接成一个圈；统一大模型求平均，平均就是单一化	给典范的多样添一根感官的轴，分出视觉、触觉、听觉三种典范；最值得碰的，常是长在不同感官上的模型	结语
第 477 号《发现的发生学》	发现是一种发生重复得太稳	指明重复最稳的发生是视觉的发生；"可重复"偏爱视觉，因为视觉特征可切割、可同时呈现、可存	第十五章
第 387 号《好听是谁的？》（胡敏著）	好听不是听出来的，是唱进去的	好听在波动方程和频谱的曲线上找不到，它住在先后里；从伞的角度读"唱进去"	第二章、第八章、第十三章、第二十三章

判　词

现代科学的眼睛是自己的，
手和耳朵
是方程借给它的；
把借来的当成世界，
就叫客观物理。

——本书判词

现代科学是视觉科学：它用眼睛取得稳定的特征，图像、刻度、曲线，都是给眼睛看的。原子之间怎样推、怎样撞，声音怎样一起一伏，从没被手和耳朵亲身取得，是方程替缺席的手和耳朵代签了字。

本书说，数不再是没有大小的点，而是一把撑开的伞；中医需要一门新生的科学。视觉数学正被 AI 接走，触与听的纠缠要先人、后机、再回人。

眼睛是自己的，手和耳朵是方程借的。——本书

ISBN 979-8-90690-027-2

9798906900272

德麦国际出版社 · Demai International Press

德麦国际专著第 421 号

US$23.00