

SDE UNIVERSES
德麦国际专著 · 第 489 号

动力 · 系统 · 回写

学习 如何发生

SDE 三方程的教育思考与实践
阳涌重写本



王德生 思想母本

德麦国际出版社
Demai International Press

德麦国际专著 · 第 489 号

学习 如何发生

SDE 三方程的教育思考与实践

王德生 思想母本
阳涌子本

德麦国际出版社

Demai International Press · Singapore

出版信息

书名	《学习如何发生——SDE 三方方程的教育思考与实践》
版别	阳涌子本（母本—子本阅读新典范）
思想母本	王德生《SDE 三方方程导论：科学论证、运行机制与技术应用》，SDE Universes 第 51 号专著，2026 年 7 月网络版
阅读对象	阳涌
执笔	文字在 AI 协作下成稿：由 Claude 依母本重写、分章写作并经独立审读，统稿与排版由 Claude 执笔
出版	德麦国际出版社（Demai International Press）·新加坡
编号	德麦国际专著第 489 号
ISBN	979-8-90690-643-4
定价	US\$20.00
开本	170 mm × 240 mm（印刷版）／190 mm × 250 mm（阅读版）
字数	约 15 万字
版次	2026 年 10 月第 1 版（子本 v4.0）

本书是"母本—子本"阅读新典范的一个个体子本：以 SDE Universes 第 51 号专著为思想母本，从阅读对象的两个问题出发重写，不是母本的删节本或改编本，也不构成母本作者的审定。本书随书附学习包与专属智能体「天平」，三者合为一个出版单元。

AI 协作声明：本书文字在 AI（Claude）协作下成稿。书中人物（小宇、小禾、林老师、老陈、周校长等）与学校（青石中学）均为说明道理而构造，不是阅读对象的经历，也不是已经完成的实验；书中数学推导经过核算，模型中的数字是示意参数。本书讨论教育问题，不替代学校与专业机构的判断。

全书结构：出版信息、作者与读者、题词、本版说明、导论；四部二十四章（动力从哪里来、系统性思考怎样长出来、让这一次改变下一次、把设想变成可以检验的研究）；结语、附录三件、参考书目。

入库不算发生，回写才算。

— 本书

作者与读者

王德生（思想母本作者），SDE（显露 Show · 差异序列 Difference · 特征纠缠 Entanglement）本体论思想体系的创立者，德麦国际（Demai International Pte. Ltd., 新加坡）创始人、首席执行官。本书的理论来自他的《SDE 三方程导论》。

阳涌（阅读对象），教育研究者，数学新教育的创新实践者，有十六年基础教育教学、课程研发与学校管理经验，并有哲学基础。他为本书提出的两个问题——学生学习的动力从哪里来，学生怎样学会系统性思考——决定了全书的路线、案例与篇幅。他的名字在这里说明阅读对象，不表示他参与写作或认可了书中的判断。

本版说明

从翻译母本到重写母本

上一版（v3.0）保留了母本四十二章的顺序，逐章把例子换成教育场景，再在章末写一句与阅读对象的联系。它忠实，也完整，但读下来更像母本的教育学译本，阅读对象的两个问题只是被沿途提到。

这一版是重写。我们先从母本中抽出二十七条理论不变量，作为不能讲歪的底线；然后从阳涌的两个问题出发，重新长出全书的路线、篇幅和案例。全书四部二十四章，以初中数学课堂为主要场景，导论先亮出两个回答，结语把它们收回。与母本的逐章对照见附录A。

每章照第 302 号的章式安排：先用一句话提出这一章的问题，再从一个课堂或家常场景讲起，正文用 ◆ 分节；章末有"带走的话"，用一句话收住这一章，再有一段"小账"，交代哪些是构造的、哪些数字是示意的、哪个判断还等着检验。

目录

作者与读者	iv
本版说明 从翻译母本到重写母本	v
导论 一个不再举手的学生	1
第一部 动力从哪里来	7
第1章 先跟着他走一遍：一个学生是怎样离开数学的	8
第2章 三条方程：把"他为什么不学"拆成三个可以回答的问题	18
第3章 动力不是一箱油：张力怎样变成"还想再试一次"	28
第4章 想去哪里：目标、路径与约束怎样一起长出来	38
第5章 动力断在哪里：三种改变与三种熄火	48
第6章 分数、奖励与"想学"的真假	58
第7章 同一种教法为什么总有人不适合：六条路与入口	68
第8章 什么时候该换一条路	78
第二部 系统性思考怎样长出来	89
第9章 系统性思考不是一张更大的图	90
第10章 会答题以后还要看什么：数学理解怎样显露	100
第11章 错误怎样接成路：从错题本到六步九步	110
第12章 菜地与围栏：一个同时回答两个问题的课	120
第13章 四十分钟并不只是一种时间：时间、空间与因果	131
第14章 从学生到课堂到学校：尺度怎样转换	141
第15章 系统思考的反面：方便解释与循环解释	151
第三部 让这一次改变下一次	161
第16章 回写：一次经验怎样改变下一次的条件	162
第17章 教具、符号与意义怎样彼此牵动	172
第18章 成熟、退化与重组：一个数学社团的三年	182
第19章 学校怎样记住经验：从公开课到长期积累	192

第20章 当 AI 进入课堂：帮学生走路，还是替学生走路	202
第四部 把设想变成可以检验的研究	213
第21章 把一个教育设想写成可证伪的研究	214
第22章 一个小模型：把教研组的争论说清楚	223
第23章 和系统科学、因果研究、其他教育理论坐一桌	233
第24章 两个问题的研究组合：给阳涌的一份工作方案	243
结语 回到那个不再举手的学生	253
附录	259
附录A 本书与母本的对照	260
附录B 术语小词典	263
附录C 课堂与教研工具	272
参考书目	277

导论

一个不再举手的学生

这一章的问题

一个曾经爱数学的学生不再举手，动力和系统思考为什么是同一件事的两面？

场景 小宇五年级追着老师问鸡兔同笼，到初一却把数学书立起来，不再举手。

◆ 一、小宇是哪一天不举手的

小宇五年级的时候，会为一道鸡兔同笼题追着老师走到办公室门口。他想知道，为什么假设全是鸡、再把多出来的腿一对一对换成兔子，答案就自己冒出来了。老师说下课再讲，他就在门口等，手里还攥着半块橡皮。那时候没有人担心他的学习动力，大家只担心他下节课迟到。

到了初一上学期的后半段，林老师发现小宇的数学书常常是立着的。书立得很直，像一面小小的屏风，屏风后面的人在做什么，谁也说不准。他不捣乱，作业也交，只是不再举手，错题订正写得越来越短，最后只剩一个红笔写的正确答案。林老师想不起来他是哪一天变成这样的，就像想不起手机的电是在哪一分钟掉到百分之二十的。

林老师试过几种办法。她找小宇谈过心，小宇很礼貌，说会努力；她在课上表扬过他一次，他红着脸低下头；她给小组加分，小宇那一周确实举了两次手。三天以后，书又立起来了。办公室里的同事给出的解释也很熟悉：青春期了，基础没打牢，对数学没兴趣，男孩子开窍晚。每一种都有几分道理，又都像是在说“天气不好”，听完了也不知道明天该带伞还是带扇子。

这些解释有一个共同点：它们都把原因放进了一个地方。要么放在小宇身上（懒、没兴趣、开窍晚），要么放在外面（基础、环境、家庭）。可小宇不是在某一个地方丢掉数学的，他是在一段路上一点一点走开的。要看清他为什么走开，得先承认这是一段路，然后跟着这段路走一遍。

◆ 二、你的两个问题，其实是同一件事的两面

阳涌，你为这本书带来了两个问题。第一个问：学生学习的动力从哪里来，它的机制是什么？第二个问：学生怎样学会系统性地思考？在学校里，这两个问题通常被分给两间办公室，一间管"调动积极性"，一间管"思维训练"，仿佛学生先在第一间领到热情，再去第二间领方法。

可是课堂里的学生不按办公室走。我们再看一个孩子。小禾是小宇的同班同学，成绩很好，熟悉的题型又快又准，像一辆在熟路上开得飞快的车。可题目只要换个问法，比如不再问"求这个长方形的面积"，而问"周长不变时面积能不能变大"，她就开始慌，先找例题，再找公式，找不到就停在那里。她不缺动力，缺的是另一样东西：她看不见一道题是从哪些条件里长出来的，所以条件一变，她就不知道自己手里的方法还管不管用。

小宇和小禾看起来是两种问题，一个不想走，一个只会一条路上走。往深处看，它们是同一件事的两面。动力问的是：这个学习过程能不能继续下去？系统思考问的是：这个人能不能看见这个过程？能看见过程的人，更容易知道下一步往哪里使劲，也就更愿意继续；肯继续的人，手里才有一段过程可以看。

日常生活里这件事很常见。一个人学做菜，愿意天天下厨，往往不是因为别人夸他，而是因为上一次的菜有一处变好了，而且他知道是哪一处变好的：盐放晚了一点，或者火关小了一点。知道哪一处变好了，就是看见了过程；因为看见了，下一次才有地方继续改。一个人做了三个月菜都说不清好坏从哪里来，大概

率会回到外卖。这本书要做的，就是把这个厨房里的道理，搬回数学课堂，搬回学校。

◆ 三、先亮底牌：这本书给出的两个回答

写一本书，最怕把读者领进一座很大的迷宫，最后在出口告诉他"迷宫本身就是答案"。所以我们把底牌先放在桌上，后面二十四章负责把它摊开、撑住，也负责说清楚它在什么时候会错。

第一张底牌回答动力问题。学习动力不是装在学生身上的一箱油，用完了加，加多了跑得快。它更像一段过程的产物：学生想往哪里去，手里已经有什么，眼下能做成什么，这三样之间常常有落差。落差被接住了，就会长出一点新的"我会了"；这一点"我会了"又会反过来改写下一次的起点，让下一次的落差变得可以够得着。动力断掉，多半不是断在"他天生不想"，而是断在两个地方：落差出现了却没有人接，或者接住了却什么也没留下。

第二张底牌回答系统思考问题。系统性思考不是画一张更大的图，也不是把箭头画得越多越好。它的最小单位是三句追问：面对任何一个结果，先问它是在什么条件里、经过哪些尝试，长成现在这个样子的；再问从现在开始这个样子出发，下一步会往哪里走；最后问它又反过来改变了什么。会问这三句话的人，不需要背"系统论"的名词；不会问的人，图画得再大也只是一张不好擦的白板。

这两张底牌不是凭空来的，它们来自一个更大的理论：王德生先生提出的SDE本体论，以及他在《SDE三方方程导论》里把这套理论推向科学研究和现实应用的工作。这本书以那部著作作为思想母本。不过我们不按母本的章节顺序走，而是从你的两个问题出发，把母本的理论重新组织一遍。母本里不能讲歪的东西，我们一条不丢；母本里可以换的讲法和例子，我们全换成你熟悉的课堂。

底牌亮出来，就要准备被翻。第一张底牌如果是对的，那么同样的鼓励和奖励，在"落差被接住"的处境里应该比在"落差没人接"的处境里更持久；如果事实

反复显示两者没有区别，这个说法就要改。第二张底牌如果是对的，那么学会"三句追问"的学生，在条件改变的新问题上应该比只学会解题步骤的学生表现更好；如果并非如此，它就只是一种好听的说法。后面第四部会把这类判断写成可以检验的研究，这里先把话放在这里。

◆ 四、三个名字，先当三把钥匙用

为了把"落差""接住""留下"说得更准，我们需要三个名字。它们来自母本，叫显露、差异序列和特征纠缠，分别用字母 S、D、E 表示。名字听起来有点学术，用起来却很像厨房里的三件事。

先说显露（S）。一锅粥熬到后来变稠了，"稠"就是此刻显露出来的样子。在小宇身上，"会照着步骤解方程，却说不出为什么两边要同时减三"，就是他眼下的显露。显露不是最后的结果，它可以刚刚冒头，可以暂时稳定，也可以已经僵化；我们说一个学生"懂了"，其实是在说某种理解向我们显露到了某种程度。

再说差异序列（D）。粥为什么会稠？因为火候、搅拌、加水，一次一次的变化接成了一条路。小宇的差异序列，就是他这一学期走过的那一串尝试和回应：哪一次错了有人帮他看清错在哪里，哪一次努力换来了看得见的变化，哪一次只换来一个红叉和一句"粗心"。差异序列关心的是变化怎样一环一环接起来，所以它不等于"做了多少题"，也不等于"有没有动力"。

最后是特征纠缠（E）。米、水、锅、灶，彼此限定着这锅粥能熬成什么样：同样的火，砂锅和铁锅是两回事。小宇的特征纠缠，是他已有的分数知识、作业制度、同桌、课堂上谁有资格说话的规矩，还有他心里那句"我不是学数学的料"，这些东西缠在一起，共同限制了他下一步能走哪里。它不是"环境"的好听说法，环境听起来是摆在外面的布景，特征纠缠却是一起上课的看不见的同学。

三个名字之间的关系，母本用三条方程来写： $S=F(D,E)$ ， $D=G(S,E)$ ， $E=H(S,D)$ 。读成大白话就是：眼下的理解，是在某些条件里经过某些尝试长出来的；下一步怎么走，由眼下的理解和条件一起决定；新的条件，又是这一次的理解和尝试留下的。三个字母 F、G、H 各不相同，提醒我们这是三种不同的生成关系，它们是占位记号，不是可以把学生分数代进去算的公式。第二章会把这一点讲透，这里先记住一件事：这三个名字不能贴在人身上，别说老师是 S、学生是 D、教材是 E，那样画图方便，理论却被拆坏了。

◆ 五、这本书怎样走

这本书本身也要选一条路。母本告诉我们，面对一个问题，可以从三个维度中的任何一个起手，排出六种次序，选哪一种取决于这个问题最吃紧的是哪一维。小宇的问题，是一个已经在进行、而且带着推动力的过程，所以第一部先跟着过程走，再去看缺了什么条件，最后才看显露出来的样子。这条路在母本里叫倒逼型。

第一部"动力从哪里来"共八章，从小宇的一学期作业本开始，讲三条方程怎样把"他为什么不学"拆成三个可以回答的问题，讲张力怎样变成"还想再试一次"，讲目标怎样在活动中长出来，讲动力会断在哪三个位置，讲分数与奖励，最后讲入口和换路。第二部"系统性思考怎样长出来"共七章，以小禾为主线，讲会答题以后还要看什么，错误怎样接成路，再用一节菜地围栏的数学课，同时回答你的两个问题。

第三部"让这一次改变下一次"共五章，从学生走到学校，讲回写、教具与符号、一个数学社团的成熟与退化、学校怎样记住经验，以及 AI 进入课堂以后，是帮学生走路还是替学生走路。第四部"把设想变成可以检验的研究"共四章，是写给作为研究者的你的：怎样把一个教育设想写成可证伪的研究，怎样用一个小模型把教研组的争论说清楚，怎样和别的理论坐在一张桌上，最后是一份针对两个问题的研究组合。结语回到小宇。

有一件事在这里集中说一次，后面不再反复说。书中的小宇、小禾、林老师、教研组长老陈、周校长和青石中学，都是为了说明道理构造出来的人物和场景，不是你的经历，也不是已经做过的实验。它们的作用是解释和推演；哪些判断还需要事实来裁决，每一章会在合适的地方说清楚。书里的数学推导都经过核算，模型里的数字都是示意参数。

还有一件事也说在前面：这本书会尽量少说"不能"，多说"是什么"。理论的程度很重要，所以每一章会把它的限度集中交代一次，而不是每走两步就停下来提醒一回。一个人上课时如果每讲两句就补一句"当然这也不一定"，学生最后记住的，只有"不一定"。

那么，就从小宇的作业本开始。林老师把他这一学期的作业按日期排开，从九月排到一月，桌子不够长，又拼了半张。她想知道的不是哪一天出了事，而是这一路上，有哪些地方本来可以接住他，却没有接住。

带走的话

动力不是一箱油，而是落差被接住后的回写；系统思考的最小单位是三句追问。

小 账

人物是真的吗？ 小宇、小禾、林老师、老陈、周校长和青石中学都是构造的人物和场景，用来解释和推演，不是你的经历，也不是已经做过的实验。

数字可靠吗？ 书中的数学推导都经过核算；模型里的数字都是示意参数。

哪一句还要检验？ 两张底牌都可检验：若鼓励在"落差被接住"与"落差没人接"的处境里一样持久，或学会三句追问的学生在条件改变的新问题上并不更好，就要改。



第 一 部

动力从哪里来

导 语

这一部八章，只追一个问题：一个学生想不想学，到底是由什么决定的。我们不从"内驱力"这样的大词出发，而是跟着小宇一学期的作业本往前走，看他在哪些地方被接住了，在哪些地方掉了下去。

第1、2章先把"他为什么不学"拆成三个可以回答的问题，第3、4章讲张力怎样变成"还想再试一次"、目标怎样在活动里长出来，第5、6章讲动力会断在哪三个位置、分数与奖励又怎样提前参与了发生，第7、8章讲入口和换路。

这一部本身走的是"先跟过程、再看条件、最后看显露"的次序，母本叫它倒逼型。读完这一部，希望你手里多出的不是一个新名词，而是一种看作业本的办法：先找那几个本来可以接住、却没有接住的时刻。

01

第1章

先跟着他走一遍：一个学生是怎样离开数学的

这一章的问题

一个学生不是哪一天决定不学的，那他是怎样一步步离开数学的？

场景 期末前一周，林老师把小宇一学期的作业按日期排开，桌子不够长，又拼了半张。

◆ 一、一张拼了半张的桌子

一月中旬，期末考试前一周，林老师把小宇这一学期的数学作业本、练习卷和两张单元测验卷，按日期在办公桌上排开。九月的放在最左边，一月的放在最右边，桌子不够长，她从隔壁搬来半张课桌拼上。老陈端着茶杯路过，看了一眼说："你这是要给他办个人展？"林老师说差不多，她想看看这一学期到底发生了什么。

这个动作看起来像整理，其实是在换一个问题。在这之前，她和同事们问的都是"小宇为什么不想学了"，这个问题把目光引向小宇这个人：他的性格，他的家，他的青春期。把作业本排开以后，问题悄悄变成了"小宇是怎样一步一步走到现在的"，目光就从一个人身上移到了一条路上。前一个问题像在问一棵树为什么歪，后一个问题像在看这棵树过去几年的风是从哪边吹来的。

从左往右看，这些本子像一部倒着放的纪录片：越往左，字越大，草稿越多，页边的涂鸦也越多；越往右，字越小，过程越短，订正越像一句敷衍的口头禅。最右边几页的错题订正只有一个红笔写的答案，连等号都省了。若只看最右

边，结论很容易下：这个孩子不想学。可是一部纪录片如果只看最后一个镜头，谁都会以为主角生来就站在那片荒地上。

做过课程研发的人大多见过这样的场景：一个学生出了状况，大家围着他现在的样子开会，每个人带着自己最熟悉的解释来，会开完了，解释多了三种，学生还是原来的学生。林老师这一次没有急着开会，她先做了一件更笨的事：拿一支铅笔，在每一份作业旁边贴一张便利贴，只记三件事——这一次他做了什么，谁回应了他，回应以后他下一次有什么不同。

这三件事并不复杂，却把一份作业从"一个分数"变成了"一个事件"。分数只说这一次对了多少，事件还会说这一次和上一次、下一次是怎样连起来的。一个分数像一张照片，一串事件才像一段录像。林老师要看的，是录像。

她心里也清楚，桌上这一排本子只是录像的中段。小宇的路不是从九月开始的，他六年级学分数除法时就开始吃力： $3/4 \div 1/2$ 为什么等于 $3/2$ ，为什么除以一个数等于乘它的倒数，他会照做，却一直没弄明白。那一段的本子不在这张桌上，可它留下的东西跟着他进了初中，就像搬家时没拆的箱子，人搬进新房了，箱子也一起搬进来了。林老师在便利贴的最左边加了一张，只写了一句："九月之前，已经有一段路。"

◆ 二、四个本来可以接住的地方

九月上旬学正负数和数轴，小宇的作业是全班最热闹的几份之一。他在数轴旁边画了一支温度计，零下的刻度涂成蓝色，还在旁边写了一行小字："冰箱冷冻室大概在这里。"林老师当时批了一个"好"，现在再看，这个"好"字显得很孤单，因为它没有接着问一句"那冷藏室在哪里，两个格子差几度"。这不是错，只是一扇开着的门，没有人顺手走进去。

九月下旬到十月是有理数的加减法，第一张便利贴贴在这里。 $-7+4$ ，他写的是 -11 ，红叉； $3-(-5)$ ，他写的是 -2 ，红叉，旁边批了两个字："粗心。"可这两道题的错法很有规律：第一道他把两个数的绝对值加起来，再挂上负号；第二道他把减去负数当成了减去正数。这不是手滑，而是他用一套小学里很好使的算法，去处理一种小学里没有的数。"粗心"这个词把一个有规律的错误，说成了一个没规律的意外。后来几个月，这两个字在他的本子上又出现了好几次，错的地方大多和负号有关，批语却始终是一个词，像一把钥匙被拿去开每一扇门。

这里说的"接住"，并不神秘，也不需要多花一节课。比如对 $-7+4=-11$ ，接住可以只是一句追问："在你九月画的那支温度计上，从零下7度往上升4度，停在哪儿？"小宇自己画过温度计，他从 -7 往上数四格，会停在 -3 ，然后他会发现自己写的 -11 是往下走了四格。这一句追问把他九月的一个好奇，接到了十月的一个错误上，让前一步给后一步出力。没有这一句，两个时刻就各自孤零零地躺在本子里，像两节没接上的水管。

十月底学有理数乘法，第二张便利贴贴在一页练习的页边。那里有一行铅笔字，写得很轻："为什么负负得正？"林老师承认，她当时批作业只看了答案，答案都对，打了一个大大的勾，页边那行字她根本没看见。三个月以后，她在办公桌前看见了这句话，像收到一封寄错地址又被退回来的信。一个初一学生在作业本上主动写问题，本来是一学期里最值钱的时刻之一。

十一月有一张订正，是第三张便利贴的位置。那次单元测验后，小宇把有理数加减的错题重新做了一整页，每道题都画了数轴，箭头一格一格往左往右走，比他平时任何一次作业都认真。这一页上盖的是一个"阅"字印章，和全班其他人那页只写了答案的订正，盖的是同一个章。他花的力气没有换来任何可以辨认的变化：没有人告诉他数轴画对了，也没有人告诉他这个办法以后还能用在哪里。

十二月学一元一次方程，最后一张便利贴贴在这里。解 $2x+5=17$ ，他写的是" $17-5=12\div 2=6$ "，答案对，过程被扣了分，批语是"过程不规范"。可是这一串等号恰恰露出了他心里的样子：在他那里，等号的意思是"算出下一个数"，而不是"左右两边一样大"。再往后一页， $5x+2=3x+10$ ，他写了" $10-2=8$ "，停住了，后面是一片空白。他熟悉的倒着算的办法，遇上两边都有未知数的方程，忽然找不到路了。

桌上还有一处要补记。十月中旬，年级试行过"数学闯关积分"，抢答答对一次给小组加两分，那一周小宇举了两次手，三天以后，书又立起来了。林老师在这里也贴了一张便利贴，想了想，写下的是："他被推了一下，路没有拐。"那两次举手是真的，可加分并没有碰到他卡住的地方：他依然不知道 $-7+4$ 为什么不是 -11 ，依然不知道页边的问题有没有人看。推一下能让车动一动，路面上的坑却还在原处。

把这几张便利贴连起来看，林老师说她有点不舒服。没有哪一天发生了什么大事，没有谁骂过他，也没有哪次考试砸得特别惨。可是每一个岔路口，都有一个本来可以接住的地方，结果都滑过去了：一个错误被叫成"粗心"，一个问题没有人看见，一次努力和不努力盖了同一个章，一次真正的困难只换来"不规范"三个字。

◆ 三、一盆不开花的绿萝

林老师家里有一盆绿萝，养了三年，从来没开过花。她婆婆每次来都说："这盆花是不是不想开？"这话听着好笑，但它和"这孩子是不是不想学"是同一种问法：把原因塞进对象的心里，然后就没有下文了。真要弄明白一盆绿萝，得换三个问题来问。

第一个问题是：它现在长成了什么样子？叶子是发黄还是油亮，藤是又细又长还是短而壮。养过绿萝的人多半知道，它在家里本来就很少开花，大家盼着它开花，等于在等一种它在这个处境里很难显出来的样子。所以先要看清的，是它眼下真实显出来的样子，而不是我们想看到的样子。这就是母本所说的显露，用字母S表示。

第二个问题是：它这几年经历了什么？从阳台搬到客厅角落，换过一次盆，有一个暑假没人浇水，后来又被浇得太勤。这一串变化接在一起，才是它走到今天的路。母本把这条路叫做差异序列，用字母D表示。

第三个问题是：它和哪些东西缠在一起？花盆的大小、土的透气、窗户朝哪边、家里开不开空调，这些东西互相限定，共同决定它能长成什么样。母本把这叫做特征纠缠，用字母E表示。

回到小宇的作业本。他的S，是此刻能被看见的样子："会倒着算一步一步的方程，说不出等号两边为什么要一样大；会抄正确答案，不再在页边写问题。"这个显露不是终点，也不是他的本质，它是一个从弱到强、从正在形成到渐渐固定的连续过程中的一格。九月那支温度计，是一种好奇正在冒头的显露；一月那一排只有答案的订正，是另一种显露正在变硬。

所以说一个孩子"懂了"或"不行了"，都是在说某样东西向我们显露到了什么程度，总要追问一句：向谁显露，在什么任务里，稳到了什么程度。小宇"会倒着算"这件事，向林老师显露在作业本上，在一步一步的方程里认得出来，也能维持好几周；可一旦要他说出为什么，它就表达不出来了。能认出来、能维持住、说得出来，这三样各有各的分量，一个"会"字把它们全盖住了。

他的D，就是林老师用便利贴串起来的那条路：哪一次尝试被回应了，哪一次没有，哪一次错误被说清了来由，哪一次只换来一个标签。要特别说一句，D

不等于动力。一条路可以走得很清楚，却是被人推着走的；一个孩子也可以兴致勃勃，却始终没有一次尝试真正接住上一次。"他还愿不愿意继续"和"他的变化是怎样一环一环接起来的"，是两件要分开看的事，混在一起看，就会把一条断了的路误认为一颗冷掉的心。

D也不是"做了多少题"。小宇这一学期做的题并不少，作业一次没欠，若按题量算，他的路很长。可是路的长短要看前一步有没有被后一步接住：十一月那页画满数轴的订正，如果后来有一次他在方程里又用上了数轴，那就是一环接上了一环；如果再也没出现过，那一页就只是一段孤零零的努力。好比一个人每天走一万步，若每天都在同一个小区里绕圈，计步器很满意，他对这座城市的了解却没有多一条街。

他的E，是缠在他身上的那些东西：小学里练熟的算术习惯，只看答案的批改方式，盖章式的订正检查，坐在他前面那个举手很快的同学，还有一句他自己慢慢信了的话——"我不是学数学的料"。这些东西不是布景，它们像土壤一样参与了他的每一步。用E来解释，至少要说出一条可以被反驳的作用链：比如"只看答案的批改，让页边的问题没有被看见的机会，于是他下一次不再写问题"。这条链如果是真的，那么换一种会读页边的批改方式，页边的问题应当重新出现；如果怎么换都没有出现，这条链就要改。

还有一个对照能看出E为什么不是背景。同一个班，同一种只看答案的批改，落在小禾身上几乎没有坏处：她本来就很少错，也很少在页边写问题，批改看不看页边，对她的路影响不大。落在小宇身上，同一种批改却正好掐断了他最想说话的那条缝。条件不是一块均匀铺在全班脚下的地毯，它和每个学生已有的东西缠在一起，才显出它到底在起什么作用。就像同一场小雨，对刚播下的种子是及时雨，对晒在阳台上的被子就是一场事故。

再回到那盆绿萝。问"它想不想开"，问完了只能叹气；换成三个问题，每一个都指向一件可以动手的事：看清它眼下长成什么样，就知道该盼什么、不该盼什么；理清它经历过什么，就知道哪一次搬动或哪一种浇法该改；看清它和什么缠在一起，就知道是该换盆、挪窗边，还是先关掉对着它吹的空调。小宇的作业本也一样，三个名字的用处不在于把他归类，而在于把一声叹气，换成几件明天就可以去试的事。

◆ 四、字母不发给人

讲到这里，很容易有人拿起笔，在白板上画三个圈：林老师是S，小宇是D，教材是E，再连上几条箭头。老陈在教研会上真的这么画过，画完自己看了半天，说："像个家族族谱，就是不知道谁是谁爸爸。"他的直觉是对的，这样画方便，理论却被拆坏了。S、D、E不是三种人或三种东西，而是看同一次发生的三个位置。

拿一个具体的东西来试。"为什么负负得正？"这行铅笔字，在十月底那个晚上，是小宇的一个显露：一种追问正在冒头，向他自己显露，还没来得及向任何人显露。同一行字，放到他那一学期的路上看，是差异序列里的一个分叉点：如果有人接住，路可能往一个方向拐；没有人接住，路就往另一个方向拐了。再往后放，到了十二月，那次没有回音的提问已经变成了他心里的一点经验："写了也没人看。"这时候它又成了E的一部分，悄悄限定着他下一次还写不写。

"粗心"这两个字也一样。它在十月被写下的那一刻，是批改路上的一个事件；被写了几次以后，它进入了小宇对自己的看法，变成了他E里的一条规矩："我错是因为我粗心，下次细心点就好。"这条规矩很省事，省掉了去找错误规律的麻烦，也就省掉了改正的机会。同一个词，换了时间尺度，所处的位置就变了。

人也是这样。在小宇这一学期的故事里，林老师的批改习惯是缠在他身上的条件之一；可要是换一个问题，问"林老师这八年的教法是怎样变过来的"，那么她这一学期的批改、今天这张拼了半张的桌子，就成了她自己差异序列里的一步，而小宇那一叠作业本，倒成了参与她改变的条件。老师不是永远站在"条件"那一格的布景板，学生也不是永远站在"路"上的行人，站在哪里，要看此刻在问谁的事。

角色可以变，但每次变都要说清楚：现在看的是哪一次发生，在多长的时间里，为了解释什么。悄悄地换位置是另一回事。比如有人先说"小宇的问题在E，是批改方式害的"，等到换了批改方式没见效，又说"那问题其实在S，他根本没理解"，再不行又搬到D。这样搬来搬去，什么结果都能解释，也就等于什么也没解释。字母是用来分清责任的，用来躲反例，它就成了一个永远找得到借口的同事。

日常生活里也是这个道理。同一把菜刀，在切菜的那一刻是手里的工具，在讨论"这家人为什么不爱做饭"时，它可能是厨房条件的一部分：刀太钝，切一次累一次，做饭就成了苦差事。没有人会说"菜刀永远是工具"，也没有人会说"菜刀永远是条件"，只会说"在这件事里，它站在这个位置"。给小宇作业本上的每一样东西安排位置，也要这样一件事一件事地安排。

你有哲学的底子，大概会立刻想到：既然位置随事件而变，那这三个名字说的到底是"东西"还是"关系"？这一问问到了要害。S、D、E不是把世界切成三堆物件的刀，而是看一次发生时必须分别承担的三份解释责任：形成了什么，经过了什么，依靠什么缠在一起的条件。三份责任可以由不同的东西来承担，也可以在不同的时刻落到同一样东西身上，但三份都得有人认领，少了哪一份，解释就缺了一条腿。

◆ 五、底牌：先是一段路，然后才是一颗心

把这一章的判断说清楚：小宇的动力问题，首先是一段序列问题。他不是在某一天决定不学数学的，而是在一串没有被接住的时刻里，一点一点改变了自己下一步的走法。问"他为什么不想学"，答案只能落在他身上；问"他是怎样走到这里的"，答案会落在一条路上，而路上的每一个岔口，都还能被重新看见、重新设计。这不是替小宇开脱，也不是把责任推给林老师，而是把"动力"这个看不见的东西，先还原成一串看得见的事件。

这个判断有它会错的地方，集中在这里说清楚。第一，回头看的人知道结局，容易只挑那些"预示了结局"的事件，忽略那些同样存在、却指向别处的事件。林老师挑出四张便利贴，可能恰好漏掉了几次他其实被接住了、后来却仍然滑落时刻；如果这样的时刻很多，"没被接住"就不是主要原因。第二，有些原因确实不在这条路上：长期睡眠不足，家里突然出了变故，视力下降看不清黑板，这些事一旦存在，更简单的解释就该先用，不必把三个字母都请出来。第三，构造出来的作业本只是推演，不是事实；真要检验，得事先写下"怎样算错"，比如预先说明：如果在两个班里，一边认真回应页边提问、一边照常批改，一个学期下来两边学生的提问次数没有差别，那么"提问没被接住会让提问消失"这条链就要收回。

阳涌，你在学校管理的位置上待过，大概最清楚这一判断在学校里的分量。一所学校习惯用"一个学生现在的样子"做决定：分班、谈话、找家长，资料袋里装的都是照片，很少有录像。把动力问题看成序列问题，意味着学校要开始保存一些很小、很不起眼的东西：页边的一行字，一次订正的样子，一个批语后面学生下一次的反应。这些东西不贵，难的是有人愿意把它们排在一张拼了半张的桌子上。

序列的眼光还有一个好处：它既能往回看，也能往前看。往回看，是认出那几个滑过去的岔口；往前看，是知道下一个岔口大概会出现在哪里。小宇卡在"等号是算出答案"这一处，那么下学期的去分母、二元一次方程组，都会在同一处再敲他一次门。修车的师傅听见异响，不会只说"这车老了"，他会记下是在哪个速度、哪种路面上响的，下回专门在那种路面上再听一次。林老师手里那一叠便利贴，也就从一份档案变成了一张提醒：下一次门响的时候，要有人在门口。

那天傍晚，林老师把便利贴一张张收起来，夹进本子里。她已经知道这条路是怎样走过来的，可是还说不清楚其中的道理：为什么一个错误被叫成"粗心"，就会让下一次的路换个方向？为什么同一行字，昨天是一个问题，今天就成了一条规矩？要回答这些，光有三个名字还不够，还得知道它们之间是怎样互相生出来的。下一章，我们把三个名字写成三条方程，看看它们能把"他为什么不学"这一个大问题，拆成哪三个可以回答的小问题。

带走的话

动力问题首先是序列问题：先是一段没被接住的路，然后才是一颗心。

小 账

人物是真的吗？ 小宇、林老师、老陈和那一桌作业本都是构造的，便利贴上的事件是推演，不是记录。

哪一句还要检验？ "提问没被接住会让提问消失"是可检验的作用链：若两个班一边认真回应页边提问、一边照常批改，一学期后提问次数没有差别，就要收回。

算式对吗？ $-7+4$ 、 $3-(-5)$ 、 $2x+5=17$ 等算式和小字的错法都已核对。

会错在哪里？ 回头看容易只挑预示结局的事件；睡眠不足、家庭变故、视力下降这类更简单的原因存在时，应先用简单解释。



02

第2章

三条方程：把"他为什么不学"拆成三个可以回答的问题

这一章的问题

"他为什么不学"装了太多答案，怎样把它拆成几个能去查证的问题？

场景 教研会上林老师念完小宇的便利贴，老陈问"他为什么不学"，五分钟收到四个答案。

◆ 一、一个装了太多东西的"为什么"

便利贴贴完的第二天，正好轮到数学组教研。林老师把那叠便利贴带去了。她念了几张，会议室里安静了一会儿。大家都看过小宇的成绩单，却是第一次听人把他的一学期按日子念出来。

老陈放下茶杯，说："这些我都信。可问题还是那个问题：他为什么不学？我教了二十多年，这个问题的答案翻来覆去就一个，不想学。"有人笑了，有人点头，也有人补充：基础没打牢，家里管得松，手机玩多了。一个问题，五分钟里收到了四个答案。

这四个答案未必谁对谁错，它们其实在回答四个不同的问题。"不想学"说的是他心里的意愿，"基础没打牢"说的是他手里有什么，"家里管得松"和"手机玩多了"说的是他身边缠着什么。一个"为什么"像一只塞得太满的旅行箱，拉链一拉开，衬衫、充电器、拖鞋全掉出来，每个人弯腰捡起离自己最近的那一样，举起来说："看，就是这个。"

日常生活里，这种箱子随处可见。一个七岁的孩子学自行车学了一个月还不会，奶奶说他胆小，爸爸说车座太高，妈妈说是爸爸扶车扶得不对，孩子自己说那条路太窄。四个人吵到晚饭凉了，谁也说服不了谁，因为他们各自抓住的，是同一件事里的不同部分。真要帮这个孩子，得先把那一个大"为什么"拆开，拆成几个分别有答案、分别查得到的小问题。

导论里已经写下了母本三条方程： $S=F(D,E)$ ， $D=G(S,E)$ ， $E=H(S,D)$ 。它们最朴素的用处，就是拆箱子。第一条问：他现在会什么、显出什么样子，是哪些尝试在哪些条件里造出来的？第二条问：他下一步会怎么走，是由眼下的理解和条件怎样一起决定的？第三条问：这一段经历又给他留下了什么新的条件？三条方程把一个模糊的"为什么"，换成了三个可以去作业本、去课堂、去学生嘴里找答案的问题。

阳涌，你的第一个问题"动力从哪里来"，在学校里最常被问成"他为什么不上学"。这个问法的毛病不在于它错，而在于它太宽，宽到任何答案都能塞进去，塞进去以后又都显得有理。三条方程不替我们回答它，只是把它分装进三个口袋，每个口袋贴好标签，告诉我们该去哪里找证据。

◆ 二、第一问：他现在会的东西，是怎样长出来的

先问S，也就是小字眼下显出来的样子。从作业本上看，他会解 $2x+5=17$ ：先算 $17-5=12$ ，再算 $12\div 2=6$ 。他也会犯一种有规律的错：遇到 $5x+2=3x+10$ ，草稿纸上写着" $10-2=8$ "，下面还有一行被划掉的" $8\div 5=1.6$ "，然后就空着了。这个样子很具体：他有一套倒着算的本事，这套本事在未知数只出现一次的方程里很好使，在两边都有未知数的方程里突然失灵。

第一条方程要我们追问：这套倒着算的本事，是从哪里长出来的？往回找，并不难找。小学里有一类题叫还原问题，"一个数乘2再加5得17，这个数是几"，

算法正是从结果往回退：17先减5，再除以2，得6。小宇在小学做过大量这样的题，几乎每一次都对，每一次对了都有人打勾。这是一条很长、很顺的差异序列，D；而它发生在一种特定的条件里：小学的算式总是"左边是算法，右边是答案"，等号的意思一直是"算出来等于"，这是缠在他身上的E。

所以小宇今天的S，不是凭空掉下来的毛病，而是一段成功经历在特定条件里留下的成果。F这个字母，承担的就是说清"怎样长出来"的责任：哪些尝试被反复留下，哪些被淘汰，留下来的东西又怎样借着那时的条件站稳。这里有一个候选的机制可以说出来，也可以被检验——"每次都管用的办法，会被优先留下来，并且被用到它管不了的地方去"。如果这个机制对，那么小宇在其他"需要两边同时看"的题目上，也应该出现类似的倒着算的尝试；如果他在那些题上完全换了一种做法，这个机制就要另找。

学自行车的孩子也一样。他能骑直线，转弯就倒，这是此刻的样子。往回找：他是在小区一条又长又直的走廊里学会的，爸爸一直扶着车座，松手时也总选在直路上松。直线骑得稳，是这段练习在这种场地里留下的成果；转弯不行，是因为这段路上从来没有弯道。说"这孩子平衡感差"，等于把一段经历的形状，说成了一个天赋。

F之所以要单独占一个位置，还因为同样的经历未必长出同样的东西。班上另有几个同学，小学里也做过一大堆还原问题，到了初一却很快接受了"两边同时减去同一个数"。问起来，其中一个说他小学老师讲等式时总爱比划一杆秤，"左边右边一样重"这句话他听了好几年。同样是大量的倒着算，缠在一起的条件不同，长出来的理解就不一样：一个长成了"等号是算出答案"，一个长成了"等号是两边一样重"。F要说清的，正是这种"同样的路、不同的土、不同的苗"是怎样发生的。

这一问还有一个要紧的地方：它要求S有自己独立的观察入口。我们说小宇“会倒着算、不会两边看”，凭的是他在不同类型题目上的实际做法，而不是凭“他不想学”倒推出来的。一个观察入口如果只能借另一个字母才能成立，后面讲到“互相影响”时，就会掉进绕圈子的坑里。这一点到第五节再细说。

独立的入口也会带来意外的发现。如果把 $5x+2=3x+10$ 的答案 $x=4$ 直接给小宇，请他检验对不对，他会怎么做？很可能做得又快又准：左边 $5 \times 4 + 2 = 22$ ，右边 $3 \times 4 + 10 = 22$ ，两边相等。这说明他并非对这道题一无所有，代入计算正是他的拿手活，“两边算出来一样”这个念头，其实已经在他手边，只是从来没有被叫到解方程的那一步来。看清S，不只是看清他缺什么，也是看清他手里已经有什么。

◆ 三、第二问和第三问：下一步怎么走，留下了什么

再问D，他下一步会怎么走。第二条方程说，下一步由眼下的理解和条件一起决定。那天晚上，小宇面对 $5x+2=3x+10$ ，手里的理解是“倒着算”，这条路走到 $10-2=8$ 就断了。他身边缠着的条件是：作业第二天早上要交；批改只看答案；练习册后面附着参考答案；他还隐约记得自己上次在页边写的问题没人回。把这几样放在一起，他接下来的走法几乎是可以预料的：空着，或者第二天早读前翻到书后，把答案抄上去。

这样看，空白和抄写都不是“懒”一个字能说完的。它们是一个十二岁的孩子，在他当时的理解和条件里，算得出来的最省事的一步。学自行车的孩子也会这样：前面公园小路上出现一个弯，他手里只有骑直线的本事，爸爸又正好在接电话，他会怎么办？大概率是下车，推着车绕过去，再骑上来。没有人会说这孩子“不想学骑车”，大家都看得出，他是在用手头的本事，应付一个超出本事的弯。

第二条方程里的S，还包括他眼下怎样理解"这件事要做成什么样"。在小宇那里，一道作业题的目标早就被理解成"交上一个答案"，而不是"弄明白这个方程"。这个目标不是从未来飞回来指挥他的，它就是此刻他心里对任务的看法，而这个看法本身，是只看答案的批改一学期一学期喂出来的。目标的理解变了，路就跟着变：如果他心里的任务是"弄明白为什么 $8 \div 5$ 算出来不对劲"，那一行被划掉的1.6，本来可以是一个好问题的开头。

第三问最容易被漏掉：这一段经历又给他留下了什么新的条件？第三条方程 $E=H(S,D)$ ，问的正是这个。一个学期走下来，小宇身上多了几样东西："粗心"这个反复出现的批语，一套"空着、然后抄答案"的熟练流程，还有那句越说越像真的"我不是学数学的料"。这些都是新的E，它们是这一学期的显露和路径留下的，会参与下学期的每一步。

可第三问要问得准，还得把两样东西放回去：旧的条件和时间。小宇不是带着一张白纸进入初一的，六年级分数除法那一段，已经给他留下了一点"数学开始不讲道理"的感觉。同一个"粗心"批语，落在一个对数学有底气的孩子身上，可能只是一句耳旁风；落在小宇身上，就和那点旧感觉接上了，长成了"我不是学数学的料"。所以第三条方程真要用起来，得写成带时间的样子：

$E(t+1)=H(E(t),S(t+1),D(t+1))$ ，新条件是由旧条件，加上这一轮的显露和路径改出来的。省掉 $E(t)$ ，就好像每一次学习都从空白开始，那样的解释很干净，也很假。

自行车的例子里，这一点同样清楚。孩子在那个弯道上摔了一跤，膝盖蹭破了皮。第二天再去公园，他远远看见那个弯就开始减速，手捏着刹车，身子发僵。这份"怕那个弯"是新留下的条件，但它有多重，要看他原来是什么样的孩子：一个原本就胆小、上周刚被狗追过的孩子，和一个原本天不怕地不怕的孩子，摔同样一跤，留下的东西不一样。

时间还有另一层意思。“留下了什么”要看在多长的窗口里看。一次作业留下的，也许只是第二天早读时的一次抄写；一个月留下的，可能是一套稳定的抄写流程；一个学期留下的，可能已经是他对自己的看法。三种窗口里的“新条件”分量不同，混在一起说“他这学期变了”，就把一阵风和一场季风当成了同一样东西。

一位管过学校的人听到这里，多半会先问一句很实际的话：一个问题拆成三个，老师的工作量是不是也变成了三倍？其实正相反。不拆的时候，老师只能凭感觉在“谈心、补课、找家长”之间轮着试，每样都试一点，每样都不知道有没有用。拆开以后，每一问都告诉老师先去看：看他不同题型上的实际做法，看他那晚面对一道题时手边有什么、心里把任务当成了什么，看这一学期在他的本子上和嘴里留下了哪些新说法。看准了再动手，省下的是那些对着空气使劲的力气。

◆ 四、“那你代个数进去算算”

教研会上，老陈听完这三问，没有反对，只是慢悠悠地说：“那好，你把小宇代进去，给我算算他下学期能考多少分。”大家都笑了，林老师也笑了。这句玩笑问到了一个要紧处：这三条方程到底是不是公式？

答案是否定的。F、G、H是三个不同的字母，表示三种不同的生成关系：F管“显露怎样从路径和条件中长出来”，G管“路径怎样由显露和条件决定”，H管“条件怎样被显露和路径改写”。它们是元层次上的占位记号，像菜谱里写的“火候到了就出锅”。“火候”这个词给一样很重要的东西留出了位置，可是炒青菜和炖牛肉的火候完全不同，菜谱上的两个字替不了站在灶台前的那双眼睛。

三个字母不同，也不是为了排版好看。F那里装的可能是累积和竞争：倒着算的办法一次次赢过别的办法，慢慢站稳。G那里装的是选择：在几条可走的路

里，眼下的理解和条件让哪一条显得最近。H那里装的是保存和改写：一个批语怎样被记住，一套流程怎样变成习惯，一句自我评价怎样被反复确认。好比一顿饭，炒菜、挑菜、收拾厨房给下一顿备料，是三种不同的活，用的是不同的手艺，写成同一个字母，就等于假定厨房里只有一种活。

要把占位记号变成一个可以算的模型，得补上好几样东西。观察单位是什么：是小宇一次作业里的一道新题型，还是他一周的作业，还是一个单元？变量是什么，各自怎样测：比如"尝试"可以看他在新题型上有没有写下至少一步自己的推理，"理解"可以看他能不能说出两边同时减去同一个数为什么不改变等式。时间顺序怎么排：先看哪一个，隔多久再看下一个。机制是什么：比如"只看答案的批改，使空着比做错更划算"。参数是什么，比较对象是谁：同一批题，换一种看过程给分的批改，小宇和同班同学会有什么不同。

这些都补齐了，才谈得上"代个数进去"。补齐以前，三条方程的价值不在算出数字，而在告诉我们该补哪些东西、哪些东西不能拿来充数。比如，把"信心"和"正确率"各打一个分，加起来当作"动力"，算起来很方便，可两个量各代表什么、单位是否相通，都还没说清，这样的加法就像把体重和身高加起来，得出一个很精确的数字，谁也不知道它在说什么。

做过课程研发的人大多见过一种表格：学生的"学习动力指数"，由出勤、作业完成率、课堂举手次数各按权重相加。这张表并非全无用处，它至少让人开始记录。可它默认了一件事：三个数字说的是同一种东西，只是多少不同。小宇的作业完成率一直很高，举手次数却掉到零，按表算他的"动力"只是中等，这张表把一个正在离开的孩子算成了一个还行的孩子。三条方程在这里提醒的，正是先说清每个量站在哪个位置、通过什么关系牵动别的量，再谈加减。

还要补一句：就算模型补齐了，它给出的也多半是一种可能性，而不是一条铁轨。同样的理解、同样的条件，小宇那天晚上也可能因为同桌一句话，或者因

为那道题恰好让他想起了什么，硬是把 $5x+2=3x+10$ 做了出来。教育里的模型要给个体差异、测量误差和没看到的因素留出地方，写成“在这种处境里，空着的可能性更大”，比写成“他一定会空着”更老实，也更经得起检验。

◆ 五、老陈画的圈：互生怎样不变成绕圈子

会议快结束时，老陈在白板上画了一个圈：“他不学，所以没信心；没信心，所以不学。你们这三条方程，S生D、D生E、E又生S，跟我这个圈有什么两样？”这一问比刚才的玩笑尖锐得多，因为它指向的是一个真问题：互相生成，会不会只是在兜圈子？

先看一个和学生无关的小例子。有两个数，甲是乙的2倍减1，乙比甲少2。两句话互相依赖，谁也不先于谁，可它们一起限定出唯一的一对数：甲是5，乙是3。代回去检验，5等于3的2倍减1，3也确实比5少2。互相依赖并不自动等于空话，只要每一句都是具体的约束，它们合起来就能说出一些单靠一句说不出的东西。

再把第二句换一换看看。如果第二句改成“甲是乙的2倍减3”，两句话就打架了，同一个乙的2倍，不可能既减1又减3得到同一个甲，找不到任何一对数能同时满足；如果改成“甲加1正好是乙的2倍”，两句说的其实是同一件事，满足条件的数对有无穷多。写出“互相影响”这几个字，既不保证有答案，也不保证答案唯一，内容全在具体的约束里。老陈那个圈的毛病，正在于两句话说的是同一件事：“不学”和“没信心”都是从“他不举手、不尝试”这一个观察里读出来的，只是换了两个名字，所以怎么转都转不出新东西。

要让这个圈变得有内容，得给每一个环节找一个独立的观察入口，再给每一条箭头说出一个过程。“没信心”可以看他自己怎么说，比如每周让学生在小纸条上写一句“这周有没有一道题，你觉得自己能想出来”；“不尝试”可以看他在不计

分的新题型上，有没有写下自己的第一步。两个入口分开以后，箭头的先后就可以检查：如果先让尝试变得便宜，比如新题型上写了过程就有分、空着和做错不再是同一个结果，那么照"没信心导致不尝试"的说法，他的尝试应该在小纸条变化之前就先动起来；照"不尝试导致没信心"的说法，小纸条上的话会在尝试多起来之后才慢慢变。两种说法给出了不同的预言，哪一种都可能被事实打脸，这就不再是绕圈子了。

学自行车的孩子身上也有这样一个圈："不敢骑所以骑不好，骑不好所以不敢骑。"真要帮他，教练会把这个圈拆开看：先在空旷的地方让他练一次转弯，只看他转弯时身子倾不倾，不管他怕不怕；再问他"现在还怕那个弯吗"，只听他怎么说，不看 he 骑得怎样。两件事分开看，才知道该先练身子，还是先陪他把那个弯走一遍。

这一章的底牌可以说清楚了：三条方程把一个模糊的"他为什么不学"，拆成三个可以观察的问题——他现在会什么、是怎样长出来的；他下一步会怎么走、由什么一起决定；这一段经历又留下了什么新条件。拆开以后，每个问题都有自己的证据去处，三个问题之间的牵连也可以一条一条拿出来检查，而不是被一个"不想学"一口吞掉。

这三问还有一个顺带的好处，和你的第二个问题有关。导论说过，系统性思考的最小单位是三句追问：一个结果是在什么条件里、经过哪些尝试长成这样的，它又反过来改变了什么。今天林老师拿来拆小宇的三问，正是这三句追问用在一个学生身上的样子。老师自己先会这样问，才谈得上教学生这样问；第二部讲小禾的时候，这三句话会从教研会的白板上，走到学生的草稿纸上。

这个判断也有它用不上、甚至会错的地方。如果一个更简单的原因已经够了，比如小宇近视加深、坐在后排看不清黑板，配一副眼镜问题就好了大半，那就该用简单的解释，三条方程不必出场。如果三个问题都是在结果出来以后才回

答，答案又可以随手在S、D、E之间挪来挪去，那它就只是把事后的话说得更整齐，什么也没检验。如果加上D和E以后，对小宇的判断并没有比“基础差”多出任何可以检验的区分，那三条方程就只是在整理语言，应该老实承认。还有一点也要说在这里：三条方程只负责把问题摆清楚，并不告诉我们先从哪一处下手，是先改批改方式、先换一种讲法，还是先换一条任务路径。那要看哪一处最吃紧、哪一处改得动、代价有多大，第五章和第七章会专门来谈。

散会时，老陈把白板上的圈擦掉了一半，留下一句：“拆是拆开了，可他到底怎么才会动起来？”这一问很公道。三条方程告诉我们三样东西各在什么位置、彼此怎样牵连，却还没有说清是什么让整件事动起来：为什么有时候一次困难让人更想试，有时候却让人放下笔。下一章要讲的，就是这台发动机。

带走的话

三条方程不是公式，而是把一个“为什么”分装进三个各有证据去处的口袋。

小 账

人物是真的吗？ 教研会、老陈和学自行车的孩子都是构造的场景和类比。

哪一句还要检验？ “每次都管用的办法会被用到它管不了的地方”是候选机制：若小宇在其他需要两边同时看的题上换了做法，就要另找。

方程能代数算分吗？ 不能。F、G、H是占位记号，补齐观察单位、变量、测法、时间顺序和机制之前不能代数；甲乙两数的小例子已核算。

什么时候不必用？ 近视看不清黑板这类简单原因够用时；若加上D和E后并没有比“基础差”多出可检验的区分，就只是在整理语言。



03

第3章

动力不是一箱油：张力怎样变成"还想再试一次"

这一章的问题

表扬、加分、谈心都试过了，为什么学生的劲头总是三天就漏光？

场景 期末复习课上，小宇做 $5x+2=3x+10$ 又停在" $10-2=8$ "，和十二月作业本上一模一样。

◆ 一、加满了油，车还是不走

期末考试前的最后几天是复习课。林老师在黑板上写了一道这学期反复出现的方程： $5x+2=3x+10$ ，请大家先自己做。教室里响起一片沙沙声，小宇也动了笔，写下" $10-2=8$ "，停了几秒，又把笔放下了。林老师走到他身边，看见草稿纸上那一行字，和十二月作业本上的那一行一模一样，连停下来的位置都一样。

她想起这一学期为小宇做过的事：谈过心，当众表扬过，搞过小组加分。这些办法背后有一个共同的想象：动力是装在学生身上的一箱油，油少了就往里加，加了就能跑。表扬是一桶油，加分是一桶油，谈心是一桶更贵的油。这个想象很直观，也有它对的地方，可它解释不了一件事：小组加分那一周，小宇确实举了两次手，三天以后书又立起来了。油加进去了，怎么三天就漏光了？

这个想象之所以流行，是因为它好管理。油可以计量：表扬了几次，加了几分，谈了几回话，一张表就记得清清楚楚，期末还能汇报"本学期共开展激励活动若干次"。可是它把眼光引向了加油的人，而不是那辆车卡在什么地方。加得

越勤，越容易以为问题出在"加得还不够"，于是下学期换一种更响亮的油，车还是陷在原来那个坑里。

一辆车加满了油还不走，修车师傅不会再往里加油，他会去看别的地方：离合器是不是打滑了，轮子是不是陷在泥里。小宇的问题也一样，与其问他还剩多少油，不如问他卡在哪里。从作业本上看，他每次都卡在同一个地方，卡在两边都有未知数的那一步。这一步卡住的不是一箱油，而是一场打了一学期、没有人去劝的架。

这一章要讲的是，那场架本身就是动力的来源，只要有人接住它。为了说清这件事，我们需要母本里一个很重要的东西，叫123原理。名字听起来像小学口算，其实它说的是一台发动机：两样东西打架，打到一定程度，逼出第三样东西改变；第三样改变以后，又反过来改写原来打架的那两样；于是新的架，在被改过的条件里重新开始。

◆ 二、旧的等号和新动作在打架

先看打架的是哪两方。一方是小宇已经有的东西，属于他的E：小学里练熟的算术习惯，等号的意思是"算出来等于"，等号右边是放答案的地方，解题就是从答案往回倒着算。这套习惯不是坏东西，它陪小宇做对了几百道还原问题，是他手里最可靠的工具。另一方是初一要他学的新动作，属于他正在走的D：两边同时减去同一个数，两边同时减去 $3x$ ，把等式当作一个可以两边一起动手的东西。

这两方为什么会打架？因为在小宇的旧习惯里，等号右边是"答案的座位"，答案只能算出来，怎么能往里减东西呢？往答案里减掉 $3x$ ，就好像考完试偷偷改分数，怎么想都不对劲。所以老师在黑板上写"两边同时减去 $3x$ "，他照着抄得下来，心里却不服气，下一次自己做时，手还是自动走回倒着算的老路。每一次

走老路走到"10-2=8"就断，每一次的作业上就多一个"过程不规范"，这场架就这样一点一点累积起来。

累积是看得见的。第一章林老师排开的那些作业本里，十二月以后的几页，停顿的位置几乎一样：都停在要对等号右边动手的那一步。一个错误第一次出现，可能是偶然；在同一个位置连续出现五六次，就说明那里有一道墙，墙这边是他熟悉的旧路，墙那边是老师指的新路。他每撞一次，墙并没有变矮，反倒让他更确信那边本来就不是给他走的。张力在累积，没有人接，它就慢慢从"想不通"变成了"不想想了"。

学游泳的成年人对这种架都不陌生。一个四十岁才下水的人，身体里装着几十年的陆地习惯：头要抬着，想吸气就吸气，脚底要踩到实的东西，心里还有一句"我天生怕水"。教练要他做的新动作，却是把脸埋进水里，慢慢吐气，让身体平躺着往前滑。每一次他把脸放进水里，脖子就自己往上一挺，脚就往下一沉，人就站起来了。这不是他不想学，是旧身体和新动作在打架。

这样的架如果没人管，通常是旧的一方赢。道理很简单：旧习惯熟、快、不费脑子，新动作生、慢、还容易出错，一个人累了、急了、没人看着的时候，手和身子都会自己走回老路。就像元旦定下的晨跑计划，跟温暖的被窝打上几个回合，被窝十有八九会赢。所以张力不会自己变成动力，它只是给了动力一个发生的机会；这个机会没人接，架打着打着，就成了一次又一次确认"我果然不行"。

这时候，教练站在池边喊"放松，别怕"，等于往油箱里加油，喊得越响，他的脖子越硬。好的教练会换一种办法：让他扶着浮板，脸埋下去，什么也别做，只数五秒。五秒钟里，他第一次感觉到水把自己托住了。这个感觉一出来，事情就变了：他原先以为水是要把人往下拽的东西，现在知道水也会往上托。新的样子从旧习惯和新动作的打架里被逼了出来，这就是第三维的改变，是一个新的显露，S。

更要紧的是后面那一步。“水会托住我”这个新显露，会反过来改写原来打架的两方。下一次下水，他的身体不再全力对抗，脖子挺得没那么急了，这是旧条件被改了；他也愿意多试一次滑行，再试一次吐气，这是新动作的路走得更远了。母本把这一步叫做回写。旧架打完，新架也跟着来：现在他发现自己滑得出去，却不知道什么时候抬头换气，新的张力在一个已经被改过的条件里，重新开始。

把这件事和小宇放在一起看，123原理的轮廓就清楚了。两维之间的矛盾（典型的是D和E）不断累积，逼出第三维（典型的是S）改变；这个改变回写原来的两维；新的矛盾在被改过的条件里生成。动力不在这台发动机的某个零件里，它就是发动机转起来的样子：一场架被接住，长出一点新的“我会了”，这一点又让下一次的架变得打得起。

这里说的是“典型”，不是“唯一”。小宇这场架，是旧条件和新路径之间的架，逼出来的是一个新的理解，这是123原理最常见的样子。有时候打架的是另外两方，比如一个学生已经看懂了，作业格式却只留一个填答案的空，这时候被逼着改变的可能是他的走法，甚至是那张作业纸本身。哪两方在打、该动哪一方，第五章会专门摆开来讲；这一章先把发动机怎样转说清楚，就像学开车，先知道踩油门车会走，再去学什么时候该换挡。

◆ 三、一架画在纸上的天平

复习课后的那个下午，林老师把小宇叫到办公室。她没有再讲“移项要变号”，十二月的一个课间，她已经这样讲过一次。那次小宇当场就会了，当晚作业还用这条口诀做对了两道，可三天以后，草稿纸上又只剩“ $10-2=8$ ”。口诀给了他一个答案，那场架却被绕了过去：旧的等号原封不动地待在原处，新口诀像一张贴在旧墙上的便利贴，风一吹就掉了。

这一次，她先换了个问法："我告诉你答案是4，你帮我验一验对不对。"这是小宇的拿手活，他很快算出左边 $5 \times 4 + 2 = 22$ ，右边 $3 \times 4 + 10 = 22$ ，两边一样。他算得很顺，脸上难得没有那种躲闪的神情，像终于被请回了自己熟悉的球场。

林老师接着在纸上画了一架天平，左盘放5个一样重的袋子和2块砖，右盘放3个同样的袋子和10块砖，天平是平的。"两边各拿走3个袋子，天平还平不平？"小宇想了一会儿，说平。拿走以后，左边剩2个袋子和2块砖，右边剩10块砖；再两边各拿走2块砖，左边2个袋子，右边8块砖。他自己说出来了："一个袋子4块砖。"

然后他停下来，看着那架天平，说了一句："那这个等号，其实是天平的那根针？"这句话说得有点笨，却是这一学期他第一次自己说出一个关于等号的新看法。旧的"等号是算出答案"和新的"两边同时减去"打了一学期的架，在这个下午终于逼出了一个新的显露：等号是一架天平，两边一样重，所以两边可以一起动手。这一次架不是被绕过去的，是被接住的。

这个下午的安排里，有一处容易被忽略的巧思。林老师没有让小宇先扔掉他的旧习惯，而是从他最拿手的代入验算起步：两边各算出22，"两边一样"这个念头就从他自己手里冒了出来。天平只是把这个念头画成了一样看得见、摸得着的东西。接住一场架，不是宣布哪一方赢，而是在旧的和新的之间搭一座桥，让人能从熟悉的这头，走到陌生的那头。学游泳时的浮板也是这样一座桥：它不要求人立刻相信水，只要求他先相信手里这块板。

说这是一个新显露，要说清楚它到了什么程度。它此刻向林老师和小宇自己显露，通过他自己说出的那句话，以及他接着独立做出的一道 $4x + 3 = x + 18$ ：两边各拿走一个 x ，得 $3x + 3 = 18$ ，再拿走3，得 $3x = 15$ ， $x = 5$ ，代回去两边都是23。它出现在两边系数都是正数的方程里；能认出来、能说出来，至于能维持多久，这

一个下午还看不出来。这是一个刚刚冒头的显露，在从弱到强的那条连续谱上，它站在很靠前的位置。

回写要到后面去看。寒假作业交上来时，林老师特意翻了方程那几页：十道两边有未知数的题，有四道是左右对齐写的，每一步两边各动一下；剩下六道，仍然是一串连着的等号。这是一个不算大的变化，但它是可以被看见的变化。还有一处更小的痕迹：第七题的页边，又出现了一行铅笔字："如果减完左边是负的袋子怎么办？"那道题是 $2x-3=5x+6$ ，两边各减去 $5x$ ，左边就出现了 $-3x$ ，天平上找不到"负的袋子"。

这行字值得多看两眼。它说明那个新显露确实回写了他的条件：他开始用天平去看等式，这是旧E被改动了一点；他愿意往前多试一步，试到天平不够用的地方，这是新路走远了一点；他重新在页边写问题，这是"写了也没人看"那条旧规矩松动了一点。新的架也随之来了：天平管得了正数，管不了负数，下一场张力已经在被改过的条件里开了头。小宇离"重新爱上数学"还远得很，可是这一回，他手里有了一样可以带到下一次去的东西。

把三种结局摆在一起，区别就清楚了。上学期那些没人接的架，结局是挫败：草稿纸上一行" $10-2=8$ "，然后空白。十二月那次口诀，架被接住了一下，却什么也没留下，结局是三分钟热度。这个下午的天平，架被接住了，也留下了东西，结局是"还想再试一次"，哪怕这一次只体现在页边的一行字上。

用上一章的三问回头看这个下午，会看得更细。新的显露"等号是天平"，是在什么条件里、经过哪些尝试长出来的？条件是一间不打分的办公室、他自己拿手的代入验算、一张画在纸上的天平；尝试是验算、拿走袋子、拿走砖块、自己说出结论。

下一步他会怎么走？面对 $4x+3=x+18$ ，他选了两边各拿走一个 x ，这一步是由刚长出来的理解和手边的天平一起决定的。这一回又留下了什么？寒假作业里四道对齐的方程，还有页边重新出现的问题。三条方程在这里不是公式，而是让这个下午的每一处都有地方可放，也让每一处都有地方可查：如果寒假作业里一道对齐的都没有，那就说明这个下午长出来的东西，只活在了办公室里。

◆ 四、三笔纪律：引擎、结算点和最容易漏的那一笔

讲123原理，母本特别强调三笔纪律，每一笔都对应着教室里一个常见的走偏。第一笔，矛盾是引擎，不是故障。很多善意的安排，是把架提前劝开：小宇怕两边有未知数的方程，那就先只给他一边有未知数的题，让他天天做对，天天开心。这样的课堂很顺滑，可什么也长不出来，因为能逼出新显露的那场架，被提前拆掉了。

可引擎也会过热。一个晚上布置二十道两边有未知数的题，每道都打一个红叉，再在全班面前念一遍错题名单，这就不是张力，是撕裂。学游泳的人被直接推进深水区，学会的往往不是游泳，而是"离水远一点"。所以要看的不仅是有没有矛盾，还有矛盾有没有人接、接不接得住、有没有大到把人压垮。

顺便说一句，"接"的那双手不一定是老师的。一个同桌问一句"你为什么停在这儿"，一道设计得好的题把旧办法和新办法同时摆在面前，一页允许写"我卡在哪里"的作业纸，都可能接住一场架。老师的手最要紧，却不一定是唯一的手；一间教室里能接架的手越多，张力被浪费掉的机会就越少。这也提醒管理者，接架的能力不只是某位老师的个人功夫，它也可以被写进任务、作业格式和课堂规矩里。

第二笔，S是结算点，不是第一因。办公室里常有两种说法，方向相反，毛病相同："他没理解，所以没动力"，或者"他终于理解了，所以有动力了"。两种

说法都把"理解"当成一个自己会动的起点，好像它从天而降，然后启动了一切。可那个下午的"等号是天平"，是一学期的架加上一次被接住的过程结算出来的，它是结果，不是源头。一碗汤的鲜味是火候和食材结算出来的，没有人会说"因为这碗汤鲜，所以厨房开始做饭了"。

第三笔，回写最容易漏。讲完"他懂了"，一定要追问一句"它又改了什么"。如果林老师那天下午只在心里记下"小宇懂了天平"，而没有去翻寒假作业，她就看不见那四道对齐的方程和页边那行字，也就不知道这次接住到底有没有留下东西。阳涌，你关心的"动力机制"，最容易断就断在这里：一次成功的接住，若没有人去看它改写了什么，就会和十二月那条口诀一样，在老师的记忆里是一次成功，在学生的路上却什么也没留下。

林老师那天下午做了一件小事：在小宇作业本的封底写了一行铅笔字，记下日期、"天平"两个字，和她打算在寒假作业里看的三样东西——对齐的写法，页边的问题，两边有未知数时第一步怎么走。这行字本身还不是回写，记录只是让回写有机会被看见；真正的回写，要等小宇下一次面对等式时有没有不一样。可是没有这行字，她多半会在开学的忙乱里忘掉去看，那么就算回写发生了，也会像一封没人拆的信。

还要防一种误用：把123原理当成万能的三步法，好像任何"第一步、第二步、第三步"都是它。123原理说的是两维的矛盾怎样逼出第三维改变、又怎样回写，它不是一个教案模板。书里后面还会遇到几组带"三"的东西：第四章的意义三律，第五章的三种应用。数字相同，层次不同，装进一个抽屉，看上去整齐，用起来就分不清谁管什么了。

另外，矛盾并非一出现就要处理。小宇把等号当成"算出答案"，这个看法在小学里陪了他好几年，从来没有碍过事，那时它和任何新动作都没有冲突。只有到了两边都有未知数的方程，这个看法开始挡住他做成一件他该做成的事，矛盾

才成了需要处理的问题。母本的说法是，对立影响到价值的获取时，矛盾才成为问题。第五章还会把这一点放进完整的诊断工序里细讲。

◆ 五、底牌：动力是被接住以后的回写

这一章的判断是：动力不是一种存量，而是张力被承接以后的回写。学生身上没有一只可以不断加满的油箱；有的是一场又一场旧条件和新尝试之间的架。架没人接，就变成挫败；接住了却什么也没留下，就变成三分钟热度；接住了、又改写了下一次的起点，才会长出"还想再试一次"。所以问"怎样给他加点劲"，不如问"他眼下正在和什么打架，有没有人接，接完以后留下了什么"。

这个判断有它会错、也有它用不上的地方。如果小宇连着几周睡不好，或者家里正出着事，那么他放下笔，首先是因为累和乱，把它解释成"张力没人接"，就是把一件简单的事说复杂了，这时候先让他睡够觉。有些学生确实有很稳定的兴趣，在几周之内看起来就像一箱用不完的油，在这么短的窗口里，用"存量"来近似描述并无大碍，更简单的说法够用，就留着它。还有，张力不等于压力，被嘲笑、被比较带来的紧张，压缩的是继续尝试的条件，不能借"矛盾是引擎"的名义去制造。

这个判断也可以被检验。如果它是对的，那么在同一个班里，经历过"被接住并留下记录"的那些困难时刻，应该比只得到表扬或加分的时刻，更常在后来的作业里留下痕迹：对齐的写法，自己写下的问题，在新题型上多走的一步。可以事先写好：如果一个学期追踪下来，两类时刻之后的这些痕迹没有差别，那就说明"回写"并没有多解释什么，这一章的说法要改。

放回你的第一个问题，这一章给出的是一个分成两半的回答。动力的来源，是学生已有的东西和眼下要做的事情之间的那场架：没有落差就没有架，没有架也就没有什么要去够的东西。动力的机制，是这场架被接住、长出一点新的显

露、再回写成下一次的起点。来源在每个学生身上几乎天天都有，机制却要靠课堂去搭；所以真正稀缺的，往往不是学生的油，而是教室里接架的那双手。

林老师把那张画着天平的纸夹进了小宇的作业本，没有在上面打分。小宇走出办公室时，回头问了一句："下学期是不是还有更难的方程？"林老师说有。他点点头走了，没说喜欢，也没说害怕。一场架被接住了，可它要把人带到哪里去，还说不清楚：他想往哪里走，是什么让一个方向在他心里慢慢有了形状？下一章就来谈目标、路径与约束怎样在活动里一起长出来。

带走的话

动力不是一种存量，而是张力被承接以后的回写；稀缺的是接架的那双手。

小 账

人物是真的吗？ 小宇、画天平的那个下午和寒假作业里的痕迹都是构造的；学游泳的人是类比。

哪一句还要检验？ 若追踪一学期，"被接住并留下记录"的困难时刻与只得到表扬或加分的时刻之后，对齐写法、自写问题等痕迹没有差别，"回写"之说就要改。

算式对吗？ $5x+2=3x+10$ 、 $4x+3=x+18$ 等方程的解和代回验算都已核对。

什么时候不适用？ 连着几周睡不好或家里出事时先解决累和乱；被嘲笑、被比较的压力不是张力，不能借"矛盾是引擎"去制造。



04

第4章

想去哪里：目标、路径与约束怎样一起长出来

这一章的问题

墙上贴好了"90分"的目标，为什么学生拿着它还是没有方向？

场景 开学第一周全班把数学目标贴上后墙，小宇写的是"90分"，到期中纸条翘了角。

◆ 一、一张写着"90分"的纸条

开学第一周，林老师让全班在一张便利贴上写下这学期的数学目标，贴在教室后墙。墙上很快长满了相似的句子："考到 95 分""不再粗心""期末进前十"。小宇写的是"90 分"，字很工整，没有多一个字。到了期中，那张纸条的一角翘起来了，没有人去按回去，包括小宇自己。

办公室里有人说，这孩子缺的就是目标，目标定下来，人就有方向了。这话听起来很像常识，可它默认了一件事：目标是一张事先写好的纸条，人只要把纸条揣在兜里，照着走就行。小宇兜里明明揣着"90 分"，书却照样立着。看来问题不在于纸条有没有写，而在于这张纸条有没有和他手上正在做的事情发生过任何关系。

周末骑车出门的人都知道，"今天骑到湖边"这句话，出门前说出来和骑到半路再说出来，分量完全不同。出门前它只是一个地名；骑到第三个路口，发现沿河那条小路有树荫、风是顺的，人会自己改主意："先不去湖边了，顺着河骑到

桥头看看。"后来那趟骑行真正的目的地，是在路上长出来的。没有人会说他"缺乏目标"，恰恰相反，他的目标第一次有了自己的样子。

上一章讲过，动力是张力被接住以后的回写，不是一箱存量的油。那么张力从哪里来？其中一端，就是"想往哪里去"。母本把差异序列 D 的内部展开成三层：D1 叫意义目标，管方向；D2 叫路径组织，管怎样一步一步推进；D3 叫优化约束，管误差、冗余和损耗，让行动在有限的时间和力气里还能走下去。骑车的人想去哪里是 D1，走哪条街、在哪里拐弯是 D2，天黑前要回家、水壶只有半瓶是 D3。

这三层有两个容易被讲歪的地方，先说在前面。第一，它们不是三种人，不能说"小禾是 D3 型的学生，小宇是 D1 缺失型的学生"，同一个孩子在一个下午里可以三层都在动。第二，三层之间没有一条从上到下的指挥链，好像目标先下命令，路径负责执行，约束负责监工。骑车的人是在路上发现了树荫，才改了目的地；执行中的发现，常常会回过头来改写目标。

这样分层还有一个实际的用处。一个孩子方向说得很动人，"我想把数学学好"，过程却一直在原地打转，人们习惯说他"光说不练、没有动力"。分层以后可以多问一句：也许他的 D1 并不缺，缺的是 D2，他不知道"学好数学"的下一步具体是什么动作；也许 D2 也有，卡住他的是 D3，每做一道题要花四十分钟，他算了算时间就放弃了。你管过学校，大概见过不少被统称为"动力不足"的情形，拆开以后，其实是三种很不一样的卡法。这一章就沿着一节课，看看目标、路径和约束是怎样在同一件事里一起长出来的。

◆ 二、量筒里的玻璃珠：目标怎样有了样子

七年级上学期学到"代数式"时，林老师上了一节不太像数学课的课。每个小组领到一只细长的量筒，里面装着水，水面停在 6 厘米的刻度上，旁边一小盒大小一样的玻璃珠。任务只有一句话："一颗一颗往里放，看看水面怎么走。"没有

给公式，也没有问"求什么"，小禾那一组的人面面相觑，像拿到一张没有题号的卷子。

小宇那一组负责记录的恰好是他。第一颗放下去，水面到了6.4；第二颗，6.9；第三颗，7.2；第四颗，7.6。他起初只是照着念数，念到第四个时停了一下，说了一句很小的话："好像每次都差不多涨四毫米。"那个"差不多"里有一处不太听话，从6.4到6.9涨了0.5，从6.9到7.2只涨了0.3。可是从6.0到7.6，四颗珠子一共涨了1.6厘米，平均下来正好每颗0.4。

这就是母本说的特征律在起作用：一些差异被反复比较之后，稳定成了一个可以指认的特征，目标由此获得了形状。在第一颗珠子落下之前，"水面怎么走"对小宇来说什么也不是；在第四颗以后，它变成了一个他自己说得出来的东西："每多一颗，多四毫米。"这句话一旦被说出来，下一个问题就自己冒头了：那放多少颗，水能到10厘米？这个问题不是林老师布置的，是那个刚刚显露出来的特征把它叫出来的。

到了八年级，他会在课本里正式遇到"函数"这个词，很多学生第一次见到它时，脑子里没有任何可以指认的样子，只有一个 y 和一个 x 被一个等号拴在一起。函数真正开始有样子，往往就是在某一次发现两个量会一起动的时候：珠子多一颗，水面跟着高一截，而且高多少是有规矩的。那一刻，"两个量的联动"从课本上的一个词，变成了他亲手摸过的一个特征。

日常生活里有个很像的例子。刚学开车的人听不出发动机的声音有什么差别，老司机却能在一个声响里听出"该换挡了"。这不是老司机天生耳朵好，而是成千上万次比较，让某种声音的差异稳定成了一个特征，而这个特征又自动给了他下一步的方向。目标就是这样发生的：它先是一个能被认出来的差别，然后才成为一个想去的地方。

所以，回头看墙上那张"90分"的纸条，问题就清楚了一些。"90分"本身也是一个特征，但它是从成绩单那里借来的，不是从小宇自己的比较里稳定下来的。它告诉他终点在哪里，却没有告诉他路上哪一处差别值得多看一眼。一个从自己手上长出来的"每颗四毫米"，比一个从墙上借来的"90分"更能把人带到下一步，原因就在这里。

还有一个细节值得多看一眼。"每颗四毫米"在这节课上是正在长出来的东西，它给了小宇方向，属于D1的一部分；等到下一节课，林老师让大家写出水面高度 h 和珠子颗数 n 的关系，小宇顺手写出 $h=6+0.4n$ ，这时它已经沉淀成他手里可以调用的条件，成了E的一部分。同一个东西，在这一刻是正在被追的方向，在下一刻是已经站稳的落脚点。角色的变化来自时间和问题的变化，每次讲到它，都要说清它此刻是哪一种，而不是看哪个说法方便就往哪个字母里搬。

◆ 三、第二条路：自由不是拆掉所有围墙

"放多少颗能到10厘米"这个问题一出来，全班马上冒出了两种做法。小禾在自己组里接着往下列表：7.6后面是8.0，再往后8.4、8.8……一直写到10.0，数一数，十颗。她写得很快，字也漂亮，这是她熟悉的路。小宇没有列表，他在草稿纸上写了一行："还差 $10-6=4$ 厘米，一颗0.4， $4\div 0.4=10$ 。"两条路走到了同一个答案。

接着林老师加了一个条件："量筒最高的刻度是15厘米，最多还能放几颗，水面才不超过刻度？"小禾的表格要一行一行写到很长，写到一半她开始皱眉。小宇的那一行算式只需要换两个数：还差 $15-6=9$ 厘米， $9\div 0.4=22.5$ 。他愣了一下，珠子哪有半颗？然后他自己想通了：放22颗，水面在14.8；放第23颗，就到15.2，越过刻度了。答案是22颗。

这里发生的事，母本用自由律来解释：矛盾纠缠触发，路径裁剪，新模式激发。旧办法（一行一行列表）遇到了它承接不住的条件（数太大、行太多），这

是触发；保留其中有效的部分（每颗 0.4 这个规律），剪掉不必要的步骤（中间那十几行），这是裁剪；最后一条新的路能不能跑起来、跑出来的结果对不对，要试过才知道，这是激发。小宇的"22.5 所以 22"就是新路跑起来的证据，那个"半颗珠子"的别扭，正是新路被现实条件校准的时刻。

母本的自由观有一个很容易被误读的地方。它说自由是长出新路的能力，而不只是在现成的选项里挑一个。可这并不意味着现成的选择权不重要。林老师允许学生用列表、用算式、用画图任选一种方式来回答，这个"任选"本身就是新路得以出现的条件之一；如果她规定"必须列表"，小宇那一行算式很可能根本不会被写出来。新路是在已有的材料、规则 and 选择余地之中重新连接出来的，不是从真空中跳出来的。

做饭的人对此很熟悉。打算做可乐鸡翅，打开冰箱发现可乐喝完了，这是触发；有人直接放弃，改点外卖，有人想到柜子里还有半罐蜂蜜和一点老抽，可以让颜色和味道走到差不多的地方，这是裁剪和重新连接；端上桌好不好吃，吃了才知道，这是激发。这个人的自由，并不来自他拥有一个无限的调料柜，恰恰来自他知道手头这几样东西还能怎样配。如果柜子里只有一瓶盐，他再有想法也只能做白水煮鸡翅。

所以教学生系统思考，有一部分工作是帮他分清两类东西：真正动不了的条件，和只是一直被当成动不了的习惯。量筒最高刻度 15 厘米，是动不了的条件，22.5 必须落到 22；"这类题就该列表"，却只是一个被当成规定的习惯。小禾在这节课上的不安，恰恰来自她把一个习惯当成了墙。第二部会专门讲她，这里先记下一笔：她不缺力气，缺的是一次发现"墙其实是门"的机会。

也就在这时，隔壁组发生了一件小事，正好说明三层之间没有单向的指挥链。那一组的珠子盒里混进了几颗小一号的珠子，他们的数据怎么也凑不成"每颗 0.4"，组长急得要把那几颗挑出去重做。一个平时不太说话的女生问了一

句："那小珠子是不是每颗也涨一样多，只是涨得少？"这一问，那组的目标就变了，从"求出 22 颗"变成了"珠子大小和水面涨多少有什么关系"。原本被当成干扰的东西，在执行中把方向改写了。林老师没有让他们回到原任务，只请他们下节课把发现讲给全班听。

◆ 四、第二十二颗珠子：继续做下去的劲

真正有意思的是接下来那几分钟。小宇那一组决定亲手验证"22 颗"。一颗一颗往下放，组里的人跟着数，数到十几颗的时候，旁边两个组也凑了过来。第 22 颗放下去，水面停在 14.8 附近，离那条刻度线只差一指甲盖。有人喊"再放一颗"，第 23 颗落下去，水面越过了 15。两个组的人一起叫了一声，小宇没有叫，他低头看了看自己草稿纸上那行"22.5"，嘴角动了一下。

母本用幸福律来解释这种继续做下去的劲：张力积累，模式转换，能量释放。张力在哪里？在"半颗珠子"那个别扭里，在"我算的到底对不对"的悬念里，也在两个组凑过来看的那几分钟里。模式转换，是他从"照着念数的记录员"变成了"手里有一个预测的人"。能量释放，是第 23 颗珠子越过刻度线时，他算出来的东西被一个不讲情面的量筒认了账。

母本把幸福体验拆成三个侧面：心的满足、身的快乐、灵的喜悦。放到这节课上，心的满足可以理解为他的那一行算式被接住了，有人认真地照着它去试；身的快乐，是手指捏着一颗颗玻璃珠、看着水面一点一点上来的那种具体的感觉；灵的喜悦，是"每颗四毫米""还差九厘米""半颗不算"这几个零碎的东西，突然连成了一个整体。这三个侧面是用来解释"劲从哪里来"的维度，不是一张拿来给孩子打分的量表，不能因为某个学生没表现出"灵的喜悦"，就断定他的学习不完整。

爬过山的人都有类似的经验。真正让人记住的，往往不是山顶的风景本身，而是最后那段陡坡上，腿酸得想停、心里却在算"还有两个弯就到了"，然后在第

二个弯后看见了山顶的那一下。那一下的快乐，有一部分来自腿，有一部分来自"我估计得没错"，还有一部分来自"原来这一路是这样连起来的"。只坐缆车上山的人看到的是同一片风景，却很少有人第二个周末还想再坐一次。

这里要分清一件事。幸福律说的这种劲，是在活动过程里生成的，不是装在小宇身体里、等着被老师点着的一台发动机。量筒、玻璃珠、那个"最高刻度15厘米"的条件、凑过来看的同学、允许他用算式而不必列表的规矩，都参与了这股劲的生成。所以当一个孩子没有劲时，教育者有理由先去检查过程和条件，而不只是反复要求他"自己振作起来"。至于外面给的奖励和这股劲是什么关系，第6章会专门讨论。

同一个量筒前面，劲也不是平均分配的。小禾那天看完第23颗珠子，只说了一句"跟我表格里推的一样"，语气平平。她的表格同样算对了，可那个答案是她一行一行抄出来的，中间没有"半颗珠子"那样的别扭，张力没怎么积累，自然也就没什么可以释放。这不说明她不会快乐，只说明那一次活动里，让劲生成的那段过程主要发生在别人的草稿纸上。幸福律在这里提供的，是一个可以去查的方向：同样的结局，谁在路上经历过那个落差，谁就更可能带着劲走到下一题。

还要把这三条律和上一章的123原理分开放。123原理讲的是两维之间的矛盾怎样逼出第三维的改变、改变又怎样回写；意义三律讲的是目标怎样发生、新路怎样长出、继续的劲怎样来。两者都带一个"三"，却不在同一层上。三律之间也会互相生发：一个新特征打开了一条路，新路带来了劲，劲又让下一个特征值得去辨认。但它们不是一条固定的流水线，不必每节课都按"特征—自由—幸福"的顺序打卡。

◆ 五、D3的剪刀：太快的修剪会剪掉嫩芽

回到那组数据，有一个细节前面一笔带过了：第二颗珠子之后，读数是6.9，比规律多了一毫米。下课前，林老师在投影上整理全班的数据，她犹豫过

要不要直接让大家把 6.9 改成 6.8, "这样表格干净, 规律一目了然, 还能省下三分钟"。这正是 D3 在起作用: 控制误差, 减少冗余, 节省损耗。四十分钟一节课, 每一分钟都是真金白银。

可小宇那一组有人说, 6.9 那次是因为读数时站着看的, 后来蹲下来平视着读, 才变成 7.2。这一句话把一个"误差"变成了一个新的特征: 读数要平视刻度线。如果那三分钟被省掉, 表格会更干净, 这个特征就不会被任何人说出来。母本把这种情况叫作过度优化: 一切都高效、顺滑, 却很贫血, 因为那些尚未证明有用的尝试, 被提前删掉了。

收拾衣柜的人常犯同样的毛病。为了让衣柜看起来整齐, 把一切"暂时用不上"的东西都扔掉, 结果到了冬天才发现, 那件看着别扭的旧毛衣, 其实是唯一一件在骑车时既保暖又不碍事的衣服。整理本身没有错, 衣柜也需要整理, 可整理的标准是"留下什么", 而这个标准本身需要被想一想, 而不是默认"越少越好"。

D3 是一把双刃的剪刀。没有它, 课堂会被无穷的枝节淹没, 二十组学生各自报二十种读数, 谁也比较不了谁; 所以统一的记录规则、清楚的完成标准、对时间的计算, 都是正当的。但它剪什么、留什么, 取决于这一次活动的目标是什么。如果目标是"尽快得到每颗 0.4 这个答案", 6.9 是需要修掉的毛刺; 如果目标是"学会怎样从测量里找规律", 6.9 恰恰是这节课最值钱的一个数。评价标准本身, 也要接受这样的追问。

林老师最后没有改那个数。她把 6.9 留在表格里, 在旁边用另一种颜色写了两个字: "站读", 然后请全班定一条记录规则: 读数一律蹲下平视, 读到毫米。这条规则本身也是 D3, 它同样在减少误差、方便比较, 但它是从那个"多出来的一毫米"里长出来的, 而不是在课前替学生预先剪好的。前一种修剪把意外挡在

门外，后一种修剪让意外先进门、说完话，再决定它住在哪个房间。两种做法花掉的时间相差不过三分钟，留下的东西却很不一样。

做过课程研发的人大多见过一种课：流程设计得极其精细，每个环节卡好时间，每个问题都有预设答案，公开课上行云流水，学生在下课后却说不出这节课到底让自己想通了什么。你在课程研发里大概也掂量过这种取舍：要一节漂亮的课，还是要一节留得住意外的课。母本给这种取舍的提醒是，D3 只管"在既定目标下怎样省"，它不负责替我们决定什么值得省，那个决定要回到 D1 去做，而 D1 自己也可能在活动中被改写。

这个判断有它的限度，在这里集中交代一次。第一，量筒课是一个构造的课堂场景，它展示的是目标、路径和约束可能怎样一起长出来，而不是证明了它们必定这样长；一个学生在活动中的投入，也可能主要来自玻璃珠的新鲜感、同伴凑过来看的热闹，或者那天他恰好睡得好，要分清这些，需要第四部讲的那种有比较、有预先判断的研究。第二，"让目标在活动中长出来"并不等于课堂可以没有清楚的任务和完成标准，初三复习课上给学生一个明确的分数目标，有时恰好是最好的安排，目标需要发生，不意味着一切目标都要从零发生。第三，意义三律是解释"为什么愿意继续"的理论语言，它可以帮我们看清楚该去检查什么，但它不是一张诊断量表，不应拿来给学生贴"缺乏自律""幸福律没启动"之类的标签。

所以，这一章想留下的判断是：目标不是学生心里事先写好的一张纸条，而是在活动中、在一次次比较里稳定下来的那个"可以指认的差别"；路径在旧办法承接不住新条件时被裁剪、被重新连接；约束帮助行动在有限条件里走得下去，却也可能把正在发芽的东西提前剪掉。因此，与其问"这个学生有没有目标"，不如问"这个学生有没有机会，让一个目标在他自己手上长出来"。墙上那张"90分"的纸条翘了角，不说明小宇没有方向，只说明那张纸条和他的手之间，还没有一颗玻璃珠。

这节课以后，书在小宇桌上又立了起来，不过不是每天都立着。一节好课点起来的那点劲，能不能撑到下一个单元，要看后面的日子有没有接着它往下走；量筒收回了器材室，“每颗四毫米”却还留在他的草稿纸上，至于它会不会在下次遇到方程时被想起来，谁也说不准。这种时好时坏一直拖到了下学期，林老师想再往前推一步，于是她接连试了三种办法，有的立竿见影，有的过了一周就不见了踪影。动力究竟会断在哪里，下一章跟着她这三次尝试去看。

带走的话

目标不是事先写好的纸条，而是在活动中从一次次比较里长出来的可指认差别。

小 账

人物是真的吗？ 量筒课、小宇、小禾和隔壁组都是构造的课堂场景，展示的是可能怎样长出来，不证明必定这样。

哪一句还要检验？ 学生的投入也可能来自玻璃珠的新鲜感、同伴的热闹或那天睡得好，要分清需要有比较、有预先判断的研究。

数字对吗？ 每颗约0.4厘米、22颗到14.8厘米、第23颗到15.2厘米等计算已核对；6.9那个读数是有意留下的误差。

意义三律能打分吗？ 不能。它是解释“为什么愿意继续”的语言，不是诊断量表，不该给学生贴“幸福律没启动”之类标签。



05

第5章

动力断在哪里：三种改变与三种熄火

这一章的问题

老师们为刷题还是鼓励吵个不停，学生的动力究竟断在了哪里？

场景 期中后的教研会上，老陈说小宇是练得少，林老师说他缺信心，两人争个不停。

◆ 一、教研会上的遥控器之争

七年级下学期期中考试以后的教研会，照例要过一遍各班的"问题学生"。轮到七年级(2)班，林老师刚说出小宇的名字，老陈就把茶杯放下了："这孩子我看过他的卷子，去分母那一步老错，说到底是练得少。给他二十道，做完就会了。"林老师说她试过加练，小宇做得越多越沉默，她觉得他缺的是信心，需要先被鼓励。两个人你一句我一句，旁边的年轻老师低头记笔记，记下来的只有两个词："刷题"和"鼓励"。

这样的争论很像一家人抢电视遥控器，一个要看新闻，一个要看球赛，嗓门越来越大，谁也没问一句：我们今晚到底想干什么？老陈说的"练得少"和林老师说的"没信心"，听起来是对同一件事的两种看法，其实很可能根本不在说同一件事。老陈说的是一道题的一个步骤，林老师说的是一个孩子的一学期。母本追溯早期123原理时，第一步要做的恰恰是这个：先找准我们讨论的是哪一个发生事件，再去识别彼此冲突的两个视角，最后找那个被忽略的第三视角。

于是林老师把小宇这三周的作业本摊开，大家先不吵，只看事。这学期学二元一次方程组，消元以后常常要解一个带分母的一元一次方程，七道含分母的方程里，有五道错在同一个位置。比如 $(x-1)/2 = (x+2)/3 - 1$ ，他两边乘 6 以后写成 $3(x-1) = 2(x+2) - 1$ ，最后得到 $x=6$ ；正确的写法是 $3(x-1) = 2(x+2) - 6$ ，解得 $x=1$ 。那个孤零零的“-1”没有分母，于是在他手里也没有被乘上 6。事件这下清楚了：不是“小宇学不动数学”，而是“去分母时，不带分母的那一项反复漏乘”。

事件一清楚，两个视角也就各归其位。老陈盯的是练习，也就是他尝试的那条序列，属于 D；林老师盯的是他心里那句“我又要错了”，属于 E 里自我的那一部分。被两个人同时忽略的，是第三个视角：小宇此刻以为“去分母”是什么。林老师问他，他想了想说：“就是把分母擦掉。”这句话就是他眼下的显露。擦掉分母，那没有分母的项自然什么也不用做；他的错误不是粗心，而是忠实地执行了一个错误的理解。

事件找准以后，这股张力还可以再描得细一点。母本要求看张力的方向、强度、持续时间和可修复性。方向是“擦掉分母”这个理解和“每一项都要乘”这个要求顶着；强度是它让含分母的方程几乎全军覆没，后面的应用题也跟着倒；持续时间是三周、七道题里五道，已经不是偶然手滑；可修复性要看局部提醒能不能把它扳回来，还是得换一种理解。四样一摆，老陈的“练得少”和林老师的“没信心”都还在桌上，只是不再是唯一的两张牌。

装修过房子的人对这种吵法再熟悉不过。夫妻俩为厨房要不要做成开放式吵了半个月，一个说开放式好看、做饭时能看着孩子写作业，一个说油烟会飘满客厅。后来请来的师傅只问了一句：“你们家平时爆炒多不多？”爆炒少，开放式没问题；爆炒多，加一扇玻璃推拉门，既看得见孩子，也挡得住油烟。争论的两方

都没错，只是谁也没问那件真正要解决的事，也就是炒菜和看孩子同时发生时，这间房该怎么分。

母本还加了一个限定，让这个工序免于变成凑数游戏：只有当对立影响了价值的获取，矛盾才成为需要处理的问题。老陈和林老师的分歧本来可以长期共存，教研组里观点不同是常事；它之所以值得认真诊断，是因为不管哪一方赢了，小宇都只会拿到一张药方，要么是二十道题，要么是一句"你能行"，而这两张药方都碰不到"擦掉分母"这个理解。反过来，如果两个说法只是同一件事的两个侧面，比如有人说"要算准"、有人说"要写全"，就没有必要硬凑出第三个视角来，那只是给同一张桌子多摆一副碗筷。

◆ 二、林老师的三次尝试

接下来三周，林老师一共试了三种办法。回头看，这三种办法恰好落在母本所说的三种应用上，母本称为SDE三原理：D与E的张力推动S改变；S与E失配推动D改变；S与D持续不相容时，去改变E。三个位置都是候选，每一次尝试之前，她都先在本子上写下一句"如果这招对了，我应该先看到什么"。这一句话后来帮了大忙。

第一次，她改的是S的入口。小宇的尝试（一遍遍去分母）和他的旧理解（擦掉就行）缠在一起，一直顶着，张力在这里。她借用第三章那架天平，画了左右两个托盘，左边放着"半袋 $x-1$ "，右边放着"三分之一袋 $x+2$ "和"拿走一块砝码"，然后问："要让每样东西都变成整的，两边各放大到六倍，那块砝码呢？"小宇盯着那块砝码看了好一会儿，说："它也得变成六块。"她事先写下的预测是：如果显露真的变了，他在换了形式的题目上也会记得乘那个常数项，而且说得为什么。

这里的"改变 S"并不宏大，没有新定理，也没有新名词，只是把"擦掉分母"换成"两边每样东西都放大六倍"。可一个理解换了，后面整串动作的意思就跟着换了，就像把导航的起点从"我家"改成"公司"，同一条路线的每一个拐弯都得重新算。至于它有没有真正改过来，不看他那节课说得多漂亮，要看后来换了模样的题目上，那个常数项有没有被他自己记起来。

第二次，她改的是 D。有些时候，小宇已经知道"每一项都要乘"，可是题目一长，项一多，他还是漏，目标和他眼下的承受量之间对不上。她没有再讲道理，而是换了一条路：去分母之前，先给方程里的每一项画一个框，数一数有几个框，乘完以后再数一遍，框数对得上才往下走。她的预测是：用框的时候漏乘会明显减少；要紧的是另一半，过几天撤掉画框，他还能不能自己守住。

第三次，她动的是 E，也就是评价和发言的规则。小宇知道方法，也练了，但他的作业本只收到勾和叉，一个叉就是全错；课上抢答，只有算对答案的人才有机会站起来说话。方法和练习都在，却被一套只看最后数字的规则夹着，他越来越不愿意把中间过程亮出来。林老师 and 老陈商量以后，给作业加了一条：写出"代入检验"的，哪怕最后错了，也有一半的分；作业末尾可以写一句"我卡在哪里"，她会专门回一句话。她预测的是：会先出现小宇自己用代入发现错误的痕迹，而不是正确率立刻上去。

结果三次各不相同，也不那么整齐。第一次那节课效果最显眼，小宇在课上说出了"砝码也得变六块"；可一周后的作业里，遇到 $x/3 + 2 = x/2$ 这样常数项挪了位置的题，他又漏了一次。第二次的画框，用的时候几乎不错，撤掉以后错误又回来一半，说明这条路还没被他接成自己的。第三次见效最慢，直到那一周的最后一次作业，本子边上才出现一行小字："x=6 代回去，左边 5/2，右边 5/3，不对。"他没改出来，但这一回是他自己发现自己错了，而不是等红笔来告诉他。

这三次尝试能说明什么，又说明不了什么，值得说清楚。三种应用把 S、D、E 依次当作候选的改变位置，候选不等于判决，字母上的对称也不保证现实里的对称。林老师明天就可以换一种讲法，这是她自己的权限，代价很小；改作业评分要和教研组商量，牵涉到别的班；而月考只看最后答案这件事，她根本动不了。三个位置在纸上一样大，在学校里却一个比一个重。选从哪里下手，看的是机制、权限和代价，而不是哪个字母排在前面。

还有一处细节让她后来很庆幸。第三周她一时着急，推出新作业评分的同时，又让小宇把画框重新用了起来，结果那一周的改善到底归谁，她自己也说不清。好在第一、二周她是一样一样试的，还留下了事先写好的预测。母本建议在多种张力交织时，用可以撤回、成本不高的小试探去比较不同位置的敏感程度，道理就在这里：一次只动一处，至少知道是哪一处在起作用；一起动，课也许上得更好，可是功劳就只能笼统地记在"综合改进"名下。

她还做了一件很多人会省掉的事：每一次尝试之后，问小宇本人哪一种对他有用。小宇的回答有点出人意料。他说天平"有点用"，画框"太麻烦"，至于"我卡在哪里"那一栏，他头两周根本不敢写，怕写了显得自己笨。这句话让林老师明白，规则改了，旧经验并不会立刻跟着撤走；一个被红叉教育了大半年的孩子，对"写出过程会怎样"的预期，要过一阵子才会松动。这正是第三次尝试见效最慢的一个候选解释，而如果她不问，这个解释就只会躺在小宇心里。

◆ 三、第一种熄火：顺滑得什么也没长出来

老陈也没闲着。他在周三下午开了一个提高班，把小宇也叫去了。他的办法简单有力：去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为1，五步口诀写在黑板正中，二十道题，题型一模一样，做完一张发下一张。两周后，班上去分母的

正确率上去了，小宇也做得像模像样，老陈在办公室里难得笑了一下："你看，练就是了。"

第三周，他出了一道看起来只差一点的题： $x/2 - (x-1)/3 = 1$ 。两边乘6，应该得到 $3x - 2(x-1) = 6$ ，展开是 $3x - 2x + 2 = 6$ ，解得 $x=4$ 。提高班里一半的人写成了 $3x - 2x - 2 = 6$ ，得到 $x=8$ ，口诀一步都没少，偏偏错在分数线前面那个减号上。把 $x=8$ 代回去一看，左边 $4 - 7/3 = 5/3$ ，不等于1。老陈对着这一摞卷子沉默了好一阵，说了一句很老陈的话："口诀背得挺好，就是题不按口诀长。"

小宇在提高班里的那两周，其实过得不算差。题目都会做，红勾一张比一张多，他甚至有一次在课间主动把卷子拿给同桌看。可这份顺利有点像在跑步机上跑步，腿一直在动，人却没有离开原地；新题一来，口诀在他手里和在别人手里一样失灵，而他并不知道失灵在哪里，只知道"又错了"。顺滑带来的那点好心情，没有留下任何能帮他面对下一道陌生题的东西，挫败感反而因为前两周的高期待而更重一些。

这是动力熄火的第一种方式：矛盾被压平了。母本的三笔纪律里第一笔说，矛盾是引擎，不是故障。提高班的二十道题之所以顺滑，是因为每一道都和上一道一样，学生的尝试和他已有的条件之间几乎没有落差，没有落差就没有张力，没有张力就不会逼出任何新的显露。学生在这两周里确实很忙，可忙的是同一个动作的重复，"每一项都要乘"和"负号跟着谁走"这两个理解，从头到尾没有被真正顶过一次。

健身房里有一种人，三个月都举同一只十公斤的哑铃，动作越练越标准，镜子前的姿势越来越好看，胳膊却一点没粗。教练会告诉他，肌肉要长，得有一点"举不太动"的分量，那一点吃力就是身体被逼着重新组织的地方。当然，另一头也有风险：第一天就上五十公斤，伤的是腰，不是肌肉。矛盾太小，什么也长

不出来；矛盾过度、失控，也会把人撕裂。好的训练和好的课堂，都在找那个"有点吃力，但接得住"的分量。

这里要替老陈说句公道话。练习本身不是问题，熟练能让一部分操作稳下来，下一次思考时就不必每一步从头处理，就像会骑车的人不用再想脚怎么蹬。提高班的毛病不在"练"，而在二十道题被设计得彼此毫无落差，练到后来，练的已经不是去分母，而是"认出这是口诀能管的题"。如果二十道题里有三道故意换了形式，比如常数项挪了位置、分数前面带了减号，张力就会被放回来，口诀也有机会被顶出一道裂缝，学生才会去问：口诀里那一步，到底在做什么。

◆ 四、第二、三种熄火：他就是懒，和那节很成功的公开课

第二种熄火发生在嘴上，却最常见。"他就是懒"是一个说起来很省事的结论，它把小宇此刻显露出来的样子（不举手、作业写得短）当成了一切的起点，好像有一个叫"懒"的东西先在他身上，然后才有了错题、沉默和立着的书。母本的第二笔纪律正是针对这一点：S是结算点，不是第一因。显露是一段过程在某个时刻结的账，把账单当成花钱的原因，就再也查不到钱是怎么花出去的。

把"懒"换成别的词，毛病也一样。"基础差"把旧的E当成第一因，"没信心"把自我看法当成第一因，"方法不对"把D当成第一因，每一个都可能有几分道理，一旦被当成自己会动的起点，后面的路就只剩一条：要么骂醒他，要么补基础，要么夸他，要么换方法。家里水管滴水，有人说"这根管子就是爱漏"，于是每个月换一根新管子；修水管的师傅却会先看水压、看接口的垫片、看谁每次都把阀门拧得太死。"爱漏"不是原因，是一个还没被查清的结果。

第一因式的解释之所以诱人，是因为它能让谈话结束。说完"他就是懒"，教研会可以进入下一个名字，家长会可以早点散场。更麻烦的是，这个词并不只停在大人嘴里。小宇在走廊里听见过一回"他就是懒"，此后他的作业写得更短了，

与其认认真真写完被说懒，不如干脆少写一点，至少显得是自己选的。一个用来解释的词，就这样变成了他下一次行动的条件，第一因的解释还顺手做了一次负向回写。

第三种熄火最让人遗憾，因为它发生在成功之后。五月初，周校长来听林老师的公开课，课题正是含分母方程的专题复习。天平、砝码、画框，环环相扣，小宇那节课还举手答对了一道题，听课的老师们在评课表上写满了好话。下一周，林老师翻开作业本，漏乘又回来了，书也重新立了起来。公开课像过年前的扫除，屋里亮堂了三天，因为东西放在哪里的规矩一样没变，正月还没过完，桌上又堆满了。

母本的第三笔纪律说，回写最容易漏：讲完"变了"，一定要追问"它又改了什么"。那节公开课确实带来了一次显露，可是它改了什么？作业本上的评分方式没变，天平那张图没有进入小宇自己的笔记，课后也没有人追问他下一次遇到常数项会怎么做；可用的信息、判断的方式、手边的工具、行动的权限，一样也没有被改动。显露有了，回写没有，那一次成功就成了一个孤零零的高光时刻。

回写是不是发生了，要到后来去看，而不是在评课表上宣布。比如那张天平图，有没有被小宇贴进错题本的扉页；作业里有没有多出一栏"检验"，而且老师真的看它；下一次遇到常数项，他是先停下来数一数，还是照旧往下写。这些都是可以观察的痕迹，有一样落了地，那节公开课就不只是一次表演。反过来，听课记录写了满满三页，也不等于回写，有记录只是留下了痕迹，痕迹要被后来的人和事用上，才算改变了条件。再说一句容易被忽略的事：回写也会是负向的，作业本上一个月的红叉和"粗心"两个字，同样在改写他下一次面对方程时的起点，只是往另一个方向。

把三种熄火放在一起，可以看出它们断在三个不同的地方。第一种断在源头，根本没有足够的张力；第二种断在解释，张力有了，却被一个"第一因"截

住，药方只剩一种；第三种断在结尾，改变发生了，却没有回写进后来的条件。你如果在课程改革里带过团队，大概会发现，学校层面的改革也常常照这三种方式熄火：一切太顺、找了一个"罪魁祸首"、或者一场展示课之后什么也没留下。学校尺度上的回写，第19章会专门讲。

◆ 五、三处断点，三张药方

现在可以亮底牌了。动力不是一箱油，所以"动力不足"也不是一个笼统的病名。它至少会断在三个不同的位置：矛盾被压平，过程里没有足够的张力；某一维被当成第一因，诊断提前结束；回写丢失，改变没有留下来。三个位置对应三种很不一样的药方：第一种要把落差放回任务里，并控制它的分量；第二种要把"懒""基础差"这类结论重新拆回过程；第三种要在每一次改变之后追问它进入了哪里，作业本、笔记、评分规则还是下一节课的安排。找到断在哪里，比开出更响亮的药方要紧。

123 诊断工序在这里的用处，就是在开药方之前先问那三句话：我们在争论同一件什么事？哪两个视角在打架？被谁也没看的那个视角是什么？三种应用接着提供三个候选的改变位置，每一个都要求事先写下"如果我对了，先会看到什么"。这一套的价值，不在于它一定能找到病根，而在于它让人少开一次错药，少做一回昂贵的大改革，有时候一个小试探就能显示，问题主要卡在一个理解上，不必动整个年级的作息。

这个判断也有它的限度，集中说在这里。小宇的三周是构造的课堂场景，三次尝试的结果是为了说明道理而设计的，不是一次已经做过的实验。真实的课堂里，三种应用常常同时存在：一个孩子可能既有错误的理解，又缺合适的路径，还被评价规则夹着；硬要从中挑出唯一的主因，会牺牲对处境的理解，全都同时改，又会弄不清哪一处起了作用。还有一些熄火根本不在这三处：家里出了事、

连续几周睡眠不足、和同桌闹了别扭，这些都需要先被排除。如果最简单的解释，比如"他几周确实缺练习，补上就好"已经够用，就应该保留它，而不是为了用上理论去绕远路。如果一个人每次失败后都说"其实是另一个字母的问题"，却从来不在事前写下判断，这套框架就失去了被事实裁决的可能。

林老师的第三次尝试，动的是作业评分和发言规则，见效最慢，却是唯一让小宇自己发现错误的一次。这提醒我们，评价并不只是在学习结束之后打一个分数，它在学习开始之前就已经在那里，悄悄决定了哪些尝试划算、哪些不划算。下一章就从青石中学挂上墙的一张积分榜说起。

带走的话

"动力不足"不是一个病名：它断在矛盾压平、第一因截住、回写丢失三处。

小 账

人物是真的吗？ 小宇的三周、老陈的提高班和那节公开课都是构造场景；三次尝试的结果是为说明道理设计的，不是做过的实验。

哪一句还要检验？ 每次尝试前要写下"如果对了先看到什么"；若总在失败后改说"其实是另一个字母的问题"，这套框架就失去被事实裁决的可能。

算式对吗？ $(x-1)/2=(x+2)/3-1$ 得 $x=1$ 、 $x/2-(x-1)/3=1$ 得 $x=4$ 及错解 $x=8$ 的来路都已核对。

什么时候不必用？ 家里出事、睡眠不足、和同桌闹别扭要先排除；"他几周确实缺练习，补上就好"够用时就保留它。



06

第6章

分数、奖励与"想学"的真假

这一章的问题

积分榜让课堂热闹了几天又冷下来，学生的"想学"是真的还是假的？

场景 积分榜挂上墙第三天，小宇抢答" $(-2)^2$ 与 -2^2 相等"答错，听见组长轻轻"唉"了一声。

◆ 一、积分榜挂上墙的第三天

十月中旬，青石中学七年级开始试行"数学闯关积分"。周校长在年级会上讲得很诚恳：学生需要看得见的进步，积分就是看得见的进步。每个班的后墙贴出一张大表，按学习小组排列，课上抢答答对一次加两分，作业全对加一分，周五统计，前三名的小组拿一张印着金色奖杯的贴纸。为了防止课堂变成菜市场，每个小组每节课只有三次抢答机会。

第一周效果出奇地好。七年级(2)班的课堂一下子热闹起来，手举得像一片麦苗，连小宇那一周也举了两次手。第一次是一道有理数比大小，他答对了，组里的人拍了拍他的肩膀。林老师在办公室里说，这孩子好像回来了一点。老陈端着茶杯，没接话，过了一会儿才说了一句："热闹是热闹，就看热闹完了剩下什么。"这话当时没人当回事，大家都在忙着统计各组的分数。

第二次发生在第三天。林老师在黑板上写了两个式子， $(-2)^2$ 和 -2^2 ，问它们相等吗。小宇的手举得很快，站起来说："相等，都是4。"林老师请他坐下，另一个组的同学答出 $(-2)^2=4$ 、 $-2^2=-4$ ，加了两分。小宇这一组的三次机会，就

这样用掉了一次。他坐下的时候，听见后排的组长轻轻“唉”了一声，声音不大，但他听见了。

那一周剩下的日子，小宇没有再举手，三天以后，书又立起来了。林老师后来回想，她其实很想知道那一刻他在想什么：他是真的以为两个式子相等，还是隐约觉得哪里不对、想站起来问一问？可是在那张积分榜下面，“想问一问”和“答错了”长得一模一样，都会让小组少一次机会。办公室里有人说，看看吧，奖励只能管三天，他根本就不是真想学。

“真想学”还是“假想学”，是这一章要换个问法的问题。上一章说到，林老师第三次尝试改的是作业评分和发言规则，见效最慢，却是唯一让小宇自己发现错误的一次。积分榜恰好是一个方向相反的例子：一项本意是鼓励的评价制度，怎样在学习开始之前，就已经替学生算好了哪些尝试划算、哪些不划算。

◆ 二、一次答错要付多少钱

在SDE的语言里，评价制度是特征纠缠E的一部分。它不是学习结束后才进场的裁判，而是从一开始就和学生的知识、同伴关系、自我看法缠在一起，共同限定他下一步能走哪条路。积分规则本身是一条写下来的规矩，属于母本所说的理念界；贴在后墙的那张大表是看得见、摸得着的现实界；“我是拖后腿的那一个”则落进了小宇的自我界。三样东西互相牵着，不是各自待在原地。

光说“评价参与了发生”还不够，母本要求用E作解释时，至少给出一条可以被反驳的作用链。我们试着把它写出来。规则规定每组每节课只有三次机会，只有答对才加分；所以一次答错，在加分之外还多了一项看不见的成本，它吃掉了全组的一次机会；这项成本通过组长那一声“唉”被小宇真切地感受到；于是他对“举手”的预期代价变高了，只在很有把握时才举；而初一上学期正好是大量新

内容涌进来的时候，他很有把握的时候本来就不多。链条的终点，就是那只不再举起来的手。

这条链是可以被事实推翻的。如果把规则改成"答错但说出了自己的理由，不占用小组机会"，或者"能指出别人答案错在哪里，也加一分"，那么按这条链的预测，小宇以及和他处境相似的学生，在没有把握的题目上举手的次数应该在两三周内有所回升。如果规则改了、别的原因也大致排除了，他们举手的样子却完全没有变化，这条链就说错了，我们得去别处找原因，也许是题目语言他读不懂，也许是那几周家里有事。写不出这样一个"怎样算我错了"的作用链，E就会变成一个什么都能往里装的大口袋。

顺着这条链还能看见一个容易被放过的角色：那位叹气的组长。办公室里有人会说他不厚道，可在"三次机会、答对才算"的规则下，组员答错就是全组的损失，他的那一声"唉"，很大程度上是规则替他发出来的。同一个孩子，如果规则是"组员说出一个有价值的错误理由，全组也加分"，他可能会转过身问小宇"你为什么觉得相等"。规则不只给每一种尝试标了价，也悄悄改写了同伴之间说话的方式，这正是特征纠缠的意思：条件彼此缠着，动一处，别处跟着动。

菜市场的老人对规则最敏感。一家超市挂出"早上八小时前蔬菜八折"，第二天七点半门口就排起了队，原来九点慢悠悠来买菜的人，把买菜时间整个提前了。没有人对他们做思想工作，也没有人说他们"真想买菜"或"假想买菜"，是一条价格规则改变了一个行动的代价，人跟着代价重新安排了自己的路。课堂上的积分规则也是一条价格规则，只不过它标价的不是青菜，而是"站起来说一句可能错的话"。老人们不需要被教育要早起，学生也未必需要被教育要勇敢，有时候先要看的是那张价目表。

母本在讨论"安静的教室"时提醒过，同样是没人举手，背后可能是认真整理思路，也可能是担心说错被笑话。积分榜挂上墙以后，这两种安静更难分辨了，

因为规则让“不确定”的代价变高，那些本来会站起来试一试的人，也坐回了安静的那一边。把这种安静叫作“缺乏学习动力”，等于把规则造成的结果，记到了孩子的账上。

◆ 三、徽章、贴纸和那股劲

说到这里，很容易得出一个痛快的结论：外部奖励是坏东西，应该统统撤掉。这个结论太痛快了，反而不对。小宇那一周的第一次举手是真实的，组员拍他肩膀的那一下也是真实的；一个已经很久没有举过手的孩子，因为一张贴纸和一句“给组里加两分”重新站起来，这本身就是一个入口。母本对此的态度很清楚：外部奖赏、基本需要和关系支持都可能影响行动，强调过程生成，并不等于把它们一概排除。

手机上的减肥软件大多有一套打卡徽章。连续走路七天，点亮一枚“一周达人”；连续三十天，点亮一枚“月度王者”。很多人确实是被第一枚徽章骗出门的，走了几天，发现傍晚的风很舒服，腿也不那么沉了，后来就算软件删了也还在走。另一些人走到第二十九天，晚上十一点五十分发现步数不够，于是在客厅里来回踱了八百步，徽章到手，那一天的走路和身体已经没什么关系了。同一枚徽章，在前一种人那里帮忙点了火，在后一种人那里替换了任务本身。

问题因此不在于奖励有没有，而在于它什么时候帮助启动，什么时候遮蔽了任务。一个可以拿来分辨的线索是：奖励撤走以后，留下了什么。如果徽章把人带进了一段过程，而那段过程里有落差被接住、有“原来是这样”的时刻，那么徽章是一扇门，进了门，屋里的东西会把人留下。如果徽章本身就是全部的屋子，那么它一撤走，人就站在空地上了。小宇的那一周，积分把他带到了门口，门里却正好是一次没人接的答错。

在课堂里，有一个朴素的办法可以看出奖励在扮演哪种角色：听学生下课后在说什么。积分榜刚挂上去的那两周，林老师在走廊里听到的大多是“我们组还差三分”“周五能不能追上四组”；偶尔也有两个学生在争“-2² 到底先算平方还是先算负号”，争得脸红脖子粗，那一刻他们谈论的已经是题目本身，而不是分数。前一种谈话越多，奖励越像屋子；后一种谈话冒出来，奖励才算完成了门的任务。这当然只是一个粗略的线索，但它比问学生“你是真喜欢数学吗”要可靠得多。

小禾在积分榜下面又是另一副样子。她是班里抢答最快的人之一，熟悉的题型几乎每题必中，她们组连续三周拿到了金色奖杯贴纸。可是林老师发现，每当黑板上出现一道“说说你的想法”之类的开放题，小禾的手就放下了，她会低头翻例题，等别人先说。按积分规则算，这完全合理：开放题没有标准答案，答了不一定加分，还可能占用一次机会。积分榜在她身上没有熄灭动力，却把动力领到了一条越来越窄的路上，熟题越做越快，新题越来越怕。

这里可以回到第4章讲过的幸福律。继续做下去的劲，来自张力积累、模式转换、能量释放这一段过程；小宇在量筒前面那一下嘴角的动作，来自“半颗珠子”被他自己想通。积分可以给这段过程添一把柴，也可以把这段过程整个绕过去，直接把“释放”发到人手里。后一种做法见效更快，就像直接给饿的人一块糖，可吃完以后，他并没有学会做饭。

由此可以提出一个值得去验证的猜测，不妨先把它当作经验判断放在桌上。当任务的路已经很清楚，比如口算二十以内的有理数加减、背熟乘方的几个常见结果，积分这类奖励更可能只是添柴，因为任务里本来就没有多少要靠自己摸索的落差，奖励鼓励的正是多练几遍。当任务需要学生自己去比较、去试错、去发现规律，比如量筒那样的活动或一道开放题，奖励更可能绕过过程，因为最快拿

分的办法往往是跳过摸索。这个猜测可能是错的，判别的方法是在两类任务上分别比较加积分和不加积分时，学生撤掉奖励以后还愿不愿意继续做。

◆ 四、最快交卷的那把尺子

积分榜试行到第四周，年级又加了一条：每周五的十道题小测，前五个交卷而且全对率达到八成的人，个人再加二十分。规则一出，最先变化的是交卷的声音，第十分钟起，讲台上就开始啪啪地响。我们来算一笔账。每对一题十分，假如一个学生做得很快，十道题对八道，抢进前五，得 $80+20=100$ 分；另一个学生每做完一道都代回去检验一遍，十道全对，可是交得晚，得 100 分。两个人分数一样多，快而错两道，和慢而全对，在这把尺子上是等价的。

再往前推一步，对一个想多拿分的学生来说，最划算的策略是什么？验算一道题大约要一分钟，一旦因此挤出前五，就丢掉二十分，相当于白白做错两道。于是验算变成了奢侈品，讨论变成了浪费时间，至于发现一个反例、换一种方法再做一遍，就更显得碍事了。第 4 章说过，D3 优化约束管的是误差、冗余和损耗；当“最快交卷”被当成唯一的指标时，D3 就会把一切尚未证明能加分的尝试都当作冗余剪掉，结果是高效而贫血。

林老师后来和陈老一起，在自己班上悄悄试了另一把尺子。每对一题仍是十分，不再给交卷速度加分；但每道题如果写出了“代入检验”或“第二种做法”，另加五分，每次小测最多加二十分。同样两类学生放到新尺子下，结果就换了位置。小禾那周还是习惯性地快做快交，对了九道，没写任何检验，得 90 分；班上一个平时交得很晚的男生阿哲，只对了七道，可有三道写了完整的代入检验，得 $70+15=85$ 分。这把尺子并不更“公正”，它只是换了一种东西来标价。

这和上一章林老师给作业加的那一条“写出代入检验就有一半的分”是同一个思路。小宇在新尺子下的第一次小测，只对了六道，却在其中一道错题旁边写了

检验，算出左右两边不相等，没来得及改。卷子发下来，那道错题旁边写着"+5"。他盯着那个数字看了很久，那大概是他上初中以后，第一次因为一道做错的题拿到了分。这一次能不能接成一条路，要看下一次小测他还写不写，林老师把它记在了本子上，没有急着下结论。

学过车的人都知道科目二的故事。很多驾校只练考场那一条线路，倒车入库看哪根杆、侧方停车看哪个点，教练都标得清清楚楚，考试通过率相当漂亮。拿到驾照以后，第一次开进一个陌生的地下车库，许多人才发现，那些杆和点都不在了，而自己从来没有真正学会判断车身和车位的关系。考试这把尺子量的是"在这条线路上通不通过"，练习就会自动收窄到这条线路；尺子量什么，路就往哪里长。

这一节不是要证明哪把尺子好、哪把尺子坏，而是要看清一件事：评价标准本身也是要被追问的。周校长当初加交卷速度，是有道理的，七年级的计算速度确实会影响后面几年；新的那把尺子也有它的风险，用不了多久，就会有学生为了那五分去写格式化的"检验"，代回去算都不算，抄一个等号了事。没有一把尺子能一劳永逸，能做的是隔一段时间就问一次：这把尺子眼下在鼓励什么，又在悄悄剪掉什么？

还有一种学生，在任何积分榜上都不显眼。班里有个女生阿梅，几乎从不抢答，交卷也不快，积分榜上永远排在中间偏后。可林老师翻她的作业，每次那道选做的难题她都做了，写得密密麻麻，有时候还在旁边写一句"这里我不确定"。按积分榜的眼光看，她像是缺乏动力；换一个眼光看，安静完成也可能是一种愿意承担，她只是不肯为了两分站起来，却肯为了一道题坐一晚上。一个只认得"举手"和"抢先"的评价制度，会把这样的劲看漏，甚至在名单上把它记成"不积极"。

◆ 五、"想学"的真假，换一个问法

现在回到办公室里那句话："他根本就不是真想学。"这句话把"想学"当成小宇身上一个或有或无的东西，有了是真，没了是假。可从积分榜下面那三天看，他想不想站起来，和站起来要付出什么代价、付了以后会被怎样接住，是分不开的。同一个孩子，在"答错要吃掉组里一次机会"的规则下和在"说出理由也算数"的规则下，表现出来的"想学"可以很不一样。与其问真假，不如问：这套评价让哪些尝试变得便宜，让哪些尝试变得昂贵？他此刻的样子，是在什么样的价格表下结出来的账？

一位管过学校的人会先问一个很现实的问题：总得评价吧？当然要。评价能让进步被看见，让努力有回应，让学校对家长和社会有个交代；你在学校管理里大概也很清楚，一项评价制度往往同时服务着好几个目的，撤掉任何一个都有人着急。这一章说的不是"少评价"，而是"知道评价在做什么"。在设计积分榜的那天，就去写下这条规则会让什么变便宜、让什么变昂贵，并且约定几周以后回头看一看，结果是不是这样。

周校长后来在期中的年级会上展示了一组数字：试行积分以后，课堂举手的总次数翻了一倍多。数字是真的，可它是全班加起来的总数。林老师把自己班的记录拆开来看，发现增加的举手大部分集中在七八个本来就爱举手的学生身上，另有几个孩子，比如小宇，举手的次数是从"偶尔"降到了"没有"。总数上升和少数人退出，可以同时发生，一条漂亮的上升曲线会把后一件事整个盖住。看评价制度的效果，要把平均数拆开，看看是谁在为这条曲线付账。

真要动手改，也不必一下子推翻积分榜。林老师在自己班上做的第一件小事，只是把"答错占用一次机会"改成"答错但说出理由，不占机会"，并且在黑板角落开了一块"本周最有价值的错误"，每周五挑一个错误理由写上去，后面写上提出者的名字。⁻²² 那一次，后来就被她补写了上去，旁边写着"小宇：以为负

号也要一起平方"。这件事很小，花不了几分钟，改起来也随时可以撤回；它值不值得推广，要看接下来几周没有把握的举手会不会回来，而这正是第二节那条作用链给出的预测。

这里需要把几种说法分开。"评价制度是E的一部分，参与学习的发生"，是一个概念上的规定和哲学上的解释，它告诉我们该把评价放在哪里看。"答错吃掉小组机会，会压低没把握时的举手"，是一个经验判断，它可能对，也可能错，要靠第二节写下的那种作用链和比较去检验。"把规则改成说出理由也算数"，则是一个实践建议，它即使在小宇身上有效，也需要在别的班、别的学生身上再看一看。三种说法的分量不同，混在一起说，听起来很有力，经不起追问。

这个判断的限度，集中交代在这里。小宇、小禾、阿哲、阿梅在积分榜下的故事，是为说明道理而构造的场景，它展示了评价规则可能怎样参与学习，并没有证明在每个班、每种规则下都会这样。学生的举手和交卷，同样会受到题目难度、同伴关系、家里的情况、那段时间的身体状态的影响，把一切都归给评价规则，和把一切都归给"不想学"，犯的是同一个错误。外部奖励和内在劲头之间的关系，心理学和教育学已经有大量研究和争论，这一章只提供了一种看法的角度，具体到某一项奖励在某一群学生身上起什么作用，仍然是一个要靠观察和比较来回答的经验问题。

把牌摊开，这一章只押一句话：评价不是在学习之后打一个分，而是在学习之前就参与了发生。它给每一种尝试标上价格，学生按照这张价格表安排自己的路；外部奖赏可以是一扇门，也可以变成全部的屋子；把最快、最准当成唯一的尺子，会把讨论、检验和反例当作冗余剪掉。所以，看到一个孩子不举手，先别急着判断他"想学"是真是假，先看看他站起来的那一刻，要付多少钱，付了以后又有没有人接。

积分榜让小禾越跑越快，也让她越来越只敢走熟路；小宇则在一条路上被挡了回来。两个孩子需要的，似乎不是同一种入口。同一种教法为什么总有人不适合，下一章从这里说起。

带走的话

评价不是学习之后打的分，而是学习之前就给每种尝试标好了价格。

小 账

人物是真的吗？ 小宇、小禾、阿哲、阿梅和青石中学的积分榜都是构造的，不证明每个班、每种规则下都会这样。

哪一句还要检验？ “答错吃掉小组机会会压低没把握时的举手”是经验判断：若改成“说出理由不占机会”并排除别的原因后，两三周内举手没有回升，这条作用链就错了。

数字对吗？ 两把尺子下 $80+20$ 与 100 、 90 与 $70+15$ 的账已核算，只用来示意规则怎样标价。

奖励都是坏的吗？ 不是。奖励可以是门，也可能变成全部的屋子；它在某群学生身上起什么作用，仍要靠观察和比较回答。



07

第7章

同一种教法为什么总有人不适合：六条路与入口

这一章的问题

同一种教法总有学生不适合，难道是因为他天生属于哪一种人？

场景 教研会上林老师想用手机套餐题开场讲方程，老陈说这是还不会走就想跑。

◆ 一、教研会上那场永远开不完的争论

七年级数学组的教研会，每学期总要吵一次同一个架。这一次的导火索是林老师的一份教案：她想在讲"实际问题与一元一次方程"之前，先拿一道手机套餐题开场，让学生自己去比哪种套餐更省钱。老陈把教案翻了两页，放下眼镜说："方程还没解利索，就让他们去比套餐，这叫还不会走就想跑。"林老师回了一句："可有的孩子，你让他先走三个月，他就再也不想走了。"

这场争论在中国的数学组里大概已经开了几十年，主角换过好几茬，台词几乎没变。一边说先打牢基础，一边说先给真实任务，双方都举得出成功的学生，也都举得出失败的学生。茶水续过两轮，问题还坐在原来的椅子上。之所以分不出胜负，是因为两边其实在回答两个不同的问题：老陈想的是那个已经会解方程、只差一点熟练度的孩子，林老师想的是小宇。

去一个陌生的城市，有人下了高铁先把地图研究透，哪条街通哪条街心里有数了才出门；有人背着包先走两条街，看见一家热闹的面馆，再顺着它去认这一片的路。说哪一种人更会旅行，其实说不清楚。同一个人，去一个要赶时间开会

的城市，多半先看地图；去一个闲逛的古镇，多半先走两条街。决定他从哪里起步的，是这一趟要办的事和他手里已有的东西，而不是他天生属于"看地图的人"还是"乱走的人"。

教学上的"适合"也是这样。我们说某种教法"不适合这个学生"，听起来像在说学生身上有一种固定的形状，教法是另一种形状，两个形状对不上。可是同一个学生，换一个单元，换一种任务，对同一种教法的反应可能完全不同。小宇五年级的时候，被一道鸡兔同笼题吸引着往前追，那时候"先讲例题再练习"对他一点也不碍事；到了初一，同样的讲法却没能再把他留在桌前，数学书慢慢立了起来。变的不只是小宇，还有他手里的东西、他面前的任务，以及这两者之间的落差。

所以本章要换一个问法：不问"这个学生是哪种人"，而问"这一次的入口，和他眼下的处境配不配"。要把这个问法说清楚，需要一张入口的清单。三个名字已经在前面几章用熟了：显露 S、差异序列 D、特征纠缠 E。从其中哪一维先下手、按什么次序往下检查，三个字母排一排，恰好有六种排法。这是一个简单的组合事实，三个人排队拍照有六种站法，它并不证明真实的学习只有六种走法，课堂里的路线往往比印出来的箭头更不守规矩。它的用处在于给争论提供一张共同的地图，让老陈和林老师至少知道彼此站在哪个路口。

◆ 二、从手里已有的东西出发：沉淀型与锚定型

先说从 E 起手的两条路。这两条路的前提相同：学生手里已经有相当多可以调用的东西，问题在于怎样让这些东西动起来。

七年级（2）班从开学起，体育课每周测一次一分钟跳绳，体育委员把成绩抄在一本硬皮本上，两个月下来已经抄满了半本。这些数字一直躺在那里，没有人想过它们和数学有什么关系。期中以后，林老师把本子借了过来，只问了一

句："谁进步最大？"班里立刻吵起来。有人说是阿杰，从120个跳到150个，多了30个；有人说是一个女生，从60个跳到84个，只多了24个，可她"差不多快翻一倍了"。

这一吵，原来躺着的记录就开始干活了。说"快翻一倍"的同学被追问到底多了几分之几，大家算出阿杰增加了原来的四分之一，那位女生增加了原来的十分之四，也就是百分之二十五对百分之四十。于是"进步"这个词第一次被拆开了：增加了多少是一种比法，增加了原来的几成是另一种比法，两种比法给出的冠军不一样。到下课时，黑板上留下的不是一个冠军的名字，而是一句话："说谁进步大，要先说用哪一种比。"这句话就是这次显露出来的东西，它是从半本旧记录里，经过几轮比较和争吵长出来的。

这条路在母本里叫沉淀型，次序是 $E \rightarrow D \rightarrow S$ ：先有一层厚厚的条件，再让差异在里面推进，最后显露出一个新的理解。它很像下班回家打开冰箱，里面有半棵白菜、两个鸡蛋、一块豆腐，没有菜谱，你得先把这几样东西在脑子里配一配、试一试，最后端上桌的那道菜，是从冰箱里长出来的。沉淀型的风险也和冰箱一样：东西放得再多，如果没有人去配、去比，它们只会慢慢过期。一本抄满的跳绳记录，若没有那一句"谁进步最大"，两年以后还是一本跳绳记录。判断条件"厚不厚"，要看它能不能接住新的比较，而不是看文件夹有多重。

另一条从 E 起手的路叫锚定型，次序是 $E \rightarrow S \rightarrow D$ 。它也假定学生手里有东西，但这些东西散着，不知道往哪个方向使劲。这时先立起一个看得见的样子，把散着的经验聚到一处，再沿着它展开探索。初一学有理数的时候，学生对冷热、冬天、零下几度都有切身经验，可是一说"负数的减法"，他们手里的经验就像一把撒在桌上的豆子。林老师有一回没有先讲法则，而是在投影上放了一张折线图：青石镇一周的最高气温和最低气温，两条线，一上一下。

图一出来，问题就有了方向。周二那天最高 4°C ，最低零下 5°C ，大家都觉得那天特别冷，可是“温差是多少”，有人写 $4-5=-1$ ，有人说“温差怎么会是负的”，有人掰着手指头从4数到0再数到零下5，数出来是9。最后黑板上写的是 $4-(-5)=9$ 。那张折线图在这里就是锚：它不是一个现成的答案，而是一个所有人都能指着说话的对象，让学生原本零散的冷热经验有了一个共同的落脚处，后面的比较和修正都围着它转。

锚定型像做饭时手里有一张菜品照片。冰箱里的东西还是那些，可是有了照片，你知道这一顿要往“红烧”那边去，而不是往“凉拌”那边去。照片的用处在于定向，不在于让人对着它发呆。所以锚要能被追问、能被修改：要是有学生问“最低气温是哪个时刻量的”，老师若一句“别管这些，照图算”把他按回去，锚就从定向的参照物变成了一件不许碰的展品。沉淀型和锚定型的差别，大致就在于差异是在一片较宽的材料里自己找方向，还是先借一个看得见的样子聚起来。哪一种更合适，要看那一堆经验此刻是能自己动起来，还是需要一个落脚点。

◆ 三、从一个停不下来的问题出发：倒逼型与原型型

再说从D起手的两条路。它们的共同处境是：准备还不完整，可是一个问题或者一个想法已经在推着人往前走了。

林老师那份引起争论的教案，起因在小宇身上。有一次课间，她听见小宇跟同桌抱怨，说他妈妈换了个手机套餐，结果这个月话费反而多了，家里为此吵了一架。这是这学期林老师第一次听见小宇主动谈论一件跟数字有关的事。她于是把题目改成了这样：甲套餐每月20元，流量每GB收3元；乙套餐每月35元，流量每GB收1.5元。一个月用多少流量的时候选哪个更划算？

这道题在七年级上册的方程应用题里并不陌生，算法也不难：用 x 表示一个月的流量，甲是 $20+3x$ ，乙是 $35+1.5x$ ，两者相等时 $3x-1.5x=35-20$ ，得 $x=10$ 。

少于10GB选甲，多于10GB选乙，正好10GB两个一样，都是50元。但这道题对小宇的意义不在算法，而在它的次序：问题先到，工具后到。他想知道答案，于是需要"用字母表示一个会变的数"，需要"两边相等时意味着什么"，这些原本躺在课本里的东西，被问题一个一个逼了出来。再往后一年多，八年级会学一次函数，两条以不同速度往上爬的直线，那时这道题还会回来，换一副更完整的样子。

这条路叫倒逼型，次序是 $D \rightarrow E \rightarrow S$ ：从一个已经带着推动力的问题出发，倒过来补出解决它所缺的条件，最后形成可以检验的结果。家里水龙头半夜开始滴水，人是睡不着的，于是去查阀芯是什么、怎么拆、该买哪个型号，第二天早上，一个原本对水管一无所知的人，对阀芯的了解超过了他前四十年的总和。倒逼型的力气来自这种"不弄清楚就睡不着"。它的风险也在这里：问题可能长得比支持更快，一个想弄明白套餐的人，转眼想研究全中国所有的套餐，最后每一样都做得很薄。所以教师要帮他把问题缩成一个最小的、答得出来的版本，把暂时放下的部分记下来，给它们一个去处。

原型型的次序是 $D \rightarrow S \rightarrow E$ ，同样从推进出发，但它先做出一个粗糙的、可以被检验的版本，再从试用的反馈里积累条件。学校组织秋游，七年级（2）班46个学生加两位老师，一共48人。租车公司报价：大车限乘30人，租金400元；小车限乘18人，租金260元。班委第一版方案很快就拿出来了："租两辆大车，宽敞，省事。"林老师没有否定它，只让他们把方案贴在后墙上，请全班挑毛病。

毛病很快挑出来了：两辆大车有60个座位，空出12个，花了800元。有人提出三辆小车，54个座位，780元，便宜了一点；又有人提出一大一小，30加18正好48个座位，660元。到这一步，大家开始意识到，挑毛病靠灵感是不够的，得把所有组合排出来，一种一种比，这才发现一大一小在所有坐得下的方案里最便

宜。那张贴在后墙上的粗糙方案，在被一次次修改的过程中，给全班留下了一样新东西：遇到方案选择，先把可能的组合列全。这就是原型留下的条件。

原型型像在阳台上搭晾衣架，先用两根竹竿和几个夹子凑一个出来，晾一次被子就知道哪里塌、哪里够不着，第二版自然就清楚了。它的好处是错误便宜，撤回容易；它的要求是粗糙要有范围。外观可以难看，但这一版要检验什么关系，得说得出来。一个只写着"让秋游更舒服"的口号不是原型，因为没人能通过实际操作告诉它哪里不舒服。倒逼型和原型型共用一个问题入口，差别在于紧接着把力气放在哪里：是先补知识，还是先做一个可以被挑毛病的東西。

◆ 四、从一件已经做成的东西出发：进入型与再创型

最后两条路从S起手。学生面前已经有一件成形的作品，一道经典好题，一个漂亮的解法，或者一个用熟了的公式。这件作品可以是理解的入口，也可以是改造的材料。

鸡兔同笼是小学数学里流传最久的好题之一。笼中鸡兔共35个头、94只脚，各有多少只？假设法是这样走的：假设35只全是鸡，应该有70只脚，比实际少了24只；每把一只鸡换成一只兔，脚就多2只，所以要换12次，兔12只，鸡23只。很多孩子第一次见到这个解法时都有一种被魔术击中的感觉，小宇五年级追着老师问的，就是这一手。可是喜欢一个解法和明白它为什么成立，中间还隔着一段路。

到了初一，林老师把这道老题重新拿出来，问题不再是"答案是多少"，而是"这个魔术靠什么才变得成"。学生们慢慢找出了它脚下的几块地砖：每一只动物只有两种可能，换一次脚数的变化是固定的2，头数在换的过程中始终不变。有人试着在笼子里再加一种三只脚的怪鸟，假设法立刻乱了套，因为换一次的变化不再固定。有人把假设法翻译成方程：设兔有 x 只， $2(35-x)+4x=94$ ，算出来

$x=12$ ，和假设法完全一样，原来"每换一次多2只脚"就藏在 $4x-2x$ 里。这时候学生理解的已经不只是一道题，而是这道题赖以成立的条件。

这条路叫进入型，次序是 $S \rightarrow E \rightarrow D$ ：从一件已经显露的作品进入它所依赖的条件，再从那里组织自己的尝试。它很像拼乐高时先照着说明书拼出一辆车，然后把车翻过来，看底盘是怎么撑住车身的，哪一块是承重的，哪一块拆了也没关系。只照着说明书拼的人能拼出漂亮的车，进入了底盘的人才知道下一次能拆掉什么。进入型的风险是停在仰望里：学生能把范例复述得滴水不漏，却从来没问过它在什么时候会失效。

再创型的次序是 $S \rightarrow D \rightarrow E$ ，也从作品出发，但重点放在有意识的变奏上，由变奏长出新的条件。五年级学过梯形面积：两个一模一样的梯形倒过来一拼，成了一个平行四边形，底是上底加下底，所以梯形面积是 $(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高} \div 2$ 。上底3、下底7、高4的梯形，面积是20。这个推导很多学生都会背，林老师在初一复习时请已经弄懂它的几个学生做一件事：改条件，看公式还认不认得出来。

一个学生把上底改成0，梯形缩成了三角形，公式变成 $(0+7) \times 4 \div 2 = 14$ ，正好就是底7高4的三角形面积。另一个学生让上底等于下底，都是5，公式变成 $(5+5) \times 4 \div 2 = 20$ ，正是底5高4的平行四边形面积。还有一个学生拿来一个随手画的四边形，没有一组对边平行，想套公式，发现"高"都不知道该量哪一段，公式在这里干脆不认账了。三个改动，一个保留了核心关系，一个扩大了适用范围，一个找到了反例。最后留在黑板上的是一个新的看法：三角形、平行四边形和梯形可以看成同一家人，那个公式有一个明确的边界，就是要有一组对边平行。这就是再创留下的新条件，下次遇到组合图形的面积，学生手里多了一种认亲戚的眼光。

进入型和再创型的分别，取决于学生此刻最需要做的工作：还不明白作品为什么成立，就先进入它的条件；已经能解释关键关系，就可以动手变奏。两条路

可以接着走，也可以来回走。一个学生变奏以后发现自己误解了原来的方法，退回去再理解一遍，这不是倒退，只是换了一个方向检查同一件东西。

◆ 五、任务 DNA：适不适合说的是这一次

六条路摆完了，回到教研会上的那个架。老陈说的"先打基础"，在六条路里大致对应从 E 起手；林老师想要的"先给任务"，大致对应从 D 起手。两个人都没错，错在都以为自己说的是全部。母本给这件事起了一个名字，叫任务 DNA：一个任务此刻最吃紧的是哪一维，就从哪一维起手，并且按适合它的次序往下检查。跳绳记录那件事最吃紧的是"怎样让已有的东西动起来"，套餐那件事最吃紧的是"一个已经冒头的问题缺什么条件"，鸡兔同笼那件事最吃紧的是"一个现成的解法凭什么成立"。

这样看，"同一种教法为什么总有人不适合"就有了一个比"人各有异"更具体的回答：一种教法默认了一个入口，而入口和处境之间有配有不配。先讲例题再练习，默认学生手里的条件已经足够接住新的差异；它对那些条件确实够厚的学生很顺，对条件薄、却被一个问题拽着走的学生，就像让一个急着止水的人先去读完《流体力学》。反过来，先给开放任务，默认学生有一个能推动他的问题，对一个手里空空、也还没被任何问题抓住的学生，开放任务只是一片让人发慌的空地。

最需要提防的，是把路径变成贴在学生身上的标签。"小宇是倒逼型的""小禾是沉淀型的"，这类话说起来很顺嘴，听起来也像专业判断，其实是把一次处境判断冻成了一张永久的身份证。同一个小宇，在套餐题上也许适合从问题起手，在几何证明上也许需要先进入一道好题的条件。一个孩子在不同任务中轮换入口，是再正常不过的事，正像同一个旅行者在不同城市里有时先看地图、有时先走两条街。做过课程研发的人大多见过这样的场面：一份分层方案用了两

年，"A层学生""C层学生"的叫法就从方案里走进了教师的口头禅，再走进了学生自己的心里。六条路若这样用，只是换了颜色的分班牌。

还有一种常见的误会，是以为六条路有高下之分，比如觉得再创型听上去最有创造力，沉淀型听上去最笨。六条路在入口的地位上是平的，平的是被考虑的资格，而不是在每个任务上都同样可行。一个学生连鸡兔同笼的假设法为什么成立都还没弄明白，让他去变奏，多半只会得到表面的改动；一个已经能把跳绳记录比出名堂的班级，再让他们去收集更多记录，可能只是拖延。哪条路值得先试，要由这一次的任务和处境来承担理由，而不是由名字的气派来决定。

所以记录一次选路，最好写处境，不写类型。与其写"该生适合倒逼型"，不如写"他在套餐题上能自己列出两个式子，卡在'两个式子相等意味着什么'上，同桌的一句提问让他接着往下算了"。前一种记录传给下一位老师的是印象，后一种传的是条件和理由。对你这样同时做课程研发和学校管理的人，这一点也许比六条路的名称更值得带回学校：一份好的选路记录，下一位老师接手时能看懂发生过什么，也能看出哪里可以改。

这个判断在什么情况下会错，也要在这里说清楚。六条路是一套整理入口的语言，它本身并不担保哪条路有效；一节课的进步，可能来自新鲜感、老师多花的时间、同伴的帮忙，甚至只是那天天气好，路径的名字不会替我们排除这些解释。如果有一天发现，把六条路的名称拿掉，单凭"讲清概念、给够练习、及时反馈"这些老办法已经足以解释学生的变化，那就应当承认六条路在这里主要起组织作用，而不是另一种机制。还有一些困难根本不在入口上，比如读题障碍、睡眠不足、家里出了事，把它们塞进"路径不配"这个篮子，篮子越装越大，分类却越来越差。

把这一章收成一句话：一种教法"不适合"某个学生，说的不是这个学生是哪个人，而是这一次的入口与他此刻的处境不相配；六条路的价值，在于让我们在

出发前看清自己默认了哪一个入口，并且愿意为另一个入口留一扇门。教研会散的时候，老陈没有被说服，林老师也没有，但他们达成了一个小小的协议：在小宇身上试两周倒逼型，两周以后一起看。两周很快就过去了，作业本上的变化却没有想象中那么清楚。坚持，还是换路？这是下一章的事。

带走的话

"不适合"说的不是学生是哪种人，而是这一次的入口与他此刻的处境不匹配。

小 账

人物是真的吗？ 跳绳记录、气温折线、手机套餐、秋游租车、鸡兔同笼和梯形变奏都是构造的课堂场景。

真的只有六条路吗？ 六条是三个字母排序的组合事实，不证明学习只有六种走法，也不担保哪条路有效。

数字对吗？ 套餐 $x=10\text{GB}$ 、一大一小660元、兔12只鸡23只、梯形面积20等都已核算。

什么结果会推翻它？ 若拿掉六条路的名称，单凭讲清概念、给够练习、及时反馈已足以解释学生的变化，就应承认它在这里主要起组织作用。



08

第8章

什么时候该换一条路

这一章的问题

一个新办法试了两周还看不出效果，到底该坚持下去还是换条路？

场景 两周到了，林老师把小宇这两周的作业和之前几本并排摊在桌上，想看出点区别。

◆ 一、两周以后，作业本上看不出什么

两周到了。林老师把小宇这两周的作业摊在办公桌上，和两周前的那几本并排放着，想看出一点区别。第一份作业是那道手机套餐题，小宇写得比平时多：两个式子，一行等式，最后还在旁边用铅笔小小地写了一句“我妈应该选乙”。自从十月底页边那句“为什么负负得正”没人回应以后，这是他的作业本上第一次又出现一句不是答案的话。

可是往后翻，情形就没那么清楚了。第二道是出租车计费，起步价8元含3千米，超出部分每千米2元，问付了20元走了多远。小宇列的式子是 $8+2x=20$ ，算出 $x=6$ ，答案写6千米，红叉。订正只写了一个“9”。第三道是游泳馆的次卡和年卡，他做了一半就空着了。课堂上他依旧没有举手，书倒是没有立起来，平平地放在桌上，这算不算变化，林老师自己也说不准。

她去找老陈，话说得很直：“我看效果不明显，要不换个办法，让他做个方案试试，原型型那种？”老陈端着茶杯，慢悠悠地说：“两周就换？我阳台上种的

蒜苗都得等十天才冒尖。你再换一回，下回是不是一周就换？"林老师不服："那要是方向本来就错了呢？等一个学期才发现，代价是他的。"

这个场面像极了开车时导航弹出的那个提示："前方拥堵，是否为您重新规划路线？"有一种司机，明明前方在修路，还安慰自己原路线是认真规划过的，一路堵到底；另一种司机，遇到每一个红灯都想改道，最后把附近几个小区参观得很全面，目的地还是很远。这两种司机都不缺决心，缺的是一个判断改不改道的依据。好的导航之所以敢提醒你改道，是因为它手里有前方的车速数据，并且在出发时就记下了原路线预计几点到；一旦实际进度和预计差得太远，提示才会弹出来。

老陈和林老师的分歧，正是这两种司机的分歧。死守和频繁换台都是真实的风险：死守会让一条已经不通的路消耗学生的时间，频繁换台会让每一条路都来不及显出作用，学生也会像不停转学一样，每次都要从自我介绍开始。本章要回答的问题，就是两周以后摊在桌上的那几本作业，究竟能不能告诉我们该坚持还是该改道；如果不能，要怎样安排，下一次它们才能告诉我们。

◆ 二、出发前写下的那张小纸条

翻着这两周的作业，林老师忽然意识到一件尴尬的事：两周前开始试的时候，她并没有写下"什么样子算是有用"。于是现在她看到的每一个现象都可以往两边解释。那句"我妈应该选乙"可以说明问题确实抓住了他，也可以只是因为那道题恰好碰到了他家的事；出租车题的红叉可以说明倒逼型没起作用，也可以说明另有一个卡点。所有现象都两可，判断就只能交给心情，而心情今天和明天是不一样的。

腌过泡菜的人都知道，坛子不能天天开。天天开，菜还没酸就跑了气；可是也不能封上就不管，坛沿的水干了，或者水面上长了白花，都是要及时处理的信

号。会腌泡菜的人在封坛的那天心里就有数：大约几天去看一次，看什么，闻到什么味道算对，看见什么颜色要倒掉。这些判断不是在开坛的那一刻临时想出来的，而是在封坛之前就定好的。

换路的道理也一样，它需要两样东西在出发前就准备好。第一样是运行窗口，也就是给一种安排多长的时间让它显出作用。窗口太短，正常的波动会被误认作失败；窗口太长，一条已经不通的路会白白消耗学生。窗口长短要和任务相配：一节课里换一种提问方式，看一两节课就能见分晓；用一个真实问题带出整个方程应用单元，两周可能才刚刚跑完第一圈。第二样是事先写下的信号，也就是在窗口结束时，看见什么算这条路在起作用，看见什么算它需要调整。

那天下午，林老师 and 老陈坐下来，替接下来的三周补写了这张纸条。他们没有写"成绩提高"这类太远的东西，而是写了几件三周内看得见的小事。倒逼型若起作用，小宇应该会在题目没有要求的地方追问一句"要是……呢"，就像他在套餐题旁边写的那句话；他列式时会先把要找的量用字母写出来，而不是直接凑数；他的订正里会出现至少一句他自己的话，而不只是一个正确答案。反过来，如果三周以后这些迹象都没有，而他每次都能提出想法却卡在算不出来，那可能说明他更需要先做一个方案再补工具，原型型值得试；如果他总是先找例题、没有例题就停，那可能是需要先进入一道好题的条件。

写下这张纸条，最大的好处不在于预言得准，而在于它让后来的判断有了对照物。三周以后再翻作业本，看到的東西要么对得上纸条上的某一行，要么对不上；对不上的时候，至少知道是自己当初的设想出了问题，而不是凭感觉说"好像不太行"。老陈看着这张纸条，难得地夸了一句："这比教案实在。"林老师说："教案写的是我要做什么，这张写的是他会怎样。"这两句话说的其实是同一件事的两面：一张写给出发，一张写给回头。

纸条上的信号还有一个要求：别人也要看得出来。"他好像更投入了"这种句子，林老师看着是，老陈看着可能不是，两个人对着同一本作业可以争一个下午。"订正里出现了一句他自己的话"就不一样，有没有，翻开本子一眼就能核对。信号写得越具体，两个人读同一份材料时越容易得出同一个判断；如果同一份材料在两个认真的人手里总是读出相反的结论，那问题多半出在信号上，而不在学生身上。

往大一点说，值得写进纸条的变化，大致可以从三个字母去找。一种是E变厚了：学生不再依赖例题也能说出关键关系，能在新材料里认出同一类问题，这时原来围绕问题补条件的倒逼型，可能可以让位给利用积累继续比较的沉淀型。一种是S变清楚了：原来只有一个模糊的愿望，现在已经能画出一个可以试用的方案，这时与其继续四处找办法，不如先做个原型去换反馈。还有一种是D的推进变弱了，学生问得少了、试得少了，这一种最需要谨慎，因为它可能是疲劳，可能是卡在某个基础上，也可能只是当前这一段已经做完了。

此外还有两种情形：一件原本吸引人的作品不再引出任何问题，说明原来的S失效了；合作的同伴调走了、常用的工具没了，说明E断了一块。这些信号提示的是"可以考虑换"，并不指定唯一的新路线，一个目标清楚而知识不足的学生，既可能需要倒逼型补条件，也可能适合先做原型来认清缺口，手里最好同时留着两个候选。

◆ 三、先别急着怪路，看看是不是别的毛病

纸条补完了，可是眼前这两周还得有个交代。林老师打算先把这两周里可能捣乱的别的原因一个一个排一遍，再决定要不要把账算到路径头上。

车子早上打不着火，有经验的人不会一上来就拆发动机。他先看油表，再看电瓶，再看是不是挡位没放到P。这几样看起来都是小事，可正是因为小，排查

起来便宜，一旦查出来，省下的是一次不必要的大修。教学上的换路，也有好几样这种便宜又容易漏掉的东西要先查。

先查疲劳和时间。翻开校历，这两周里有一场元旦汇演，三天下午的课被排练占了，接着是月考复习周，各科作业都比平时多。倒逼型最需要的恰恰是一段连续的时间，让问题和它带出来的知识有机会接上；时间被切成碎片，问题刚热起来就被打断，下次再见面又凉了。这不说明倒逼型不适合小宇，只说明这两周不是一个公平的考场。一场在暴雨里跑出来的五十米成绩，拿去判断一个人的速度，谁都知道要打个折扣，教学上的两周也一样，得先看看那两周下没下雨。

再查任务的语言。林老师把出租车那道题拿出来细看，发现小宇的式子 $8+2x=20$ 错得很有规律：他把"超出部分每千米2元"读成了"每千米2元"，漏掉了"超出部分"这四个字承担的意思。如果走了 x 千米，超出3千米的部分是 $x-3$ 千米，式子应当是 $8+2(x-3)=20$ ，解出来 $x=9$ 。小宇的订正只写了一个9，说明他看了答案，却没有看见自己错在哪里。这一错和"有没有被问题抓住"几乎没有关系，它是一个把文字翻译成符号时的卡点，换成原型型、进入型，这个卡点照样在那里。

把这一点看清楚以后，林老师松了一口气，也更谨慎了。她去翻了全班的作业，发现在出租车题上犯同样错误的有十一个人，其中好几个是平时成绩不错的学生。这说明"超出部分"这类分段计价的表述，本身就是这一单元里一个需要专门处理的地方，不是小宇一个人的问题，更不是路径的问题。如果她两周前就换了路，换路之后小宇在这里照样会摔一跤，她多半会得出"换了也没用"的结论，再去换第三条路。教学版的频繁换台，常常就是这样开始的：一个和路径无关的卡点，被连续算成了几条路径的失败。

最后还要查一样不太好意思查的东西，就是老师自己。这两周林老师同时带着两个班的月考复习，给小宇的关注，其实比她以为的要少。倒逼型的一个前

提，是问题刚冒头时有人接住它；那句“我妈应该选乙”写在作业本上，林老师当时只打了一个勾，没有接着问一句“那要是你妈每个月用得不一樣呢”。一个可以被接住的追问，就这样从旁边滑过去了。这一笔账，也应当记在“别的原因”里，而不是记在路径名下。

还有一种可能也要留着：路是对的，只是效果来得晚。种过番茄的人知道，浇水和结果之间隔着好几个星期，看见第一周没动静就把苗拔了，是最常见的外行做法。小宇在套餐题上第一次把“用字母表示会变的数”用在一件自己关心的事情上，这一点经验也许要到下学期学方程组时才会在作业里冒出来。两周的窗口里看不见，不等于它没有发生。延迟这件事第十三章会专门讲，这里只先记一笔：判断一条路有没有用，要想清楚它的作用大约多久以后才看得见。

◆ 四、换路的时候顺手多帮了一把，功劳算谁的

先设想一种在学校里很常见的情形。一位老师给一个学生换成了原型型，让他和两个同学一起设计一份“运动会饮用水采购方案”，先做粗糙的版本，再根据同学的意见改；换路的同时，这位老师每天午自习抽十分钟坐到他旁边，陪他把方案里的计算过一遍。三周以后，这个学生明显活跃了，方案改了三版，还在班上讲了两分钟。这时候，功劳该算在原型型头上，还是那每天十分钟头上？

感冒的时候，很多人同时吃了三种药，又喝了姜汤，又睡了一整天，第三天好了。好了当然是好事，可是下一次感冒，该吃哪种药呢？说不清。说不清的原因不是药没用，而是同一时间动了太多东西，好转无法认领自己的来路。教学上的换路也常常是这样，一换就是一揽子：换了任务，换了分组，换了座位，老师还格外上心。学生变好了，大家都高兴，但下一位老师想学这一手，就不知道该学哪一样。

要分清改善来自哪里，办法其实不复杂，难的是事先想到要这样做。放到林老师这里，一种办法是让支持保持一样：倒逼型接下来的三周，她每天也抽十分钟坐过去，万一换成原型型，还是十分钟，这样两段的差别更可能来自路径本身。另一种办法是先只换一样：先不换路径，只加上每天十分钟，看看会怎样；有了变化，再决定要不要换路。还有一种办法是在记录里写清楚，这一段同时改了哪些东西，哪一样是新加的，留给后面的人判断。三种办法各有代价，但哪一种都比"一揽子换完再说"强，因为它们至少给事实留下了一个说话的位置。

还有一个常被省掉的信息来源，是学生自己。林老师后来问过小宇一次："这两周的几道题，哪一道你最想接着做？"小宇想了一会儿，说是套餐那道，"因为那是真的"。他没有说出租车题难，也没有说游泳馆题没意思，只说套餐那道是真的，这句话分量不轻：它提示林老师，抓住小宇的也许不是"问题先到"这个次序本身，而是问题和他自己生活之间的那根线。如果真是这样，下一段无论走哪条路，任务最好都从他够得着的真实处境里取材。学生的说法当然只是一种证据，孩子也会说讨老师喜欢的话，但把他完全排除在判断之外，等于把最靠近现场的那个人请出了会议室。

换路还有一件容易被忘记的事：旧路留下了什么。小宇在套餐题上写的那两个式子，他在出租车题上暴露出的"超出部分"的卡点，那句"我妈应该选乙"，这些都是倒逼型那几周的产物，换路的时候不应该被一笔勾销。第二章讲过，第三条方程要把旧的条件和时间放回去，新条件是旧条件加上这一轮的显露和路径更新而来的。换路也一样，万一真换成原型型，那一段要从倒逼型留下的地方接着走，比如在给小宇的采购方案里专门放进一条"买满20箱以后，超出部分每箱便宜2元"的报价，让那个分段计价的卡点有机会在新的任务里被再碰一次。换路如果每次都从零开始，路越换越多，学生手里的东西却一样也没有多起来。

这里还要分清两个层级的事。六条路说的是从哪一维起手、按什么次序检查，是选主入口的事；后面第十一章要讲的六步，从猜想、执行、评估，到反馈、修正、迭代，是在一条路内部一圈一圈转的事。小宇在出租车题上那一次没改对，是一圈六步里的修正没有接上，它首先需要的是有人帮他看见错在哪里，而不是换一条路。把一次局部的转圈失败当成整条路的失败，就像因为一个路口拐错了弯，就断定整趟旅行的目的地选错了。

◆ 五、坚持和改道的理由，都写在出发之前

那天傍晚，老陈和林老师做了一个决定。倒逼型再走三周，窗口从今天算起；"超出部分"这类分段计价的表述，下周用一节课给全班专门处理，用数轴把"超出的那一段"画出来；从现在起午自习每天十分钟，往后无论换不换路都保持不变；纸条上的信号三周后对照，若不出现，就按纸条上写好的换法换，换的时候带着倒逼型留下的东西走。周校长后来听说了这件事，问了一句："就为一个学生，费这么大劲？"老陈答："为的是下回不必为每个学生都费这么大劲。"

这句话说到了要害。换路判断第一次做，确实很费事；可是一旦形成了几张写得好的纸条，几份记清了"改了什么、留下了什么"的记录，它们就成了组里共用的东西。下一个像小宇一样的学生出现时，老师不必从零开始猜，可以先翻一翻：上一次在类似处境里试过什么，窗口给了多长，看到了哪些信号。灵活性靠个人加班撑着，很快会被时间表打败；写进记录，才有可能变成一个组的能力。

以你管过学校的眼光看，可能会先问另一个问题：这么做，会不会让老师们变得不敢换路，什么都要等窗口结束？其实事先写好的纸条里也应当包括一行"立即停"的条件。如果学生明显表现出持续的不适、焦虑，或者任务带来了实际的伤害，那就不必等三周，当天就停。窗口是给机制一个公平的检验机会，不

是要学生拿自己的耐心替老师的选择作担保。坚持需要理由，停下来同样需要理由，两者都要说得出来。

停下来也要停得有交代。一条路暂时走不下去，最好让学生和老师一起说清三件事：这一段已经做成了什么，还缺什么条件，以后在什么情况下值得回来再试。像拆一套没装完的书架，螺丝装进小袋，说明书折好夹在板子中间，下次再装的人不必从找螺丝开始。对小宇这样一个已经习惯把失败读成"我不是这块料"的孩子，这样的交代尤其要紧：他需要听见的是"这条路这一段不顺，我们换个走法"，而不是又一次无声的放弃。停下一条路是对任务和支持条件的判断，不是对他这个人的判断，这句话老师心里明白不够，最好也让他听明白。

这个判断在什么情况下会错，也集中说一次。换路的依据如果总是事后补写，那么无论结果如何，都可以说成"当初就该这样"，这种判断看上去灵活，其实没有经受任何检验。如果不同的老师看同一个学生的同一段作业，对"信号出没出现"总是意见不一，那就说明信号写得太含糊，需要改写信号，而不是责怪哪位老师不够信任方法。还有一种情况更需要警惕：路径调整反复进行，学生长期没有改善，这时最诚实的做法是承认困难可能根本不在入口上，比如阅读障碍、身体状况，或者需要专业支持的学习困难，把它们一律归为"还没找到对的路"，只会让孩子在一条条路之间被耽误下去。

本章的底牌是：坚持和改道都需要理由，而这些理由要在出发之前写下来，包括给多长的窗口、看什么信号、先排除哪些别的原因、换的时候怎样分清功劳、旧路留下的东西怎样带走。没有这些，坚持就是固执，改道就是任性，两者看上去相反，其实是同一种失明。

小宇这三周会怎样，我们先不急着知道。第一部到这里，讲的都是"这个过程能不能继续"。可是课堂里还有另一类孩子，她们从来不缺继续的劲头，作业

又快又准，问题出在另一个地方。小宇的同班同学小禾就是这样一个孩子。她的故事要从一张画满了箭头的思维导图说起。

带走的话

坚持和改道都需要理由，而这些理由要在出发之前写下来。

小 账

人物是真的吗？ 小宇这几周、林老师和老陈补写的纸条、饮用水采购方案都是构造的。

哪一句还要检验？ 若换路依据总是事后补写，或不同老师读同一段作业对"信号出没出现"总是意见不一，就该改写信号，而不是怪老师或学生。

数字对吗？ 出租车题 $8+2(x-3)=20$ 得 $x=9$ 已核对；全班十一人犯同样错误是情节设定。

一直换路都不见效呢？ 应承认困难可能不在入口上，如阅读障碍、身体状况或需要专业支持的学习困难；本书不构成诊断或专业建议。





第 二 部

系统性思考怎样长出来

导 语

这一部七章，换一个主角。小禾不缺动力，熟题又快又准，题目一换问法就慌。她的问题提醒我们：系统性思考的反面不是笨，而是只会在一张熟悉的地图上走。

第9章先把系统思考收成三句追问，第10、11章讲会答题以后还要看什么、错误怎样接成一条路，第12章用一节菜地围栏的数学课，让动力和系统思考在同一件事里一起发生。第13到15章再从时间、尺度和自我检验三个方向，把三句追问磨得更锋利。

这一部里的数学都是初一学生够得着的数学，推导都核算过。它想说明的是，系统思考不必另开一门课，它就藏在每一次答案变了之后那句"是哪个条件让它变的"里面。

09

第9章

系统性思考不是一张更大的图

这一章的问题

学生能画出四十三条箭头的思维导图，就算学会系统思考了吗？

场景 小禾交来一张A3思维导图，中间写着"我"，四周方框连着四十三条箭头。

◆ 一、四十三条箭头

期中以后，学校要求每个班做一次"学习反思"，题目是"影响我学习效率的因素"，形式不限。小禾交上来的是一张A3纸的思维导图，彩色笔画的，中间一个圆圈写着"我"，四周放射出去的方框有作业、睡觉、手机、冰箱、妈妈、体育课、月考、班主任、校长，甚至还有一个画得很认真的月亮。方框之间连着箭头，林老师数了一下，四十三条。

她顺着几条箭头看下去。"冰箱"指向"作业"，旁边小字注明：写作业时会去冰箱拿酸奶。"月亮"指向"作业"，注明：中秋节那一周作业少。"校长"指向"体育课"，再指向"睡觉"，注明：校长说要保证锻炼时间，体育课累了晚上睡得早。每一条单独看都说得通，合在一起，像一张把全世界都拉进群聊的通讯录。班里同学看了都说"好厉害"，这张图后来被贴在了后墙上，旁边是另一个同学只写了三行字的反思。

林老师站在那张图前面，问了小禾一个问题："这四十三条里，你觉得哪一条最能解释你上周二那份作业为什么做到十一点？"小禾愣了一下，开始在图上

找。找了半天，她说："可能是……都有一点吧。"林老师又问："那如果下周二你想早一点做完，该先动哪一条？"小禾不说话了。这是她这学期第二次在数学老师面前答不上话，第一次是在一道把面积题换了个问法的题目前面。

家里的无线网慢了，一个人的做法是重启路由器，再慢就再重启，重启不管用就打电话骂运营商。另一个人会先问几句：是一直慢还是某个时段慢，是所有设备都慢还是只有一台慢，慢的时候家里谁在用、在用来干什么。问完这几句，他可能发现只是每晚九点孩子在房间里看高清视频，而路由器放在客厅的鞋柜后面。

后一个人既没有拆开路由器，也没有画一张全屋网络拓扑图，他只是问了几句话，问的是什么时候、在什么条件下、经过怎样的过程，而不是路由器由哪些零件组成。前一个人掌握的知识并不比后一个人少，他甚至知道更多路由器的型号，可是他看不见"慢"是在什么条件里、经过什么过程变成现在这样的。

小禾的思维导图和那位只会重启的人，其实是一种处境的两种表现。她画了很多连接，却说不出哪一条在什么时候起作用，哪一条一动就会牵动别的，哪一条只是她觉得应该有。图越大，越像一个画满了所有电线的配电箱图纸，每根线都在，可你要修的那一盏灯，还是不知道该从哪里查起。第二部要回答你的第二个问题，学生怎样学会系统性地思考，就从这张图开始，因为它把一个流行的误会画得太清楚了：以为系统思考就是把更多东西连起来。

◆ 二、一条链为什么拉不动小禾

在说什么是系统思考之前，先看看小禾的数学是怎么学成现在这个样子的。她的路线很简单，也很有效：老师讲例题，她看懂步骤，做五道同类题巩固，考试遇到同类题，又快又准。这条链可以写成"例题→模仿→熟练→得分"，四个环节，一个方向，没有回头。

这条链不是错的。在一个短的窗口里，题型不变，考法不变，它确实能解释小禾为什么分数高，也能指导她下一次怎样继续得高分。有人借了一本家常菜谱，照着第37页做了一道鱼香肉丝，味道不错；如果只问“这本菜谱有没有帮他做出这道菜”，一条链就足够回答。线性的因果并没有被系统思考废掉，它只是一个特例：当观察的时间够短、条件几乎不变的时候，一条链往往是最省事也最可靠的说法。为了显得深刻，把一个用一条链就说得清的问题画成一张网，那是另一种不诚实。

可一旦问题变成“他下次还会不会借菜谱”“他是在学做菜，还是在学照着第37页做”，一条链就不够了。他照着做成了一道菜，这个成功会改变下一次：也许他从此更愿意下厨，开始自己调整辣度；也许他从此只敢照着菜谱做，菜谱上没有的菜一律叫外卖。同一个成功，可以把以后的路拓宽，也可以把它收窄，一条只朝前的链看不见这一层。

小禾就站在这一层上。用第二章那三条方程看，她眼下的样子，“熟题快准、换问法就慌”，可以写成 $S=F(D,E)$ ：它是在一串特定的尝试里，也就是看例题、模仿、刷同类题，在一组特定的条件里，也就是按题型编排的练习册、只考熟题型的单元测验、“做得快就是学得好”的班级风气，长出来的。到这里，一条链大致还说得过去。

第二条方程 $D=G(S,E)$ 开始让链子转弯了。小禾遇到新题时的第一反应是找例题，这个动作不是凭空来的，是她眼下的理解（数学=一个个题型）和她手里的条件（练习册的目录就是题型目录）一起决定的。所以她的路线不是她“选”的，而是她现在的样子和她的处境共同推出来的。第三条方程 $E=H(S,D)$ 则把链子接回了起点：每一次熟题快准，都在给她自己、给老师、给家长增加一条信任，“小禾数学好”，这条信任又变成了新的条件，让她更少遇到开放题，也更少有机会在开放题上摔跤。成功本身成了把门关窄的那只手。

这就是一条链拉不动小禾的原因。她的问题不在任何一个环节，而在这几个环节彼此生成的方式里：她越成功，留给她的条件越单一；条件越单一，她的路线越固定；路线越固定，她显露出来的理解就越像一个题型库。要看见这一点，需要的不是更多的箭头，而是能看见"这一轮怎样改变了下一轮"的眼睛。

把小禾和小宇放在一起看，会发现一件有意思的事。小宇的链条是断了，一次次的错误没人接，接住的也没留下，他走着走着就停了；小禾的链条则是转得太顺，每一圈都顺利，每一圈都把下一圈的路修得更窄。一个是发动机熄了火，一个是车开在一条越来越窄的胡同里还在加速。导论说过，动力问的是"这个过程能不能继续"，系统思考问的是"这个人能不能看见这个过程"。小禾的过程一直在继续，可她看不见它，所以也不知道它正把自己往哪里带。

◆ 三、走熟一条路和知道怎样找路

说小禾"不会系统思考"，容易让人以为她脑子里缺一张地图。其实她脑子里有地图，而且相当精细，只是那是一张"路线图"，不是一张"地形图"。路线图记的是在哪里拐弯，地形图记的是为什么要在这里拐；平时两张图带人走的是同一条路，只有路口变了的那一天，才看得出谁手里拿的是哪一张。

住在老城区的人，每天走同一条路去菜市场：出门右转，过两个路口，看到修鞋摊左转，再走一百米。这条路他闭着眼都能走。有一天修鞋摊搬走了，那个路口又在挖管道，他站在那里，突然不知道菜市场在哪一边。他熟悉的是一串动作，而不是菜市场和他家之间的位置关系：菜市场在河的南岸，他家在北岸，中间只有两座桥。知道这一点的人，路口封了可以绕，摊子搬了也不慌。

数学课上的情形一模一样。小禾做行程问题很快："甲乙两地相距45千米，甲每小时走6千米，乙每小时走9千米，两人同时出发相向而行，几小时相遇？"她几乎不用想：相遇时间=路程÷速度和， $45 \div 15 = 3$ ，三小时。可是题目

只要改一个字，"乙比甲晚出发半小时"，她就停下来了。她翻到练习册的"相遇问题"那一页找例题，没有找到"晚出发"这一类，于是把 $45 \div 15 = 3$ 写上去，又划掉，最后空着。

林老师没有直接讲，而是问她："速度和这个东西，是从哪里来的？"小禾想了想，说是公式。林老师说："不是公式，是一件事。两个人面对面走，每过一小时，他们之间的距离缩短多少？"小禾在草稿纸上画了一条线段，两头各画一个小人，过了一会儿说："缩短6加9，15千米。"

那么乙晚出发的那半小时呢？只有甲在走，距离只缩短了3千米，剩下的42千米，才是两个人一起以每小时15千米去缩的，要2.8小时。所以从甲出发算起，一共是3.3小时。也可以设甲走了 x 小时，列出 $6x + 9(x - 0.5) = 45$ ，解得 $x = 3.3$ ，两种算法对上了。林老师又往前推了一步：要是两人同向而行，乙在后面追，开始时相距45千米呢？小禾这回没有翻书，她在线段上把两个小人画成朝同一个方向，嘟囔着"每小时只追近3千米"，算出了15小时。

这里发生的事情很小，但它正是"路线图"和"地形图"的差别。"路程 $\div$ 速度和"是一条路线，它只在"同时出发、相向而行"这个路口有效；"每过一小时两人之间的距离缩短多少"是地形，它告诉你这条路线是从哪些条件里长出来的。知道了地形，路口变了也知道怎样绕：晚出发就分段算，同向而行就看距离每小时拉开还是缩短多少。一个学生会不会系统地思考，在这种小地方就看得出来：他掌握的是一串动作，还是这串动作赖以成立的条件。

地形图也有地形图的风险。一张在脑子里画得很圆的图，可以一环扣一环地推出一串彼此一致、却全都错了的结论，就像一位拿着十年前旧地图、信心十足的导游，每一句介绍都流利，每一个路口都指错。所以一张脑中的图好不好，要看它能不能事先说出"接下来会怎样"，并且让现实有机会说"不对"。小禾算出3.3小时以后，林老师让她用另一种方法验一遍，这一步看着多余，其实正是在给自

己的图留一个被否定的位置。会画图的人很多，肯让图被现实改的人少一些，而系统思考恰恰长在后一种习惯里。

◆ 四、三句追问：系统思考的最小单位

现在可以说得更正面一点了。本书在导论里亮过一张底牌：系统性思考的最小单位不是箭头，而是三句追问。面对任何一个结果，第一句问：它是在什么条件里、经过哪些尝试，长成现在这个样子的？第二句问：从现在这个样子、在这些条件里，下一步会往哪里走？第三句问：它又反过来改变了什么？这三句话就是三条方程的日常版，第一句对着 $S=F(D,E)$ ，第二句对着 $D=G(S,E)$ ，第三句对着 $E=H(S,D)$ 。

你有哲学的底子，大概会注意到这三句话的问法有点特别。我们平常分析一个东西，习惯问"它由哪些部分组成"，这是拆零件的问法，思维导图最擅长的就是这个，把"影响学习效率的因素"拆成二十个方框。三句追问问的却是"它怎样长成、往哪里去、又改了什么"，这是看发生的问法。零件可以一次列全，发生却总是在某个条件里、某段时间上进行着，所以它逼着人去划边界、看先后、找回路。这一点差别，就是一张大图和一种思考习惯之间的差别。

家里的一盆栀子花叶子发黄，会问三句的人是这样想的。第一句：黄叶是在什么条件里、经过什么过程变黄的？是最近从阳台搬进了客厅，又连着浇了几次水，盆底没有孔。

第二句：照现在这样下去会怎样？根一直泡着，黄叶会从下往上蔓延。第三句：这件事又改变了什么？它改变了主人对"多浇水就是多照顾"的看法，下次买盆会先看底下有没有孔。三句问完，他没有画任何图，可是该动哪里、该看什么、该记住什么，都清楚了。

这三句追问里，其实已经包含了人们常说的系统思考的几样本事。问"在什么条件里"，就要先说清边界：这一次只看周二的作业，不看整个初一；只看数学，不看所有科目。问"经过哪些尝试"和"下一步往哪里走"，就要说清关系：哪些因素此刻真的在起作用，它们怎样一个牵动另一个。问"它又改变了什么"，就会碰到结果回过头来改写条件的那一笔，这比"反馈"一词说的更多，因为改动会留下来，成为下一次的起点。再加上两样在追问中自然会遇到的东西：尺度，也就是"校长"和"冰箱"根本不在同一个层面上，一个管着全校的作息，一个只管今晚的酸奶，把它们画在同一圈方框里，本身就是一个错误；还有时间，同样叫"作业慢"，今晚慢一个小时和一学期越来越慢，是两种不同的事。

尺度和时间这两样，在学校里格外容易混。同一个"作业"，在小禾身上是今晚要做完的几道题，在七年级（2）班是林老师布置作业的规矩，在青石中学是每天各科作业总量的上限，三个尺度上它扮演的角色并不一样。一个学生作业慢，要动的可能是她做题的路线；一个班普遍作业慢，要动的可能是布置的方式；全校都慢，要动的也许是课表。时间也不止一种：墙上钟表的时间，一个学生一轮一轮尝试的学习轮次，还有学期、月考、升学这样的制度周期。问"它是在什么条件里长成的"时，先说清是在哪个尺度、哪种时间上问，很多争论就会自己消掉一半。

最后还有一样，是系统思考里最容易被忽略、却最见成色的本事：知道自己的哪些连接还只是猜测。小禾的四十三条箭头，每一条在图上都是一样粗、一样实的，可是"冰箱→作业"她亲身观察过，"月亮→作业"只是碰上了一次，"校长→体育课→睡觉"则大半是她想出来的。把猜测和证据画成一样的线，图看起来就格外完整，完整得让人不想再去检验它。

林老师后来请小禾重做一次反思，只给了一条规矩：只看"上周二作业做到十一点"这一件事，用三句追问来做。第二版只有半张纸。她写，那天的作业是

新学的"去括号", 练习册上有两道题和例题不一样; 她在那两道上卡了四十分钟, 一直在翻书找例题, 后来上网搜; 搜到答案以后抄上了, 但心里不踏实, 又对着答案倒推了一遍。第二句她写, 下周二还有新课, 如果遇到不一样的题还是先翻例题, 还会这样。第三句她想了很久, 写的是: "那天以后我更怕新题了。"

图上剩下六条线, 其中两条她自己用虚线画, 旁边注明"不确定"; 还有一个小小的圈, 从"怕新题"绕回"翻例题", 再绕回"做得慢"。这张图比四十三条箭头的那张小得多, 可是它第一次把小禾自己放进了过程里, 也第一次让她看见, 那个让她慌的东西有一部分是她自己一遍遍走出来的。这不意味着她从此会做开放题了, 后面几章还有很长的路, 但她手里第一次有了一样比题型更耐用的东西。做过多年一线教学的人大概都会同意, 一个学生肯把"我怕"写进数学反思, 比她多会一个题型更难得。

◆ 五、这张小图在什么时候会骗人

三句追问也有它的毛病, 在这里一次说清。第一个毛病是它可以被问得太宽。"它是在什么条件里长成的", 如果回答是"所有条件", 那就又回到了四十三条箭头。追问之所以管用, 是因为每一次都要先划边界, 只问一件具体的事; 边界一旦松开, 三句追问会比思维导图更会画大饼, 因为它听起来更像在思考。

第二个毛病更隐蔽。一个解释如果能把任何结果都说圆, 它就什么也没有说。小禾作业慢, 可以说是"条件太单一"; 她要是作业快, 也可以说是"条件太单一让她熟练"。如果三句追问在任何结果出现以后都能随手把原因安到 S、D、E 的某一个位置上, 那它就只是一种事后整理语言的办法。要防止这一点, 追问的答案里至少要有一条可以被下一次检验的判断, 比如小禾那句"下周二遇到不一样的题, 我还是会先翻例题, 还会这样": 如果下周二她没有先翻例题, 却照样做到十一点, 那她这张小图就画错了, 要重画。

第三个毛病是把三句追问当成了一种更高明的东西，见到简单的问题也非要问三句。第二节说过，线性的因果是一个特例，不是一个错误。问"今天的作业为什么没交齐"，答案可能就是"收作业的课代表请假了"，一条链说完，没必要追问它又反过来改变了什么。一个会系统思考的人，知道什么时候一条链就够用，就像一个会看地图的人，在自家楼下买瓶酱油时不会打开导航。

所以这个判断在什么情况下会错，可以说得很具体。如果有一天发现，学会三句追问的学生，在条件改变了的新问题上，表现并不比只学会解题步骤的学生好，那么"三句追问是系统思考的最小单位"这句话就要改；如果三句追问的结果总是事后才能写出来、事前什么也预料不到，它就只是好听的说法。此外，三句追问本身只是一个形式，追问的内容要靠数学本身来填：行程问题里"距离每小时缩短多少"，是靠对速度和路程的理解问出来的，三个字母不会替任何人算出3.3小时。

还要分清这一章里几句话的身份。"系统思考的最小单位是三句追问"，一半是概念上的规定：本书选择这样来界定系统思考，是因为它能将一个含混的能力拆成可以观察的动作，这一半谈不上对错，只谈得上好用不好用。另一半是经验判断：学会三句追问的学生，在条件变化时更会修改自己的解释。这一半是可以被事实推翻的，小禾第二版反思里的那些变化，是为了说明道理构造出来的场景，只能用来解释和推演，真要知道它成不成立，需要第四部里讲的那种研究。

本章的底牌是：系统性思考不是一张更大的图，不是更多的箭头和更全的方框，而是面对任何一个结果都会问三句话：它是在什么条件里、经过哪些尝试长成这样的，下一步会往哪里走，它又反过来改变了什么。会问这三句的人，会自然地去划边界、找关系、看尺度和回路，也会把有证据的连接和只是猜测的连接分开；不会问的人，图画得再大，也只是一张不好擦的白板。

小禾的第二版反思只有半张纸，可是它引出了一个更难的问题。她单元测验考了98分，那份试卷上的每一道题都答对了，林老师却越来越想知道：一个答对了所有题目的学生，到底懂了什么？答对，在多大程度上说明理解已经长出来了？这是下一章要追问的事。

带走的话

系统思考不是一张更大的图，而是面对任何结果都会问的那三句话。

小 账

人物是真的吗？ 小禾的两版反思和行程问题那堂课都是构造的，只用来解释和推演。

数字对吗？ 相遇3小时、晚出发半小时共3.3小时、同向追及15小时都已核算。

哪一句还要检验？ 若学会三句追问的学生在条件改变的新问题上并不比只学会解题步骤的学生好，或追问事前什么也预料不到，这句话就要改。

这是定义还是发现？ 一半是概念规定，只论好用不好用；一半是经验判断，可以被事实推翻。



10

第10章

会答题以后还要看什么：数学理解怎样显露

这一章的问题

学生小测全对，却说不出为什么，答对到底能说明他懂了多少？

场景 小禾五道分数除法全对，被问为什么乘倒数，她很诚实地说："书上说的。"

◆ 一、一张全对的小测和一句"书上说的"

有理数除法开课前，林老师给七年级（2）班做了一次五分钟的小测，全是六年级学过的分数除法。小禾交得最早，五道题全对，字迹干净，连约分都约得一丝不苟。林老师拿着她的卷子，顺口问了一句："三分之二除以三分之一，为什么等于二？"小禾愣了一下，答："因为除以一个数，等于乘它的倒数。"林老师又问："那为什么除以一个数等于乘它的倒数？"小禾想了想，很诚实地说："书上说的。"

这不是一个让人着急的回答，五道题全对，期末不会因为这句话扣一分。可是林老师心里有点不踏实。几周以后，小禾交上那张四十多条箭头的思维导图，林老师又想起了这句话：箭头很多，问每一条代表什么，她说不上来；算式很对，问它从哪里来，她也说不上来。两件事像是同一种情形的两个侧面：东西都在，来路看不见。

坐在后排的阿杰平时数学一般，这时插了一句："三分之二里面有两个三分之一嘛，就像两块蛋糕里有几个一块。"全班笑了，林老师没笑。她在黑板上画

了一个长条，平均切成三格，涂上两格，问："这两格里能放下几个一格？"大家都说两个。她接着写下二分之一除以三分之二，问："那半条里能放下几个三分之二条？"这一下教室安静了，小禾低头去算，很快写出四分之三；阿杰盯着长条看了半天，说："放不下一个，只能放下……大半个？"

两个孩子在这里各露出了一角。小禾的算法稳，阿杰的图像活，可一个说不出"为什么"，一个算不出"多少"。如果只看小测分数，小禾满分、阿杰七十分，故事就讲完了；如果看这两分钟的对话，故事才刚开头。

在一线教过很多年书的人都知道，班里最让人放心的，往往就是小禾这样的学生，作业不用催，考试不用盯。正因为放心，她的理解很少被追问；追问的时间，都花在了阿杰和小宇身上。可导论里说过，小禾最怕的恰恰是"换个问法"，一个学生熟题全对、换题就慌，说明"全对"这个窗口里看见的东西，和换问法时需要的东西，并不完全是同一样。这一章要回答的，就是这个开头：答对以后，我们还应该看什么，才知道一个学生的理解长到了哪里。

◆ 二、三个"可"：认得出、留得住、说得出

导论说过，显露（S）是此刻被看见的样子，它不是最后的结果。放到数学理解上，这句话可以说得更细。一种理解向我们显露，至少有三个可以分开看的方面：可识别，我们能指出他用了什么关系；可维持，这个关系不只在老师刚提示以后才出现，隔几天、换个题还在；可表达，他能用话、用图或者用一个恰当的选择，让别人有机会检验他的判断。三个"可"不是三道关卡，而是三扇不同朝向的窗户。

会背菜谱和会做菜的区别，正好落在这三扇窗上。一个人把红烧鱼的菜谱背得一字不差，这是一种可表达；可他第一次换了一条更大的鱼，就不知道火候该怎么改，说明菜谱里"鱼越厚火越要小"这层关系还没有被他识别出来。另一个人

从来说不清步骤，却每次都做得好，换了锅也不慌，他的理解是可维持的，只是暂时缺一种说出来的方式。前者需要的是去厨房，后者需要的是一支笔，两人都"会做红烧鱼"，需要的帮助完全不同。

小禾和阿杰也是这样。小禾的"乘倒数"可识别、可维持，换了数字照样算对；它在"可表达"这扇窗上是暗的，而且这扇窗暗着，另外两扇也没有它们看上去那么亮，因为她识别出的是一个操作口令，而不是"几个几"的关系。阿杰的"几个三分之一"在表达上很生动，可识别的关系也是对的，但到了二分之一除以三分之二，结果不是整数，他的图就撑不住了，可维持还很薄。把两个人都写成"分数除法掌握良好"或"掌握一般"，等于把两扇不同的窗户糊上同一张纸。

显露总是向某个人、通过某个问题显露的，这一点常被忘记。同一个小禾，对那张小测卷来说是满分，理解完整地显露了；对林老师那句"为什么"来说，只显露了一半；对阿杰的长条图来说，她起初甚至没认出那是同一件事。不是小禾在三分钟里变了三次，而是三个问题打开了三扇不同的窗。拍过证件照的人都知道，证件照上的自己也是真的，只是那个角度、那盏灯、那句"别笑"只允许人露出一種样子。老师出的题，就是那盏灯，它照亮什么，也就决定了我们能看见什么。

可表达这扇窗还常被开得太窄。很多老师心里的"说得出"，默认是站起来说一段完整的话；可阿杰用一个长条图把关系摆出来，也是一种表达，而且是别人可以拿来检验的表达。一个学生说话慢、容易紧张，却能在纸上把半条和三分之二条画得清清楚楚，他的理解就是可表达的，只是走的不是嘴这条路。反过来，一段流利的话也可能只是把课本上的句子背了一遍。表达的要害是让别人有机会检查，而不是让老师听着顺耳。

所以说一种理解显露了，最好顺手交代四件事：向谁显露，通过什么表现，在哪一类任务里，稳定到什么程度。"小禾懂分数除法"是一句含糊话；"小禾在

整数商的题目里能稳定执行倒数算法，但在老师追问时无法说明它与'包含几个'的关系"就清楚多了。后一句话长了一点，却给下一步留了门：老师知道该在哪里补，小禾自己也知道"懂"这个字后面还有一截路。

◆ 三、"懂了"不是一个开关

学校里最常听到的一句话是"懂了没有？"，最常听到的回答是"懂了"。这两个字听起来像电灯开关，按下去就亮。可理解的显露更像天亮，从一片灰到能看清路边的树，再到能看清树上的叶子，中间找不到哪一秒钟可以宣布"天亮了"。母本把显露看作从弱到强的连续谱：可以刚刚冒头，可以暂时稳定，也可以已经稳定得过了头，变成僵化。

显露的程度还会随着条件往回退。第二天进入有理数除法，林老师出了一道负三分之二除以三分之一，小禾这回停住了，她的倒数算法照样能用，可她不确定负号该放在哪儿，前一天还很稳的东西忽然晃了一下。这一晃不等于退步，它是一条范围信息：她原来的稳，依赖"都是正数"这个没被说出来的条件。学外语的人对此不陌生，单词背得滚瓜烂熟，一到真跟人聊天，对方语速一快，熟词也听不出来，那些单词并没有消失，只是它们稳住的范围比自己以为的要小。

僵化这个词要说清楚，它说的是一种理解的状态，不是说某个孩子僵化。小禾的"乘倒数"非常稳定，稳定到她遇到"半条里能放几个三分之二条"时，第一反应仍是去找算法而不是看图。稳定本身是好事，熟练的计算省下了脑力；可当一种稳定只能在原题型里转，遇到需要调用"包含"关系的新情况时反而挡在前面，它就开始从支撑变成围墙。做惯饭的人都有这种体会：在自家燃气灶上炒菜炒得极熟，到朋友家换成电磁炉，熟练反倒让人手忙脚乱，因为他熟的是看火苗大小，不是"锅里到底有多热"。

母本还提醒，名字和结构是两回事。一个学生说得出"倒数""商""被除数"，说明这些经验有了可以共同讨论的名字，这是真实的进展；但名字有了，里面的关系可能还松着。再往前一步，学生能稳定地使用关系，例如知道"除以三分之一，就是问里面有几个三分之一"，并据此判断哪些题可以这样看；再往前，已经形成的理解能支撑新的问题，比如学生自己问"那除以负三分之一呢，几个负的三分之一怎么数？"这正是有理数除法要接住的地方。

阿杰那边也有一次往前走时刻。过了几天，林老师在黑板上写下六分之五除以三分之一，让他用图试试。他把长条切成六格，涂上五格，每两格圈成一个三分之一，圈了两圈，还剩一格。他停了一会儿，说："两个，还多出半个三分之一，那就是两个半。"二又二分之一，和用倒数算出来的六分之五乘三、等于二分之五正好对上。他没有去核这一步，但他的图第一次撑过了不是整数的情形。上一次他在"大半个"那里卡住，这一次那半个被他数了出来，同一张图的稳定范围往外挪了一步。

还要分开两件常被当成一件事：看得多清楚，和长得多成熟。小禾的倒数算法显露得非常清楚，谁看都认得出来，可它能支撑的新问题很少；阿杰的"几个几"显露得模模糊糊，说出来还带着蛋糕，可它已经开始自己往负数、往非整数那边伸。一张修得很精致的效果图，和一间住了几年、哪里漏风都摸清了的房子，前者更清楚，后者更成熟。课堂上最容易得到奖励的是清楚，最该被看见的却常常是成熟。

这样看，"懂了"后面至少藏着三种情况：只是叫得出名字，已经能稳定使用，或者已经能用它长出新问题。它们之间没有尊卑，一个学生在分数除法上能长出新问题，在几何证明上可能还只叫得出名字，这再正常不过。要警惕的是另一种情形：名字和格式都很完整，答案也对，却经不起一个边界例子，这在母本

里叫伪结构。它像一家刚挂上招牌的店，门面醒目，账本还没翻开。这个词指的是那份答案，不是那个孩子，用来提醒老师多看一眼，而不是用来揭穿谁。

◆ 四、一来一回之间，三样东西一起长出来

林老师那天没有停在小禾和阿杰身上。她把“二分之一除以三分之二”留在黑板上，让同桌两人一组，一个人只许用算法，一个人只许用图，最后必须对上答案。十分钟里，教室里出现了很多争执：有人说图上“放不下一个”就是零，有人坚持一定是个分数，有人把半条重新切成六格才看清。最后小禾和阿杰那一组对上了：半条是六格里的三格，三分之二条是六格里的四格，三格只够四格的四分之三。小禾说：“原来倒数是这么来的。”

这十分钟里长出来的，不只是小禾对一道题的理解。母本在显露内部用另一套观察语言来看这类时刻，叫 SIO：主体、互动、对象。“分数除法为什么乘倒数”在讨论开始前只是课本上的一条规则，讨论之后它成了一个可以拿图和算式两面去检验的对象；同桌之间“你画我算、再对答案”成了一种有来有回的互动；小禾也从“照规则做的人”，变成了一个能说明“我为什么这样做”的人，开始承担自己判断的责任。三样东西是在同一个过程里一起成形的，不是先摆好一个学生、一道题，再让他们见面。

打过羽毛球的人都知道这种一起成形的感觉。两个人刚开始对打，球总是落地，谁也算不上“会打”，球也只是一个乱飞的东西；打着打着，回合能连上十几拍了，“一来一回”成了一件可辨认的事，球有了可预期的轨迹，两个人也各自成了能接、能调的球手。没有那一来一回，球和人都还在，“对打”这件事却还没显露出来。

不妨想一想，如果那十分钟被省掉，林老师直接在黑板上画好图、讲清“半条是三格、三分之二条是四格”，会怎样。答案一样，板书可能还更漂亮，可对

象、互动、主体三样都没有机会长出来：题目仍是老师手里的题，来回只有老师说、学生听，小禾也仍然是照着做的人，只是这次照着的是图而不是口令。在陌生城市问路，热心人一口气说清左转、右转、过两个红绿灯，问路的人顺利到了；第二天自己再走，多半还得问。自己拿着地图走错过一次的人，第二天反而记得那个路口。

林老师那条"一个只许算、一个只许画"的规矩，在这里起了一个不太显眼的作用。如果放任同桌自由讨论，多半是小禾三下五除二算完，阿杰点头，一组的理解全落在一个人身上，看上去高效，承担判断的位置却只有一个。规定两人各守一种表示、最后必须对上，等于把说明的责任分给了两个人：阿杰得让自己的图算出一个数，小禾得让自己的算式在图上找到位置。主体这个位置不是天生坐着谁，它是在这样的分工里被撑开的，撑开的方式不同，长出来的人也不同。

这里有一个容易出错的地方需要专门说一句。SIO 的 S 是主体 (Subject)，SDE 的 S 是显露 (Show)，字母碰巧相同，角色完全不同。SIO 是母本用来细看显露内部的语言，它不是 SDE 的另一套译名，更不该把主体、互动、对象一一对到显露、差异序列、特征纠缠上去，说"学生是 S、讨论是 D、题目是 E"。那样做图表会很整齐，分析却会在两套语言之间来回串门，最后谁也说不清自己在说哪一个 S。母本在这套语言下面还有更细的格子，课堂上用不着全部铺开，拿它来多问一句"对象、互动、主体，哪一样还没立起来"，已经够用。

◆ 五、给显露找几块可以敲的地方

如果"答对"只是一个窗口，那老师还能从哪些地方看见理解？母本要求给显露找可以观察的机制，落到数学课上，大致有四块地方可以敲一敲。第一是解释：请学生说明为什么，不只说怎么做。第二是迁移：换一种情境，比如从"几

个三分之一"走到"半条里放几个三分之二条",再走到有理数里的负数除法。第三是反例:给一个看起来能套、其实要停一停的例子,看他会不会停。第四是延时:隔一两周再碰一次,看那天在黑板前长出的东西还在不在。

林老师两周后真的回头敲了一下。她在练习里放了一道不起眼的题:一桶水有四分之三桶,每瓶装八分之一桶,能装几瓶?小禾写了"四分之三乘八,等于六",又在旁边画了一个小长条,切成八格,数出六格。她没有按要求画图,是自己画的。这个小长条比"六"更有信息量:它说明两周前那十分钟留下的东西,已经在没有提示的时候被调用了。阿杰这次也算对了,他先画图数出六瓶,再用乘倒数核了一遍,两扇窗在他那里也开始互相照应。

反例也有现成的。三分之二除以二,问"三分之二里有几个二",阿杰的蛋糕图一下就别扭了:一个都没有,那答案是零吗?这时得换一种读法,把三分之二平均分成两份,每份三分之一。这个反例的用处,是让"包含几个"这种读法说出自己的边界:它好用,但除法还有"平均分"的一面,两种读法得到的是同一个数。能在这里停下来换读法的学生,比一路套下去的学生,理解走得更远。

这四块地方各有讲究。解释要记下老师当时提示了什么,刚强调完"包含几个"学生就这样答,和学生自己主动这样说,分量不一样。迁移的题不宜只换数字,也不宜一下跨得太远,否则失败了也说不清失败在哪里。反例要用来给概念一次说明边界的机会,而不是为了把人难倒。延时最容易被省掉,因为它不在当堂,却恰恰是它在区分"那天听懂了"和"留下来了"。生活里也一样:一个人在健身房教练的口令下动作标准,一个月后自己去练,动作还标不标准,才说明他学会的是动作还是口令。

还有一件事值得守住:即时、延时、迁移这几种表现,最好分开记,不要急着揉成一个"理解力总分"。体检报告从来不会只给一个"健康分",血压、血糖、肝功能各列一行,因为它们说明不同的事,要的也是不同的处理。一个学生当堂

解释得好、两周后忘了，和一个当堂说不清、两周后却能自己画图的学生，合成一个分数可能差不多，需要的帮助却正好相反。一个漂亮的总分省了表格的地方，却可能让老师的帮助绕远路。

一位管过学校的人看到这里，大概会先问一句：这些东西怎么记？成绩册上只有分数一栏，总不能给每个学生每道题都写一段观察。这个担心是实在的。可行的办法往往很朴素：不求每题都记，只在一个单元里挑两三个关键节点，比如分数除法的"包含"关系、方程里的等号，用同一种简短格式记下"在哪类题上、靠什么表现、有没有提示"，并请另一位老师拿同一份作业也判一次，看两人能不能对上。对不上的地方，往往正是标准还说不清的地方。

把这些和你的两个问题放在一起，会看到一层联系。系统思考要问一个结果从哪些条件、经过哪些尝试长出来，而"乘倒数从哪里来"就是这个问题最小的版本；小禾在分数除法上看不见来路，和她在思维导图上分不清哪根箭头是真的，是同一种看不见。动力这边，一个学生若能看见自己的判断确实改变了下一次怎么做，可能更愿意继续，这是一个有待检验的联系，还要考虑任务难度和她当时的状态；但至少，"全对却说不出为什么"的学生，手里少了一样能让她在换问法时稳住的东西。

这个判断在几种情况下会出错，值得集中说清。一是把表达当成理解本身：有的孩子语言组织慢、紧张，说不出来不等于没有，老师需要用画图、操作或选择题换一扇窗再看。二是把"多看几扇窗"变成"天天考四门"：解释、迁移、反例、延时都很好，全部堆到每节课上，学生会开始揣摩老师想听什么，观察工具就制造了它想排除的表演。三是我们在这里描述的都是构造的课堂片段，"四块地方"在一所真实学校里能否被两位老师用同样的方式看出来，需要先拿真实作业试一试；若对不上，就先改观察说明，而不是先改学生。

底牌可以亮出来了。答对是显露的一个窗口，不是全部：一种理解向谁显露、靠什么表现、在哪类任务里、稳到什么程度，这四件事交代清楚，"懂了"才从一句客气话变成可以接着干活的判断。那天小禾说"原来倒数是这么来的"，这句话本身也只是一个窗口；它是否留下来，要看她下一次犯错时，有没有人、有没有办法把那个错接住。这就是下一章的事：错误怎样接成一条路。

带走的话

答对只是一个窗口：说清向谁显露、靠什么、在哪类题、稳到什么程度才算数。

小 账

人物是真的吗？ 小禾、阿杰和这几段课堂片段都是构造的。

哪一句还要检验？ 解释、迁移、反例、延时"四块地方"能否让两位老师在真实作业上看出同样结果，要先试；对不上就先改观察说明，而不是先改学生。

数字对吗？ $1/2 \div 2/3 = 3/4$ 、 $5/6 \div 1/3 = 5/2$ 、 $3/4 \div 1/8 = 6$ 等计算都已核对。

说不出就是不懂吗？ 不一定。语言慢、容易紧张的孩子要换画图、操作等窗口看；观察堆得太多，也会制造出表演。



11

第11章

错误怎样接成路：从错题本到六步九步

这一章的问题

错题本抄得整整齐齐，为什么同一类错误还是一错再错？

场景 期末前林老师翻小禾的错题本，同一类去括号错在第三、七、十一页各出现一次。

◆ 一、一座整齐的错题博物馆

期末前，林老师收齐了全班的错题本。小禾的那本最漂亮：每道错题用黑笔原样抄下，旁边红笔写正确过程，再用荧光笔把"易错点"三个字圈起来，页角还贴了小标签。林老师翻到第三页，看到一道去括号的方程错了；翻到第七页，同一类题又错了；翻到第十一页，又是它。三次的红笔订正都写得一丝不苟，三次的"易错点"都写着同一句话：去括号要变号。

这本错题本像一座博物馆，展品陈列得整整齐齐，每件都有说明牌，就是没有人从展厅里带走什么。小禾不缺努力，她抄得比谁都认真；她缺的是错误和下一次之间的那根线。第三页的错没有改变第七页的做法，第七页的错也没有改变第十一页的做法。三次错误排在一起，只是三次，不是一条路。

骑车的人大概遇到过这种事：链条掉了，蹲下来挂回去，骑两百米又掉了，再挂回去。挂得越来越熟练，手越来越黑，问题一直在。真正的修法是停下来看看为什么掉，是变速器偏了，还是链条松了。每一次挂回去都是一次"订正"，可没有哪一次挂回去改变了下一次掉不掉。挂链条的手艺越练越好，骑车这件事却

一点没有往前走，这正是错题本最容易落进的样子：订正的功夫长了，数学没长。

林老师翻着翻着，也看出了这座博物馆是怎么建起来的。年级检查错题本，看的是有没有抄全、字是否工整、有没有用两种颜色的笔；一本错题本若只写了一行“负号只给了 x ”，在检查表上反而要扣分。小禾是最会读规则的学生，规则奖励的是陈列，她就把陈列做到最好。这正是导论说的那种“看不见的同学”：检查办法属于她的特征纠缠，它不声不响地限定了她订正时往哪里用力。把这本错题本的问题全算在小禾身上，就把一起上课的那位同学漏掉了。

林老师把小禾叫到办公室，没有提错题本，只问她做去括号的题时心里是什么感觉。小禾说，每次订正完都觉得自己会了，下一次考试又错，就觉得“我不是在这里就是不行”。这句话比三页错题更让林老师在意。一个错误重复三次，留下的不只是三个红叉，还有一句慢慢长出来的自我判断，它会悄悄进入下一次做题时的手感：还没动笔，先怕了。错误没有被接住，它并没有消失，它换了个地方住下来。

第一章说过，差异序列（D）关心的是变化怎样一环一环接起来。这里可以把话说得更细：做了很多次，不等于有了序列；改了很多遍，也不等于接上了。一串尝试要算作一条路，后一次得用上前一次留下的东西，比如排除了一种做法、看清了一个条件、换了一种表示。还有一点要分开：小禾肯不肯继续，和她的错误有没有接成路，是两件事。她一直肯，她的本子证明了这一点；可肯继续的人，也可能在原地转圈。把这两件事混成一个“态度问题”，药方就会开错。

◆ 二、六步走一圈：猜想要野，承接要严

林老师把那道题抄到黑板上： $5 - 2(x - 3) = 1$ 。她没有直接讲，而是把母本里那个最小的循环拆开来用：猜想、执行、评估、反馈、修正、迭代。这六个词听起来像生产线，用在一道题上却很朴素，而且每一步都有它最常见的断法。

猜想，是先说出自己打算怎么做，以及为什么。小禾说："先去括号，再移项。"这个猜想没有问题，问题在于它太粗，粗到决定不了下一步具体怎么写。猜想这一步最常见的断法有两种：一种是根本没有猜想，拿起笔就写，写到哪里算哪里；另一种是猜想大而空，像"认真一点""细心一点"，它听起来像计划，却指不出哪一步要怎么做。一个好用的猜想要具体到能被检验，比如"负二要分别乘括号里的两项"。

执行，是照着做出来，小禾写下 $5 - 2x - 6 = 1$ ，解得 $x = -1$ 。执行最常见的断法是做的和想的不一样：她口头说要分别乘两项，手上却在心算时把负号丢了，自己并不知道。所以执行要留下看得见的痕迹，哪怕只是在括号上方画两个小箭头，事后才查得出偏离发生在哪里。

评估，是拿一个事先说得清的标准去对照，最朴素的标准是代回去： $5 - 2 \times (-1 - 3) = 5 + 8 = 13$ ，不等于1。这一步很多学生会跳过，因为答案后面跟着的是老师的红叉，判断不需要自己来做。评估一旦全部交给红笔，学生就只知道"错了"，不知道"错在哪里"，下一步的反馈也就没有材料可用。

反馈和评估常被混成一件事，其实不同。评估说"错了"，反馈要让"错了"进入下一次行动：错在哪一个具体动作上，下一次做到那里时要停一下。小禾以往的订正，评估做了，反馈没做，红笔写了正确过程，却没写"我在哪一步做了什么，所以错"。修正是针对那个动作改，而不是整题重抄；迭代是带着这个改动做一道新题，看它是不是真的改了。三次错题之所以没有接起来，就是循环每次都在评估之后断开了。

修正这一步还有一个常见的误会：以为改得越多越认真。小禾以往的订正是整题重抄，从第一行抄到最后一行，抄完了，那一个出错的动作淹没在十几个正确的动作里，反而看不出来。裁缝改裤子，不会因为裤脚长了就把整条裤子拆开重做，他量出长了多少，只改裤脚，再让人穿上走两步看看。修正要小到能对准，对准了，下一次才知道要盯哪里。

林老师给的迭代题是 $3x - 2(x - 4) = 10$ 。小禾这次在 -2 上方画了两个小箭头，写出 $3x - 2x + 8 = 10$ ，得 $x = 2$ ，又代回去： $3 \times 2 - 2 \times (2 - 4) = 6 + 4 = 10$ ，对了。一道题做对说明不了太多，但这一次对和以往的对不一样：她知道自己这一次在哪一步做了什么不同的事。迭代的意义不在于再做一遍，而在于新的一遍明确带着上一遍留下的改动。

"猜想要野"在这节课上有一个现成的例子。阿杰看着黑板说："能不能先去括号？"他的想法是：5 减去一个东西等于 1，那个东西就是 4，也就是 $2(x - 3) = 4$ ，于是 $x - 3 = 2$ ， $x = 5$ 。这条路绕开了去括号，全班都愣了一下，小禾第一个去代回检验，对的。林老师没有说"按规定的步骤来"，而是把两条路并排写在黑板上，问大家：什么样的方程适合阿杰的办法，什么样的方程只能老老实实去括号？一个野一点的猜想，在这里不只给出了第二种解法，还逼出了一个关于"条件"的问题，第七章说的再创型入口，就常常是从这种地方冒头的。

学做红烧肉的人懂这个道理。第一次太咸，第二次少放盐、又换了酱油、又多焖了十分钟，结果好吃了，可下一次还是不知道该照哪一样做。真正会做菜的人一次只改一个变量，改完记下来，好了就留，不好就退回去。猜想可以野一点，"会不会是糖色炒老了"也值得一试；承接必须严一点，每一次改动都要能说出它回应的是上一次的哪个问题。数学课里也一样，学生的猜想可以五花八门，老师要守住的是：每一次修正要接住上一次的评估。

◆ 三、平均分盖住的两种错

林老师把全班这类题的错误收在一起，起初只算了一个数：去括号正确率百分之六十二。这个数让她很沮丧，因为上个月差不多也是这个数，讲了一个月几乎没动。她的课在转，作业在交，订正在写，正确率却停在那里。这就是母本说的到顶信号：循环还在转，修正却不再带来改善。

到顶的时候，最顺手的解释是"学生不够用心"，因为课讲了、题做了、订正也写了，剩下能怪的好像只有人。可是这个解释什么也改不了，它让下一个月照旧，只是多了几句叮嘱。练过长跑的人都知道平台期：每天照样跑，成绩就是不动，这时候再加量往往只会受伤，有经验的教练会先换一种看法，拆开看是心肺跟不上，还是步频乱了。到顶信号的用处，是提醒我们该换一种看法了，而不是再加一把劲。

到顶的时候，再用力转同一个循环，多半只是转得更累。母本在六步之外加了三步：分化、重组、升维，合起来叫九步。分化是第一步：把一个笼统的问题拆开，看里面是不是挤着几种不同的东西。林老师不再只看"错了"，而是看错成了什么。同一道 $5 - 2(x - 3) = 1$ ，正确答案是 $x = 5$ ；有的学生得到 $x = -1$ ，有的学生得到 $x = 7/2$ 。

两个错答案是两条不同的来路。得 -1 的学生写的是 $5 - 2x - 6$ ，他把 2 乘进了括号，却让负号只管了第一项；得 $7/2$ 的学生写的是 $5 - 2x + 3$ ，他记得"要变号"，可是 2 只乘了 x ，没乘 3。前一种是符号跟丢了，后一种是乘数跟丢了。百分之六十二的正确率把这两群学生装进了同一个口袋，而他们需要的帮助正好相反：一群需要弄清负号到底属于谁，一群需要弄清乘法分配到底分给了谁。小禾属于前一群，"去括号要变号"这条口诀对她没有用，因为她以为自己已经变了。

这件事的妙处在于，错答案本身就是线索。题目设计得好，不同的错走到不同的数上，老师不用一份一份去问，只看学生写下的最后那个数，就大致知道他

在哪一步、以哪种方式出了岔。过去林老师只关心答案对不对，错的答案统统归为“错”，扔掉的恰恰是最有信息量的那一部分。这有点像医生听咳嗽，干咳和带痰是两种来路，嫌它吵塞给病人一颗润喉糖，就什么也听不出来了。

平均数盖住分歧，这件事在家里也常见。一家人说“这个周末过得还行”，平均下来没毛病；拆开问，爸爸觉得太累，孩子觉得太闲，妈妈觉得被安排得太满。拿“还行”去改下个周末，改什么都对不上号。分化不是为了把事情弄复杂，而是为了让下一次修正知道自己在回应谁。

林老师那天晚上把错卷按最后的答案分成了几堆。得 -1 的一堆，得 $7/2$ 的一堆，还有一小堆五花八门，有的是移项时忘了变号，有的是抄错了数，一时说不清来路。她没有硬把这一小堆塞进前两类，而是给它贴了一张条子：“尚未分清”。这张条子很重要，分化的诚实之处，在于承认还有一部分东西自己没看懂；要是为了图省事把它们并进最近的一类，下一次修正又会对着错的对象使劲，等于把平均数的毛病搬到了分类里。

◆ 四、“符号跟谁走”，以及负数为什么要有

分化以后，林老师发现原来的讲法本身就有问题。“去括号要变号”是把规则贴在括号上，好像括号是一扇门，进门就要换衣服。她换了一种组织方式：不看括号，看“谁乘谁”。 $-2(x - 3)$ 说的是负二这一个数，要分别和 x 、和负三各乘一次；负号不是挂在括号外面的一个装饰，它是负二的一部分。这样一来，“变号”不再是一条要记的规则，而是负二乘负三自然得到正六的结果。

这一步叫重组。材料还是原来那些：去括号、乘法分配律、有理数乘法，一样也没扔，只是它们之间的关系换了。以前它们是三条并排挂在墙上的口诀，现在分配律成了骨架，符号法则成了骨架上的关节，去括号变成骨架动起来的样

子。整理衣柜的人都知道，衣服一件没少，按季节挂和按颜色挂，第二天早上找衣服的速度可以差出十分钟。

重组以后，那两群学生的帮助也就各有了落点。符号跟丢的那一群，练的是"先认出这个乘数是几，带着它的符号一起"；乘数跟丢的那一群，练的是"括号里有几项，就要乘几次"。两种练习的题目可以长得很像，用意却完全不同，过去混在一张卷子里做，各自都只练到一半。重组没有增加练习量，它改变的是每一道练习在为谁服务。

重组也有一个冒牌货，就是换名字。把"去括号要变号"改叫"符号分配法"，再配一首顺口溜，听起来焕然一新，可学生脑子里那几样东西之间的关系一点没变，他们还是把规则贴在括号上。饭店把"土豆丝"改叫"金丝缠绵"，价钱涨了，土豆还是那盘土豆。判断是不是真的重组，要看学生面对一道新题时，先看的是不是换了地方：以前先找括号，现在先找"谁在乘谁"。

老陈在教研会上听林老师讲完，冷冷补了一句："那你干脆问问他们，为什么要负数。"这句话听起来像抬杠，其实是第三步，升维。小禾在去括号上的错，往下挖一层，是她一直把"减"当成一个动作，把负数当成一种"欠"，两者在她脑子里从来没有接上：减去一个数，等于加上它的相反数。如果这一层接上了， $5 - 2(x - 3)$ 就可以读成5加上负二乘以括号，符号该跟谁走，几乎不用再记。

林老师真的拿出一节课的后半段来问这个问题。学生们说温度、说欠钱、说海拔，都对；她追问："有了负数以后，减法还需要单独存在吗？"教室里冷了一会儿，有人说："减三就是加负三嘛。"这句话一出来，去括号就从一条规则变成了一个推论：把所有的减都看成加上相反数，剩下的只是乘法分配律。升维就是把一个局部的困难放进更大的问题里看，问这个规则是为了解决什么才出现的。

小禾在那节课的笔记上写了一句话："减法是加法穿了一件外套。"写得有点俏皮，林老师却觉得这是她这学期写得最好的一句数学。它说明一个原来散落的东西被放进了更大的框里：去括号、移项、有理数减法，在这句话下面都变成了同一件事的不同样子。一次升维不成功，看的不是讨论有多热烈，而是学生回到具体题目时，手里是不是少记了几条规则、多看清了一层关系。

升维有代价，不是每次卡住都值得往上走一层。一个学生只是一时粗心，把他拉去讨论数系扩充，就像为了一扇门吱吱响去重修整栋房子。林老师的做法是：分化以后先看哪一群学生，在重组的讲法下两周内仍然反复出错，只对他们追问"为什么要有负数"。九步包含六步，升维以后得出的新理解，仍然要回到具体题目上猜想、执行、评估、反馈，看错误率是否真的动了。

◆ 五、没人接的错误才是学习的反面

两周后，林老师再收错题本，小禾的本子上多了一种以前没有的东西。她不再只抄题和正确过程，而在错误的那一行旁边写："我把负号只给了 x ，负二是一个整体。"后面一道新题，她在去括号那一步上方画了两个小箭头，从负二分别指向两项。正确率是不是从此上去了，还要看更长时间；但这本错题本开始从博物馆变成了一张路线图，前一个错误在后一道题上留下了脚印。为了让这样的本子不在检查时吃亏，林老师也去找年级组商量，把"写清错在哪一步"加进了错题本的检查要求，这一条改动能不能坚持下去，是第十九章要谈的事。

这和你第一个问题有一条直接的连线。小禾一直很努力，可三次同样的错误对她来说是三次挫败，每一次都在提醒她"我在这里不行"；而一个被接住的错误，是她亲眼看见自己的哪一步变了。两周前她怕去括号的题，现在她会在那一步上停一下，像司机在熟悉的急弯前松一下油门。这不是被表扬出来的劲，是被接住的错误给出来的方向。表扬可以让人愿意再坐下来，可坐下来以后往哪里使

劲，要靠上一次的错误留下的那一点线索；没有这点线索，再多的鼓励也只是让人更用力地原地踏步。

差异序列在这里也变得可以观察。看一本错题本有没有接成路，不必数它有多少页，只要看两样东西：后一道题的订正里，有没有用上前一道题留下的那句话；同一类错误隔了多久再出现，出现时错成的样子是不是换了。小禾的本子上，第十一页那道错和第三页错成一模一样，这说明序列断着；如果下一次她错了，却是错在别的地方，那反而说明前一个错已经被接住，路往前走了一段。

在做过课程研发的人看来，这一章的事很像一个熟悉的困境：错题本、订正、错因分析，各种工具学校里都有，缺的往往是它们之间那根线。六步九步提供的不是一张新表格，而是一个检查办法：一次订正有没有说清错在哪个动作；下一道题有没有用上它；正确率不动时，有没有人去拆开看看平均数底下是几种错；拆开以后，原来的讲法要不要重新组织，要不要往上问一层。

还要再分清一次：一条路接上了，不等于学生就更想学了；更想学了，也不等于路接上了。小禾这两周的变化，可以分别去看。路接没接上，看的是错题本里的那句话有没有在下一题里起作用；她愿不愿意继续，看的是她遇到去括号的题时还怕不怕、会不会主动去碰一道更难。两样东西常常一起动，但也可能一个动了、一个没动。把它们分开记，才知道下一步该补哪一边。

这个判断有它会错的地方。第一，不是所有错误都值得这样接，有些错确实是手滑，一道题里抄错一个数字，接成路反倒是小题大做；分辨的办法是看它是否反复出现、是否有共同的来路。第二，“猜想要野”在基础概念刚建立时要收着用，一个还没弄清分配律的学生，面前摆五种解法只会更乱，这时练熟一个关键动作比鼓励探索更合适。第三，林老师按错答案把学生分成两群，是在一个构造的场景里推出来的；真实课堂里错误的种类可能更多，也可能混在同一个学生身上，分化的标准要拿真实作业去试，分不清的时候宁可先保留“尚未分清”。

回到那座博物馆，这一章的判断可以说得很短：错误不是学习的反面，没人接的错误才是。一个错误被接住，意味着它被说清在哪一步、在下次行动里留下了改动、并且在正确率不动的时候有人去拆开它；做到这些，错误就从一件展品变成一段路。小禾的错题本提示了一件事：接住错误往往不需要更多的题，而需要一个让错误能说话的问题。下一章，我们就去看这样的一个问题，它从一块菜地开始。

带走的话

错误不是学习的反面，没人接的错误才是。

小 账

人物是真的吗？ 小禾的错题本、阿杰的解法和全班的错卷都是构造的。

数字对吗？ $5-2(x-3)=1$ 得 $x=5$ 、错答-1与 $7/2$ 的来路、 $3x-2(x-4)=10$ 得 $x=2$ 都已核算；62%的正确率是情节设定。

哪一句还要检验？ 按错答案把学生分成两群是在构造场景里推出的；真实错误可能更多、也可能混在一人身上，分化标准要拿真实作业试，分不清就先保留"尚未分清"。

每个错都要这样接吗？ 不必。偶然抄错一个数不必接成路；基础概念刚建立时，练熟关键动作比鼓励多种解法更合适。



12

第12章

菜地与围栏：一个同时回答两个问题的课

这一章的问题

能不能有这样一节数学课：学生自己想往下做，做着做着就学会了看条件？

场景 每班分到一块菜地和二十四米旧篱笆，小宇嘀咕："围成什么样都一样大吧。"

◆ 一、一圈旧围栏引出来的问题

青石中学开劳动课，后勤在操场东边的围墙下划出一片空地，分给七年级每班一块菜地，另外每班领一捆二十四米长的旧竹篱笆。消息是课间传开的，林老师走过七年级（2）班后门，听见小宇在跟同桌嘀咕："二十四米，能围多大一块？"同桌说："二十四米就是二十四米那么大呗。"小宇想了想，说："围成什么样都一样大吧，反正篱笆就这么长。"

林老师站在门口没进去。这是很久以来她第一次听见小宇自己冒出一个数学问题，他的书没有立着，眼睛看着窗外那片空地。这句话里有一个真问题，也有一个错误：他想知道能围多大，这是劲头；他认为周长一样面积就一样，这是 he 手里旧条件的样子，周长和面积在他那里还缠在一起。第三章说过，张力要有人接。

林老师知道小宇手里的旧条件是什么样子。六年级分数除法开始，他的数学就一节一节地松下去，进了初一，有理数的符号和方程的移项又压上来，作业本上的订正越写越短。他嘴上不说，心里大概早有一句"我不是学数学的料"。可那

句“能围多大”不是从课本里来的，它从窗外那片空地来，从一捆真实的篱笆来，绕开了他一路积下来的那些挫败。一个问题从哪里来，有时决定了一个学生敢不敢去碰它。

接法有两条现成的路，都很顺手。一条是先补基础：小宇周长面积分不清，那就先回去把三年级的概念练熟，菜地的事以后再说。另一条是先护热情：难得他有兴趣，夸一句“想法真好”，具体算不算对先放一放。前一条把他的问题送进了一个看不到尽头的补课流程，后一条把他的错误轻轻放了过去，两条路都体面，也都把眼前这个能接住的瞬间错过了。林老师想走第三条：问题留着，错误也留着，让问题去逼出他需要的那点数学。

从哪里起手，也是一次选择。第七章讲过六路径，小宇这里已经有一个带着推动力的问题，最吃紧的是他缺的条件，按倒逼型走最顺：让他的问题逼出周长和面积的区分。但全班不只小宇一个人，小禾更习惯先找已知量列式，有的同学想先在纸上画出心里的菜地。林老师把原定的一节练习课往后挪了，第二天的数学课改到了操场，给每组一根二十四米的绳子和一卷皮尺，规矩只有一条：先围，再算，最后要说服别的组。

做过课程研发的人大概能看出这节课的冒险之处：它没有现成的进度表，一节课能走多远取决于学生会在哪里卡住。林老师心里只守着两样东西，一是数学结论和论证的标准一寸不让，二是每一次卡住都要被接到下一步上。其余的，交给绳子。

◆ 二、从“差不多”到“一定”

十分钟后，操场上出现了各种形状。小宇那一组围了一个长八米、宽四米的长方形，量出来面积三十二平方米；隔壁组围了长七米宽五米，三十五平方米；还有一组拉成长十米宽二米的细条，只有二十平方米，像一条走廊。小宇站在三

个长方形中间，看了很久，说了一句："不一样大啊。"这句话是这节课第一个被接住的错误：周长都是二十四米，面积从二十到三十五都有。

小宇那组负责拉绳子的一个角。他发现自己往外走一步，长边就长一米，短边就短一米，地上那块地却"瘦"了下去。他来回走了好几趟，像在调一台老收音机的旋钮，一会儿往这边拧，一会儿往那边拧。没有人给他讲面积公式，绳子在他手里替公式说话：同一根绳子，形状一变，围住的地就变了。周长和面积在他那里第一次被拉开了距离。

围成走廊的那一组不服气。他们说，菜地又不是越大越好，二米宽的地两边都能伸手够到中间，不用踩进去，种菜更方便。林老师觉得这个反驳很好，它提醒全班一件容易被数学题藏起来的事：问"最大"本身是一种选择。第四章说过，目标不是先写在心里的纸条，它在活动中长出来；这里的目标也在操场上被重新商量了一回。最后大家约定，先弄清楚"最大能有多大"，再决定要不要为了好打理而让出一点面积。这样一来，"最大"成了一个被说明过的目标，而不是一道题默认塞给学生的。

接下来是猜想。有人说"越方越大"，有人说"长宽差得越少越大"。林老师让各组把结果写到小黑板上：长十一宽一，十一平方米；长十宽二，二十；九和三，二十七；八和四，三十二；七和五，三十五；六和六，三十六。一排数从两头往中间涨，在六和六那里到顶。小禾第一个举手："正方形面积最大，书上有这个结论。"

林老师听见"书上有"三个字，想起分数除法那天小禾说的"书上说的"。她没有点头，问了一个让小禾不太舒服的问题："我们只试了整数，长六米半、宽五米半呢？"小禾算了一下，三十五点七五，比三十六小一点。"那你怎么知道，在六和七之间、五和六之间，没有一个我们没试到的长方形比三十六还大？"小禾说不出来。买东西的人都懂这个：问了三家店，这件衣服都是三百，不能说明全

城最便宜就是三百。几次试算排成一行，可以提供猜想的线索，却替不了所有没试过的长方形投票。从"差不多"到"一定"，中间隔着一个证明。

证明用的是初一学生够得着的办法：剪纸。先画一个六乘六的正方形，面积三十六。要把它变成长比六多一点、宽比六少一点的长方形，比如长多出 a 米、宽少了 a 米，周长不变。从正方形上边剪下一条宽 a 、长六的纸条，剩下的是长六、宽 $6 - a$ ；把纸条竖过来补到右边，右边只有 $6 - a$ 那么高，纸条长六，补上去还剩下 a 乘 a 的一个小方块没处放。所以新长方形的面积，正好是三十六减去那个小方块，写下来就是 $36 - a^2$ 。小方块的面积不会是负数， a 不等于零时总要减掉一点，所以周长二十四米时，最大面积是三十六平方米，在两边都是六米时取得。

小禾拿着剪好的纸核对了一下刚才那个让她说不出话的长方形：长六米半、宽五米半， a 是零点五，小方块的面积是零点二五，三十六减零点二五，正好三十五点七五，和她刚才硬算的数一模一样。她又试了七和五， a 是一，三十六减一，三十五，也对。剪纸给出的不是又一个数，而是一个能把所有试算都装进去的说法，以前试过的每一个长方形，现在都在这张纸上找到了自己的位置。

这一步对小宇格外要紧。他刚才在绳子角上走来走去感觉到的东西，现在有了一个看得见的来路：周长固定时，面积跟着"两条边离得多远"在变，离得越远，扔掉的小方块越大。他不必会背这个式子，他看见的是那块被剪剩下来的纸。

◆ 三、靠着墙，正方形输了

正当大家觉得事情结束了，后勤的王师傅推着小车经过，说了一句："你们的地挨着围墙，墙那边不用围。"条件变了。现在只需要围三边：两条垂直于墙

的边，各长 x 米，一条平行于墙的边，长 $24 - 2x$ 米。因为三条边都要有长度， x 要大于零、小于十二。

小禾的反应很快："那还是正方形最大，三条边都八米，面积六十四。"这是这节课第二个错误，它比第一个更值得珍惜，因为它来自一个刚被证明过的结论。上一题的答案被原样搬进了新题，好像"正方形最大"是一条自然法则，而不是"周长固定的长方形"这个条件的产物。林老师没有直接说错，她请小宇那一组按小禾的方案和另一个方案各围一次：三边都是八米的，六十四平方米；两边各六米、沿墙那边十二米的，七十二平方米。正方形输了。

小禾的脸红了一下。林老师走过去，说了一句后来被她写进笔记的话："你那个结论没错，是被搬错了地方。"这句话把错误从"我又错了"挪到了"结论有它成立的地方"，上一章说的那种接住，在这里只用了一句话。小禾后来在笔记上写："正方形最大，是有条件的。"她没有被批评，也没有被安慰，她得到的是一个可以往下查的问题：那个条件是什么，这里又变成了什么。

小宇那一组在围这两个方案的时候，有人嘀咕了一句："墙也算一条边，等于白送的。"这句话说得很土，却说中了要害。白送的那条边不花篱笆，所以篱笆应该尽量花在别处，沿墙那条边就该放得长一些；把三条边做成一样长，等于没把白送的东西用足。一个好的数学讨论，常常就是从这种土话里找到下一步该算什么。

为什么输？回到教室以后，林老师把黑板分成两栏。左栏是第一题：两条邻边加起来是十二。右栏是第二题：两条垂直边加上沿墙边是二十四，也就是 $2x + \text{沿墙边} = 24$ 。她请学生找"哪两个数的和是固定的"。

小宇那一组先看出来：面积是 x 乘 $(24 - 2x)$ ，可以写成 2 乘 x 乘 $(12 - x)$ ，而 x 和 $12 - x$ 加起来正好是十二。这就又回到了刚才剪纸的那个正方形：两个和

为十二的数，乘积最大是三十六，在两数都是六时取得。所以面积最大是二乘三十六，七十二平方米，在垂直于墙的边六米、沿墙边十二米时取得。

林老师在黑板上补了一行记录： $x(24 - 2x) = 72 - 2(x - 6)^2$ ，并说明这只是把剪纸的结论换了一种写法，以后学了整式乘法可以自己展开核对。这一行可以读成一句大白话：垂直边离六米每远一点，就要从七十二里扣掉那段距离平方的两倍，所以离六越远，扣得越多。它的分量不在式子，而在它说出的那件事：在第二题里，“相等的两个数”不是长和宽，而是 x 和 $12 - x$ ；沿墙边恰好是垂直边的两倍。正方形在第一题里最大，是因为那里被固定的是“长加宽”；这里被固定的东西变了，最好的形状就跟着变了。

这一刻，第十章说的那几扇窗都亮了一下。学生能识别出新题里真正被固定的是哪一个和；他们能把剪纸的结论维持到一个新条件里使用；他们开始能表达“答案为什么变了”。上一题的结论没有被扔掉，它成了解下一题的工具，这是回写的一个苗头：第一题留下的东西，改变了第二题能用的办法。

◆ 四、墙只有八米

靠墙的那一题算完，林老师派小宇那一组去量真的围墙。小宇拿着皮尺走在最前面，回来报告了一个坏消息：分给二班的那一段墙，中间被一扇铁门隔开，能靠的只有八米。全班安静了一下。刚才的最优方案沿墙边要十二米，墙不够长，那个方案不再可行。生活不太讲究让题目好看，它常常在人算完最漂亮的一步之后，才告诉他柜子量错了尺寸。

小宇报告的时候没有看黑板，看着地面，声音不大，但说得很清楚：铁门左边五米多，右边八米，右边那段才是咱们班的。这是他这学期第一次在全班面前说这么长一段跟数学有关的话，说的是一个量出来的数，不是一个答案，所以不

怕错。林老师没有表扬他，只说了一句"那我们就按八米算"，他的这个数就成了全班接下来要用的条件。被别人当真地用上，比被夸一句更像是承认。

现在多了一个约束：沿墙边最多八米。沿墙边是 $24 - 2x$ ，它不超过八，就是 $2x$ 至少十六， x 至少八米；同时 x 仍小于十二。可行的方案被挤到了一段新的范围里。林老师问："还用刚才那个结论吗？"小禾说用：面积还是 2 乘 x 乘 $(12 - x)$ ， x 越靠近六越大；可现在 x 最小只能取八，离六最近的就是八。于是 x 等于八，沿墙边 $24 - 16 = 8$ 米，面积 $2 \times 8 \times 4 = 64$ 平方米。他们又试了 x 等于九，沿墙边六米，面积五十四； x 等于十，沿墙边四米，面积四十，果然越往外越小。

有同学不放心，又试了一个不是整数的： x 等于八点五，沿墙边七米，面积五十九点五平方米，也比六十四小。这一次大家没有满足于试几个数，而是能说出为什么：八以外可行的 x 都在八和十二之间，都比八离六更远，而离六越远面积越小，这是刚才两次用过的结论给出的保证。试算在这里的角色变了，它不再负责找答案，而是负责检验一个已经有理由的判断，像装修完开一次水龙头，不是为了设计水路，是为了确认水路没装错。

最优解不在"山顶"，而在被墙挡住的那条边界上。没有墙的限制，最好的点是 x 等于六；墙一短，这个点被划到了界外，答案就落在界内离它最近的地方。开车赶时间的人都有这种体会：想越快越好，可这段路限速八十，最好的开法就是贴着八十开，再快的那些速度不是不好，是不在可选的范围里。这个道理用不着导数，初一学生用"离六越近越大"就能讲清楚，而且讲得比背公式更牢。有学生追问："一定要把二十四米篱笆用完吗？"大家又算：沿墙边最多八米，两条垂直边加起来最多十六米，各八米时面积最大，还是六十四，剩不下更好的办法。

这时小禾突然笑了："你们看，又是正方形！八乘八。"这是整节课最有意思的一刻。答案和她二十分钟前那个被否定的猜想一模一样，三边都是八米，面积

六十四。可这一次的正方形和上一次完全不是一回事：上一次她是因为"正方形最大"选了它，这一次它是被八米这堵墙逼出来的。林老师顺手把墙长改成十米让大家算： x 至少七，沿墙边十米，垂直边七米，面积七十平方米，不再是正方形。同样的答案，可以有完全不同的来路；只看答案的人，会以为自己第一次就对了。

老陈下午听林老师讲这节课，冷幽默又上来了："菜地沿墙那条边，能不能比墙还长，墙不够的那一截用篱笆补上？"林老师说这个留作周末的问题。后来一组学生在作业里算出：如果沿墙边可以比墙长、缺的那一截用篱笆补，八米墙时最好的方案仍然是八乘八，六十四平方米；可要是墙只有四米，让沿墙边伸出墙外、用篱笆补齐，能得到七乘七，四十九平方米，比老老实实只靠四米墙的四乘十、四十平方米还大。每多问一句"如果"，就有一个条件被重新放到桌面上，有些方案获得了资格，有些失去了资格。

◆ 五、这节课回写了什么

这节课最后十分钟，林老师只让学生回答一个问题：今天哪条约束改变了答案？学生的回答写满了小黑板："周长固定，正方形最大""靠墙以后被固定的是两条垂直边加沿墙边""墙只有八米，最好的点被划到外面去了，只能取边上"。这几句话，就是第九章那三句追问在一道数学题上的样子：这个结果是在什么条件里、经过哪些尝试长出来的？它又改变了什么？小禾那张四十多条箭头的思维导图里没有一条能这样回答问题；而这一次，她能说出八乘八这个答案出现过两次、来路各不相同。

把三句追问放回这节课，也能一一对上。结果是什么在什么条件里长出来的：周长二十四米、靠不靠墙、墙有多长，每一个条件都在决定哪些方案有资格进入比较。经过哪些尝试：拉绳子、列一排数、剪纸、两栏对照、量真的墙，每

一步都用上了前一步留下的东西。它又改变了什么：剪纸的结论变成了解第二题的工具，第二题的工具又被用来解第三题，班上还多了一条说话的规矩。系统思考在这里没有画一张大图，它只是让每一个答案都带着自己的来路。

这节课里，同一个任务允许了几种入口。小宇从自己的问题起手，按倒逼型走；小禾从一个已知结论起手，先进入它赖以成立的条件，走的更像进入型；老陈留下的那个“沿墙边比墙还长”的问题，是在已经理解的方法上改条件、长新问题，属于再创型。可这些不是给学生贴的标签：同一个小禾，前半节课在进入型里，最后那句“又是正方形”背后的追问，已经走到了再创型的门口。一节课里入口可以轮换，这本身就说明路径说的是这一次任务和处境配不配，而不是这个人是哪一种人。

再看小宇。用母本的123原理来读，这节课里的张力，是他想围一块最大菜地的那股尝试，和他手里“周长一样面积就一样”的旧条件在打架；这个张力在绳子和剪纸里被接住了，逼出一个新的显露：他看见了面积跟着边长怎样变。新显露有没有回写，要看后来，不能当堂宣布。林老师能记下的痕迹有两条：一是第二天的作业里，小宇在一道普通的长方形题下面自己添了一行小字，“如果靠墙呢”；二是他在这节课的笔记最后写了一个问题，“墙变短了，为什么答案偏偏就落在边上”，旁边画了一个问号，没有拿去问人。

这些痕迹说明，他的条件里多了一点东西，大意是“我也能把一个问题想到底”。它会不会留下来，会不会在下一次困难面前撑住，要看后面几周有没有人接着接。也要注意，看动力不能只数举手：小宇这一整节课一次手也没举，他的投入落在绳子角上来回的那几趟、皮尺前面的那几步、作业里那行没人要求的小字上。用举手次数来量他，这节课会被记成零。

林老师给自己定了一个简单的记法：接下来的一个单元，她只盯两件事，一件是小宇在没有人提醒的时候，会不会再写出“如果……呢”这类句子，另一件是

他遇到算不下去的题，是把书立起来，还是停在那里换一种试法。这两件事都写在一张小卡片上，按日期记，好坏都记。她知道一节课的热闹很容易让人看什么都像变化，事先写下要看什么，至少能让几周后的自己不那么容易骗自己。

这节课也给班级留下了一样东西。林老师在教室后墙贴了一张纸："答完一道题，先说哪一个条件在起作用。"这不是一句口号，以后每次讲评都按它来，它改变的是全班说话的规矩，也就是大家共同的条件。周校长听说了这节课，第一句问的是："这一节课的进度谁来补？"这个问题很实在，也提醒我们，一节好课要变成学校记得住的经验，还有很长的路，第十九章再细说。

这个判断也有会错的地方。第一，这节课的数学推进是被精心安排过的：王师傅的那句话、铁门的位置，都在推着问题往前走；真实课堂里条件不会这样按顺序到来，学生也可能在第一题上就耗完四十分钟，那时守住"周长和面积的区分"比赶到墙长八米更重要。第二，它适合有一个真实对象、又能自然生出约束的内容，并非每个数学主题都能找到一块菜地，硬造的情境学生一眼就看得出来。第三，小宇那几条痕迹是构造出来用来说明的，在一个真实的班级里，同样的课能否让"不再举手"的学生留下类似的痕迹，需要比较：同样的内容，一个班从菜地问题起手，一个班从课本例题起手，几周后看哪边的学生在新条件下更会追问"哪条约束变了"、哪边更愿意回到问题上。如果两边没有差别，这一章的主张就该收缩。

底牌是：好的数学任务能让动力和系统思考在同一件事里一起发生。你那两个问题，在这节课里没有被分进两间办公室：小宇的问题给了这节课一个去处，菜地的约束一条一条改变，又把"看见条件"变成了解题本身。动力在这里不是被外加的，它是被接住的问题一步步长出来的；系统思考也不是另学的一门课，它就是每一次答案变了之后，那句"是哪个条件让它变的"。至于小宇笔记里那个没

拿去问人的问号，今天的讨论不一定马上在作业里显露，它可能要隔几周才露头；下一章就来谈这种隔着时间的事。

带走的话

好的数学任务能让动力和系统思考在同一件事里一起发生。

小 账

人物是真的吗？ 菜地课、王师傅、铁门和小宇课后的痕迹都是构造的，数学推进是精心安排过的。

哪一句还要检验？ 若一个班从菜地问题起手、一个班从课本例题起手，几周后两边追问“哪条约束变了”和回到问题的意愿没有差别，这一章的主张就该收缩。

数字对吗？ $36-a^2$ 、 $x(24-2x)=72-2(x-6)^2$ 、八米墙得64平方米、四米墙补篱笆得49平方米等都已核算。

每个主题都能这样上吗？ 不能。它适合有真实对象、能自然生出约束的内容；硬造的情境学生一眼就看得出。



13

第13章

四十分钟并不只是一种时间：时间、空间与因果

这一章的问题

一场讨论一周后看不出效果，是真的没用，还是我们拿错了表去量？

场景 林老师五分钟的热身题“ a 和 $-a$ 哪个大”吵成了十五分钟混战，一周后的小测毫无变化。

◆ 一、一场没吵完的架

十月中旬的一节数学课，林老师在黑板上写了一个问题： a 和 $-a$ ，哪个大？她本来只打算用五分钟热个身，等着有人说“当然是 a 大， $-a$ 前面有负号”，再举一个 $a=-3$ 的例子收场。没想到教室里吵起来了。有人坚持 $-a$ 一定是负数，“它脸上写着负号呢”；有人拿 $a=-3$ 去算，发现 $-a$ 等于3，反而更大；后排还有人追问，要是 a 等于0又怎么算。

热身变成了十五分钟的混战。下课铃响的时候，黑板上还挂着三种说法，谁也没说服谁。林老师回到办公室，有点懊恼地说这节课的练习只做了一半。老陈端着茶杯说：“吵得挺热闹，下周小测看看，多对几道就算没白吵。”

下周的有理数小测出来，班里的平均分和上一周差不多，那道涉及 $-a$ 的题，错的人也没见少。林老师在教案边上写了一行字：“讨论效果不明显，下次控制时间。”事情到这里，在大多数学校就算结束了，一行批注，一个教训，下次改进。

可是十二月初，班里学到一元一次方程，作业里有一道题要解 $-x=5$ 。林老师批到小禾的本子时停住了：小禾在答案旁边用铅笔写了一句“ $-x$ 不一定是负数， x 也不一定是正数，十月吵过”。再往下翻，全班有七八本作业在这道题上写得特别清楚，有两本还画了数轴。那场被判为“效果不明显”的争论，在七周以后露出了一张脸。

这有点像第一次包饺子。一下午捏出来的全是露馅的，家里人说今天白忙了；可到了过年那天，手忽然就知道该在哪里使劲了。中间那几周没有人教过他，变化却一直在走，只是走在没人看的地方。

这件小事逼出了本章要回答的问题。我们说一节课“有效”或“无效”，到底是拿哪一种时间在量？一周后的小测和七周后的作业，看到的是同一件事吗？如果林老师十月底就把这种讨论从教案里删掉，她删掉的是一个无效的办法，还是一个还没到显露时候的办法？

◆ 二、钟表、轮次和学期：三块表走得不一樣

先把“时间”拆开。墙上的钟告诉我们这节课四十分钟，这是钟表时间，它公平、好用，全校都对着它打铃。可是在这四十分钟里，学生经历了几轮“提出说法、被人反驳、修改说法”，这是另一种时间，可以叫学习轮次。十月那十五分钟里，有的学生转了三轮，从“ $-a$ 脸上有负号”改到“要先看 a 本身是正是负”；有的学生一轮也没转，只是听着别人吵。同样的十五分钟，落在不同的人身上，走过的轮次多少很不一样。

小禾平时的四十分钟是另一种样子。她能在一节练习课里做完二十道同类题，正确率很高，钟表时间用得满满当当，可要问这二十道题里她改过几次想法，答案可能是零。她不是没在学，她是在一条熟路上把同一步走了二十遍。第

九章说系统思考的人会追问"经过哪些尝试"，放到时间上看，就是追问这段时间里到底转了几轮，而不只是坐了多久。

轮次比分钟难看见，因为它常常被橡皮擦掉了。学生在草稿上改一次想法，旧的那行字一擦，纸面干干净净，看上去像是一步到位。林老师后来在班里立了个小规矩：草稿上想改，就划一道线，不许擦。一个月下来，她翻草稿就能数出一道题转了几轮，转在哪一步。这有点像老房子的墙，重新粉刷之前，旧钉眼和管线槽都看得见，哪里改过、改过几次，一目了然；刷平了，房子的历史也就跟着平了。

还有第三块表，叫制度周期。单元、月考、期中、学期，学校按这块表安排进度和检查。假如每周五节数学课、一学期十八周，那就是九十节课，进度表会把这九十节课分给一个个单元，每个单元结束都要交一份成绩。这块表走得最慢，权力却最大，因为它决定什么时候"该看结果了"。

这块表不只管学生，也管老师。一位管过学校的人听说林老师在热身题上吵了十五分钟，多半会先问一句：这十五分钟，期末的进度谁来还？这个问题一点也不俗气，它说明制度周期早就站在了课堂里，老师每一次决定"再让他们吵五分钟"还是"好了我们往下讲"，都在和这块表商量。小宇那一类学生能不能被等一等，很大程度上取决于这场商量的结果。

这块表和学习轮次常常对不上拍。小宇六年级学分数除法时，"为什么除以一个分数等于乘它的倒数"这一轮其实没有转完，他记住了"颠倒相乘"，却没想通；可单元结束了，进度表翻了页，下一个单元不等人。没转完的一轮并不会自己消失，它变成旧条件的一部分，跟着他进了初一。到了有理数除法，又要"除以一个数等于乘它的倒数"，他面对的不只是一道新题，还有一笔没结清的旧账。

拿日常的事来比，像搬家时有一箱东西始终没拆，贴着"杂物"两个字跟着人从一套房子搬到另一套。每次搬家都多一个这样的箱子，几次以后，新家一进门就是一堵纸箱墙。学生的动力有时不是哪一天突然熄的，而是这种没拆的箱子一个个摞起来，摞到他觉得新课一开始就已经落后了。

三块表各有用处，麻烦在于我们常常拿一块表去量另一块表上的事。林老师用"下周小测"去检验一场争论，等于用制度周期上的一个刻度，去量学习轮次上的一次转动。这有点像拿体温计去量今天冷不冷，读数一点不差，量的却不是那件事。一场争论要转几轮、隔几周才在作业里露面，第二周的小测正好站在它还没露面的那一段上，看到"没变化"，只说明表拿错了，不说明事情没发生。

还有一个常见的误会，是慢就是深、快就是浅。其实未必。一段长长的沉默，对老师来说可能只是"没人举手"，对某个学生来说却可能正在重新检查条件、放下原来的想法、换一个问法；反过来，流程推进得飞快，也可能只是老师替大家完成了那一步关键的转换。墙上的钟对这些事从来没有发表过意见。

钟表上的分钟数、学习轮次的次数、学生自己觉得"这节课好长"的感受，用的是三种单位。把它们加成一个"学习时间总分"，就像把体重、身高和心情加在一起评健康。三块表放在一起看，是为了发现它们什么时候对得上，什么时候错开了，错开的地方往往最值得追问。

◆ 三、为什么效果要晚到七周

回到那句"十月吵过"。第二章讲第三条方程时说过，新的条件是由旧的条件加上这一轮的显露和路径更新而来，写成带时间的样子，大致是 $E(t+1)=H(E(t), S(t+1), D(t+1))$ 。这里最要紧的是括号里那个 $E(t)$ ：新条件不是从白纸上长出来的，旧条件一直在里面。十月的争论结束时，学生手里多了一样东西，就是"负

号不等于负数"这个还没站稳的怀疑；它当时没有变成小测上的分数，却留在了下一轮的起点里。

这个怀疑要等到一个合适的任务才显露。有理数小测考的是计算熟练度， $-a$ 那道题夹在二十道题中间，学生按惯性就做过去了； $-x=5$ 却逼着人停下来问" x 到底是个什么数"，十月留下的东西正好派上用场。也就是说，显露需要任务配合，需要一个让旧条件重新被调用的场合。小测上没看到，只说明检查的那个窗口没有对着它。

做饭的人对这种延迟很熟。腌一块肉，盐和料酒今天下去，味道要明天才进到里面；今天切开尝一口，只尝到表面的咸，就说"腌了没用"，是冤枉了盐。反过来也有危险：明天的肉很好吃，人们以为是腌的功劳，其实是今天换了一口新锅。看不见延迟，会犯两种方向相反的错。

第一种错，是把有效的办法当成无效。一项改动如果要几周后才在别的任务里显露，而检查只做在第二天，那么所有慢热的办法都会被淘汰，剩下的全是"当堂见效"的办法，比如给答案、给模板、给口诀。久而久之，一所学校的教法会被检查窗口筛成一个样子，这不是谁拍板定的，而是那块最有权力的表悄悄做出的选择。

第二种错，是把巧合当成规律。期中前一周换了座位，期中成绩上去了，于是"换座位提分"成了经验；可那一周恰好也是复习周，卷子也比月考容易。时间上一前一后，只交代了顺序，没有交代原因。

延迟还有一个更隐蔽的后果：它让功劳和责任找错了人。十二月那七八本写得清楚的作业，如果林老师没有翻回去看十月的教案，很可能会记在方程单元的讲法上，记在"这一届学生悟性好"上。一件事发生的时间和它被看见的时间隔得越远，中间可以冒名顶替的东西就越多。

所以，在宣布一种办法有效或无效之前，至少先问三件事：这个办法打算在哪一种时间上起作用，是当堂、一个单元，还是一个学期？检查的窗口有没有对着那个时间？在这个窗口里，还有哪些事情同时变了？阳涌，你问动力从哪里来，有一部分答案就藏在这里：学生的劲头，常常是在某一次"原来我十月吵的那个东西有用"之后长出来的，而这种时刻，偏偏最容易被短窗口漏掉。

林老师后来想出一个土办法：每个单元结束时留十分钟"回头看"，把前面几周没吵完的问题重新拿出来，看看现在大家怎么说。这十分钟不考分，只记下谁的说法变了、变成了什么。它的用处不在于多讲一遍，而在于给延迟的显露安排一个固定的窗口，让慢热的东西有机会被看见，也让"没有变化"同样被老老实实记下来。

同一节课里，不同学生的节奏本来就不一样。一桌人吃火锅，毛肚涮十几秒就得捞，土豆片要煮上好几分钟，没人会要求全桌的菜同时下锅、同时出锅，大家共用一口锅，各按各的火候来。四十分钟是那口共用的锅，学生的轮次是各自的火候。课堂要做的不是把所有人的火候拧成一样，而是让快的人有下一个问题可想，慢的人那一轮能转完，再在某个约好的时刻把大家的東西捞到同一个盘子里比一比。做过课程研发的人大多知道，这件事写进教案只要一行，落到课上却要一整套安排。

◆ 四、一间教室的大小，不只是长乘宽

时间之外还有空间。十一月，林老师把七（2）班的座位从一排排改成四人一组，想让讨论多一些。教室还是那么大，桌椅还是那么多，面积一点没变，能做的事却变了：同组的人一抬头就看得见彼此的草稿，转身看黑板却费劲了。

装修过厨房的人更懂这一点。同样八平方米，一字型灶台和带岛台的布局，两个人同时做饭时完全是两回事：一种布局里两人背对背各忙各的，另一种布局

里两人总在水槽前撞肩膀。面积是同一个数，人能怎样走动、怎样配合，却由布局和使用习惯一起决定。

教室至少可以从三个方面看。一是位置怎样连接，哪个座位离黑板近，量角器和方格纸放在哪里。二是活动能不能展开和转换，从独立思考转到小组讨论，要搬桌子还是一转身就行。三是不同活动怎样共处，一组在讨论，旁边一组要安静做题，声音和视线彼此干扰。

林老师后来发现，方格纸虽然从讲台搬到了每组桌上，可“谁先用”的规矩没变，还是组里最快的那个人拿着。距离缩短了，实际用得上的人并没有变多。工具放在哪里和工具归谁用，两件事缠在一起，单搬家具只动了其中一半。

空间还会因为使用而长出新的用处。十月那场争论之后，林老师没擦黑板右下角的那三种说法，在旁边写了“待决”两个字，一挂就是一个多月。那一小块黑板慢慢成了班里放“没吵完的问题”的地方，有学生课间会去添一句，也有人在旁边画个问号。黑板还是那块黑板，可是一角被用久了，就成了全班共同的一段记忆，空间在这里替时间存了东西。

第十二章那节菜地课也藏着一个空间上的道理。在方格纸上画长方形，周长24格、面积多少格，学生算得很快；可是一到操场，把一根24米的绳子真拉成长方形，几个人各拽一个角，往外一扯，面积怎样变大、绳子哪里绷紧，手上先知道了，嘴上才说得出来。同一道题，从纸面搬到地面，能做的动作变了，学生能想到的东西也跟着变了。这不是说操场一定比方格纸好，而是说一道题放在什么空间里做，本身就参与了学生能想到哪一步。

空间还有一层，只有学生自己说得出来。小宇的新座位，按座位图看正在小组中间，四个人围着他；可他在一次周记里写，坐在中间“什么都得听，什么都轮不到我说”。另一个原本坐在角落的学生，倒觉得角落让他能先把想法写完再

开口。座位图上的远近和学生心里"有没有余地"，常常不是一回事，得请当事人说出来，再和看到的情况对一对。

时间和空间在这里又绕到了一起。座位一换，讨论多了，学生等老师讲解的时间少了；等待少了，有的学生投入更多，有的学生却因为插不上话而更早放下了笔。这些变化彼此牵动，可牵动不等于混成一团，研究座位，就要分清哪些作用来自位置，哪些来自规矩，哪些来自那段时间里同时变了的别的东西。

◆ 五、原因只能从"现在"出发

最后说因果里的时间顺序。期中前两周，小宇的作业越写越短，办公室里有人说："他知道自己考不好，干脆放弃了。"这句话里藏着一个容易滑过去的问题：期中还没考，未来的分数没法伸手回来推他今天放下笔。真正在起作用的，是他此刻心里对那场考试的预期，以及这个预期和眼下的作业难度、上次的成绩、同桌的眼光缠在一起的样子。

天气预报说明天下雨，人今天出门就带了伞。让人带伞的不是明天的雨，那场雨还没下；是今天读到的预报，和对它的相信。分清这一层很实用：如果小宇放下笔是因为预期，那么能动手的地方在今天，在他眼下能不能碰到一次够得着的成功，而不是去和一场还没发生的考试较劲。等期中成绩真的出来，那个结果才进入下一轮，变成新的条件，再去影响后面的选择。

照这个思路，林老师想帮小宇，最值得花力气的未必是多给他几节课的钟表时间，而是让他有一轮能完整转完。比如找一个课间，拿出六年级那个没拆的箱子：三分之二除以三分之一，先问"三分之二里面有几个三分之一"，让他自己在纸条上折一折、数一数，看到答案是二，再去对照"颠倒相乘"。十分钟不到，钟表上几乎看不出什么，轮次上却补上了一圈。补上的这一圈会不会在后面的有理数除法里显露，要过几周才知道，而且要事先说好去哪类题里找它。

有些原因还要绕好几道弯才走到学生身上。学校若把月考排名张贴出来，老师备课时就会更看重"会考的题型"，讨论的时间被悄悄压缩，像小宇这样在讨论里才可能被接住的学生，接住的机会就少了。这条链子上的每一环都要说得出靠什么传过去、隔了多久，少说一环，整条链就只剩一句"排名害人"的感慨。链条画得越长，越要警惕有一个共同的原因同时推动了几环，比如那段时间恰好赶上新教材换版。

顺序清楚了，原因也未必就找到了。设想林老师下学期把讨论从十分钟延长到十五分钟，学生的解释写得更充分了。要是多出的五分钟起了作用，至少还要知道三件事：在差不多的班级和任务下，不延长会怎样；她延长的同时有没有多给提示；多出的五分钟是从哪里挪来的。四十分钟的课，讨论从十分钟变成十五分钟，练习就从三十分钟变成二十五分钟，被挤掉的那五分钟练习也得记进账里，只挑最有利的那一段看，账本永远好看。

要让这些问题问得出来，记录里就得留下日期。很多教研记录爱用"后来"两个字："后来学生慢慢会了""后来班风好了"。"后来"是个很宽的口袋，七天和七周都装得下，原因和巧合也都装得下。林老师那张作业对照，之所以说得清楚，是因为十月的教案、十二月的作业都标着日期，她能指着两页纸说出中间隔了多久、隔着哪几个单元。把"后来"换成具体的日子，延迟才从一句感慨变成一个可以研究的东西。

这一章的说法也有它的边界，集中在这里说一次。把时间分成钟表、轮次和制度周期，是帮助观察的区分，不是已经测得的三个物理量；这套关于时间、空间与因果的重述属于哲学上的整理，和物理学、统计学里的严格定义是两回事。"延迟显露"最容易被滥用，任何没见效的办法都可以说成"还没到时候"，所以预计在哪类任务、多久以后显露，要事先写下来，到期仍然看不到，就承认它没起作用，而不是把窗口再往后挪一个月。还有一些效果本来就是当堂的，比如

一次清楚的示范让学生马上会做某类题，这时用短窗口检查正合适，用不着为了显得深刻而硬等七周。

本章的底牌可以说得很直白：看不见延迟的人，会把有效的办法当成无效，把巧合当成规律。一节四十分钟的课里同时走着三块表，一个学生的"我会了"常常在钟表上迟到，在学习轮次里却早已出发；评价一种教法，先要说清它在哪块表上起作用，再去对准那块表的刻度。林老师后来没有划掉那行"讨论效果不明显"，只是在下面补了一行："十二月 $-x=5$ ，七八本作业回指十月讨论。"两行放在一起，比任何一行单独都更接近事实。

不过，"七八本作业"已经不是小禾一个人的事，而是一个班的事；要是周校长听说了，想让全年级都来吵一吵 a 和 $-a$ ，那又成了一所学校的事。同一件事从一个学生走到一个班、再走到一所学校，它的身份会不会跟着变？下一章换一把尺子来看。

带走的话

看不见延迟的人，会把有效的办法当成无效，把巧合当成规律。

小 账

人物是真的吗？ 林老师、小禾、小宇和陈都是构造的，“十月吵过”的那批作业也是为说明道理设的场景。

哪一句还要检验？ “延迟显露”是可检验的判断：预计在哪个任务、多久以后显露要事先写下，到期仍看不到，就承认办法没起作用，不能把窗口再往后挪。

三块表是测出来的吗？ 钟表时间、学习轮次、制度周期是帮助观察的区分，不是测得的物理量；“九十节课”只是按每周五节、十八周算的示意。

短窗口都不对吗？ 不是。一次清楚的示范这类当堂见效的事，本来就适合用短窗口检查，不必硬等七周。



14

第14章

从学生到课堂到学校：尺度怎样转换

这一章的问题

全班平均分涨了三分，能说明这套做法在学校里已经成熟了吗？

场景 期中质量分析会上，老陈用红笔逐个比对七（2）班的成绩单，追问涨的三分是谁的三分。

◆ 一、平均分涨了三分，是谁的三分

期中考试后的质量分析会上，周校长心情不错。七（2）班的数学平均分比月考高了三分，在年级里排到了第二。他翻着报表说，林老师这学期又是讨论又是“回头看”，看来路子是对的，下学期可以在全年级推开，年终总结里也可以写一句“我校数学探究文化初步成熟”。会议室里有人点头，有人低头记笔记。

老陈没有点头。他把七（2）班的成绩单要过去，用红笔一个一个比，比完了说：“三分是平均出来的，咱们看看是谁的三分。”他数出来的结果是这样的：全班四十六人，有十四个人比月考高了十五分，有二十六个人和月考一样，还有六个人掉了十二分。十四乘十五是二百一，六乘十二是七十二，二百一减七十二，剩下一百三十八，再除以四十六，正好三分。

数是对的，故事却变了。平均分涨三分，可以是四十六个人每人进步三分，也可以是一小半人大步向前、一大半人原地不动、几个人往后退。周校长想写进年终总结的那句“探究文化初步成熟”，说的是一所学校的事；成绩单上能撑住

的，最多是"七（2）班有十四个学生这一次考得明显更好"。从后一句走到前一句，中间隔着好几层楼。

家里人算步数也会遇到同样的事。一家四口装了同一个计步软件，月底一看，全家日均一万一千步，健康得很。细看才知道，爸爸在为马拉松训练，一天两万五；妈妈一万二；孩子七千；奶奶膝盖疼，一个月几乎没下楼，记的是零。四个数加起来除以四，确实是一万一千，可要是据此说"我们家的运动习惯已经成熟"，最该被关心的那个人就被平均没了。

更要紧的是那六个往后退的学生。老陈翻了翻林老师的课堂记录，发现他们有一个共同点：小组讨论时很少开口，常常是别人吵完了，他们把结论抄下来。改成四人小组以后，说得快的人说得更多了，说得慢的人等的时间反而更长了。这件事在平均分里是看不见的，因为十四个人的进步把它盖住了，而它恰恰是"探究文化"这几个字最该回答的问题：这种课，对谁打开了门，又对谁关上了。

小宇在那二十六个"和月考一样"的人里。分数一动没动，按报表的逻辑，他是这次改革里"没有效果"的那一格。可林老师知道，他的草稿这个月第一次出现了划线修改的痕迹，周记里也多了两句关于座位的话。这些东西是不是好兆头，现在还说不准，但它们至少说明，分数没动的那一格里，装着好几种很不一样的处境。把这一格当成一个整体去评价，和把那一万一千步当成全家的健康状况，犯的是同一种错。

于是老陈建议，质量分析会以后别只报平均分，至少再报三样东西：分数变化的分布，进步和退步的学生各自在课堂上的参与方式，以及哪些变化需要再等一个单元才看得出来。周校长苦笑说这样报表要多出两页。老陈说，多出两页，总比年终总结里多出一句说不清的话强。

这件事和动力问题也直接相关。一个班整体看上去"很有劲"，课上手举得多，讨论声音大，报表也好看，可这个"劲"是班级尺度上的显露，不是四十六个人每人分到的一份。热闹的班里，完全可能有几个人的劲正在一点点漏掉，就像一锅咕嘟得正欢的粥，表面翻着大泡，锅底照样可能有一层正在慢慢焦掉。问"这个班有没有动力"和问"这个学生有没有动力"，是两个不同尺度上的问题，前一个的答案替代不了后一个。

◆ 二、同一个做法，换一层楼就换了身份

先看一件比平均分更小的事。菜地那节课以后，小禾养成了一个习惯：做题之前，先把题目里的条件一条条抄在草稿纸边上，再用笔圈出"会改变答案的那几条"。这是她自己慢慢做出来的，没人要求。在小禾一个人的尺度上，这个习惯是一种正在显露的理解：她开始看见一道题是从哪些条件里长出来的。

过了两周，她同组的三个人也开始这么做，有一个还给它起了名字，叫"先圈后算"。林老师看到了，把它写进了班级的作业要求：开放题先列条件，再动笔。这时候同一个动作的身份就变了。对后来照着做的同学来说，"先圈后算"已经不是谁的发现，而是班里的一条规矩，它限定了大家怎样讨论、什么样的答案算完整，成了全班共同条件的一部分。

再往上走一层，周校长听说了，想把"先圈后算"写进全校的《作业规范》。到了学校这一层，这份规范本身成了学校这一轮改革显露出来的东西；可它落到某个学生身上，靠的是作业批改、评分细则和老师的课时安排，影响的是那个学生下一步怎么走。同一个动作，在三层楼上扮演了三种角色。

第一章说过，三个字母不能固定贴在人身上，这里能看得更清楚：它们也不能固定贴在一个做法上。换了尺度，角色可以变，但每一次变都要拿出证据，说明这个做法被谁用了、用了多久、改变了什么。一份教案在教研群里转发了一百

次，只说明它被发送过；教研时间为它重新排过，评价办法据它改过，才说明它进了组织的条件。家族群里每天都有人转发养生文章，可全家的菜谱一样没改，转发和改变之间，隔着一顿饭的距离。

怎样才算"先圈后算"真的进了班级的条件？可以看几样不用问老师就能看到的東西：新转来的同学没人专门教，几天后也开始先列条件；小组讨论时，有同学指着别人的草稿说"你这条约束没圈"，提醒的人不再只是老师；不先列条件就交上来的答案，在同学之间也会被追问。小区里推垃圾分类也是这样，墙上贴了告示只是开始，等到邻居之间会互相提醒"这个是厨余，别扔错了"，分类才算进了小区的日子。

一家人的作息也是这样分层的。爸爸早上六点起来跑步，这是他一个人的习惯；后来全家定下"七点整吃早饭"，这就成了一条家规。家规对想睡懒觉的孩子来说，是一个硬邦邦的条件，他早上的起床气不是被爸爸的跑步直接惹出来的，而是通过这条家规传过去的。要是有人说"孩子起床难是因为爸爸太自律"，就把中间那一层跳过去了。

为了把层与层分开，母本给三条方程加过一种写法：用下标 i 表示某个学生，用星号表示班级共同的那一层。于是一个学生下一轮的显露可以写成 $S_i(t+1)=F_i(D_i(t), E_i(t), E^*(t))$ ，意思是他自己的尝试、他自己的条件和班级共同的条件，一起进入这一轮。这些记号只是标明来源，不表示这几个量已经能测出来，更不表示可以相加。它的好处是逼着人说清楚：这一次起作用的，到底是小禾自己的条件，还是班级那条"先圈后算"的规矩。

不同层的变化还有不同的快慢。小禾改一个猜想可能只要几分钟；林老师要看好几次课，才敢确认"先圈后算"在班里站住了；学校改一份规范，少说也要一个学期。把这三种速度压成"每节课都在更新"，就会凭空造出一种实际上没有的快速回写，好像学生昨天的一个好习惯，今天就已经成了学校文化。

还要记住，一个班共享同一本教材、同一位老师、同一张课表，不等于每个学生处在同一种条件里。同一条讨论规则，会让说话快的人机会更多，让习惯先写后说的人越来越难插进来；"先圈后算"对小禾是顺手的，对一个读题本来就吃力的学生，可能又多了一道门槛。共同条件里有公共的一层，有小组的一层，也有每个人自己的一层，谁能用上什么、怎样取得发言的机会，都是实打实的关系，不该一股脑塞进"个体差异"这只大抽屉。还有一条边界常被忽略：一个学生私下向老师说出自己的困难，不等于同意它变成全班讨论的案例，这条边界一旦被越过，学生下次愿意说出来的东西就会变少。

◆ 三、细的地方细分，粗的地方合并

尺度问题落到日常教学里，最常见的样子是"因材施教"。这四个字人人赞成，难在怎么分：分多细、分在哪里、凭什么分。林老师原来的错题统计只有三个格子，计算错误、概念错误、粗心，全班一视同仁。学到去括号以后，她发现"计算错误"那一格塞得满满的，再细看，里面混着两类完全不同的错：一类是负号没有跟着括号里的每一项走，一类是括号前是正号时多此一举地变了号。于是她把这一格拆成了两格，又把一学期只出现过两三次的几个小格子合成了一个"其他"。

计算数学里有一个很像的做法，叫自适应网格。用一段一段的直线去近似一条曲线，曲线弯得厉害的地方，线段就要切得细一些；直的地方，一条长线段就够了。标准不是画面匀称，而是哪里的误差大。拿 $y=x^2$ 在 x 从 2 到 4 这一段来算：连接两 endpoint $(2,4)$ 和 $(4,16)$ 的直线是 $y=6x-8$ ，直线和曲线的差是 $6x-8-x^2$ ，整理一下就是 $1-(x-3)^2$ ，最大差是 1，出现在正中间 $x=3$ 的地方。

把这一段对半切开，左边从 2 到 3，两端连线是 $y=5x-6$ ，和曲线的差是 $0.25-(x-2.5)^2$ ，最大差是四分之一；右边从 3 到 4，连线是 $y=7x-12$ ，最大差也

是四分之一。切一刀，最大误差从1降到了0.25。再看另一种情形：如果要近似的本来就是一条直线，比如 $y=5x+1$ ，不管它多陡，用两端连线去近似，误差都是零，一刀也不用切。看起来陡，不等于需要细分。

这个小计算放回课堂，有一点很有启发：最显眼的地方，未必是最需要细分的地方。课上声音最大、错得最热闹的学生，像那条很陡的直线，看起来动静很大，问题却可能很简单；真正需要细一点看的，是理解在那里"拐弯"的地方。小宇从分数除法走到有理数除法，就是一个拐弯处，表面上只是多了一个负号，底下却压着六年级那一轮没转完的"为什么颠倒相乘"。在这种地方切细一点，比在全班平均地多讲一遍更有用。

导航地图也是这样画的。市中心路口密，地图放大到每一条小巷；高速公路上几十公里只画一条线，没有人会抱怨高速公路"画得不够细"。地图的细节不是按面积平均分的，而是按开车的人在哪里容易走错分的。

不过网格和学生之间，类比到这里就该打住了。网格上的误差只是一个数，学生却会解释自己的目标，会改变自己的意愿，还会反过来影响什么样的评价算公平。把"误差最小化"直接搬进课堂，很容易变成"让所有学生尽快给出同一个正确答案"，而十月那场 a 和 $-a$ 的争论恰恰说明，有些错误暂时离答案更远，却能把一个重要的假设亮出来。还要提防的是，用来判断"哪里该细分"的那把尺子本身靠不靠得住：一份只考计算熟练度的小测，看不出谁在理解上拐了弯。

网格原型里还有一笔账值得带回来：细分是要花成本的，切得越细，计算越费内存、越费时间，预算有限的时候，这里切细了，别处就得粗一些。老师的注意力也是一份有限的预算。林老师在去括号这一格多花了心思，就得想清楚这份心思是从哪里挪来的，有没有哪几个安静的学生因此被看得更粗了。因材施教说到底是一种分配，分配就要讲公平，还要事先想好什么时候把切细的格子重新合

起来：去括号的两类错误都降下去以后，就不必一直单列，免得统计表越来越细，细到老师自己都看不过来。

◆ 四、一把钥匙，几扇门

下学期开学，周校长还是决定先在七年级试推。七（5）班的年轻老师小郑照着林老师的做法，在热身题上让学生争了一刻钟。结果和七（2）班很不一样：前五分钟有人说话，后十分钟变成几个男生的相声，剩下的人在等下课。小郑在教研会上有点沮丧，说这个办法可能不适合她的班。

老陈这次说了句公道话："钥匙是好钥匙，可它是在林老师那扇门上配的。"他掰着指头数七（2）班的门上有什么：黑板右下角挂了一个多月的"待决区"，草稿只许划线不许擦的规矩，单元末那十分钟"回头看"，还有林老师八年里练出来的一个本事，知道吵到哪一步该收、谁还没开口该等一等。这些东西都不在那一刻钟里，可那一刻钟是靠它们撑着的。一个办法走出原来的课堂，最容易丢掉的，正是它原来赖以成立的条件。

把钥匙从一扇门带到另一扇门，这件事家里人都干过。同一个牌子的锁，邻居家的门也许真能打开，但得先试，而且试之前要先确认那扇门归不归自己管。林老师的讨论法若被搬进年级组会议，大家倒是都愿意发言了，可会议是要做决定的，课堂上那场争论却可以挂一个多月不结论。同一把钥匙，在一扇门上是好东西，在另一扇门上就成了拖延。

那么小郑该怎么办？老陈的建议是先别搬那一刻钟，先搬撑着它的东西。小郑可以先在班里立"划线不擦"的规矩，先留出单元末的十分钟，再找一节课去七（2）班后排坐着，看林老师在哪一刻收、在哪一刻等。学校要做的，是把她俩一起备课的时间真正排进课表，而不是在推广文件里写一句"加强交流"。一个做

法能不能进学校的条件，看的不是文件发了没有，而是课表、教研时间和评价办法有没有为它让出位置。

换了尺度，各方想要的东西也会摆到同一张桌上。老师希望讨论充分，学生希望尽快知道"到底怎么做"，学校希望单元按时结束，三样都正当，有时却在抢同一段时间。把这几样目标摊开来说，才看得清哪条路被优先安排了，谁在为这种安排持续付出代价。有时候能找到一条兼顾的路，比如少布置几道同类题、把省下的时间给讨论；有时候确实只能取舍，那就把取舍的理由和补偿的办法说明白，别指望多开一次沟通会，课表就会自己多长出一节课。

◆ 五、学校的主张要多交一份证据

学校这一层还有一种更难察觉的坏回写。假如推广的结果参差不齐，管理者把不顺利的班一律解释为"老师不愿意改"，接下来就会多派人听课、多要检查材料；老师们为了少惹麻烦，汇报时只挑顺利的说；新的汇报看上去一片大好，管理者更相信"只要盯得紧就能成"。这个圈转上几轮，学校的记录越来越漂亮，离课堂的真实情况越来越远。

所以，学校层面的主张要比课堂层面多交一份证据。七（2）班的十四个学生进步了，这是班级尺度上的一条材料；要说学校的探究文化成熟了，得另外拿出这种做法怎样传开、在不同的班里怎样落地、站稳了多久、是否改变了后来的教研安排和评价办法的证据。同一份成绩单，先算一次班级成效，再算一次学校成效，然后宣布"两方面都有支持"，等于同一张发票报了两次账。

跨层的事还要记日子。林老师想把学生的一些好解释收进年级的"共同案例库"，老陈坚持一条：一份解释第一次出现的日期、在别的题里被检验过的日期、被教研组决定收入的日期，三个都要记。要是把第一次出现那天就当成案例库改变的那天，研究里就会提前塞进一个当时还不存在的条件。家里换一张新床

垫也是这样：下单那天、送到那天、睡了一个月觉得腰不疼了的那天，是三个不同的日子，谁要是说"下单那天起腰就好了"，大概是心理作用比床垫先到。

真想研究跨层的事，最好从最小的一处开始。不要一上来就问"探究文化有没有改变全校的学习动力"，先问一个小得多的问题：班里有了"先圈后算"这条规矩以后，同学之间追问"你漏了哪条条件"的次数有没有变多？这个问题有一个看得见的过程，有一个说得出的时间窗口，也有一个说得出的落空方式。小问题答扎实了，再一层一层往上加，比一开始就画一张全校的大图要牢靠得多。

阳涌，你关心学生怎样学会系统性思考，这里正好有一个现成的练习。林老师后来把那张"三分是谁的三分"的成绩变化，换成虚构的人名和数据，出成了一道统计题：给出四十个人的分数变化，先求平均数，再画出分布，最后问"平均数涨了，能不能说全班都进步了"。学生在这道题里练的，正是追踪一个局部的变化怎样进入整体的数字，又怎样被整体的数字遮住。会做这道题的初一学生，比只会背"平均数等于总和除以个数"的学生，离系统思考近了一步。

这一章的说法有它的适用范围，集中交代在这里。尺度可以选，但要在研究开始之前选好：观察的是一个学生、一个班还是一个年级，窗口多长，一个做法从个人习惯变成班级规矩要满足什么条件，都得事先写下。最怕的是事后挪尺度，课堂上没看到效果，就改口说"要从全校长期看"，全校也没看到，就说"要看一代人"，大系统里永远还有新的事情可以拿来解释。层级也不是越多越高明，加进班级那一层以后，如果对学生的后续表现预测得并不更好，就该把这一层删掉。至于自适应网格，它只是一个帮助想清楚"按需细分"的计算原型，网格算法里的结论证明不了任何教学效果。

本章的底牌是：换尺度时要重新定义谁是什么，否则会用课堂的办法去治学校的病，或者拿学校的数字去夸课堂的功。一个学生的好习惯走进班级，要经过别人的使用；一个班级的经验走进学校，要经过制度的改写；每走一层，都要重

新说清它在这一层扮演什么角色，凭什么证据说它到了这一层。平均分涨了三分，先问是谁的三分；一把钥匙开了一扇门，先问另外几扇门上有什么锁。

可是，尺度一旦能随意换，它也就成了解释的万能逃生梯：哪里解释不通，就往大处一跳。还有一种比逃生梯更舒服的东西，是一个什么都能解释的说法。下一章就来看看，系统思考最容易滑进去的那两个坑：方便解释和循环解释。

带走的话

换尺度要重新说清谁是什么，否则会拿学校的数字去夸课堂的功。

小 账

人物和成绩是真的吗？ 青石中学、周校长、小郑都是构造的；“十四人涨十五分、六人掉十二分，平均涨三分”是核算过的示意数字，不是真实成绩。

哪一句还要检验？ “班级这一层有用”可以检验：加进这一层以后，若对学生后续表现的预测并不更好，就该把这一层删掉。

网格那段证明了什么？ $y=x^2$ 的切分计算核算过，但它只是帮人想清“按需细分”的计算原型，证明不了任何教学效果。

尺度能事后换吗？ 不能。观察单位和时间窗口要在研究开始前写好；课堂上没效果就改口“要看全校长期”，是在走解释的逃生梯。



15

第15章

系统思考的反面：方便解释与循环解释

这一章的问题

一套怎么说都对解释，为什么反而什么也没有告诉我们？

场景 寒假前教研会上，小郑用新学的词把“错题回看”的三种结果全解释了一遍，老陈问：反过来也能说吗？

◆ 一、一套怎么说都对的话

寒假前最后一次教研会，林老师汇报她试了一个月的“错题回看”：每次做新题之前，先把上一次订正时写下的理由读一遍，再动笔。一个月下来，结果有点乱。小禾越来越离不开那本订正本，不翻一翻就不敢开始；小宇几乎没有变化；另有七八个学生，同类错误明显少了。

刚参加完一次培训的小郑很兴奋，当场用新学的词把三种情况都解释了一遍：小禾依赖记录，是因为她的条件还没成熟；小宇没变化，是回写还不够深；那七八个进步的，是三个维度互相生成到位了。话说得很顺，会议室里好几个人点头，觉得这套理论果然管用，什么情况都能说清楚。

老陈放下茶杯，问了一句：“要是结果全反过来，小禾进步了，那七八个人反倒依赖记录，你这套话是不是也一样能说？”小郑想了想，诚实地说：“好像……也能。”会议室安静了几秒。老陈说：“那它刚才其实什么也没告诉我们。”

这一幕在很多学校的会议室里都上演过，只是用的词不同。有时候是"学生个体差异"，有时候是"还需要时间"，有时候是"系统是复杂的"。这些话本身没错，毛病出在用法上：当一个解释能把任何结果都接住的时候，它就不再冒任何被说错的风险，也就没法告诉我们下一次该期待什么。

星座是这种解释的老行家。一个人脾气急，说是白羊座的火象性格；同一个人脾气好，说是白羊座藏着温柔的一面；他今天倒霉，是水逆；明天走运，是木星进了某个宫。这套说法从来不会错，代价是它也从来没说对过什么，因为它事先没说过任何一件"如果发生了，就说明我错了"的事。

第九章讲系统思考的三句追问时，我们把它的反面说成"一张更大的图"。到这里可以补上更麻烦的另一个反面：图不大，箭头也不多，可是每一根箭头都不冒风险，结果怎么来，箭头就怎么拐。这比画得太大更难察觉，因为它看起来很周到，说话的人自己也常常被说服了。

方便解释之所以受欢迎，还因为它让每个人都下得了台。小郑那套话说完，没有哪位老师的办法被判了"无效"，也没有哪个学生被说成"不行"，大家都留在一个暖洋洋的"还在发展中"。去看病也有类似的经验：医生说"你这是体质问题，慢慢调"，听的人心里踏实，可回家以后既不知道该吃什么、也不知道什么时候该再来，三个月后照样不舒服，还是"体质问题"。一句让人安心的话，和一句能让人下一步知道怎么做的话，常常不是同一句。

◆ 二、互相影响，不等于互相作保

方便解释有一个近亲，叫循环解释。办公室里最常见的版本是这样的："小宇为什么不学？因为他没有学习动力。""怎么知道他没有动力？因为他不学。"两句话手拉手转了一圈，回到原地，中间没有多出任何一样可以去看、去查、去比的东西。

新开张的两家小店，在点评软件上互相给对方写五星好评，路过的人一看，两家都是好店。可这两条好评没有一条来自真正吃过饭的人，它们彼此作保，作保的分量加起来还是零。循环解释就是这样，两个说法互相担保，却没有一个带来了新的证据。

那么三条方程里的"互相生成"会不会也是这样？S由D和E来，D由S和E来，E又由S和D来，听上去和"不学因为没动力、没动力因为不学"像是一家人。第二章已经说过互生不等于循环论证，这里换一个小字熟悉的老朋友，把道理算给大家看。

鸡兔同笼：笼子里有鸡和兔共三十五个头，九十四只脚，各有几只？设鸡 x 只、兔 y 只，就有 $x+y=35$ 和 $2x+4y=94$ 两个等式。从第一个看， x 等于 35 减 y ，鸡的数量靠兔来定；从第二个看， y 等于 94 减 $2x$ 再除以 4，兔的数量又靠鸡来定。两个未知数互相依赖，可是这一点也不妨碍我们算出答案：用第二个式子减去第一个式子的两倍，得到 $2y=24$ ，于是兔 12 只、鸡 23 只。

为什么这里的"互相依赖"不是循环？因为两个等式各自带来了一份独立的信息：一份来自数头，一份来自数脚。头和脚是分开数的，谁也不是从谁那里抄来的。现在把第二个等式换成 $2x+2y=70$ ，看起来也是一个新式子，其实它只是把第一个式子两边都乘了 2，没有带来任何新东西。这时候满足条件的答案有无数组，鸡可以是 1 只、兔 34 只，也可以是 30 只鸡、5 只兔，题目等于没出。

再换成 $2x+2y=80$ ，情况又变了：它和 $x+y=35$ 互相打架，一个说头数加起来是三十五，一个等于说是四十，两个式子一起摆着，一组答案也没有。三种情形放在一起很有意思：有两份独立信息，就有确定的答案；第二份只是第一份换了件衣服，答案就散成一片；两份信息彼此冲突，答案就不存在。"小宇不学因为没动力，没动力因为不学"，正是第二种：后一句只是前一句乘了个 2。

小宇五年级追着老师问的，正是这类题里那个"先假设全是鸡"的算法：三十五只全当鸡，只有七十只脚，比九十四少二十四只；每把一只鸡换成兔，脚就多

两只，换十二次正好补齐。这个算法之所以灵，恰恰因为它同时用上了头和脚两份信息，一份定下总数，一份定下差额。当年让他好奇得在办公室门口等的那个问题，答案里就藏着本章要说的这条道理。

所以，三条方程要想不落进循环，S、D、E各自得有自己的"数脚"的办法，不能只靠对方的存在来证明自己。小宇的显露，可以看他在条件改变时能不能解释自己的做法；他的差异序列，可以看那些只许划线、不许擦掉的草稿上，哪些方法被用了、哪些被放弃了；他的特征纠缠，可以看课堂上的发言规矩、手边能用的工具，还有他嘴上不说、却在订正越写越短里透出来的那句"我不是学数学的料"。三样东西分开去看，看到的材料来路不同，互生的说法才有了被检查的可能。

给方程加上时间也有帮助。把"他这一轮的理解"写成由"上一轮的尝试和条件"而来，像 $S(t+1)=F(D(t),E(t))$ 那样，先后就排开了，不至于同一时刻所有东西互相证明。不过要提防一种偷懒：在一句循环的话后面添一个下标，它照样是循环的。时间顺序能帮忙拆开结，真正把结解开的，还是各自独立的那份观察。

落到教研会上，可以有一个很简单的检查。有人画出一圈互相影响的箭头时，请他对每一根箭头说三件事：它代表什么样的变化，眼下有什么材料支持它，要是改动箭头这一头，另一头预计会怎样。说不出来的箭头不必擦掉，在旁边标一个"猜"字就行。一张图上标了几个"猜"字，比一张所有箭头都画得同样笃定的图诚实得多，也更有用，因为下一步该去查什么，那几个字已经替人指好了。

◆ 三、当事实不肯听理论的话

回到小宇。"错题回看"在他身上没起作用，接下来该怎么办？最省事的做法是说"他的回写还不够深"，然后继续等。这样理论安然无恙，可是一个本来答应要接受检验的判断，悄悄从桌上消失了。

比较老实的做法，是先问这个办法到底有没有按设计做到。林老师翻开小宇的订正本，答案一下子就出来了：导论里说过，他的订正越写越短，最后只剩一个红笔写的正确答案。"回看订正理由"的前提，是订正本里得有理由；小宇的本子里没有理由可读，他每次"回看"的，只是一串数字。问题出在办法和他手里的材料没对上。这时候要说的不是"回看无效"，也不是"回写不够深"，而是"这个办法在他身上根本还没开始"。

第二个要问的，是看效果的那把尺子靠不靠得住。林老师 and 老陈各自拿二十份草稿，判断哪些算"有根据的修正"，对了一下，有六份判得不一样：林老师把擦掉重写也算进去，老陈只认解释变了的那些。尺子都没对齐，量出来的差异就说明不了什么，这时该做的是先把判定规则说清楚、对一对样例，再用新的材料重新看，而不是把旧结果按新规则重新涂一遍颜色。

如果办法确实做到了、尺子也靠得住，某一类学生或某一类题上还是看不到差别，那就该把说法收窄：错题回看在这一类情形里没有帮助。收窄不丢人，它让剩下的说法更可靠。要是好几次研究都显示，这套框架帮老师找到了被漏掉的条件，却没能事先说中哪一维会先变，那就得把较强的那句"张力会推动某一维改变"降一级，先当作一种提问的工具来用。把一个强命题改成弱命题，是实打实的知识变化，要明明白白写出来，而不是用一句"理论还在发展"带过去。

修水管的师傅都懂这个道理。换了新垫圈，水龙头还在滴，好师傅会说"不是垫圈的事，可能是阀芯"，然后把阀芯拆下来看；不会有哪个师傅说"水管还没准备好接受新垫圈，再等一个月"。要是真有这样的师傅，大概也不会再有人请他第二次。

一个不如预期的结果，可以有好几种身份：材料太少，还说不出什么；测量本身出了问题；这个领域里的具体模型不成立；或者理论最核心的那几句受到了挑战。四种身份后果完全不同，混在一起就会出两种毛病，要么一次失败就把整

套东西扔掉，要么永远把失败算成“测量还不够好”。材料不够的时候，最诚实的结论常常是“未决”，而不是在“成功”和“失败”之间硬选一个。

每一次改口都值得留下一条记录：是什么材料让我们改的，原来怎么说，现在怎么说，新的说法又预言了什么。装修过房子的人都见过施工图纸，最有用的往往不是那张漂亮的效果图，而是工人在图上划掉又改过的几处标注，“此处有暗管，插座左移二十厘米”“承重墙，此处不开门”。后来接手的师傅看到这些划痕，才知道一个设计为什么没照原样做。知识并不只靠一页页往上添变厚，有时也靠少说一句过头的话变得可靠。

这些检查要做得心安理得，最好在开始之前就把话说在前面。林老师事后承认，她启动“错题回看”时只写了“希望减少重复错误”，没写清楚看什么、看多久、看到什么就算没用。要是当初写下一句“一个月后，同类错误的重复次数没有比前一个月少，就算这个办法在本班没起作用”，教研会上那场讨论就不会只剩下各说各话，结果出来以后大家有一把事先约好的尺子可量。第四部会专门讲怎样把这句话写好，这里只记住一点：怎样算错，要在知道结果之前写下来。

还要警惕三条常见的逃生通道。一是“条件还不成熟”，它能吸收任何反例；二是上一章说过的换尺度，课堂上不灵就跳到学校，学校不灵就跳到一代人；三是事后调换字母，结果出来以后，才决定刚才那件事算S还是算E，怎么对得上就怎么摆。这三条路走起来都很舒服，走多了，理论就成了星座。它们首先约束的是提出和使用理论的人，因为批评的人没有义务替理论保住面子。

◆ 四、简单的解释够用，就把它留下

再看小禾。林老师注意到，她每到周一的数学课就特别慢，平时三分钟的题要磨十分钟，“错题回看”那本订正本也翻得最勤。小郑又来了劲，从她的自我看法、班级规矩、回写深浅一路讲下来，画了满满一页。林老师后来随口问了小禾一句，才知道她周日晚上要上补习班，回到家十点多，周一早上常常没睡醒。

困，这是一个很简单的解释，它说得通周一的慢，也说得通周二周三为什么正常。简单的解释够用的时候，就该把它留下，用不着为了让三个维度都显得有事可做，给每个字母都安排一场戏。手机连不上网，先看看是不是开了飞行模式，犯不着先去分析家里路由器、运营商和小区基地的"复杂关系"。

不过，一个好的框架也不是只会认输。它值不值得用，要看它能不能比简单的解释多说出一可以检验的东西。"小禾周一慢是因为困"预测的是：周一慢，其他日子不慢，补习班一停，周一也就不慢了。"小禾离不开订正本，是因为她只会在熟悉的地图上走"预测的是另一回事：凡是订正本里有同类题的，她都快；碰到订正本里找不到影子的新问法，不管周几，她都会停下来。两种说法指向不同的观察，事实才有机会在它们之间作出裁决。

加进差异序列和特征纠缠以后，如果说不出任何这类新的区分，三条方程在这件事上就只是在整理语言。整理语言也有用处，它能帮老师提问、帮教研组对齐说法，但这种用处和"解释了一个机制"是两回事，要分开报账。一件衣服可以只是好看，用不着硬说它还防弹。

模型的大小也是同一个道理。研究一节课里学生怎样改一个猜想，四十分钟里课程制度几乎不会动，那就可以暂时把它当作固定不变的条件，只盯着学生的尝试和理解，模型小一点，问题反而看得清楚。简化不是背离系统思考，只要说清楚省掉了什么、为什么可以省、什么时候省了就会出事。要是把同一个模型拿去研究一学期的变化，制度那一块就省不得了，因为月考、排名和进度表正是在那样的时间里起作用的。

◆ 五、让每一句话先领自己的身份

那么，学生的系统思考，怎样才算长到了成熟的地方？菜地那节课过后的一次讲评，林老师做了一个小实验：每个小组说出一句结论，先给这句话"领个身

份", 是一个定义, 一个解释, 一个从试算里看到的经验判断, 还是一条下次的建议。

有个小组的结论是: "周长一定时, 面积最大的总是正方形。"第十二章那道 24 米围栏的题, 自由围的时候这句话没错, 剪纸已经证明过; 一靠墙, 最大的变成了 6 米乘 12 米、72 平方米, 这句话就站不住了。全班对这一点没有异议, 那天大家是亲手量过的。

争论出在墙只有 8 米的那种情况。那天的答案是三边都 8 米、面积 64 平方米, 恰好又是一个正方形, 小禾当场笑出了声。过了几天, 她所在的小组把这件事越想越有道理, 写下一句: "绕了一圈又回到正方形, 说明正方形终归是最好的。"这句话很顺, 也很像一个规律。

林老师没有说对或错, 只请他们翻回那天的笔记: 墙改成 10 米的那一问, 大家算过, 平行于墙的边取满 10 米, 垂直于墙的两边各 7 米, 面积 70 平方米, 不是正方形。小组不甘心, 又自己试了 6 米的墙, 是 9 乘 6, 面积 54, 也不是。一个当堂算过的反例, 几天后就被一句顺口的规律盖住了, 可见"知道"和"用得上"之间还隔着一段路。

原来 8 米那一次只是巧合: 只有当墙长恰好等于 24 减墙长再除以 2 的时候, 三条边才一样长, 解出来正好是 8。正方形不是"终归最好", 而是在墙长等于 8 米这一个点上, 碰巧被约束推到了那里。顺着这个思路再往前一步, 小组还发现了另一件事: 墙只要有 12 米或更长, 答案就一直是 6 米乘 12 米、72 平方米, 墙再长也不变, 因为这时候墙长这条约束根本没有"顶上"; 墙一短于 12 米, 它才开始管事, 最好的围法立刻被推到墙的边界上。哪条约束此刻在起作用、哪条只是摆在那里, 这正是第十二章最后那个问题"哪条约束改变了答案"的另一种问法。

小禾那个组最后把那句话改成了: "24 米围栏自由围时, 正方形最大, 这是证明过的; 靠墙时, 最大面积的形状由墙长决定, 墙长 8 米时恰好是正方形, 这

是我们算出来的一个特例。"这句话比原来那句长了一倍，也没有原来那句那么响亮，却多了一样东西：它自己写清楚了在什么情况下会错。这比多画十根箭头更接近系统思考。

后来林老师把这个做法放进了平时的作业。开放题的结论旁边，学生要在页边写一个字：写"定"表示这是一个说法的规定，比如什么叫周长；写"释"表示在解释为什么；写"验"表示是试算或观察看出来的；写"议"表示是给下一次的建议。一开始学生乱写一气，把试了三个数看到的東西标成"释"，把还没证明的规律当成"定"。林老师不急着纠正标签本身，只在旁边问一句"你凭什么这么标"，这一问，往往比批一个对错更能让学生回头看自己的话站在哪里。

阳涌，你问学生怎样学会系统性地思考，这里给出的答案也许比预想的朴素：不是让他们学会更多的连接，而是让他们习惯给自己的每一句话贴上身份，再替它找一个可能的反例。做饭的人也是这样长进的，新手说"这道菜就该放两勺盐"，老手会说"这口锅、这些肉，放两勺正好；换了酱油重的做法，就得少放"。老手并不比新手更没把握，他只是知道自己的把握在哪里结束。

这一章的判断也有它的边界，集中在这里交代。说一个解释"能解释一切所以可疑"，不等于说宽泛的解释毫无用处，在刚开始摸一个新问题时，一个宽一点的说法能帮人找方向，只是不该在这个阶段就宣布它已经被证实。主张"简单解释够用就留下"，也不是说复杂的解释一定是错的，有时候困只是故事的一半，补习班停了，周一照样慢，那就得回头去找更多的条件。至于给句子领身份的练习，它是课堂里的一种做法，能不能真正提高学生在新问题上的表现，还得照第四部的办法另做检验。

本章的底牌是：一个人系统思考的成熟标志，是知道自己的解释在什么情况下会错。系统思考的反面不是笨，也不只是只看一根箭头，而是手里握着一套怎么说都对的话；方便解释让人什么都接得住，循环解释让两句话互相作保，它们都让人在出错的时候察觉不到自己出错。三条方程要想不沦为这样的话，就得给

S、D、E 各找一条独立的观察路，事先写好怎样算错，并在简单的解释已经够用，痛快快地让路。

学会说"在这种情况下我会错"，只是第一步。错了以后，这次的错能不能改变下一次的起点，能不能让订正本里不再只有一个红笔答案，就是另一个问题了。第三部从这里开始，讲一次经验怎样回写下一次的条件。

带走的话

系统思考成熟的标志，是知道自己的解释在什么情况下会错。

小 账

人物是真的吗？ 小郑、小禾、小宇和那次教研会都是构造的；鸡兔同笼和靠墙围栏的数字是核算过的。

简单解释一定对吗？ 不一定。“小禾周一慢是因为困”只是构造的例子；若补习班停了周一照样慢，就得回头去找更多条件。

哪一句还要检验？ “给句子领身份的练习能提高学生在新问题上的表现”还没检验，要按第四部的办法另做比较。

宽泛的解释没用吗？ 不是。刚摸一个新问题时，宽一点的说法能帮人找方向，只是不该在这个阶段宣布它已被证实。





第 三 部

让这一次改变下一次

导 语

前两部讲的都是一个学生、一节课。这一部五章把镜头拉远，从学生走到教研组，从教研组走到学校。贯穿五章的是同一个动作：回写，也就是一次经验怎样改变下一次的条件。

第16章讲回写要被观察、不能被宣布，也讲"粗心"这样的标签怎样负向回写；第17章讲教具、符号与意义怎样一起上课；第18章讲一个数学社团从热闹到成熟、从太顺到退化再到重组；第19章讲学校怎样记住经验；第20章讲 AI 进入课堂以后，是帮学生走路，还是替学生走路。

对管过学校的人，这一部也许最有用。一个人凭热情坚持的课堂可以照亮学生，但只有回写进制度，下一位老师才不必从头摸索。

16

第16章

回写：一次经验怎样改变下一次的条件

这一章的问题

一学期写了九次“粗心”，这些批语究竟改变了学生的什么？

场景 寒假前，林老师把小宇九个“粗心”对应的错题抄成一行，发现六道都错在负号搬家的那一步。

◆ 一、“粗心”两个字被写了九次

寒假前的最后一个周五，林老师又一次把小宇的作业本摊开。这回她不看分数，只看自己写在错题旁边的批语。从九月到一月，“粗心”两个字一共出现了九次，字一次比一次潦草，最后两次只剩一个圈，圈里一个“粗”字，像一枚盖顺了手的印章。她忽然有点不好意思：自己批了一学期，写得最多的竟是一个什么也没说清的词。

她把九道错题抄在一张纸上，排成一行。第一道是 $3x+5=2x-4$ ，小宇移项写成 $3x-2x=-4+5$ ，得 $x=1$ ，代回去左边是 8，右边是 -2 。第二道是 $2-(x-3)=4$ ，他去括号写成 $2-x-3=4$ ，得 $x=-5$ ，正确答案是 $x=1$ 。第三道是 $-3x=12$ ，他写 $x=4$ 。剩下几道也差不多，有的出在有理数减法，有的出在去括号，有的出在系数化为 1。九道题里有六道，错误都出在同一类地方：一个负号要跟着某一项“搬家”的那一步。

这就不像粗心了。真正的粗心是撒在地上的芝麻，东一粒西一粒，没有方向；小宇的错误却像排好队的蚂蚁，专挑负号过门槛的地方出事。林老师在学期

末的错题登记表上，把"粗心"划掉，改写成"在符号转换处卡住"。她给小宇看了这张纸，小宇盯着那六道题看了很久，说了一句："原来我老是在这儿掉。"

顺便说一句，林老师把九道题排成一列这个动作，正是第二部反复讲的那三句追问落在了老师自己身上。她没有再问"他为什么这么不小心"，而是问这些错误是在什么条件里、经过哪几步长成现在这样的。一个结果被放回它的来路，原先那个圆滚滚的"粗心"就裂开了，露出里面的纹路。系统性思考不只是一要教给学生的本事，老师批改作业时，同样用得上，也同样常常忘了用。

第三章讲过回写的基本意思：张力被接住、长出新的显露以后，这个新显露会反过来改写原来的条件。那一章的例子是"等号是一个天平"怎样改变小宇下一次看等式的方式。这一章要把问题推深一步。林老师改写了一个词，这件事算不算回写？如果算，它回写了什么，我们又凭什么知道？如果那七个"粗心"也算回写，它们又改写了什么？

◆ 二、记下来、说过了、写回去，是三件事

先说一个比数学课常见得多的场景：找钥匙。一个人早上翻遍外套口袋、玄关抽屉和沙发缝，最后在冰箱顶上找到了钥匙。他可以在手机备忘录里记一笔"钥匙在冰箱上"，可以被家人数落一句"你下次长点心"，也可以在门边钉一个挂钩，和家里人约好进门先挂钥匙再放菜。三种做法都和"找钥匙"有关，第二天早上的命运却完全不同。

备忘录是记录，记得再详细，下一次钥匙丢在哪里，它管不着。数落是反馈，听起来很认真，第二天却未必改变什么；"长点心"和"粗心"是同一个家族的词，说的人很解气，听的人不知道从哪里改起。只有挂钩改变了第二天的条件：进门时手往哪里伸、眼睛先看哪里、家里人互相提醒的理由，都跟着变了。母本把一次发生所依托的既有状态叫作底盘，回写就是新结果反过来改变这块底盘，

让下一轮面对不同的可能。母本有时把这层意思写成"发生等于底盘加回写",那是一句方便诊断的简式,不是两个同样单位的数相加;它提醒我们,同样一次讲解落在不同的底盘上,写回去的东西可以完全不同。

可是挂钩本身还不是回写。挂钩若钉在柜门背后,或者主人每次进门两只手都拎着菜,钥匙照样会被顺手扔到沙发上。回写不在多了一个金属件,而在动作、物件和家里人的约定之间的联系变了。这一点放回课堂上同样要紧:多了一本错题本、多了一张登记表、多了一条批语,都只是多了一个挂钩,还要看它有没有进入下一次的运行。

那么怎样判断"进入了"?比较靠得住的办法,是盯住四样东西看它们有没有变。第一样是后来可用的信息:下一次出错时,师生能看见的是不是比以前多了一点。第二样是判断:做题的人在某一步会不会停下来,用新的理由决定往哪里走。第三样是工具关系:手边的工具是不是被重新组合起来用了。第四样是行动权限:谁被允许说什么、做什么,有没有改变。

拿这四样去量林老师那一笔改写,就能看出它可能回写的地方。信息上,林老师以后批改时会先看"负号有没有跟着搬家",而不是只看答案对不对。判断上,小宇做题时也许会在移项、去括号前停半秒,问自己"这一步有没有符号要搬"。工具上,他们可以约好在草稿边上留一栏"代回检验",把 $x=1$ 代回 $3x+5=2x-4$,一看 $8 \neq -2$,错误就自己露了馅。权限上,小宇第一次获得了一种说法:"我在这儿卡住了",而不只是被别人宣布"你又粗心了"。

不过,挂钩要钉得住,墙得吃得住钉子。这一笔改写能不能写进小宇的下次,还要看他手里有没有东西接得住它。假如在小宇心里,"移项要变号"只是一句老师说过的咒语,那么告诉他"你在符号转换处卡住",他能做的也只是把咒语念得更用力一点。第三章那个天平在这里派上了用场: $3x+5=2x-4$ 两边同时减去 $2x$ 、再同时减去 5 ,左边剩 x ,右边剩 $-4-5$,负号不是"搬家时变了身",而

是天平两边各拿走了同样的东西。有了这块底，"符号转换"才是一个可以被看见、被检查的地方，而不是一处只能靠运气通过的暗礁。

还要补一笔容易漏的。这一笔改写不是落在白纸上的，它落在小宇已有的条件上：他六年级分数除法吃过的亏，作业订正"只写正确答案"的老规矩，还有他心里那句"我不是学数学的料"。第三条方程要实例化，就得把这些旧条件和时间放回去，新条件是旧条件加上这一轮的显露与路径更新出来的。如果"只写正确答案"的订正规矩不改，"代回检验"那一栏很可能两周后就空着；如果那句"我不是学数学的料"压得太重，"我在这儿卡住了"也可能被他听成另一种方式说他不

◆ 三、回写要被看见，不能被宣布

林老师改完那个词，心里挺舒服，这种舒服很危险。一位做过课程研发的人大多见过这种场面：新的评价量表发下去，大家把旧词换成新词，教研总结写着"实现了评价语言的转变"，学期末翻开作业本，批改方式还是原来那一套。词换了，判断没换，回写只发生在总结材料里。

所以林老师需要事先想好，什么样的事情发生了，才算这一笔改写的写回了小宇的下一次。寒假以后，下学期的第一个单元是二元一次方程组。像 $2x+3y=12$ 和 $2x-y=4$ 这样一组，用加减消元，两式相减得 $3y-(-y)=12-4$ ，也就是 $4y=8$ ， $y=2$ ，再代回去得 $x=3$ 。最常见的错误恰好是让负号在这里丢掉，把 $3y-(-y)$ 写成 $2y$ ，得 $y=4$ 、 $x=0$ 。这是一个负号又要搬家的新地方，而且长得和上学期的题不太一样。

如果回写真的发生了，林老师应该能看到几件具体的事。小宇在 $3y-(-y)$ 这一步会慢下来，草稿上也许会留下一个小小的圈或箭头；他做完会把 $x=3$ 、 $y=2$ 代回两个方程，算出 $6+6=12$ 、 $6-2=4$ ，两边都对上；要是只代回第一个方程，

$x=0$ 、 $y=4$ 那组错答案也能蒙混过关，所以他得两个都代；万一错了，他自己能说出"又是符号搬家"。反过来，如果到了方程组，他的错误照旧集中在负号处，草稿上没有任何停顿的痕迹，订正仍然只有一个红笔答案，那就说明那一笔改写停在了登记表上。

补过自行车胎的人都懂这个道理。补丁贴上以后，车停在楼道里一夜不瘪，说明不了什么；得骑上一段坑洼的路，第二天早上再捏一捏胎，才知道补丁粘没粘牢。真正的检验是它在下一次压上重量时还撑不撑得住。方程组消元那一课，就是小宇那块补丁要压上重量的那段坑洼路。

这里还要防一个反方向的错误。两周后没看到变化，也不一定说明什么都没发生。也许学消元那一周小宇请了两天假，也许题目全是正系数，负号根本没有机会搬家。今天没见到和一个学期都没见到，是两种分量不同的证据。所以林老师写下的观察计划，除了"看什么"，还要写"在哪类题里看""看多久"，并且有意给小宇安排几次负号必须搬家的场合，让回写有机会露面。

阳涌，你做课程研发时若要设计一项评价改革，最值得在动手之前写下的，大概正是这一类"到哪里去看"的句子。改革方案里常有"促进学生反思""形成过程性评价"一类说法，它们都对，却都没说下一次要在哪一类任务、哪一种痕迹里看到不同。写不出这一句，方案上线以后，所有变化和不变化都能被解释成"正在起效"。写得出这一句，一个学期以后，方案才有被事实说中或者说错的机会。

林老师的计划里还有一条看起来不起眼的观察：小宇下一次出错以后，会不会主动来问。这条观察连着动力问题。上学期他交上来的订正越写越短，最后只剩一个红笔答案，因为订正对他来说只是一道手续，抄完就算还完了债。如果"在符号转换处卡住"真的写回去了，他的订正应该会多出一内容，哪怕只是

一句"这次又是 -2 后面那个括号"。一个学生开始为自己的错误多写一句话，往往比他多举一次手更能说明，上一次的经验给了他继续的理由。

第三章的三笔纪律里有一笔是"回写最容易漏"。现在可以把它说得更具体一点：回写之所以容易漏，是因为它发生在后来，而人们习惯在当时结账。一节课上完，老师觉得学生懂了，学生也觉得自己懂了，大家在同一个时刻满意；可是这一次的显露有没有改写下一次的条件，要到下一次才知道。动力问题和这件事紧紧连在一起：学生愿不愿意再试一次，很大程度上取决于上一次留下了什么。

◆ 四、那九个"粗心"也在回写

现在回头看那九个被划掉的"粗心"。它们并不是白写的，它们也回写了，只是回写的方向不对。回写本身不是一个褒义词，好的经验会进入下一轮，坏的解释同样会进入下一轮，而且坏的那种往往跑得更快。

先看信息。"粗心"进入登记表以后，下一位读这张表的人看见的是一个结论，看不见那六道题排成的队。家长会上，小宇妈妈听到的是"孩子挺聪明，就是粗心"，回家能做的只有一句"做完检查三遍"。再看判断。小宇自己也接受了这个词，而"粗心"这个解释有一个隐蔽的副作用：它暗示错误里没有什么值得学的东西，只要下次小心就行。一个人认定自己的问题是"不够小心"，就很少会去研究"在哪里不小心"。

再看权限。一个被反复写作"粗心"的学生，在小组里很容易被安排去抄写、计时，而不是去讲解；老师选人上黑板时，也会下意识跳过他，免得课堂节奏被一个低级错误打断。这样一来，小宇能够犯"有内容的错误"的机会越来越少，九个"粗心"就慢慢长成了第十个、第十一个。到了初一上学期末，那句"我不是学数学的料"已经不只是他心里的一个念头，而是被作业本、登记表、家长会和座位安排一起撑住的条件。

这正是导论那张动力底牌要提防的局面。小宇的劲头不是在某一天突然漏光的，而是被一串小小的负向回写一点一点改写了起点：每一次"粗心"都让下一次出错显得更没有内容，每一次没有内容的出错都让下一次举手显得更不划算。从外面看，他像是"越来越不想学"；从过程里看，是他能拿来继续的理由被一层层收走了。把这种局面说成"他天生不想"，等于把一段被写坏的历史，算到了一个孩子的天性头上。

负向回写还有一种更体面的样子。一个学生在只看最终答案的课堂里，用猜答对了几道选择题，猜测就悄悄得到了奖励。下一次老师要他写理由，他面对的已经不是一张白纸，而是一套曾经让他占过便宜的做法。这种回写没有任何人存心制造，它只是评价规则和一次运气碰在一起留下的条件，却足以让后来的"讲道理"显得又慢又亏。

这种负向回写，在生活里一点也不罕见。一个孩子小时候唱歌跑调，被家里人笑过一次"五音不全"，此后每逢家庭聚会别人唱歌，他就负责鼓掌。几十年过去，他确实唱不好，可是没人分得清，这是天生的嗓子，还有一句玩笑替他关掉了所有练习的机会。玩笑早就没人记得了，它写回去的条件却一直在。

学校层面也有同样的事。一次检查之前，某个年级把好看的材料整理得特别整齐，顺利过关，后来的人就学会了先整理材料。下一次再把这些材料当作成功经验推广，纸面上的经验越来越漂亮，离课堂里实际发生的事却越来越远。纠正它，只换一张"更诚实"的表格不够，要改的是谁能报告问题、报告了以后会发生什么，以及问题怎样进入决策。这是第十九章要细讲的事，这里只先把它认作同一种回写。

◆ 五、给旧判断贴一张保质期

既然回写可能是负向的，那么一个能长期运转的课堂，就需要一套撤销与修正的办法。冰箱里的剩菜贴上日期，不是因为剩菜一定会坏，而是为了让三天后的人知道它是哪天做的，好自己判断还要不要吃。学生身上的判断也一样，需要有来源、有时间，有人定期回头看看它还新不新鲜。

落到林老师的登记表上，可以做三件不大的事。第一件，判断要带着出处写：不写“粗心”，写“九月第三周到一月第一周，有理数减法、去括号、移项，六次出在负号搬家处”。这样后来的人看到的是一段有条件的经验，而不是一个人的定性。第二件，允许学生对记录说话：小宇可以在旁边补一句“去括号前面是减号时我最容易忘”，他的补充本身就是一次命名。第三件，每个单元结束时，把旧标签拿出来对一遍，看它是否还对得上新的错误。

最后这一件，连林老师自己写的新标签也要接受。假如到了方程组，小宇的负号已经很少出错，却开始在凑系数时把 $2x-y=4$ 两边乘 3 写成 $6x-3y=4$ ，错误从“符号搬家”挪到了“等式两边漏乘”，那么“在符号转换处卡住”这个说法就该改写，而不是被林老师当成自己的得意之作护着。一个新标签若只准用来解释旧错误、不准被新错误推翻，它很快就会变成另一个“粗心”，只是字写得更长。最好的修改者往往是小宇本人：让他每个单元末在登记表上自己写一行“这次我主要掉在哪儿”，既是一次撤销旧判断的机会，也是一次他替自己的困难起名字的机会。一个会给自己的错误起准名字的学生，下一次掉进去时，至少知道自己掉在了哪个坑里，爬出来的路也就短了一截。

撤销还有一个常被忽略的部分，就是适当地忘。小宇初一上学期不爱举手，这是那一段时间、那几类任务里的观察，不该自动变成初二分组时不给他讲解任务的理由。旧记录可以留着，留着是为了知道一个判断是什么时候、在什么情况

下做出的，而不是为了让它替后来的人做决定。删掉一条过时的判断，和抹掉一次错误发生过的证据，是两回事：前者是给孩子松绑，后者是给记录作假。

一位管过学校的人看到这里，会先问一个更实际的问题：这些记录谁能改，改了要不要说一声？学生成长档案、分层名单、评优记录，都是会长期影响学习机会的回写，它们改动起来理应比改一行错题批语更慎重。越可能持续改变一个孩子能做什么的记录，越要写清依据、观察期限，以及出现什么情况就愿意改回去。这不是给每一次小改动加盖十个公章，而是让后来的人有办法追问"这句话是谁、在什么时候、凭什么写下的"。

这里还有一笔反过来的账，要算到理论自己头上。假如青石中学的教研记录从此满纸 S、D、E，听课本上写着"本节课实现了有效回写"，可老师们看错题、选任务、改批语的方式一点没变，那么这套理论只是在学校里多了一个签到的名字。检查 SDE 是否进入了学校，和检查小字是否在消元时管住了那个负号，用的是同一把尺子：看后来的判断和做法有没有变。如果一位老师从来不用这些词，却早就习惯把学生的错误按位置分类，那她已经做到了这一章要说的事，词汇反而可以省掉。

这一章的判断也有它用不上的地方，在这里集中说一次。如果学生的错误真的是零散的，没有聚集在某一类位置，那么"粗心"可能就是一个够用的朴素解释，硬去找回写的路线，只是在给一阵风画地图；更简单的说法够用的时候，就保留它。回写的观察也需要足够的时间窗口和合适的任务，一节课、一次测验看不出来，题目里没有给它露面的机会也看不出来。还有，回写说明的是"条件怎样被改写"，它不替我们回答"该往哪个方向改"，方向对不对，要由学生后来的学习和老师、家长的价值判断一起来裁。

底牌可以亮出来了。入库不算发生，回写才算：一条经验进了错题本、进了登记表、进了总结材料，只是被存了下来；它改变了后来可用的信息、判断、工

具关系或行动权限，才算真正进入了下一次学习。回写不能宣布，只能观察，而且要事先写好在哪里看、看多久；回写也可能是负向的，一个随手写下的“粗心”，可能比任何一次讲解都更持久地塑造一个学生。所以动力问题里那句“接住了却没留下”，还要补上半句：留下的东西对不对，也要有人回头检查。

回头看林老师的新登记表，那一行字背后其实站着三样东西：草稿边上那一栏“代回检验”，是摸得着的纸和笔；天平两边同时拿走同样的东西，是数学里的规则；“原来我老是在这儿掉”，是一个孩子对自己的新看法。这三种东西怎样在一堂课里彼此牵动，是下一章要看的事。

带走的话

入库不算发生，回写才算；一个随手写下的“粗心”也会回写。

小 账

人物是真的吗？ 小宇、林老师和那张错题登记表都是构造的；文中方程和消元的算是核算过的。

什么时候不必谈回写？ 学生的错误若真是零散的、不聚在某类位置，“粗心”可能就是够用的朴素解释。

哪一句还要检验？ 要看下学期方程组消元时，小宇会不会在负号处停下、把解代回两个方程；若错误照旧集中在负号、订正仍只剩红笔答案，就说明改写停在了登记表上。

回写指明方向吗？ 不。它只说明条件怎样被改写，该往哪个方向改，要由学生后来的学习和老师、家长的价值判断来裁。



17

第17章

教具、符号与意义怎样彼此牵动

这一章的问题

学生在地上把数轴走对了，为什么第二天作业还是写错了？

场景 林老师在过道上用黄胶带贴了一条数轴，小宇第一个上去转身倒退，退到5时全班都笑了。

◆ 一、地上贴了一条数轴

学有理数减法那一周，林老师在教室过道上用黄色胶带贴了一条数轴，从-6到6，每隔一块地砖一个刻度。规则很简单：站在第一个数上，面朝正方向；遇到减号就转身；遇到负数就倒着走。算 $3 - (-2)$ 的时候，学生站在3上，因为是减号，转身面朝负方向，又因为减的是-2，就倒退两步，结果退到了5。

那天第一个举手要上去走的，竟然是小宇。他站在3上，转身，倒退，一边退一边嘟囔“这不是越走越远吗”，退到5的时候全班笑了，他也笑了。林老师后来想起，那阵子小宇在数学课上已经很少笑了。接着又有几个学生上去走了 $-4 - (-6)$ 和 $-2 - 3$ ，一个退到2，一个走到-5，过道上热闹得像在排练课间操。

也有人不肯上去。小禾坐在座位上，等别人走完才小声跟同桌说：“直接记‘减负得正’不就行了，走来走去多麻烦。”她说得没错，那几道题她在纸上算得又快又对。可林老师顺口问她一句“-2-3在数轴上该往哪边走”，她愣了一下，先去翻课本找例题。她手里有一条好用的口诀，却没有去过那条数轴。

第二天的作业里，小宇把 $3-(-2)$ 写成了 1。林老师拿着作业本站在过道那条黄胶带旁边，有点哭笑不得：昨天他的脚明明走对了，今天他的笔却好像从来没去过那条数轴。一条胶带、几个转身、一阵笑声，到底给了小宇什么，又没给他什么？反过来，一条口诀给了小禾满分，又让她在数轴面前少了什么？两个孩子像是各拿了半张地图，一个拿到了路，一个拿到了路名。

这个问题看起来是在问“教具有没有用”，其实问得更深。第十六章说过，一次经验要回写，得改变后来可用的信息、判断、工具关系或行动权限。那条胶带显然改变了些什么，至少改变了小宇那天愿意站起来；可它改变的东西，没有一路走到作业本上。要看清它停在了哪里，先得承认那天在课堂上的，不只是四十多个学生和一位老师。教案上通常只写得下这两类人，外加一行“教具：胶带、数轴”；可真正左右那节课走向的，还有一些从来不出现在教案里的东西，比如一条临时宣布的规矩，比如一个孩子带进教室的旧记忆。

◆ 二、一只杯子的三个住处

先离开教室，看一只杯子。厨房架子上有一只旧玻璃杯，杯口有个小缺口。从一个方面看，它是一块有重量、有温度、装了热水会烫手的玻璃；从另一个方面看，它是“容器”，是“杯子”这个词所指的东西，可以按容量、材质、用途归类；再从第三个方面看，它是奶奶生前送的，缺口是那年搬家磕的，家里人谁也舍不得扔。

这三个方面不是三只杯子，也不是一只杯子的三张照片，它们彼此牵动着。正因为它是奶奶送的，家里人洗它时格外小心，它才在架子上待了这么多年；也正因为它有个缺口，它在“容器”的意义上其实不太合格，客人来了从不用它倒水。哪一面变了，另外两面都会跟着动：要是哪天它摔碎了，“奶奶送的”这层意思也许会转到一张照片上，换个地方继续住。

母本把条件的这种质地叫作 E1 三界。现实界是身体、器具和空间，理念界是概念、规则和制度，自我界是记忆、身份、情绪和意志。这里要特别说明一句，是"理念界"，不是"意识界"：概念和规则并不只住在某个人的脑袋里，"相反数"这个概念、"减去一个数等于加上它的相反数"这条法则、班里"上去走错不扣分"的约定，都是许多人共同遵守、可以被讨论和修改的东西。

把那节数轴课放进三界里看，过道上同时坐着三位"看不见的同学"。现实界那一位，是黄胶带、地砖的间距、转身和倒退的身体动作，还有过道够不够宽、后排看不看得见。理念界那一位，是有理数减法的法则、"相反数"的概念，以及林老师宣布的"上去走错不扣分"。自我界那一位，是小宇六年级分数除法留下的那点怕，是他心里那句"我算不好负数"，也是他那天在地砖上倒退时冒出来的一点好玩。

三位同学不是并排坐着各上各的课，它们在互相递纸条。"走错不扣分"这条约定属于理念界，它降低了站起来的代价；代价降低了，小宇自我界里那点怕就松了一点；怕松了，他的身体才肯走到过道上。如果要把这条牵动说得可以被反驳，可以这样写：其他安排不变，只把"走错不扣分"换成"走错要记一次"，那么愿意上去走的学生应该明显变少，主动举手的人里最先消失的，会是像小宇这样刚松动一点的学生。如果换了以后人数一点没变，那这条作用链就说错了，得另找原因。

自我界里那句"我算不好负数"值得单独看一眼。它相对稳定，小宇说起来很顺口，像一句早就背熟的自我介绍；可稳定不等于真，它也不是他这个人不变的本质。老师可以追问它是靠哪些经历撑着的，在哪些题里成立，又漏掉了哪些相反的经验。过道上那一次退到 5，就是一条被漏掉的相反经验，只是它还没有被记进小宇讲给自己听的那个故事里。这样的追问是教学上的，不是心理诊断，目的只是让一句旧话重新接受一次检查。

母本有时用土壤的厚薄来比喻不同方面的积累，这个比喻用来找"这项任务缺哪种条件"很顺手，用来给人排高低就坏了。小宇在有理数减法这件事上，理念界那一层还薄，法则在他那里只是一句话，没有长出根；可这并不说明他整个人在理念上贫乏，五年级为鸡兔同笼追到办公室门口的，也是他。判断的是某项任务和已有条件之间的关系，局部的薄，不该被升级成对一个孩子的判词。

同一个道理也适用于小禾。她理念界里的那条口诀很厚实，自我界里"我是算得快的人"也很结实，偏偏现实界那一层，那条要用身体走一遍的数轴，她没去碰。三界在她身上不是不够，而是不匀，而且不匀得很稳当：口诀越好用，她越没有理由去过道上走；越不去走，口诀以外的东西就越少。这和上一章的回写是同一回事，只是这一回写进去的是一种"省事"。

你有哲学的底子，大概会对这里的说法多看一眼。说条件"参与"了一堂课，不是给环境换一个更有气势的名字，而是主张：条件和课堂里发生的事是一起生成的，没有一个现成的教室先摆在那里，等着学习在里面"发生一下"。所以三界不是背景，导论就说过，特征纠缠不是"环境"的好听说法；它们更像一起上课的同学，只是不坐座位、不点名、不交作业。

◆ 三、脚走对了，笔为什么没跟上

回到那个让林老师哭笑不得的问题。小宇的脚在过道上走对了，笔在作业本上写错了，这中间断在哪里？母本在 E2 上的说法能帮上忙：同一个内容，可以以符号、逻辑、数学三种模态被组织起来。符号模态是可辨认、可调用的记号，逻辑模态是一步接一步的承接，数学模态是把一组情形装进一个关系结构里。

拿跳广场舞打个比方。领舞喊"左、右、转身"，这是符号；脚跟着一拍接一拍地挪，左脚落下右脚才起，这是逻辑；整支舞每八拍一循环，第二段只是第一段换了个方向，这是数学。有的阿姨一听口令就会，可音乐一快就乱，她手里只

有符号；有的阿姨跟着前排能跳全套，可前排的人一走，她就不知道下一个八拍该干什么，她手里只有承接；能看出"这一段是上一段反过来跳"的人，换一支新曲子学得最快。

小宇那天在过道上，拿到的主要是逻辑模态：站好、转身、倒退，一步接一步，承接得很顺。可是这一串动作没有和纸上的符号挂上钩。" $-(-2)$ "里两个横杠，在他眼里还只是两个横杠，不是"转身"和"倒退"。所以第二天他一拿起笔，看到的是3和2之间夹着一些横线，就按最熟悉的旧路，算了一个 $3-2=1$ 。

更缺的是数学模态那一层。过道上走的几道题， $3-(-2)$ 退到5， $-4-(-6)$ 退到2， $-2-3$ 走到-5，如果把它们和对应的加法排在一起， $3+2=5$ ， $-4+6=2$ ， $-2+(-3)=-5$ ，学生就有机会看见：转身再倒退，等于不转身往前走；减去一个数，和加上它的相反数，落在同一个刻度上。这时候"减去一个数等于加上它的相反数"就不再是一句要背的话，而是好几次走路共同指着的那个关系。

小禾的情况正好反过来。她手里有符号，"减负得正"四个字认得清清楚楚；她甚至摸到了一点数学模态，知道这类题都能用同一条口诀处理。缺的是中间那段承接：口诀为什么成立，一步一步是怎么走过来的，她说不出来。所以题目一旦不再是"算出结果"，而是"在数轴上说明往哪边走"，她的口诀就没了用武之地，就像一个只背过站名的人，被问到两站之间该怎么换乘。

三种模态之间是往返，不是阶梯。不是先学会符号、再升到逻辑、最后毕业到数学；更常见的是在三者之间来回走。小宇需要的，也许正是一次从笔回到脚的往返：在作业本上写出 $3-(-2)$ 以后，让他指着两个横杠说"这个是转身，这个是倒退"；再从脚回到结构：把五六道走过的题和对应的加法排成两列，问他看出了什么。往返几趟，脚上的那点明白才有机会长到笔上来。对小禾，往返的方向则要倒过来，请她从口诀回到脚上：不许说"减负得正"，只许用转身和倒退，

给同桌讲清 $-2-(-5)$ 为什么停在 3。她大概会觉得这是绕远路，可这条远路，正是条件一变时她能找到的那条近路。

符号、逻辑、数学三种模态，也不只住在理念界。过道上那条黄胶带本身就是现实界里的符号，每块地砖一格，是一种可以被认出来、被反复调用的记号；"转身再倒退"是身体上的承接；整条数轴从左到右一格比一格大，是摆在地上的一个有序结构。自我界里同样有这三样：小宇那句"我算不好负数"是一个反复使用的符号，好用，却未必真；它背后还藏着一条承接，"上回错了，这回也会错"。三界和三模态交叉起来，同一个现象就可以从好几个位置被追问。

这里顺便看一眼 E3。母本用内能、动能、势能来说维持、激发和吸引三种状态，这是组织性的说法，不是可以测出来的物理量。那天的笑声，大概属于被激发的那一层：它让小宇动了起来，却没有替他把动起来的東西维持住。只有激发而没有维持，就像烧开水烧到冒小泡就关火，热闹过一阵，水还是凉的。

维持靠的往往是一些不起眼的东西。比如把过道上走过的题和对应的加法，两列并排抄在教室后墙上，留一周；比如第二天的作业里，第一题就请大家画一条小数轴，把 $3-(-2)$ 走一遍再写答案。这些安排不热闹，却让前一天的那点明白有个地方落脚。还有第三种状态，母本叫势能，说的是一种尚未展开的吸引：有的学生看到"转身再倒退等于往前走"时会愣一下，觉得这事有点妙，虽然还说不清妙在哪里。这一下愣住，值得老师多给它几秒钟。

◆ 四、安静的教室不只一种安静

学生们回到座位以后，林老师问了一句："为什么减去 -2 ，就等于加上 2？"教室一下子安静了。她等了三秒，没人举手，于是自己把法则讲了一遍。讲完她自己也觉得可惜，可当时确实想不到还能怎么办。

那三秒里的安静，其实可能是好几种安静叠在一起。有的学生正在心里重新走那几步，还没走完；有的学生觉得这问题太简单，懒得说；有的学生心里有个说法，却怕说出来不像数学，被同桌笑。三种安静从外面听起来一模一样，背后住着的却是不同的条件：第一种卡在逻辑的承接上，第二种和他对这门课的期待有关，第三种和这间教室里说错话的代价有关。小宇那三秒里属于哪一种，林老师当时看不出来；也许他脑子里正转着一句"掉头再倒退"，只是觉得这话太不像数学，说出来要被笑。如果真是这样，那三秒里缺的不是答案，而是一个允许说"不像数学的话"的位置。

家里饭桌上也常有这样的安静。一家人吃饭时谁都不说话，可能是菜太好吃顾不上，可能是刚吵过架，也可能是电视里正在放大结局。如果当妈的把三种安静都当成"孩子不爱跟我聊天"，她做什么都会使错劲。课堂上也是这样，老师只听见了没有声音，却没有分辨这阵沉默属于哪一界。

分辨的办法并不神秘，要把等待时间和回应方式放在一起看。如果学生预期说错了会被当众纠正，等十秒和等三秒差别不大；如果老师回应很温和，问题刚抛出来就被自己答掉，温和也留不出空间。林老师下一次也许可以换一种问法："先跟同桌说一句，你在过道上是怎么走的，再说为什么会走到5。"先说身体做了什么，再说道理，这是给逻辑模态和符号模态搭一座小桥，也顺手把说错的代价降低了一截。

林老师在另一个班试了这种问法。同桌两人先讲身体做了什么，教室里立刻有了嗡嗡声；再请几组说给全班听，好几个学生的说法都带着脚的味道，比如"减号让我掉头，负号让我倒车，掉头再倒车就是往前开"。这句话不够规范，却是一座结实的桥，林老师只需要在黑板上把它和 $3+2=5$ 并排写出来，规范的说法就自己站过来了。这只是一节课里的一个片段，要说明这种问法普遍更好，还得在更多的课、更长的时间里比较。

这件事还连着动力问题。小宇那天肯上去走，说明他的劲头没有用完，只是需要一个代价足够低、结果足够好玩的入口。可是到了"为什么"那一步，入口又一次变窄了：要用嘴说、要说得像数学、要当着全班说。一个刚松动一点的学生，很容易在这种地方重新缩回去。动力断在哪里，常常就断在这种不同的界之间换手的办法。

◆ 五、看不见的同学怎样被请进课堂

把条件看成一起上课的同学，听起来很温情，用起来却很具体。它要求老师在备课时多问一句：这节课里，哪些东西在限定学生能往哪里走？现实界里，是谁能摸到材料、谁看得见黑板；理念界里，是哪个概念要被调用、哪条规则决定谁能说话；自我界里，是这个班的孩子带着什么样的记忆和自我看法走进来。

这些条件有的能马上改，有的一时改不了。回应方式下一节课就能换，过道的宽度一时半会儿拓不开。分清两种，是为了把力气用在能使上劲的地方，而不是宣布改不了的那部分从此不重要。教室太挤，没法让每个人都去过道走，那就让大家在课桌上用铅笔当小人走；可"教室太挤"这件事也值得记下来，免得几年后有人以为数轴走路这个办法本来就只适合少数人。

现实界里最容易被忽视的，往往是那些小得不值一提的安排。小组活动时，量角器、剪刀、学具袋总在组长手里，其他三个人负责看；教案上写着"人人动手"，实际动手的只有一双手。这时候再怎么强调合作精神，也不如先把那把剪刀分出来。一位管过学校的人看课时，若能顺手数一数每组有几双手真正碰到了材料，常常比听完一整节课的环节设计更快找到问题。

还要提防一种好心办坏事。三界的提醒，不等于每个概念都要配齐一件实物、一段故事和一次情感表达，好像三种颜色凑齐了课才算完整。有些材料会引入无关的线索，反而让结构更难看清：过道走路走得太热闹，有的学生记住的是

谁退得最远、谁差点撞到讲台，而不是转身和倒退的关系。抽象推理本身也有它的价值，到了某个时候，脚上的数轴就该收起来，让纸上的符号自己站住。

条件还会悄悄变质。那条黄胶带在过道上贴了一个月，起初人人绕着它走、踩上去还要报数，后来边角翘了，有人拿它当跳房子的线，再后来谁也不看它一眼，它就成了地板的一部分。一件教具从"一起上课的同学"退成"家具"，不需要任何人做错什么，只需要它和眼下的任务不再发生关系。所以请条件进课堂之后，还要记得隔一阵问问它还在不在场，必要时请它换个位置，或者干脆请它退场。

这一章的说法在什么地方会错，集中说一次。如果"走错不扣分"换掉以后上去走的人数依旧，或者同样的数轴活动在另一个班几乎没有引起任何参与上的差别，那么"理念界的规则松动了自我界的怕"这条作用链就站不住，得把学生的参与归到别的原因上去，比如新鲜感，或者那天恰好是周五下午。更朴素的说法也可能已经够用：有时候小宇第二天写错，只是因为没有练够，多做三道同类题就好了，不必劳动三界出场。三界和三种模态是帮我们找到漏看之处的观察坐标，不是一张要求每节课都填满的表格，它们各自的说法也还需要在具体课堂里接受比较和检验。

说到底，条件不是摆在课堂外面的背景，而是一起上课的"看不见的同学"。一条胶带、一句"走错不扣分"、一个孩子心里"我算不好负数"的旧念头，分别住在现实界、理念界和自我界，却在同一节课里互相递纸条，共同决定了小宇那天能站起来、却没能把走对的路带回作业本。教具有没有用，取决于它在三界之间牵动了什么；学生懂没懂，取决于内容在符号、逻辑和数学三种模态之间往返了几趟。看见这些同学，老师才知道该请谁帮忙，又该让谁先坐下。

这一章看的是一节课里的条件。可是条件也会在更长的时间里积累和磨损：一群人一起做数学，头一年热热闹闹，第二年顺风顺水，第三年却可能顺得有点不对劲。下一章，我们去看青石中学一个数学社团的三年。

带走的话

条件不是课堂的背景，而是一起上课、互相递纸条的看不见的同学。

小 账

人物是真的吗？ 小宇、小禾、林老师 and 那节数轴课都是构造的；“另一个班”试新问法只是一节课里的片段。

哪一句还要检验？ “‘走错不扣分’松动了自我界的怕”可检验：换成“走错要记一次”后上去走的人数照旧，或在另一个班不起作用，这条作用链就站不住。

三界三模态测得出吗？ 测不出。三界、三模态是找漏看之处的观察坐标，E3的内能、动能、势能是组织性说法，都不是可测的量，也不是每节课要填满的表。

自我界那段是诊断吗？ 不是。追问“我算不好负数”是教学上的做法，不构成心理诊断或专业建议。



18

第18章

成熟、退化与重组：一个数学社团的三年

这一章的问题

一个越办越顺、人越来越多的数学社团，为什么反而可能在退化？

场景 三年前老陈贴出手写通知“带一道好玩的题来”，第一次来了十四个人，图书室里同时吵着五六场。

◆ 一、一盒刚倒出来的积木

三年前的九月，老陈在教学楼一楼的公告栏上贴了一张手写的通知：“周三下午第三节课后，图书室，数学角。带一道你觉得好玩的题来，不好玩的别带。”最后那半句是他的风格，好几个班主任看了都摇头，说这样写没人敢来。结果来了十四个人，从初一到初三都有，还有两个是陪朋友来的，手里各拿着一包辣条。

第一次活动热闹极了。有人带了二十四点，有人带了数独，一个初三男生举着手机，说网上有道题“全世界都没人做出来”，一个初一女生拿出一道鸡兔同笼，被初三的人笑“这是小学题”，她红着脸坚持说自己有一种新解法。四十分钟里，图书室里同时进行着五六场争论，彼此谁也不听谁的。老陈坐在最后一排，几乎一句话没说，散场时只说了一句“下周还来”。

如果用母本的话来描述这一个月数学角，它大概处在混沌的那一头：想法很多，边界很弱，差异非常活跃，可是没有哪个差异被接住、被留下、被别人拿去继续。今天讨论的东西，下周没人记得；这个人提出的问题，那个人从没想过

要接。这里的混沌是一个发生学的描述，说的是差异怎样被组织，不是在宣布这群孩子能力不行，也不是数学里那种有严格定义的混沌。一屋子吵闹的初中生，还轮不到领一张"奇怪吸引子"的证书。

街口新开的面馆，头一年常常也是这个样子。老板什么都想卖，炒饭、饺子、米线、凉皮一样不落，菜单写满一整面墙。客人来了点什么都有，可是吃完了，谁也说不出这家店到底什么好吃，下回想起来，也不知道该冲着什么来。东西多不是坏事，问题是这些东西之间没有发生关系，客人的一句"汤太咸"说完就散在空气里了。

老陈后来说，他那一个月其实很着急，好几次想站起来给大家布置一道题，把场面"收"一收。他忍住了，理由很朴素：一道他布置的题，大家会做；一道他们自己吵出来的题，大家才会惦记。这个判断对不对，当时谁也不知道。不过它至少说明，混沌在他眼里不是需要立刻清理的垃圾，而是还没有被接住的材料。当然，等也有代价：那两个拿辣条的孩子第三周就不来了，混沌放得太久，有些人会在材料被接住之前先走掉。

◆ 二、猜想墙：介生的要害是接住

转机出在第五周。那个坚持鸡兔同笼有新解法的初一女生，这回带来了一道新题："15 能不能写成几个连续正整数的和？"大家很快找出了 $7+8$ ，又找出了 $4+5+6$ ，一个初二男生最后凑出 $1+2+3+4+5$ 。有人顺手试 8，试了半天凑不出来；又有人试 16，也不行。一个初三学生嘀咕了一句："是不是 2 的几次方都不行？"

这句话本来也可能散在空气里。老陈这时做了一件小事：他把图书室角落里一块闲置的白板拖出来，写上这句猜想、提出人的名字和日期，下面空出一大

块。他宣布了一条规矩：墙上的字不许擦，猜想错了就划一道线，在旁边写上是谁、用什么例子划掉的。白板从此有了名字，叫"猜想墙"。

接下来几周，猜想墙上热闹起来。"奇数都能写成两个连续数的和"被写上去，很快有人在旁边补了一笔"1不行"，于是改成"大于1的奇数都能"，因为 $2k+1$ 就等于 k 加上 $k+1$ 。"能写的方法个数等于它有几个因数"被写上去，又被15划掉了：15有四个因数，却只有三种写法。一个初二学生盯着这些被划掉的句子看了两周，写下了一条新的："写法的个数，等于它大于1的奇数因数的个数。"15的奇数因数里大于1的是3、5、15，正好三种；30也是三个， $9+10+11$ 、 $6+7+8+9$ 、 $4+5+6+7+8$ ，一个不多一个不少。

最让老陈高兴的，是有人开始问"为什么"。一个初二学生想明白了：如果连续的个数是奇数，和就等于个数乘中间那个数，个数本身是一个大于1的奇数因数；如果个数是偶数，和就等于个数的一半乘"首尾两数之和"，而首尾两数一奇一偶，加起来是奇数，而且至少是3。所以凡是能写成连续正整数之和的数，一定有一个大于1的奇数因数，而2的几次方偏偏一个都没有。这段道理是初一学生跟着也能听懂的，墙上那句"2的几次方都不行"，从这天起多了一行小字："已说明理由。"

母本把这种状态叫作介生，它介于混沌和秩序之间，但要害不在"中间"，而在承接。看猜想墙就能看出承接的四个样子：谁的猜想都能写上去，这是差异能够进入；划掉的句子留着，这是后果能够保留；慢慢形成了"先举例、再猜想、找反例、说理由"的做法，这是局部结构开始形成；后来大家发现光有例子不够，又把"说理由"补进来，这是结构自己被修改了。四样少了哪一样，介生都会滑走：只进不留，就回到混沌；只留不改，就开始往僵里走。

所以，介生不是混沌和秩序之间一个可以量出来的"最佳中点"，好像把混乱度调到百分之五十就万事大吉。秩序、混沌、介生是一套描述差异怎样被组织的

分析语言，不是物理学里的相变，也不是给社团排名的三个等级。面馆在这一年里也有了它的猜想墙：老板在收银台边挂了个本子，客人说"汤太咸"、"面太软"都记下来，隔两天调一次，调完再问。半年以后，菜单撤掉了一大半，墙上只剩一碗牛肉面写得特别大。

◆ 三、第二年：不用每次都从头商量

到了第二年，数学角有了一些固定的样子。每周轮流由一个学生主持，主持人提前一周把题目贴在猜想墙边上；活动最后五分钟，有人负责把当天的猜想和划掉的理由抄进一个硬皮本，大家叫它"猜想本"；新来的人第一次活动不用发言，只需要在墙上找一句被划掉的猜想，说说它是怎么被划掉的。这些规矩没有一条是老陈写的，都是第一年吵出来、试出来的。

秩序的好处，在这时候显出来了。大家不必每次都重新商量谁主持、题目从哪来、吵完记不记，力气就能省下来，去啃更难的题。第二年下学期，他们从连续数之和走到了用正方形和三角形铺地面，又从铺地面走到了一个他们自己起名叫"拐角数"的问题。题目换了好几轮，"举例、猜想、反例、理由"这条路一直走得通，猜想本也记满了一本半。翻开猜想本，能看见这条路本身也在长：第一年的记录大多只有"谁提的、谁划掉的"，第二年的记录多了一栏"换了什么条件会怎样"，那是某次争论之后，大家觉得光记输赢太可惜，自己加上去的。

母本说的成熟，不是年头到了、规模大了，而是三个维度之间能够相互支持、相互更新。拿数学角来说，显露出来的东西，是一群能把猜想说清楚、能把理由讲明白的学生和一面越写越密的墙；它的差异序列，是每周一轮的猜想与反驳；它的特征纠缠，是周三的时间、图书室的白板、轮流主持的规矩、"反例是送给提出者的礼物"这句玩笑，以及老陈坐在最后一排的那个位置。三样东西互

相撑着：墙上的旧猜想给了新问题起点，新问题又在墙上留下新的划线，规矩也随之慢慢改。

成熟的组织还有一个不太显眼的本事：它会改变后来者的处境。小区里一片树长起来以后，地上的光照和湿度变了，后来种下的花草能在哪里活，也跟着变了。数学角第二年入社的新人，进门第一件事是去墙上找一句被划掉的猜想，他们学到的第一课不是“怎样答对”，而是“错了的话会被怎样留下来”。老社员们一年攒下的东西，就这样成了新社员起步时的条件，这是社团尺度上的一次回写，比任何入社宣讲都管用。

检验成熟，有两块好用的试金石。一块是换材料：从数论换到几何，做法还走不走得通。另一块是换人：第二年冬天，老陈去外地参加了一个月的培训，数学角照常开，主持人照常轮，猜想本照常记，回来时他发现墙上多了两条他看不懂的猜想。一个靠某个人撑着才转得动的社团，人一走就停；一个成熟的社团，关键的人走开一阵，它还能自己转，甚至转出点新东西来。

这里要守住一个尺度上的分寸。数学角成熟了，不等于每个社员都成熟了，更不等于把社员们的考试分数加起来、平均分高了，就能宣布社团成熟。社团的成熟说的是这个组织里的关系，个人的成长说的是每个孩子各自的理解，两者有关系，却是两笔账。面馆也一样：那碗牛肉面成了招牌，徒弟能在老板不在时照样煮出来，这说的是店的成熟；至于徒弟自己能不能出去开一家店，那是另一回事。

◆ 四、太顺的那一年

第三年开学，周校长找老陈谈了一次。区里要办初中数学竞赛，学校去年只拿了一个三等奖，他希望数学角能“发挥一下作用”。一位管过学校的人都明白周

校长的难处：他是真心喜欢那面猜想墙的，可他也要对家长、对区里交代。老陈想了想，答应了，觉得这也不坏，孩子们本来就爱钻题。

于是数学角换了一种开法。每周一张竞赛题单，限时二十分钟，做完对答案，老陈讲标准解法，最后公布本周得分。人一下子多了，从十几个涨到三十多个，初一新生小禾也来了，而且如鱼得水。题单上的题型她大多见过，做得又快又准，连着三周排名第一。猜想墙被挪到了门后，前面挂上了一块成绩榜。

一切都很顺，顺得没人觉得哪里不对。有个初一男生在讲题时插了一句："要是允许从0开始加呢，结果会不会变？"老陈笑着说："竞赛不考这个，先把这道做熟。"这句话说得一点不凶，也确实有道理，题单还有五道没讲。那个男生后来没有再问过类似的问题。这有点像一个只背熟了菜单的服务员，客人照着菜单点，他答得一字不差；客人问一句"能不能少放点辣"，他就只好跑去问后厨。

真正露出马脚的，是一道题的答案。第七周的题单上有一道："1到100中，能写成至少两个连续正整数之和的数有多少个？"参考答案写的是94，理由是100以内2的几次方有2、4、8、16、32、64六个，减掉就是了。可是1也写不成至少两个连续正整数的和，正确答案应该是93。有两个学生算出了93，看到参考答案以后，把自己的答案改成了94，其中一个就是小禾。三周里，没有人对这个答案提出疑问。

最后发现问题的，是一个已经升入高一、回母校看看的老社员。他在门后翻出那面猜想墙，指着两年前的一行字说："1不行'，当年就划过的。"那面墙上早就写着答案，可是在新的开法里，已经没有人去看它了。老陈后来在教研组里说起这件事，自嘲了一句："我们把一个会找错的社团，办成了一个会对答案的社团。"

这就是退化的样子，而且是一种很体面的退化。原本有效的关系在变僵：不同的意见越来越难进来，那个男生的问题被礼貌地请出了门；修订停了，题单一张接一张，做法却不再因为任何发现而改变；记录也停了，猜想本最后一页停在第二年六月。表面上，出勤更多、速度更快、得分更高；底下，那条"后果能保留、结构能修订"的承接线已经断了。这正是 D3 那把双刃剑的另一面：当"二十分钟内做对"成了唯一的尺子，那些尚未证明有用的问题，比如"从 0 开始加会怎样"，就被提前当成冗余删掉了，高效，却贫血。

后来者的处境也跟着变了。第三年入社的初一新生，进门看到的第一样东西是成绩榜，榜首是小禾；他们学到的第一课，是"快"和"对"在这里最值钱。没人这样教过他们，是那块挂在显眼处的板子替大家说了话。第二年那条"先去墙上找一句划掉的猜想"的入社规矩，也就没人再提起，新人的起点被悄悄换掉了。

还可以换一个角度看这一年的账。投入明显在增加：题单越印越多，老陈每周要花一个晚上选题、核答案、做讲解，周三下午还要加时；可是社团里的关系和做法没有因此长出什么新东西，这很接近母本说的"内卷"，投入在涨，结构却原地不动。再往下走，还可能滑向"耗散"：维持这一切越来越靠老陈一个人加班，他哪天累了、病了、调走了，这套开法就会停下来，而那时连猜想墙也已经没人会用。用这两个词，不是要给数学角盖一个章，而是提醒我们看一段时间里的投入和所得是不是配得上。

判断退化要很小心，别把正常的波动当成衰败。考试周出勤少了一半，可能只是大家要复习；某一周讨论冷场，可能只是题目太难。要说一个组织在僵化，得看一段足够长的时间窗口里，事先就能指认的几样东西是不是一起在变：新问题能不能进来，错误多久会被发现，记录还有没有人写。这三样在数学角的第三年都变了，而且变了不止一个月。还要说清楚，僵化说的是数学角这一套运转方

式，不是在说老陈固执、小禾死板；小禾在这种开法里如鱼得水，恰恰说明它对一部分孩子是真有好处的。

◆ 五、拆地板，还是修地板

答案的事传开以后，有社员提议干脆回到第一年，题单不要了，成绩榜也撤了，大家又想带什么题来就带什么题来。这个提议很痛快，却有点像嫌房子旧，就把地板全撬了。第一年的热闹，是因为那时什么都还没有；第三年已经有了轮流主持、有了猜想本、有了一批会说理由的老社员，把这些一起拆掉，等于把好不容易长出来的秩序当成了病灶。

老陈和几个老社员商量的两个星期，最后定了一个折中的开法。题单留着，但只占前半段，周校长要的竞赛准备照样做；后半段恢复猜想墙，规矩多了一条：每张题单讲完，主持人必须提出一个“改一个条件”的问题，写到墙上。第一次轮到的，正好是那个问过“从0开始加”的初一男生。他把问题又往前推了一步：“要是允许负整数呢？”大家一试，8居然也能写了：从-7一直加到8，前面的正负一对对抵消，最后只剩下8。很快就有人发现，允许负整数以后，任何正整数 n 都能写成从 $-(n-1)$ 加到 n ，原来那条“2的几次方都不行”的结论，换了条件就整个翻了过去。

这是一种重组：原有的材料和关系被拆开，又按新的方式组合起来。题单还在，猜想墙也还在，变的是它们之间的关系，题单从终点变成了起点。可是重组不保证更好，它需要条件，也需要观察。老陈得心甘情愿地从讲台上退回最后一排，周校长得接受竞赛成绩短期内未必上涨，门后那面墙得被重新搬到前面来。他们还事先写下了一个学期后要看的几样东西：墙上一学期新增了几条被说明理由划掉的猜想，题单上的错误多久能被发现，新社员里有几个人提过“改一个条件”的问题。

新开法里最不自在的，恰恰是小禾。前半段题单她照样第一，后半段一轮到"改一个条件"，她就安静下来，先去翻前面的题有没有类似的。这并不说明重组失败了，也不说明她不适合数学角；它只是让人看见，上一种开法给了她一条特别顺的路，而这条路在条件一改时就到了头。数学角能不能给她接上另一条路，要等一个学期以后看墙上有没有她写的字，现在下结论都太早。

面馆开到第二十年，也遇上了这一步。老主顾越来越老，年轻人路过不进门，老板的儿子想把店改成网红风格，装修、菜单、名字全换。父子俩吵了一个夏天，最后汤底一口没动，换了浇头的搭配、点单的方式和门口的灯。生意会不会好起来，谁也不知道；但比起"一样不改"和"一样不留"，这至少是一个可以看结果、可以再调整的改法。

阳涌，你在数学新教育里推的许多做法，大概迟早也会碰到这一章的处境：一个实验做成了，就有人想把它定成标准动作；标准动作做久了，又有人想把它推倒重来。成熟的经验当然要接受新问题的检验，这正是猜想墙最早教会那群孩子的事；可是为了保持生机就天天撬地板，同样是在毁掉承接。分寸在于修地板的时候，知道哪几块是承重的。

这一章的说法在什么时候会错，集中交代一次。混沌、介生、秩序，成熟、退化、重组，都是描述某个具体过程和结构状态的分析语言，不是每个组织都必须依次经历的生命周期，也不评判任何一个人的人格；有的社团可能长期平稳，有的可能没有退化就主动改了，有的可能因为一位老师调走就散了。数学角的故事是构造出来的推演，它说明的是这套语言能帮人看见什么，不是已经观察到的规律。如果一个更朴素的解释已经够用，比如第三年的变化只是竞赛季的时间压力，竞赛一结束一切就自己恢复，那就保留那个朴素的解释，不必非得请出"僵化"这样的词。

这一章的判断落在这里：成熟不是终点，“太顺”也可能是退化的开始。一个组织在成熟的时候，差异能进入、后果能保留、结构能修订，三个维度互相撑着又互相改着；当它顺到不再有人提出别的问题、错误三周没人发现、记录停在某一页的时候，顺本身就是一个信号。重组是可能的，但需要条件，需要知道哪些东西值得保留，也需要事先写下怎样算改对了。动力和系统思考在这里又碰到了一起：一个让人不再想追问的社团，也就慢慢失去了让人想再来的理由。

数学角的那面猜想墙，在关键的时候救了它一次，因为墙上的字不许擦。可是一所学校里，大多数的经验并没有这样一面墙：公开课的教案存在某个人的电脑里，老教师的窍门留在他的脑子里，人一调走，经验就跟着走了。学校怎样记住经验，是下一章要说的事。

带走的话

成熟不是终点，“太顺”也可能是退化的开始。

小 账

数学角是真的吗？ 数学角、它的三年和那家面馆都是构造的推演，说明这套语言能帮人看见什么，不是已观察到的规律。

哪一句还要检验？ “第三年在僵化”可能被更朴素的解释取代：若只是竞赛季的时间压力，竞赛一结束一切自己恢复，就保留那个解释。

题目数字核算过吗？ 核算过：写法个数等于大于1的奇数因数个数；1到100中能写成至少两个连续正整数之和的是93个，参考答案94漏掉了1。

三态是生命周期吗？ 不是。混沌、介生、秩序和成熟、退化、重组是分析语言，不是组织必经的阶段，也不评判老陈、小禾任何人。



19

第19章

学校怎样记住经验：从公开课到长期积累

这一章的问题

一节大家叫好的公开课，为什么三个星期后课堂又退回了原样？

场景 林老师在报告厅上了一节打折问题的说理课，三周后周校长推门听的三节课没有一节让学生说理。

◆ 一、公开课之后的第三个星期

四月的一个周四下午，青石中学的报告厅坐满了人。林老师上了一节"说理课"，内容是一元一次不等式的应用题：一只书包进价一百元，打算按标价打八折出售，还要比进价至少多赚两成，标价最少定多少。她没有先讲解法，而是让学生把自己列的不等式写到黑板上，再说清楚不等号每一边说的是哪一笔钱。黑板上很快出现了两个答案：一组列出 $0.8x \geq 100 \times 1.2$ ，得到标价至少 150 元；另一组列出 $0.8x - 100 \geq 0.2x$ ，算出来至少是 500/3 元，一百六十六块多，还除不尽。

真正精彩的是后面十分钟。两组学生争论"两成"到底是谁的两成，有人说是标价的，有人说是进价的，最后一个平时很少发言的男生站起来说：赚多少要拿本钱来比，所以两成跟着进价走。听课的老师们在评课表上写满了"学生主体地位突出""思维过程可视化"。周校长在总结时说，这就是学校想要的课堂，下学期要在七年级铺开。

三个星期以后，周校长随机推门听了三节数学课。三节课都很扎实：老师讲例题，学生练同类题，最后对答案、讲错题，节奏紧凑，下课铃响时刚好讲完。没有一节课让学生上黑板解释"两成跟着谁走"。周校长回到办公室，没有发火，只在笔记本上写了一句话：公开课是一场雨，地皮湿了一层，太阳一出来就干了。

管过学校的人大多见过这一幕，而且知道它几乎每学期都会重演。通常的解释有两种：一种说老师们有惰性，换个文雅的说法叫"观念没转变"；另一种说公开课本来就是表演，平时上不了。两种解释都把原因放进了一个地方，前一种放在人的脑子里，后一种放在课的性质里。可那三位老师并不懒，林老师自己也不觉得那节课是表演，她只是发现，第二周的周测、第三周的单元进度和第四周的期中复习，没有一样为"说理"让出位置。

周校长翻出学校近几年的改革档案，看到的是同一个形状。三年前推"导学案"，留下一柜子印好的学案，后来成了草稿纸；前年推"小组合作"，教室的桌子改成了六人围坐，一个学期后又悄悄拼回了排排坐；去年推"大单元设计"，共享盘里多了一个文件夹，名字叫"大单元（最终版）（2）"，最后修改时间停在去年十一月。每一次都轰轰烈烈地开始，每一次都没有人宣布它结束，它们只是慢慢沉了下去，像落进池塘的石子，水面平了，谁也说不清石子沉在哪里。

这很像家里来客人之前的大扫除。全家忙一个周末，沙发底下都擦了，客人夸一句"真整洁"，一周以后茶几上又堆满了快递盒、充电线和没拆的信。没有人故意弄乱，只是东西用完以后该放到哪里，家里从来没有定过；大扫除改了一次结果，没有改每天放东西的那套条件。

第十六章说过，一次经验改变了后来可用的信息、判断、工具或行动权限，才算回写；第五章把"回写丢失"列为动力熄灭的第三个位置。这一章要把这两件事从一个学生的尺度搬到一所学校的尺度上来问：一节成功的公开课，究竟改了

学校里的什么？如果答案是"什么也没改，只多了一份获奖证书和一组照片"，那么它退回原样就不是意外，而是这所学校记性的正常表现。

◆ 二、老陈的牛皮纸袋

青石中学数学组里，经验最厚的人是老陈。他的抽屉里有一个用了很多年的牛皮纸袋，里面是他攒下来的学生错题原件，按单元分好，用回形针夹着。打折问题那一沓最厚，最上面一张就是"两成跟着标价走"的那种错法。他说这类错误每年都有，"像春天的柳絮，你不用请它，它自己来"。新老师来请教，他会抽出几张，讲一讲哪一课时最容易出事、怎样提前埋一个问题等着它。

这只纸袋是真正的成熟经验。它不是课本上的知识，也不是培训会上的口号，而是二十多年里一次次被学生的错误逼出来、又被老陈的追问修过的判断。第十八章用一家开了二十年的面馆讲过成熟：配方稳定，熟客认得，后厨每个人都知道下一步该干什么。老陈的纸袋就是数学组的那锅老汤，问题在于，这锅汤的火候只在老陈一个人手里。

很多家庭都有一位会腌萝卜的外婆，她腌的萝卜脆、咸淡合适，放到春节也不坏。外婆在世时，女儿照她口述写了一张卡片："萝卜切条，晒两天，盐抓一把，坛子放北屋。"外婆走后，女儿照卡片腌了第一坛，半个月就长了白花。她这才意识到，卡片上只有动作，没有条件：外婆的"一把"有多大，晒两天要晒到什么程度，北屋为什么凉，坛沿的水多久换一次，以及外婆年轻时坏过几坛、后来是怎么改过来的。菜谱传不下来，往往不是因为写得太少，而是写下的都是结果，让结果成立的条件和那些失败都没有写。

老陈的纸袋也是这样。它里面有错题，却没有写着"这张错题出现在什么任务里""当时是怎样接住的""哪一种接法后来不管用了"。新老师拿到几张错题，得到的就是那张卡片上的"盐抓一把"。更要紧的是，学校里的人是流动的。初中数

学组九位老师，如果每年有一两位调走或退休、补进新人，三年之后组里就有将近一半是新面孔；经验若只住在人身上，每过三年就得重新摸索一半，而老陈离退休也只剩四年。

这里有一个容易说歪的地方：成熟和僵化常常住在同一个纸袋里。老陈的判断大多是准的，可也有几张错题的"标准接法"是十几年前定下的，那时教材还很少用线段图表示数量关系。第十八章说过，成熟的经验也要接受新问题的检验；而检验的前提，是经验先被摆出来，摆到别人能看见、能质疑的地方。藏在抽屉里的经验既难被继承，也难被修订，它的成熟和它的老化一样，都发生在没人看见的地方。

老陈对"写下来"一向不太热心。他的理由不是懒，而是"写下来就不灵了"：他判断一个学生是真没懂还是一时走神，靠的是看那孩子落笔前停顿多久、橡皮擦在哪一行，这些东西写到纸上就干了。这话有一半是对的，有一部分判断确实只活在当面的观察里，纸上留不住。可另一半也要说清楚：写下来的东西本来就不是要替代师傅带徒弟，而是让带徒弟的时候有东西可谈。新老师拿着一张写明"这张错题出在第二课时、当时怎样接"的记录去找老陈，两个人谈的就不再是"多注意学生的思维"这种话，而是"这一次我也这样接了，为什么没接住"。

◆ 三、四样东西拴在一根绳上

回到周校长的问题。他其实做了不少事：开了公开课，表了态，还给七年级每周排了一节"说理课"。为什么还是退回去了？因为一所学校里有四样东西拴在一根绳上：课程（教什么、按什么进度教），协作时间（老师们什么时候能坐下来一起看学生作业），资料（经验以什么形式留下、谁找得到），评价（什么样的表现会被看见、被计分）。只动其中一样，另外三样会把它拉回原位。

看看那节说理课的处境。课表上有它，可每周五的周测仍然按"二十分钟完成十道题"计分，学生和老师都清楚，在黑板前争论两成跟谁走的十分钟，换不来周测上的一分。每周三下午的集体备课本可以用来交流学生的解释，可那段时间常被各种通知占去，剩下的十五分钟只够分配下周的练习卷。学校的资源平台倒是建好了，上传规则却写着"优秀课例"，于是平台上全是获奖课的教案和视频，说理课在普通班里卡壳的那几次，没人愿意传，也没有栏目可传。

这就是第十七章说的特征纠缠，只不过尺度换到了学校。评价规则、时间安排、资料通道、老师之间彼此的看法，它们互相限定，共同决定了一位普通老师在一个普通的周二能走哪条路。周校长加了一节课，等于在一张缠紧的网上剪开一个口子；网的其他部分没动，口子很快就被拉拢了。第六章说评价不是在学习之后打分，而是在学习之前就参与了发生，这句话对老师和对学生一样成立。

家里也常有类似的事。一对父母想让孩子晚饭后少看手机，于是买了一个漂亮的书架，摆满了书。可晚饭后父母自己在沙发上刷视频，家里的网络整晚开着，检查作业只看"写完没有"，书架就成了客厅里最安静的家具。书架没有错，它只是被另外三样东西拖住了；想让它起作用，得同时动一动大人晚上的习惯、网络的开关时间和检查作业的标准。

再往深看一层，学校评价老师的那把尺子也在这张网里。青石中学的年度考核里，"公开课获奖"有加分，"推门课被评优"有加分，可"把一次失败的尝试整理出来交给同事"没有任何位置。第六章说过 D3 的两面：优化约束让事情高效，可一旦把最容易数的指标当成唯一标准，那些还没证明有用的尝试就会被提前删掉。在这样的考核下，一位老师理性的选择，就是把最好的课拿出来展示，把最有用的失败锁进抽屉。这不是哪一位老师的品格问题，而是这把尺子在替整所学校做选择。

还要看见，这张网对不同的人勒得不一样紧。周校长提出的改革目标、老师们多出来的备课时间、学生多承受的一次没有计分的讨论，并不是同一份代价。校长在全校大会上讲一次改革只要二十分钟，一位老师为一节说理课改学案可能要花一整个周末。若老师说某项记录耗时又没用，学生说某种展示方式让他们难堪，这些声音要能进入下一轮的方案修订，而不是被归为“不配合”。一张网能不能松一松，常常取决于勒得最紧的那几个人有没有说话的地方。

还有一个尺度上的错觉值得点破。周校长手里有一份名单：初中数学组九位老师，四位是区级骨干，三位拿过优质课一等奖。名单很漂亮，很容易让人以为这个组已经“成熟”了。可第十四章说过，个人的成绩加起来并不等于组织成熟。九位好老师可以各自上出九种好课，而组里没有任何一样东西能让第十位老师站到他们的肩膀上；组织尺度上的成熟，看的是经验能否在人与人之间、届与届之间被接住，这件事不写在任何一个人的履历里。

放回三方格里看，在学校这个尺度上，公开课显露了一种新课堂的样子，新的路径和旧的条件之间的张力在那四十分钟里被短暂接住了；可那一次显露没有回写进学校的条件，下一周的路仍由旧的周测、旧的备课和旧的平台规则决定。看清了这一层，改革的问题就从“怎样让老师们转变观念”换成了一个更好回答的问题：这一次经验，打算改动四样东西里的哪几样，改到什么程度，又怎样知道它真的改了。

◆ 四、让下一位老师从第二步开始

那么，一次教研怎样才能成为下一位老师用得上的经验？先说一个最小的改动。数学组可以把教研记录从“优点三条、建议两条”的评课表，改成一张“修订条”。修订条只写几件事：这一次改了什么，在什么条件下改的，依据是哪几份学生作业，哪一种做法试过不管用、为什么，适合什么样的班级和课时，下一次

什么时候回头再看。它不追求完整，只追求下一位老师拿起来就知道从哪里开始。

拿打折问题来说，一张好的修订条大概会写：说理环节放在第二课时比第一课时好，因为第一课时学生还分不清"标价"和"进价"，争论会卡在读题上；"两成跟谁走"如果只靠口头争，后排学生跟不上，画出两条线段以后才有人插得上话；有一次放在周测前一天上，学生心不在焉，效果明显变差。这三条里没有一条是宏大的教学理念，每一条都是一次失败或一次修改留下的条件，外婆那张卡片上缺的正是这种东西。

租过房子的人大概见过一种很体贴的交接便条。前任租客走时在冰箱上贴了一张纸："热水器要先开阳台总阀再按开关；冬天阳台水管会冻，晚上留一点小水流；楼下快递柜第三排的门是坏的，别放东西进去。"这张便条不长，却让新租客少走了一个冬天的弯路。修订条要做的就是这件事：把上一个人吃过的亏，变成下一个人的起点。

记录只是开始，回写还要被观察，第十六章说过，入库不算发生。在学校尺度上，至少可以看四个地方变了没有。信息变了没有：明年新入职、接七年级的老师，备课时第一个打开的是修订条，还是去年的获奖教案。判断变了没有：她是否在第一课时之前就预判到了"两成跟着谁"的错法。

工具变了没有：线段图有没有进入组里的共用学案。行动权限变了没有：周测有没有为说理环节留出能计分的位置，她敢不敢在进度表上把这一课时拉长十分钟。四个地方都没变，记录写得再整齐，也只是一份归了档的资料。

还要提防一种更隐蔽的情形：负向回写。说理课在某个基础较弱的班里试了两次都乱了套，教研会上有人说了一句"我们学校的学生不适合这种课"。这句话一旦写进学期总结，就比任何一张修订条都更有力量，因为它改的是全组的判断

和权限，以后谁再想试，都得先推翻这句结论。组织的记性和人的记性一样，会把一次有条件的失败记成永久的身份。所以修订条需要两样配套：每一条结论都标明它在什么条件下得出；被推翻的结论要留下明确的撤回记录，写清从哪一天起不再作数，而不是悄悄换一个新说法盖在上面。

从哪里开始动手，一位管学校的人会更关心这个。比较稳妥的做法，是先在一个数学单元里划出一块有边界的试行空间，比如七年级下学期的"一元一次不等式的应用"，在这个单元里同时动四样东西：周测里加一道必须写出理由的题，并给理由单独计分；集体备课的四十分钟里，拿出二十分钟只看学生的解释，不传达通知；修订条放进共享盘一个固定的位置，失败的那几次和成功的那几次放在一起；单元进度表上允许说理课超出半课时。四样一起动，规模却很小，代价算得清，出了问题也收得回来。

试行区既不能隔得太久，也不能推得太快。隔离太久，它就成了学校里的一块"特区"，经验出不去，别的老师只当它是别人家的事；还没成熟就要求全校统一照做，一套尚在摸索的做法会被印成新的规定，变成又一轮需要老师加班应付的负担。比较好的节奏，是第一轮在两个班里试，修订条交给另外两个班的老师，让他们带着自己学生的作业去检验；他们改过的版本，再成为下一轮的起点。这样传出去的不是一份"标准教案"，而是一份带着条件和修改痕迹的东西，接手的人知道哪些地方可以动、哪些地方动过以后出过事。

修订条本身也会变成一种标准，这一点要提前想到。统一的格式能让大家的记录接得上，就像统一了螺丝尺寸，不同人做的零件才拧得到一起；可格式一旦固定，它也规定了什么会被看见、什么会被漏掉。如果修订条里只有"改了什么"一栏，没有"什么没改成"一栏，失败就又一次失去了位置。格式要改的时候，也要像修订教学一样留下版本，写清哪一栏是新加的、旧记录怎样对照，而

不是某天早上大家发现共享盘里换了一张新表，旧的那一百多张从此谁也看不懂了。

第十八章讲过介生，它的要害是承接：差异能进入，后果能保留，局部结构能形成，结构还能被修订。一所学校进入知识的长期积累，大致就是在组织尺度上维持这种状态。差异能进入，是普通班的失败也有地方上传；后果能保留，是修订条和撤回记录都有版本；局部结构能形成，是共用学案里慢慢长出一套被检验过的环节；能被修订，是这套环节每年由接手的老师带着新一届学生的作业重新审一遍。这样的学校，三年换掉一半老师，新人也不必从零开始，他们从第二步开始，再把第三步留给后来的人。

◆ 五、热情照亮一间教室，制度把灯留下

这个判断有它用不上、甚至会错的地方，在这里集中说一次。一所规模很小、人员多年稳定的学校，师徒之间天天见面，"传帮带"本身就是一条好用的通道，硬加一套修订条，可能只是多一份表格。记录负担如果大到挤占备课和看作业的时间，它就从回写的工具变成了需要被修订的条件；制度化本身也会老化，一套修订流程运行几年，可能变成人人按时填写、没人再读的新形式。还有一种可能要认真对待：说理课退回原样，也许主要不是因为四样东西没动，而是它确实挤占了学生需要的基本练习，如果在评价和时间都调整之后，事实仍显示它稳定地拖累基础，那就该保留这个更简单的解释，把"回写丢失"的说法收缩。至于"同时改动这四样东西能让好经验留下来"，眼下是一个有待检验的组织判断，青石中学的故事只是推演，真要回答，得在真实学校里比较、记录，并且等上几届学生。

你做过学校管理，想必很清楚，一所学校最贵的东西往往不是新建的报告厅，而是一位老师在一类学生身上花了好几年才摸清的门道。这一章的底牌是：

一个人凭热情坚持的课堂可以照亮学生，可只要经验还只住在这个人身上，他一调走、一退休，灯就跟着熄了；只有当一次经验改动了课程、协作时间、资料 and 评价里的至少一样，并且这种改动能被下一位老师用上、能被后来的证据修订，学校才算真正记住了它。公开课那场雨下得再大，也要看它有没有渗进土里，改了下一季的墒情。

老陈后来做了一件小事。他把牛皮纸袋里打折问题那一沓拿出来，在每张错题背面贴一张便签，写上当年是怎样接住的。他说这是提前给自己写“交接清单”，写着写着却发现，有三张的接法他自己都不再同意了。学校的记性在慢慢变好，新的问题却已经站在门口：学生作业本旁边多了一位不睡觉、不下班的帮手，它记得每一道题，也能给每一道题写出完整答案。它是在帮学生走路，还是在替学生走路？下一章从一个晚上九点四十分的作业说起。

带走的话

经验只住在人身上，人走灯熄；改了制度并被后人用上，学校才算记住。

小 账

人物是真的吗？ 青石中学、周校长和老陈的牛皮纸袋都是构造的推演；打折题的150元和500/3元是核算过的。

“三年换一半”是统计吗？ 不是，是按九人组每年调走一两位粗推的示意。

哪一句还要检验？ “同时改动课程、协作时间、资料 and 评价能让经验留下”是待检验的组织判断；若评价和时间都调整后说理课仍稳定拖累基础，就该收缩“回写丢失”的说法。

修订条处处适用吗？ 不。小而稳定、天天传帮带的学校，加一套修订条可能只是多一份表格；记录负担过大时，它本身就要被修订。



20

第20章

当 AI 进入课堂：帮学生走路，还是替学生走路

这一章的问题

学生用AI助手做完了作业，第二天小测却不会，中间少了什么？

场景 晚上九点四十分，小宇把最后一道方程拍给学习助手，照抄出 $x=11$ ，第二天小测却写成 $x=-1$ 。

◆ 一、晚上九点四十分的作业

晚上九点四十分，小宇还剩最后一道方程没做： $3(x-2)=2x+5$ 。他把题拍下来，交给手机里的一个学习助手。不到两秒，屏幕上出现了一串干净的步骤：去括号得 $3x-6=2x+5$ ，移项得 $3x-2x=5+6$ ，所以 $x=11$ ，后面还附了一句“检验：左边 27，右边 27”。小宇照着抄进作业本，字比平时还工整一些。

第二天课上的五分钟小测，林老师出了一道几乎一样的题。小宇写出 $3x-6=2x+5$ 以后停了很久，最后写的是 $3x-2x=5-6$ ，得 $x=-1$ 。林老师把他的作业本和小测卷并排放在一起，一边是 11，一边是 -1 ，像同一个人的两张证件照，一张修过图，一张没有。她没有批评他，她想弄明白的是：昨晚那两秒钟里到底发生了什么，又有什么没有发生。

这件事放在今天的学校里一点也不稀奇。拍照搜题、对话式辅导、自动批改，正以比教材改版快得多的速度进入学生的书包和老师的备课。做过课程研发的人会先问一个朴素的问题：这些工具让学生学得更多了，还是只让作业交得更快了？两者在作业本上看起来一模一样，到了小测卷上才分开。

日常生活里有一个很熟悉的对照。一个人用导航开了三年车，上下班、周末去超市都很顺，从没迷过路。有一天手机没电，他发现自己说不出从家到单位要经过哪几个路口。导航没有骗他，它每一次都把他送到了目的地；只是这三年里，“认路”这件事一直由导航在做，他自己的那条路一次也没有走过。

先说清楚，这一章并不打算站到 AI 的对面去。数学课堂接纳工具已经很多年了：计算器进教室的时候有人担心孩子不会算了，几何画板进教室的时候有人担心孩子不会画图了。后来大家慢慢摸清，问题从来不在工具本身，而在于这一节课想让学生自己走的是哪一段路：练口算的课收起计算器，探究函数图像的课打开几何画板，各有各的道理。AI 和它们的不同在于，它能代走的那一段太长了，从读题、列式、求解到检验，一整条路它都走得动，所以“这节课留哪一段给学生”这个老问题，就得问得比以往更细。

老师这一侧也有同样的事。林老师备课时也用过类似的工具，输入“一元一次方程应用题，初一，二十道”，一分钟以后二十道题整整齐齐地出来了，比她自己编快得多。她翻了翻，发现其中三道的数字算出来是负的件数，还有两道的情境和班里学生的生活隔得很远。工具替她省掉了编题的时间，也顺手省掉了她编题时本来会有的那一步：想一想哪种情境能让这个班的学生先卡住、再自己走出来。

小宇昨晚的作业，就是一次被导航送到的目的地。这一章要问的，正是第三部一直在追的那件事换了一个新角色以后的样子：当一个不睡觉、不下班、什么题都会做的帮手进入学生的日常，学生自己的那段路还在不在，这一次的经验还能不能改变下一次。

◆ 二、被代走的那一段路

第一部反复讲过，学习过程里最要紧的是差异序列：一次尝试，一个落差，看清落差在哪里，再改一次。小宇在 $3x-2x=5-6$ 这一步出的错叫"移项不变号"，是初一方程单元里最常见的错误之一。如果是他自己做，他会得到 -1 ；如果这时有人问他一句"把 -6 从左边搬到右边，它变成了什么"，他也许会停下来，盯着那个负号想一会儿。这一停、一想、一改，就是他自己的差异序列里长出来的一环。

学习助手把这一环拿走了。它给出的步骤全对，可小宇在那条路上没有走过任何一步，他走的只是"看"和"抄"两步。用三方程的话说，作业本上显露出来的是一个正确答案，但这个显露不是小宇的差异序列造出来的，而是另一条序列造好以后贴到他本子上的。这就是本章要说的"D 被代走"：看起来效率很高，学生的那段路却被别人走完了，第二天在小测卷上什么也没有剩下。

健身房里有个现成的比方。有人请了一位私教，每次训练都由私教替他把杠铃举起来，一百次，次次标准，他在旁边点头记数。一个月后他的训练记录很漂亮，肌肉却一克也没长，因为肌肉只记得自己真正用过的力。学生的理解也是这样，它只从学生自己走过的落差里长出来。

不过，"帮"和"替"之间并不是一刀切开的两块，中间有一长串台阶。最少的帮是只问一句"你卡在哪一步"；再多一点，是把错误答案代回去，让学生自己看见两边不相等；再多一点，是指出"问题出在移项那一行"；再往上，是给出那一行的正确写法；最多的，才是从头到尾把整道题做完。哪一级合适，没有统一答案，要看学生此刻站在落差前面多久了。第三章说过，矛盾是引擎，可张力过大、拖得太久也会把人撕开；一个学生对着一道题坐了二十分钟毫无头绪，这时候再只问"你卡在哪里"，就像对一个掉进水里的人说"你先想想怎么游"。

家长教孩子拼积木时常常在这几级台阶上来回走。孩子拼不上的时候，有的家长一把拿过来三下两下拼好，有的只指着说明书上的第七步，有的问"这一块凸起朝上还是朝下"。三种做法都是在帮，留给孩子的那一段路却长短不一。好的帮手和好的家长一样，会先从最低的那级台阶开始，看一看，再决定要不要往上走一级；而一个只会站在最高一级的帮手，不管多耐心，都只会一种动作。

课堂里可以把这件事做成一条简单的规矩。林老师后来在班里试过一个办法：用学习助手之前，先把自己的草稿拍上去，哪怕只写了一行，助手只接"带着草稿来的问题"。这条规矩不复杂，它保证了助手每一次介入的时候，学生的那一段路已经先走了几步，而且这几步被留在了草稿上，老师第二天翻得到。用不用这条规矩，草稿纸上的痕迹会有明显差别：一种是一页干净的抄写，一种是带着划掉、改过、打了问号的路。

这里要分清一件事。第一章说过，差异序列不等于动力。小宇昨晚其实并不缺劲，他很愿意把作业做完，甚至因为步骤漂亮有一点小小的满足；可"愿意交作业"和"变化接成了一条路"是两回事。AI 很容易满足前一样，因为它让任务变轻了；后一样却需要学生自己在落差面前站一会儿。一个工具把所有落差都提前抹平，学生的劲头也许还在，只是再也没有地方用。

这件事还会绕回到你的第一个问题上。全书的第一张底牌说，动力是落差被接住以后长出的那一点"我会了"，再由它改写下一次的起点。小宇昨晚没有经历落差，也就没有长出任何"我会了"；第二天的小测却把那个落差原封不动地还给了他，而且是在全班都安静做题的五分钟里。他看着自己写出的 -1 和昨晚本子上的 11 ，最容易得出的结论不是"我在移项那里差一点"，而是"离了那个软件我就不会"。一次被代走的作业，留下的可能不是空白，而是一笔负向的回写：它悄悄改写了小宇对自己的看法，让下一次面对落差时，他更想先去拿手机。

这就像一个刚学做饭的人，每次都请隔壁大姐来替他掌勺，菜一直很好吃。直到某天大姐出门，他自己站到灶台前，心里冒出来的第一句话不是"盐该什么时候放"，而是"我果然不会做饭"。好吃的菜吃了一个月，留下的却是一句不利于下一次下厨的话。

那么好的帮手长什么样？不妨设想另一种助手。小宇拍了同一道题，它没有给步骤，而是说："你先做，卡在哪一步再告诉我。"小宇写出 $x=-1$ ，它回了一句："代回原式，左边是 -9 ，右边是 3 ，两边不相等。你看看是哪一步让两边分了家。"

它不替他找错，只把他领到能看见错误的地方；找错的那一段路，仍然是小宇自己的。这样的帮手慢得多，九点四十分的作业也许要拖到十点；可第二天的小测上，那个 -6 搬家时记得变号的可能性要大得多。

所以判断一个 AI 帮手，第一道问题不是它答得对不对、快不快，而是它在哪里接住了学生的落差，又在哪里替学生把落差吞掉了。母本有一句很朴素的提醒：会回答不等于会承接。承接的意思是，学生的尝试被看见、被回应，回应以后路还由学生自己往下走。一个只会回答的系统可以是一部很好的百科全书，却未必是一位好老师。

◆ 三、它记住了，但记错了

比"答题"更深的一层是"记忆"。越来越多的学习系统会给每个学生建一份长期档案：做过哪些题，错在哪里，下一次推荐什么练习。这本来是好事，第十六章说过，一次经验能改变后来可用的信息和判断，才算回写；一个记得住学生的系统，正好有机会让回写发生。可回写有正向的，也有负向的。

设想小宇用的那个系统看了他那段时间的几次错误，在档案里写下一句："该生去括号能力薄弱。"这个判断是错的。小宇的错误答案是 -1 ，如果他

真错在去括号，把 $3(x-2)$ 写成 $3x-2$ ，得到的会是 $x=7$ ；错误答案本身就在告诉人他摔在哪一步。可系统没有这样核对，它把"方程题做错"归进了自己最常用的那个标签。接下来它每天给小宇推五道去括号练习，去括号他其实会，这些题都做对了，系统便记下"练习有效，继续巩固"；真正卡住他的移项，反倒一次也没被练到。

这就是一台越记越自信的误解机器。它的错误不是一次性的，它会自己去找证据：错误标签决定推什么题，推的题又产出与标签一致的记录，记录再回过头加固标签。第十六章里"粗心"进了学生档案的那种负向回写，到了智能系统这里，因为它天天在推荐、从不下班，速度和范围都放大了。更麻烦的是，小宇自己也可能开始相信"我大概就是去括号不行"，标签从系统的数据库一路走进了他的自我界。

外卖软件就有类似的脾气。有人替朋友点过一次特辣的水煮鱼，从此首页天天给他推辣菜；他点得越少，软件越以为他只是最近太忙，推得越起劲。好在推错一顿饭代价不大，把一个孩子的困难记错一个学期，代价就大了。

所以一个长期记着学生的系统，至少要做到几件事。它要把观察、猜测和结论分开存：小宇某天把 -6 搬到右边没变号，这是观察；"他移项有困难"是猜测；"他需要专门练移项"是经过几次核对以后才可以写下的结论。每一条判断要带上适用范围和复查时间，而不是永久有效。最要紧的是它要被改正：老师或学生指出一条判断错了，系统不仅删掉这一句，还要找出依赖这一句的推荐和记录，一并降级或撤回，并留下一条"从哪天起不再作数"的痕迹。只会回一句"好的，已记住"的系统，道歉只是又多生成了一段文字，旧的错误还在后台勤勤恳恳地上班。

改正有没有真的发生，也要像第十六章说的那样去观察，而不是听系统宣布。最直接的办法，是看改正以后的一两周里，推给小宇的练习有没有从去括号

换成移项，那些"练习有效"的旧记录有没有被标上"依据已撤回"。还有一处常被忘掉：标签已经走进了小宇自己的心里，系统里删掉一行字，他心里的那句"我去括号不行"并不会跟着消失。林老师如果当面告诉他"你那天错的不是去括号，是-6搬家忘了变号，这个好改"，这一句话改动的，可能比数据库里的十次更新还多。

忘记也需要理由。一个系统如果永远保存一切，它对小宇的印象就会被初一上学期的几次错误一直拖着；可如果它随手删掉旧记录，又会连"曾经判断错过"这件事一起丢掉，下一次还会犯同样的错。比较稳妥的做法，是让旧判断失去当前的用途，却保留它曾经存在、何时被撤回、为什么被撤回的痕迹。就像一份病历，旧诊断不会从本子上撕掉，但医生会在后面写上"已排除"，下一位医生看得见，也不会再照着它开药。

◆ 四、三个助手都点头，算几票

学校买AI工具，常常不是买一个，而是一套：出题助手、批改助手、学情分析助手。期中质量分析会上，三份报告摆在一起，都说七年级(2)班"去括号薄弱"，看起来证据确凿。可如果这三个助手用的是同一个底层模型，读的是同一份作业数据，那么三份报告一起点头，大致只算一票。它们像三位同学抄了同一本参考书，答案一致，并不说明参考书没印错。

生活里也是这个道理。家族群里三位亲戚先后转来同一条养生消息，人很容易觉得"大家都这么说"；查一查才发现，三条都来自同一个公众号。消息被转了三次，证据却只有一份。判断证据是否独立，要看它们各自从哪里来，而不是看它们出现了几次。

在这个场景里，真正独立的证据在别处：林老师翻小宇草稿纸时看到的那个没变号的-6，老陈从全年级错题里归出来的错误类型，小宇自己说出的那句"我

以为搬过去还是减”。这些材料来自不同的人、不同的观察方式，它们和 AI 的报告一致时，判断才算站稳；不一致时，恰恰是最值得停下来看的地方。

同样的道理也适用于一个助手内部的“多角度分析”。有的系统会让同一个模型分别从结果、过程和条件三个角度写三段分析，再汇总成一份报告，看上去考虑得很周全。换角度确实可能照出不同的遗漏，比如只看结果的分析忽略了小宇的草稿，只看过程的分析又忽略了周测规则；可三段话出自同一个底座，可能共享同一个错误前提，比如都默认“错题就是某项技能薄弱”。所以三段分析可以当作三个提示，提醒老师去看三个地方，却不该当作三份互相印证的证据，真正的印证还得回到草稿纸和学生自己的话上。

这又牵出一个治理问题：哪些事可以让系统自动做，哪些事必须有人批准。帮老师整理一份公开教案，系统可以放手去做；把“去括号薄弱”写进学生的长期档案、影响他以后被分到哪个练习组，就需要老师确认，最好还让学生和家长看得见、提得出异议。改一条备课备注和改变一个孩子的机会，后果不在一个量级，权限也不该在一个量级。学校选工具时，与其先问“它能做多少事”，不如先问“它做错了，我们怎样知道，又怎样撤回”。

一位管过学校的人大概还会想到上线的节奏。新工具进校，不妨先让它“只说不写”：它可以提出建议、生成练习、给出对学生的判断，但这些判断只出现在老师的屏幕上，不进入任何长期档案。运行一段时间，老师们对照自己的观察，看它说对了几回、错在哪类学生身上，再决定把哪些低风险的事交给它自动做，比如整理公开资料、生成练习的初稿。至于改动学生档案和分组这类事，最好始终保留人的批准，并且留着随时撤回的路。这样的节奏看起来慢，却比一上来全面铺开、半年后再花一学期去清理错误标签要省事得多。

这件事还和上一章接上了头。学校如果让 AI 去整理教研记录，它很可能把一张修订条压缩成一句漂亮的摘要：“说理环节有助于学生理解利润问题。”那些

真正值钱的条件，放在第二课时而不是第一课时、要画线段图、别放在周测前一天，最容易在摘要里被当成细枝末节删掉。上一章费力留下的条件，经过一次"智能整理"又回到了外婆的卡片。所以对一个帮学校记事的系统，除了问它记住了什么，还要问它在压缩的时候丢掉了什么。

◆ 五、帮手好不好，看它给学生留下了什么

这一章的判断也有边界，在这里一并交代。被代走的路未必都可惜：小宇查一个英文单词、用计算器核对一个大数乘法，那段路本来就不是这节课要他走的，交给工具反而省下力气走更要紧的路，判断代走是否有害，要看被代走的那一段是不是这次学习的目标。一个晚上要是没有任何人接，小宇可能干脆把那道题空着，一个只给答案的助手，也许比没人接还好一点。至于"引导式助手能让延迟测验更好"，眼下只是合理的推测，需要在相同题目、相同时间的条件下比较两种用法，并且看撤掉工具以后学生还剩下什么；如果比较显示两种用法在延迟测验上没有差别，"D 被代走"这个解释就要收缩到更窄的范围。本章说的系统都是设想中的样子，既不是对某个具体产品的评价，也不是关于模型内部怎样运作的结论。

你在数学新教育里关心的，正是学生自己的那一段路，所以这一章的底牌可以说得很直接：判断一个 AI 帮手好不好，先别看它答得多快多准，要看它留下了学生自己的差异序列，还是把它吃掉了；再看它记住的东西能不能被检查、被改正，错的时候会不会越记越牢；最后看几个同源的助手一起点头时，学校有没有清醒地把它们当成一票。好帮手像一位耐心的骑车教练，手扶在后座上，孩子蹬稳了就慢慢松开；坏帮手看上去更热情，它干脆把孩子抱上车，自己替他蹬。

这些话说得再清楚，也还都是"应该如何"。在一所真实的学校里，它们对不对要靠研究来回答：引导式助手是否真的让学生在延迟测验里表现更好，倒逼型

入口是否真的让学生在方程单元里更持久。下一章进入第四部，我们来学一件研究者最该会、也最容易偷懒的事：在开学之前，先写下“怎样算我错了”。

带走的话

好帮手留下学生自己的差异序列，坏帮手替学生把它吃掉。

小 账

助手是真实产品吗？ 不是。文中的学习助手都是设想中的样子，不评价任何具体产品，也不是关于模型内部运作的结论。

代走都可惜吗？ 不。被代走的若不是这节课要学的那段，如查单词、核对大数乘法，交给工具反而省力；没人接时，只给答案也许比空着好。

哪一句还要检验？ “引导式助手能让延迟测验更好”只是合理推测：若在相同题目和时间下两种用法的延迟测验没有差别，“D被代走”的解释就要收缩到更窄的范围。

算式核算过吗？ 核算过： $3(x-2)=2x+5$ 的解是11，移项不变号会得-1，若真错在去括号会得7。





第 四 部

把设想变成可以检验的研究

导 语

这一部四章是写给作为研究者的你的。前面二十章提出了不少判断，它们有的是概念规定，有的是等着事实裁决的经验判断。这一部要做的，是把后一种写成可以被推翻的研究。

第21章示范怎样把一个教育设想写成可证伪的研究，第22章用一个小模型把教研组的争论说清楚，第23章让 SDE 和系统科学、因果研究以及其他教育理论坐在同一张桌上，第24章给出一份针对两个问题、可以在一所学校一个年级第一年就开始做的研究组合。

这一部的口头禅只有一句：写得出"怎样算我错了"的设想，才配叫研究。

21

第21章

把一个教育设想写成可证伪的研究

这一章的问题

“学生更有劲了”这样真诚的观察，怎样才能变成一项研究？

场景 十二月教研会上，林老师讲文化衫订购题让全班来了劲，老陈一句“单元第一周谁都有劲”戳中要害。

◆ 一、“学生更有劲了”还不是研究

十二月的一次教研会上，林老师讲了她在方程单元里的一个尝试。第八章写过她给小宇试倒逼型入口的那两周；这一次她把同一个想法放到了整个七年级(2)班。单元第一课，她不先讲“什么是方程”，而是拿出一件真事：班里要订文化衫，甲店每件25元、另收制版费60元，乙店每件28元、不收制版费，到底选哪家？学生先猜，再一件一件地算，算到后来发现，要找“两家一样贵”的那个件数，最省事的办法是设一个未知数，列出 $25x+60=28x$ ，解得 $x=20$ ；全班四十六人，甲店要1210元，乙店要1288元，选甲店。

她说，这个单元学生明显“更有劲了”，举手的人多了，连小宇都在草稿纸上的一件一件算到了第十件。老陈听完，不紧不慢地说了一句：“单元第一周，谁都有劲。新学期第一周，我也有劲。”大家笑了，林老师也笑了，可这句冷笑话戳到了要害。“更有劲了”是一个真诚的观察，却还不是一个研究结论：它没说跟谁比，没说过了多久还有劲，也没说如果劲头是从别处来的，我们怎样分得清。

日常生活里有个一模一样的难题。一位妈妈给上小学的孩子换了早餐，从白粥咸菜换成鸡蛋、牛奶加全麦面包，一周后老师说孩子上午不犯困了。是早餐的

功劳吗？也许是，可那一周孩子也开始早睡半小时，天气刚好转凉，老师又恰巧把他调到了窗边。妈妈要是真想知道早餐管不管用，就得在换早餐之前想好：看哪几天，跟什么比，出现什么情况就承认“不是早餐的事”。

听到“研究”两个字，很多一线老师的第一反应是表格：开题报告、中期检查、结题材料，一摞一摞，填完以后课还是原来那样上。这一章说的研究不是那一种。它要的东西很少，少到可以写在一页纸上；可这一页纸上的每一行，都要在开始之前写好，而且写得具体到别人能拿着它来检查你。这比填一摞表格难，因为表格可以事后补，这一页纸事后补就没有用了。

第十五章说过，一个人系统思考成熟的标志，是知道自己的解释在什么情况下会错。这一章要把这句话变成一门手艺。你同时站在两个位置上，既在课堂里推新教育，又以研究者的眼光看课堂，这门手艺对你也许比对任何人都更实际：它决定一个好想法是停在一次感人的分享里，还是变成别人接得过去、检查得了、推翻得动的知识。

◆ 二、先给这句话办一张身份证

动手设计之前，要先弄清“倒逼型入口能提升持续投入”是一句什么样的话。一句话要先领对自己的身份：它是概念规定、哲学解释、经验判断，还是实践建议。“倒逼型是从差异序列起手、再去找所缺条件的入口”，这是概念规定，用不着实验去证；“动力是张力被接住以后的回写”，这是一种解释，它组织我们看问题的方式；“在青石中学七年级的方程单元里，倒逼型入口能让学生到单元后半段仍更愿意主动回到题目上”，这才是经验判断，可以交给事实裁决。研究只裁决最后这一种，把它和前两种搅在一起，赢了会说多，输了会赖账。

身份证办好了，再把这句话拆成几个零件。第一个零件是观察单位。入口是整班一起换的，不是一个一个学生分别换的，所以分配的单位是班，而不是人。青石中学七年级有六个班，这项研究能动用的是其中四个，每班大约四十五人，看上去有一百八十名学生；可同一个班的学生共用一位老师、一套课堂规矩、一

群同桌，彼此并不独立。如果按示意值取班内相关0.15，设计效应是 $1+(45-1) \times 0.15=7.6$ ，一百八十人大致只相当于二十四四个独立观察。这个数字提醒我们，四个班的研究最适合回答"这件事做得起来吗、测量靠得住吗"，还撑不起"倒逼型入口普遍有效"这么大的话。

第二个零件是比较对象。对照班应当是一种合理的常规教法，而不是一个被故意削弱的课堂：老师先讲方程的概念和解法，再配应用题，课时、练习量、讲评都和实验班相当。第三个零件是指标。"持续投入"只数举手是不够的，举手多可能只是老师点名多了，而一个安静地在草稿纸上改了三遍的学生也在投入。可以把它落到几件看得见的事上：单元后半段每周发一道选做题，记下谁自愿做、做了几稿；订正时有没有写出"错在哪一步、为什么"；单元结束两周后的延迟任务里，面对一道换了情境的题，是继续尝试还是空着。

指标定下来以后，还得看这把尺子本身稳不稳。"订正时写出了错在哪一步"听起来清楚，真到两位老师手里，一位可能把"我算错了"也算作写出了原因，另一位只认"-6 移过去没变号"这种指名道姓的说法。所以要先拿十几份样例，两位老师各自打分，再坐下来对分歧，把规则改到两人基本一致为止；正式评分时，最好让评分的人不知道这份作业来自哪个班。还要给不爱写字的学生留一条路，允许他口头说、画图说，只要判断的标准公开、一致。如果连这一步都过不去，就先别急着比较哪个班更好，尺子没校准，量出来的只是尺子的脾气。

买过菜的人都知道，摊主的秤要是没校准，再便宜的价钱也算不清。研究也一样，测量这一关往往比比较那一关更花时间，也更值得花时间。

第四个零件是时间窗口。新鲜感的寿命通常不长，所以单元要切开来看：第一、二周是入口刚换的时候，第五、六周是新鲜劲过去以后，单元结束两周再做一次延迟任务。最后一个零件最容易被忽略：显露、差异序列和特征纠缠要各有各的观察材料。学生能不能说清"x 在这里代表什么"，看的是显露；草稿上的修改痕迹，看的是差异序列；课堂上谁有资格提出不同算法、订正有没有被老师回

应，看的是特征纠缠。如果把同一份单元测验总分分别填进三个格子，三维看起来互相支持，其实只是一个数字在照三面镜子。

这也是第二章那句话该落地的地方：F、G、H 是占位记号，要用到这项研究里，先得写清时间顺序。比如把一周当作一轮， $S(t+1)=F(D(t),E(t))$ 说的是本周的尝试和课堂规则怎样关系到下周的理解； $E(t+1)=H(E(t),S(t+1),D(t+1))$ 则提醒我们，下周的条件是在本周条件上改出来的，而不是每周一从空白开始。写出这两个式子并没有得出任何结论，它们只是告诉我们每周该记什么、按什么顺序记，至于 F 和 H 里面装着什么，要等数据来填。

◆ 三、给竞争对手留好座位

一项公平的研究，要先把最有力的对手请到桌边。第一位对手是新鲜感，也就是老陈那句冷笑话。它和"倒逼型入口有用"给出的预测并不一样：如果只是新鲜，实验班的优势应当集中在第一、二周，到第五、六周基本消失；如果入口真的改变了学生和方程之间的关系，优势在后半段应当还看得见，在延迟任务里也该留下痕迹。两种说法在时间上分了岔，研究就有了裁决的余地。

还有一位容易被漏掉对手，就是题目本身。文化衫这道题贴近学生生活，数字也友好，学生更投入，也许只是因为这道题好，和"先给问题、后讲方法"的次序无关。区分的办法并不复杂：对照班也用这道文化衫题，只是把它放在讲完方程解法以后，当作例题来讲。这样两边的材料一样，差别只剩下次序，一边是问题逼出方法，一边是方法再去解问题。倒逼型说的本来就是起手的次序，比较的也就该是次序；如果连材料一起换了，最后有了差别，也分不清该谢谁。

第二位对手是老师投入。林老师为这个入口多备了课、多找学生谈了话，学生更投入，也许只是因为老师更投入。办法是把投入记下来：每个班的备课时间、课后个别辅导的人次，尽量让两边相当；做不到相当，至少在报告里摆出来，让读者自己掂量。若条件允许，让同一位老师在两个班分别用两种入口，可

以去掉一部分老师之间的差异，可又要提防她把实验班的做法不知不觉带进对照班。没有十全十美的安排，重要的是把每一种安排留下的漏洞写在明处。

第三位对手是同伴效应。一个班里只要有三五个特别活跃的学生被新问题点燃，全班的举手数就会被拉上去，其余四十来个人可能并没有变。所以除了看全班平均，还要看投入是集中在少数人身上，还是铺开了；尤其要看小宇这样原本已经不举手的学生，在第五、六周的选做题上有没有出现。研究不必为小宇一个人设计，可一项关于"持续投入"的研究，如果对最需要它的那几个学生什么也说不出，它的价值就要打折扣。

对手请齐了，还有一类失败要和理论失败分开，那就是实施失败。如果林老师在第三周因为期末复习把入口活动压成了五分钟，或者对照班临时换了代课老师，结果不好，说明的是这一次没有按计划做成，而不是倒逼型入口被否定了。两种失败要事先写好怎么区分，比如规定每周记下入口活动实际用了多少分钟，低于事先定好的下限就标为"实施不足"。否则结果一出来，好的归功于理论，坏的归咎于执行，研究就成了一盘怎么下都赢的棋。

最后一位对手藏在理论自己身上。三方程有三个字母，一个不小心，它就能解释一切：结果好，说"差异序列被接住了"；结果不好，说"那是特征纠缠还没到位"；结果一半好一半不好，说"显露还在形成中"。这样的解释永远不会错，也就永远什么都没说。街口算命的先生也是这个路数，他说一个人命里缺水，这人后来顺利了，是因为补上了水；不顺利，是水还没补够。办法只有一个：在研究开始前就写明，入口预计先改变哪一维、改变在哪个窗口里显露、哪一种结果出现时，三方程的这条解释就算输了，而不是等结果出来再去挑一个字母来认领。

给对手留座位这件事，修车师傅大多懂。车跑起来有异响，换了一个轮胎以后响声没了，有经验的师傅不会马上拍板说"就是轮胎的事"。他会想起自己同时还紧了两颗螺丝、加了点润滑油，于是找一段同样的路，只动一样东西，再试一次。

◆ 四、"怎样算我错了"要在开学前写好

零件和对手都安排好了，还差最后一步，也是最难做到的一步：在看到任何结果之前，把判断规则写下来，放到一个不会帮你改口的地方，比如教研组的公共文件夹，或者一张注明日期的预注册卡。炒股的人都听过一条老话：买入之前先写好跌到多少就卖。没写的人，跌了说"长期持有"，涨了说"眼光独到"，怎么都是对的。人在看到数据以后，总能找到一个让自己显得一直都对的角度，研究开始前写下的那几行字，就是给将来的自己提前设好的路障。

写下来的内容至少有这几样。主要指标只选一个，比如"第五、六周选做题的自愿完成率"，举手、订正、延迟任务都标为辅助指标。分析方式事先定好，包括按班分析，以及缺席、中途转学的学生怎样处理。然后是最要紧的几行：如果第五、六周实验班的自愿完成率没有比对照班高出事先约定的幅度，比如十个百分点，就承认在这个单元里入口没有带来持续投入上的差别；如果优势在前两周很大、到第五、六周缩到几乎为零，比如前两周差二十二个百分点、后两周只差两个，就承认这主要是新鲜感；如果实验班的老师投入明显更多，就把结论降为"入口加额外投入"的整体效果，不单独记在入口名下。

十个百分点这条线也要说清是怎么来的，而不是拍脑袋定的。一个四十五人的班，十个百分点大约是四五个学生，也就是说，到了单元后半段，实验班要比对照班多出四五个人愿意自己回到选做题上。这个幅度值不值得追求，要和代价一起掂量：如果为了这四五个人，林老师每周要多花三个晚上备课，那么即使差别真实存在，它也未必是一项能推广的改进。所以写判断规则时，除了写"差多少算有差别"，还要顺手写下"花多少代价算划得来"，把老师的工作量当作一项正式的辅助结果记下来。

缺失的资料也要事先想好怎么处理。单元进行中总有学生请病假、转学，或者某一周的选做题收不齐。如果只保留数据最完整的学生，留下来的往往是最认真的那一批，结果会被悄悄抬高；实验班要是恰好有几个学生因为跟不上而不交选做题，把他们剔除掉，优势就是人为制造出来的。所以要写明：缺了的人和缺的

原因都要报告，主要分析按事先定好的办法处理，再用另一种处理方式核对一遍，看结论会不会跟着变。

还有一件事关乎三方程本身。研究不只要和"什么也没做"比，还要和更简单的解释比。比如一个简单的说法是：单元后半段的投入，主要由前测成绩和老师关注多少决定，入口不入口无所谓。三方程的说法要多出一层，认为入口改变了学生的差异序列，而这一轮的修改又回写到下一轮的条件里。如果加上这一层以后，并不能比简单说法多预测出什么，比如预测不出哪些学生会在第五、六周回来、哪些不会，那么三方程在这里只是把同一件事换了一种说法，诚实的做法是承认这一点。

预注册并不禁止意外发现。研究进行到一半，林老师也许会注意到，实验班里某一类学生在选做题上回来得特别多。这是一条有意思的线索，可以如实报告，也可以变成下一轮研究的问题，只是别在结果出来以后，把它悄悄改写成"这项研究本来就是要看这个"。探索和检验分开写，前者负责多看见，后者负责少自欺。还要写上停止规则：如果入口活动让一部分学生持续受挫，或者老师的工作量明显超出承诺，就暂停调整，这和理论的对错是两回事；学生参不参加研究记录，也不影响他得到正常的教学和辅导。

最后，还要预先想好每一种结果意味着什么。结果支持，只说明在青石中学七年级的方程单元里，这个入口值得继续，下一步是换老师、换单元、换学校再试，而不是宣布三方程得到了证明。结果不支持，也要分清是哪一层出了问题：测量不准，样本太小，入口在这个单元不合适，还是"张力被接住才有持续动力"这个更上层的解释需要修改。为了防止研究者自己太热情，还可以做一个分析层面的负控制，比如拿一项和入口无关的指标，像课间去小卖部的次数，看看分析方法会不会在那里也"发现"差异；如果连它都显出差别，该先怀疑的是尺子，而不是学生。

研究对学生和家长也要说清楚。开学前给家长的一封信里，写明这个单元在比较两种起手方式，记录的是选做题、订正和草稿，记录只用于改进教学，分享

出去的材料会去掉姓名，不愿意参加记录的学生照常上课、照常得到辅导。这几句话不只是礼貌，它们本身也是研究条件的一部分：学生如果觉得选做题会被“拿去研究”，回不回来做，就不全是对方程的兴趣了。

研究结束时，还有一件事最容易被省掉：拿着开学前那一页纸，逐行对照，写清楚哪些判断得到了支持，哪些要收缩，哪些仍然悬而未决。这份对照不该只躺在结题材料里，它应当变成第十九章说的那种修订条，放进数学组的共享盘，让下一年接方程单元的老师从这里开始。新冒出来的猜想，比如某一类学生回来得特别多，也写进下一轮的预注册，再交给新的资料去检验。研究就这样也有了自己的记性：它记得自己当初怎样判断，也允许自己被改正。

◆ 五、写得出“怎样算错”，才配叫研究

这个判断也有边界，集中说在这里。预注册适合有明确比较的检验性研究；在一个全新的领域刚开始摸索时，开放的观察、记录和描述同样有价值，硬套一套“怎样算错”，反而会过早地把视线收窄。四个班的研究，设计得再细，也只是可行性研究，它能检验测量是否可靠、安排是否做得起来，给不出普遍的因果判断。学校里的很多变化，换老师、换教材、碰上校舍维修，研究者控制不了，只能如实记下。还有一种情况要坦然接受：如果更简单的解释，比如“任何新入口都会带来一阵新鲜感，过后都一样”，已经能说明全部结果，就保留这个简单的解释，不必为了三方程硬多出一层。本章林老师的研究是一个构造出来的设计范例，书里没有报告任何已经发生的研究结果。

这一章的底牌是：一个教育设想，写得出“怎样算我错了”，才配叫研究；写不出来，它也许是一种很好的信念、一条值得尝试的实践建议，却还没有走进可以由事实裁决的地方。提前写下“怎样算错”并不是对自己的想法没信心，恰恰相反，只有敢把失败的样子先画出来的人，才真正知道自己在主张什么。林老师那句“学生更有劲了”，经过这一番拆解，变成了一个有观察单位、有对手、有窗口、有底线的问题，它终于可以被回答了。

不过，教研会上的争论还没完。老陈和林老师又为另一件事较上了劲：让学生带着上一次的修订理由去做下一道题，到底有没有用？两个人各举了一堆例子，谁也说服不了谁。下一章，我们用一个小模型把这场争论摆到桌面上，看看他们的分歧究竟落在哪个数上。

带走的话

一个教育设想，写得出“怎样算我错了”，才配叫研究。

小 账

这项研究做过吗？ 没有。林老师的研究是构造的设计范例，书里没有报告任何已发生的研究结果。

什么结果会认输？ 事先写明：第五、六周自愿完成率没比对照班高出约定幅度，就承认入口没带来差别；优势只在前两周，就归给新鲜感。

设计效应怎么来的？ 是粗算：按示意的班内相关0.15、每班45人，设计效应约7.6，180人大致只相当于24个独立观察；十个百分点的门槛也是举例。

四个班说明普遍有效吗？ 不能。它只是可行性研究，检验测量靠不靠得住、安排做不做得起来，给不出普遍的因果判断。



22

第22章

一个小模型：把教研组的争论说清楚

这一章的问题

两位老师为“理由卡有没有用”争执不下，分歧到底落在哪里？

场景 周四教研会上，林老师介绍理由卡，老陈拧上保温杯盖说：“有那工夫，不如多做两道。”

◆ 一、“有那工夫，不如多做两道”

青石中学七年级的教研会，一般在周四下午第三节开。那天讨论的是一元一次方程单元的作业。林老师这学期在(2)班试了一样东西：每次订正之后，学生要在一张小卡片上写两句话，一句写“上次错在哪一步”，一句写“我为什么这样改”。下一次做同类题之前，先把卡片拿出来看一眼，再动笔。她管这张卡叫“理由卡”。第十五章寒假前教研会上汇报的那次“错题回看”，用的就是这张卡；这里要说的，是试行途中教研组里的那场争论。

老陈听完，把保温杯盖拧上，说了一句很有他风格的话：“有那工夫，不如多做两道。”他的理由也不是胡搅蛮缠。初二的孩子，去括号错、移项忘变号，靠的是手熟；写卡片要花时间，一节课就那么四十分钟，挤掉的是练习量。他还补了一刀：“卡片写得最漂亮的，往往本来就会。”

林老师也有她的例子。她说有几个学生，以前同一类错误能错五六次，现在拿着卡片，错到第三次就停了。老陈说，那是因为单元快结束了，题做多了自然就好。林老师说，可是同样做了那么多题的(3)班，这几个错还在。老陈说，(3)

班是另一个老师带的，不好比。话说到这里，会议室里的人都知道，这场争论再进行半小时，结论还是"各有道理"，然后大家去食堂。

这种场面，做过教研的人大概都不陌生。两个人都有经验，都举得出例子，但他们的例子各自只照亮自己那一边。争论卡住的地方，不在谁更懂学生，而在双方都没有把自己心里的那套"因为所以"写出来。老陈心里其实有一个模型：解释的清晰来自练习量。林老师心里也有一个模型：上一次的修订理由，要和这一次的修订接上，才能让解释变清楚。两个模型都住在脑子里，彼此看不见，也就没法比。

家里做菜的人都知道一种争吵。汤咸了，一个说是盐放多了，一个说是水熬干了。两个人都尝过汤，都很有把握，可要是谁都没记下放了几勺盐、加了几碗水，这场官司永远打不完。一张用料表不会让汤变好喝，但它会让"咸"这件事有地方可查。这一章要做的，就是给这场教研争论写一张用料表：一个小模型。

◆ 二、三个量，三把尺子

先说清楚要量什么。我们把一个"轮次"定为一周的方程练习：周一到周三学新内容，周四做一组同类题，周五订正，下一周开始前整理可以调用的材料。轮次是学习活动的单位，不是钟表上的七天；如果某周因为运动会只做了一半，这一轮就要单独标注。第十三章说过，四十分钟不只是一种时间，这里的"一轮"也是一样。

模型里用三个量。 s_t 表示第 t 轮学生在新题上解释的清晰程度，比如能不能说清"两边同时减去 3"为什么不改变等式成立的条件。 d_t 表示第 t 轮订正对证据的承接程度，看的是学生是否真的利用了上一次的错误来改变比较和推理，而不是看他划掉了几行字。 e_t 表示第 t 轮结束时学生手边可供调用的支持条件，比如有没有一条能找到、看得懂、和下一题相关、写明了依据的修订记录。三个量都压到 0 到 1 之间。

这三个小写字母要和大写的 S、D、E 分清。s_t 只是"解释清晰度"这一个窗口里看到的显露，d_t 只是订正这一段差异序列的一个切面，e_t 只是特征纠缠里"可调用的修订材料"这一小股。第二章讲过，三条方程里的 F、G、H 是占位记号，不是公式；要把它们变成可以算的东西，就得交代观察单位、变量、时间顺序和参数。这一章做的正是这件事，所以它是三条方程在一个领域里的一次具体化，不是三条方程本身。

尺子也要讲究。s 和 d 最容易互相渗透：一个解释写得清楚的学生，订正往往也写得整齐，评分的人一看顺眼，两项分都高，最后模型"发现"二者高度相关，其实只是同一印象打了两次分。办法是分开打分：一位老师只看新题上的解释，按"条件说清、步骤有理由、边界说出"三项评；另一位老师只看订正记录，按"是否引用了上次的具体错误、是否改变了做法"编码。两人互不看对方的分，再抽一部分材料互评，检查一致程度。e 的打分也有讲究：一张卡片夹在书里找不到，或者找得到却写着"下次细心"这种看不懂用处的话，都不算同等的支持。能拿到和能读懂是互相限定的，把它们压成一个数是简化，原始卡片要留着，随时回头查这个数漏掉了什么。

还有测量误差。称体重的人都知道，早上和晚上能差一斤，这一斤不是长胖了，是秤和人都在晃。学生的理解也一样，一道题的分数只是一个带误差的窗口。可以写成 $y_s(t) = s_t + v_s(t)$ ：观测到的分数等于真实的清晰度加上一个误差项。误差有多大，要从同一批材料的重复评分里估出来，不能事后挑一个刚好能让结论成立的数。尺子的零点和满分也要先写定，要是第三轮换了更难的题，量尺就变了，分数下降未必是学生退步。

如果觉得给每个学生打一个两位小数太自信，也可以先用几个台阶来记：解释还没显露、刚刚冒头、暂时稳定、已经僵化（比如只会背"移项要变号"，换个场合就套错）。台阶好讲，但台阶的边界划在哪里难免有点武断，所以要换两三种合理的划法，看结论变不变。一个学生只是因为分数从 0.49 跨到 0.51，就被

宣布"从初显进入稳定", 那该先检查的是尺子, 不是给他发证书。量身高的时候, 孩子踮一踮脚就"长了"一厘米, 家长通常会笑, 研究者也该有同样的警觉。

◆ 三、把两位老师的话写成两组参数

现在写更新规则。每一轮按"先解释、再订正、后整理材料"的次序更新, 三式依次是 $s_{t+1}=s_t+(1-s_t)(c+r\cdot d_t\cdot e_t)$, $d_{t+1}=0.5d_t+0.5s_{t+1}e_t$, $e_{t+1}=(1-\lambda)e_t+\lambda(s_{t+1}+d_{t+1})/2$ 。次序本身是一个承诺: 先用上一轮的订正和材料预测这一轮的解释, 再用这一轮的解释预测订正, 最后由两者改写材料。换一种课堂安排, 次序就要跟着换。

第一式说, 下一轮的解释清晰度, 在原有基础上, 向满分方向前进一段。前进多少, 由两部分决定: c 是常规上课加练习带来的进步, $r\cdot d_t\cdot e_t$ 是"上一轮的订正承接"与"手边可调用的材料"共同带来的进步。乘以 $(1-s_t)$ 的意思是越接近满分越难再涨, 就像一壶快满的水, 倒得再猛也只剩那一点空。乘积 $d_t\cdot e_t$ 表达的是一个具体的候选想法: 卡片在手但订正时没真用过, 或者真订正了却没留下能找到的记录, 这一项都会变小。

这个乘积不是随手写的, 它是本书第一张底牌在一个小角落里的形状。第三章说, 张力要被接住, 接住了还要留下; 乘积 $d\cdot e$ 把"接住"和"留下"捆在一起, 二者缺一, 这一项就塌下去。一根晾衣绳要两头都系上才能晾衣服, 只系一头, 绳子再结实也只能拖在地上。把它写成乘积, 等于把一个理论上的说法押成了一个会出错的数学形状, 后面会看到, 这个形状正好给了事实一个反驳它的机会。

第二式说, 订正承接一半看惯性, 一半看这一轮的解释清晰度和手边材料的配合。第三式就是第三条方程在这里的样子: 新的支持条件由旧条件保留一部分, 再加上本轮解释和订正留下的东西。 λ 是回写强度, $\lambda=0$ 表示这一轮做了什么都不改写下一轮的材料。第二章强调过, 第三条方程实例化时要把旧 E 和时间放回去, 这里的 $(1-\lambda)e_t$ 就是那个"旧 E "。

接着设定比较。(2)班用理由卡，开头手边材料较好，取 $e_0=0.6$ ；因为写卡片占了时间，常规练习的进步略小，取 $c=0.10$ 。(3)班不用卡，把同样的时间拿来多做两道题， $e_0=0.3$ ， $c=0.14$ 。两班起点相同， $s_0=0.4$ ， $d_0=0.4$ 。以上全部是示意参数，是为了让争论有东西可算而设的，不是任何班级的数据。

两位老师的分歧，正好落在 r 和 λ 两个参数上。老陈的看法翻译过来是：订正承接和卡片的配合不额外贡献解释的清晰度， $r=0$ ；卡片也不会被学生一轮轮改写成更有用的东西， $\lambda=0$ 。林老师的看法是：这种配合有贡献，暂取 $r=0.5$ ；学生每轮的解释和订正会改写卡片，暂取 $\lambda=0.4$ 。注意这里的林老师版本也只是她的一种候选说法，0.5 和 0.4 并不来自测量。

先手算第一轮。按林老师的参数，(2)班
 $s_1=0.4+0.6\times(0.10+0.5\times0.4\times0.6)=0.4+0.6\times0.22=0.532$ ；
 $d_1=0.5\times0.4+0.5\times0.532\times0.6=0.2+0.1596=0.3596$ ；
 $e_1=0.6\times0.6+0.4\times(0.532+0.3596)/2=0.36+0.17832=0.53832$ 。(3)班
 $s_1=0.4+0.6\times(0.14+0.5\times0.4\times0.3)=0.4+0.6\times0.20=0.52$ ；
 $d_1=0.2+0.5\times0.52\times0.3=0.278$ ； $e_1=0.18+0.4\times(0.52+0.278)/2=0.3396$ 。

按老陈的参数，(2)班 $s_1=0.4+0.6\times0.10=0.46$ ，
 $d_1=0.2+0.5\times0.46\times0.6=0.338$ ， e 不变，仍是 0.6；(3)班
 $s_1=0.4+0.6\times0.14=0.484$ ， $d_1=0.2+0.5\times0.484\times0.3=0.2726$ ， e 仍是 0.3。
 手算到这里，可以停下来看一眼：两个版本用的是同一套式子，只差两个参数，第一轮的结果却已经朝两个方向走了。老陈的版本里多练的(3)班领先，林老师的版本里用卡的(2)班领先，只是两边领先得都不多。这就像两个人照同一份菜谱做菜，一个多放半勺糖，一个少放半勺盐，第一口尝下去差别细微，要多吃几口才分得出来。

再往下算两轮（逐步核算过）。林老师版本里，(2)班的 s 依次是 0.532、0.624、0.696，(3)班是 0.520、0.610、0.682，第三轮两班相差约 0.013。老陈

版本里，(2)班是 0.460、0.514、0.563，(3)班是 0.484、0.556、0.618，第三轮(3)班反而领先约 0.056。所有数值都在 0 到 1 之间，这是因为每一式都是把 0 到 1 之间的量按非负权重组合，只要 $c+r$ 不超过 1 就跑不出界；这只是一项基本的自洽检查，说明不了模型像不像学生。

◆ 四、分歧落在哪里：一个门槛和一条斜线

算完三轮，第一个发现有点泼冷水：两种说法在第一轮几乎分不出来。林老师版本里两班差 0.012，老陈版本里差 0.024，方向相反，但都很小。如果每个学生的分数带着 0.1 上下的误差，一周之后比一次平均分，看到的多半是噪声。教研组最自然的做法是“试一周看看”，模型告诉我们，这一周看到什么都不该当真。

第二个发现更扎心，扎的是林老师。她最常举的证据是“用卡的班订正写得更认真”。可是在两个版本里，(2)班的 d 都更高：第三轮林老师版本 0.354 对 0.249，老陈版本 0.330 对 0.203。原因很朴素，手边材料多，订正时就有东西可引，这一点老陈也不反对。也就是说，“订正更认真”是两种说法都预言的结果，看到它不能替任何一方加分。好比两个人争论下雨是因为云厚还是因为气压低，指着地上的水洼说“你看”，水洼对双方都成立。

那么两种说法在哪里真正分岔？把第一轮的距离写成一般式：两班之差等于 $(1-s_0)[(c_2-c_3)+r\cdot d_0\cdot(e_2-e_3)]$ ，代入数值是 $0.6\times(-0.04+0.12r)$ 。它在 $r=1/3$ 时等于零。换句话说，在这组设定下，两位老师的分歧被压成了一个具体的门槛：订正与材料的配合系数 r 是否超过三分之一。 r 低于它，多练两道更划算； r 高于它，理由卡占的那点时间值得。争论从“有没有用”变成了“有多大用、够不够抵掉时间成本”，这已经是一个可以由事实回答的问题。

更有意思的是这个门槛随学生而变。门槛等于 $(c_3-c_2)/(d_0\cdot(e_2-e_3))$ ，也就是 $0.04/(0.3d_0)$ 。对一个开学时订正就很认真的学生，

比如 $d_0=0.7$ ，门槛约 0.19，卡片很容易划算。对小宇这样的学生，订正常常只剩一个红笔答案，取 $d_0=0.1$ ，门槛就升到 $4/3$ ，比林老师自己设的 0.5 大出一倍还多。按林老师自己的模型，单发一张卡片救不了小宇：他手里没有可承接的订正，卡片再好也是一张没人读的说明书。这和第一部的说法接上了，落差得先有人接，留下来的东西才有用。

这个推论对林老师的课堂安排有直接的含义。如果她相信自己的模型，那么对小宇该先动的不是卡片，而是 d ：前两三次订正，有人坐在他旁边，陪他把“错在第几步”找出来，让他的订正第一次真正引用上一次的错误。等 d 抬起来一点，卡片才开始有东西可接。模型在这里没有告诉她“小宇该怎么教”，它只是把她自己的假设推到底，让她看见按这个假设，资源该先投在哪里。修自行车的师傅都知道，链条掉了先上链条，这时候给车铃上油，铃再响车也走不了。

这就引出真正能把两人分开的检验。老陈的模型里 $r=0$ ，卡片的效果和学生原来的订正习惯无关，算出来第三轮的两班差距，对 $d_0=0.1$ 、0.4、0.7 三类学生都是 -0.056 。林老师的模型里，同样三类学生的差距分别是 -0.020 、 $+0.013$ 、 $+0.042$ ，随 d_0 抬升，画出来是一条往上走的斜线。所以该比的不是两班的平均分，而是“卡片带来的差距是否随开学时的订正承接而变大”。老陈预言一条平线，林老师预言一条斜线，这是两种说法给出的不同形状，事先写下来，就可以等数据来裁。

会议室里其实还坐着第三种看法，只是没人说出口。周校长听完可能会想：卡片说不定本身就有用，跟学生订正认不认真没关系，就像一张贴在冰箱上的购物清单，谁看都管用。把这个想法写进模型，就是把第一式里的乘积 $r \cdot d_t \cdot e_t$ 换成只和材料有关的一项，比如 $0.2e_t$ ，卡片不被改写， λ 照老陈的版本取 0。算出来第三轮的两班差距，对三类学生都是 $+0.023$ 左右，又是一条平线，只不过平在零的上方。于是三种说法对应三种形状：老陈是零下方的平线，“卡片自

带效果"是零上方的平线，林老师是往上走的斜线。三种形状事先画在纸上，比三个人各自坚持"我看到的就是这样"有用得多。

要画出这条线，有一件事得在发卡片之前做：先用两周时间记录每个学生的订正承接，作为他的 d_0 。等卡片发下去再回头估，学生的订正已经被卡片改过了，起点就被污染了。另一件事是把老师的差别拿掉。(2)班和(3)班若由两位老师分别带，班级差距里混着老师的差距；更干净的办法，是请同一位老师带两个平行班，第一个单元一个班用卡、一个班多练，第二个单元对调。这样每个班都当过一次对照，老陈那句"不好比"也就有了回应。

模型还会顺手给林老师出一道新题。若把(2)班的卡片换成老师统一写好的标准理由，不让学生每轮改写，相当于 $\lambda=0$ 、 e 固定在 0.6。算出来第三轮 s 是 0.707，比学生自己改写的 0.696 还略高。原因是在这组参数下，学生写进卡片的东西平均不如老师的标准理由好，改写反而把卡片的质量往下拉了。第十六章说过，回写可以是负向的，这里在一张小卡片上又演示了一次。于是林老师需要回答：她主张的是"有理由卡"，还是"学生自己改写的理由卡"？如果标准卡片同样好甚至更好，就应该让更简单的安排胜出。

数字的大小也决定了研究要多大。假定个体分数的总波动约为 0.15，用常见的标准（双侧 5% 显著性、八成把握）粗算，要看清 0.056 的差距，每组大约需要一百一十多名学生；要看清 0.013 的差距，每组要两千名左右。实际课堂里学生是按班聚在一起的，需要的人数只会更多。这组数字同样是示意，它的用处是提醒大家：如果真相接近林老师版本里那样小的平均差距，两个班的平均分比较永远比不出结果，斜线检验才是有希望的路。

◆ 五、模型交给教研组的是什么

回到周四的会议室。有了这张用料表，老陈和林老师的争论可以换一种说法。老陈说的是 r 接近零，林老师说的是 r 明显大于三分之一；两人都同意订正

会更认真，这一点不必再吵；真正要等的是那条线是平的还是斜的；林老师还得先想清楚，她押注的是卡片本身，还是学生改写卡片这个动作。一个模糊的"没有用"，被拆成了四个可以分头去查的问题。

更重要的是，每一种可能的结果都事先有了去处。如果按 d_0 分组画出来是零下方的平线，老陈赢，理由卡在这个单元里应当让位给练习；如果是零上方的平线，卡片有用，但"接住"这个说法在这里没有多出解释力，乘积可以换成更简单的加法；如果是往上走的斜线，林老师的说法过了一关，接下来该去查学生改写和标准卡片谁更好。还有一种很常见的结果：线太抖，什么形状都认不出来。那就照实写"这一轮材料不足以裁决"，下一轮扩大样本或延长轮次，而不是挑一个最顺眼的读法。打牌的人都懂，没摸清牌之前就喊"我早知道"，下一局没人愿意跟你坐一桌。

这个模型在哪些地方会错，要集中说清楚。它把解释、订正、材料都压成一个 0 到 1 的数，丢掉了学生具体错在哪一类、卡片上写的是什么；乘积项假定订正和材料缺一不可，现实里二者也可能互相补偿，写成加法版本同样合理，应当拿同一批没参与设参数的材料去比较乘法、加法和来回写三个版本。更新次序也是一个假定：先订正再整理材料，和先发新材料再订正，是两种不同的课堂安排，模型只对它写下的那一种成立。它没有遗忘、没有新教学内容的难度变化，也没有把"我不是学数学的料"这类自我看法放进 e 。最要紧的是，不同参数组合可能画出差不多的曲线，只看最终分数往往分不清；参数要在看结果之前固定，不能看见不喜欢的下降就去调系数，直到曲线变得充满希望。

日常里有一种很实用的智慧：两个人合伙开饭馆，吵到最后，最有用的往往不是谁说服了谁，而是有人掏出账本说，我们先把这三个月的进货和出菜对一对。账本不站队，它只让争吵有地方落脚。这个小模型也是这样一本账：它不替老陈说话，也不替林老师说话，它让两个人的话都变成可以对账的条目。

本章的底牌是：模型不负责证明谁对，它负责让分歧清楚到可以被事实裁决。把老陈和林老师的经验写成两组参数以后，“有没有用”变成了“ r 是否越过三分之一的门槛”“卡片的好处是否随订正习惯抬升”“学生改写是否胜过标准卡片”这样有形状的问题，而且模型事先说出了一周平均分比较为什么注定比不出结果。你做过课程研发，大概知道一项新设计最常见的命运，是在“效果不错”和“效果不明显”之间被几位同事的印象来回拉扯；一个写得出参数和门槛的小模型，至少能让这种拉扯停下来，换成一个可以去收集材料的计划。

当然，这个模型说的是三条方程在一个领域里的一种具体化。用系统动力学、因果推断或者自我解释研究的语言，也可能写出相近的东西，甚至写得更好。下一章就请这些邻居坐到同一张桌上，看看 SDE 在哪里有自己的增量，在哪里应该老老实实借用别人已经磨好的工具。

带走的话

模型不负责证明谁对，它负责让分歧清楚到可以被事实裁决。

小 账

参数是测出来的吗？ 不是。 e_0 、 c 、 r 、 λ 等都是为让争论可算而设的示意值，不是任何班级的数据；三轮结果、三分之一门槛和三种线形是按这些示意值逐步核算的。

哪一句还要检验？ “卡片的好处随订正承接抬升”是可检验的形状：按 d_0 分组若画出平线，乘积说法就输；若标准卡片不比学生改写的差，就让更简单的安排胜出。

样本量靠得住吗？ 是粗算：按个体波动0.15、双侧5%、八成把握，看清0.056约需每组一百一十多人，看清0.013约需两千人；按班聚集时只会更多。

模型漏了什么？ 它把解释、订正、材料压成0到1的数，假定了更新次序，没放进遗忘、难度变化和自我看法；乘法、加法、不回写三个版本要拿新材料来比。



23

第23章

和系统科学、因果研究、其他教育理论坐一桌

这一章的问题

一个新框架和老理论说得差不多时，它到底还多给了我们什么？

场景 区里跨校教研会上，林老师讲完理由卡和小模型，台下举起四只手，背后是四套成熟的说法。

◆ 一、同一场球，四种解说

区里组织了一次跨校的数学教研交流，林老师被推上去讲她的理由卡，顺带讲了上一章那个小模型。她讲得很用心，三个字母、三条更新式、一个三分之一的门槛、一条可能往上走的斜线。讲完，台下举起了四只手，四只手后面是四套很成熟的说法。

第一位是区里做系统动力学培训的教研员。他说，这不就是一个存量流量图吗，解释清晰度是存量，订正是流量，卡片是一条反馈回路，系统动力学几十年前就这么画了。第二位是读心理学出身的老师，她说，让学生写“我为什么这样改”，在学习科学里有一个很老的名字，叫自我解释；考前拿出卡片回看，也很像提取练习。第三位是隔壁学校教统计选修课的老师，他的问题最短：“你们分班是随机的吗？不是的话，因果就先别谈。”第四位老师读过很多皮亚杰，他笑着说，旧的算术习惯碰上新的等式观念，这叫同化和顺应，皮亚杰几十年前就讲过了。

林老师站在台上，有一点像一个刚学会做红烧肉的人，端出来一盘，四位大厨分别说：这是糖色，这是焖，这是火候，这是本帮菜。每一位都没说错。问题是，她那一套 S、D、E 的说法，还剩下什么是自己的？

看过球赛转播的人都知道，同一个进球，战术分析师说是边路拉开了空当，体能教练说是对方后卫最后十分钟跑不动了，心理学家说是落后一球后的压力，老球迷说就是运气。四种解说都可以讲得头头是道，可要是第二天有人问“下一场该怎么踢”，就得看哪一种解说能说出别的解说说不出来的东西。这一章要做的，就是让 SDE 坐到这张解说席上，不抢话筒，也不躲。

面对这种场面，一个新框架通常有两种本能。一种是抢：把四位的说法都收编进来，说系统动力学讲的是 D，自我解释讲的是 S，皮亚杰讲的是 123 原理，于是 SDE 成了一顶装得下所有帽子的大帽子。另一种是躲：说 SDE 是本体论，层次更高，不和经验理论比。前一种让理论变成杂物间，后一种让理论变成博物馆。本书走第三条路：坐下来，答同一道题，承认别人做得好的地方，只在自己能多说一句的地方开口。

◆ 二、先让大家答同一道题

比较理论最省事的赢法，是让自己回答一道难题，让别人只回答一道简单题，然后宣布自己更有体系。这就像厨艺比赛，一边用整间厨房，一边只分到一口小锅，赢了也不光彩。所以第一条规矩是：先把题目写清楚，让每一套说法都对着同一道题作答。

题目可以从小禾身上取。第十章写过她，一个熟题又快又准的初一女生。设想她在方程单元里有一个反复出现的现象：订正后同类题能改对，两周后换一个问法，比如把“解方程 $3(x-2)=x+4$ ”换成“判断 $x=5$ 是不是方程 $3(x-2)=x+4$ 的

解，并说明理由”，她又错了，或者干脆不知从哪里下手。这道题的好处是够具体，它问的是：为什么改对了的东西，换个问法就不在了？

系统动力学会画出它的回路：理解是一个会流失的存量，练习往里灌，遗忘往外漏，两周的延迟让存量降到了门槛以下。这个说法干净有力，而且自带一个可以检验的预测：只要缩短间隔或增加复习，问题就该缓解。控制论会把它看成一个调节问题。家里的恒温器设在二十二度，室温一偏，它就加热或停机；小禾的订正也是一种纠偏，只是她纠的是“答案对不对”这个设定值，没有纠“为什么对”。这个说法也很有用，它提醒我们去查反馈到底在纠哪一个目标。

SDE 怎样答这道题？它的三句追问会这样走：小禾改对时显露的是什么，向谁显露，在哪类任务里稳定到什么程度；她的订正序列承接的是哪一类差异，是“这一步算错了”，还是“这一步为什么可以这样做”；这几次订正又给她留下了什么新条件，比如一张只写着正确答案的订正本，一种“考试只看结果”的判断。第三句最要紧：如果她的订正只改写了答案，没有改写她调用材料的方式，那换一个问法时，她手边可调用的东西其实和以前一样。

这三种回答放在一起，会发现大量重叠。系统动力学也关心延迟和积累，控制论的现代版本也研究设定值本身怎样变化，复杂适应系统的研究者也讨论多主体和历史影响。这些理论本来就不把条件当成背景，也不只关心静态结果。所以 SDE 如果只是把“关系”改叫 E，把“变化”改叫 D，它什么都没有增加，只是换了一套字母。真正值得问的是：哪一种回答说出了别人说不出的、而且能被事实反驳的东西？

在这道题上，SDE 有一个候选的说法可以押：小禾的问题不在存量多少，而在“改对”这个显露有没有回写她的条件。如果没有回写，加大复习量会让同类题更熟，却未必让换问法的题变好；如果订正时被要求写下“这一步为什么成立”，并且下次真的被调用，换问法的题才该变好。系统动力学的预测是复习量

起作用，SDE 的这个候选预测是订正内容的类型起作用。两者在同样复习时间下给出不同的预言，这才是一张桌上真正的分歧。

比较要公平，还得让对手是一个像样的对手。如果 SDE 那一组的老师受了三次培训、多备了两周课，对照组却拿一份没改过的旧教案上阵，赢了也说明不了理论，只说明多下了功夫。下象棋让对手先拿掉一个车再赢，回家是不好意思讲的。所以在小禾这道题上，"多复习"那一组也要设计得认真：复习材料经过挑选，间隔合理，时间和"写为什么"那一组一样多。对手越强，赢下来的那一点才越值钱。至于动力系统里的"相变""吸引子"这些词，小禾某天突然想通了，可以启发我们去问稳定与转换，但一次想通还够不上数学意义上的相变，词再漂亮也替代不了状态变量、更新规则和时间尺度。

◆ 三、因果这把椅子最硬

统计老师的那个问题，是整场交流里最硬的一句。理由卡用在(2)班，(2)班后来解释得更清楚，这能说明卡片起了作用吗？还说明不了。可能(2)班本来就更好，可能林老师在(2)班投入更多心思，可能用卡片的消息让学生觉得自己被重视，任何一样都能造出同样的差距。

日常里最常见的因果误会是感冒药。一个人感冒了，吃了一周药，好了，于是确信这药管用。可感冒本来一周左右就会好，他没法知道不吃药的那个自己会怎样。这个"不吃药的自己"就是反事实：我们永远没法让同一个学生在完全相同的条件下，既用一次卡片、又不用一次卡片。所以才需要对照、需要分配、需要事先说清楚比较对象。教室里的感冒药到处都是：一位老师换了新教法，恰好赶上单元后半段学生本来就会熟起来，期中成绩一涨，新教法就被记了头功。承认这个困难不会削弱老师的实践判断，反而让一次印象深刻的成功故事，不必扛起它扛不动的理论重量。

有人可能会说，SDE 讲三维互生，本来就不是线性因果，所以不必回答这类问题。这是最需要拦住的一种说法。第二章说过，互生不等于循环论证；第十五章说过，一个解释能解释一切时要停下来。三个维度同时记录，识别问题一个也没有少：卡片和清晰度的关系，仍然可能来自共同原因；学生自己选择要不要认真用卡片，这个选择本身就带着他原有的知识和习惯，随后表现的差别不能直接记在卡片头上。行动不自动等于干预，学生"用了卡片"和研究者"给他卡片"是两件事。

三条方程在这里能做的，是帮助把循环按时间摊开。第二十二章的小模型就是这样做的：第 t 轮的订正和材料，影响第 $t+1$ 轮的解释，再影响第 $t+1$ 轮的订正，最后改写材料。摊开以后，就可以问一个干预问题：在内容和时间都相近时，只改变卡片是否可以被调用，下一轮的解释会不会按预期变化？时间顺序本身还排除不了共同原因，但它至少让"改哪一样、看哪一样、隔多久看"变得清楚。图上删掉一根箭头不等于课堂真的改变了，干预必须对应一个老师在周四下午能实际做的动作。

回到统计老师的问题，其实有一个相当朴素的回答。卡片这种干预很轻，没有必要整班发或整班不发：同一个班里，可以按事先抽好的签，一半学生这周用卡、一半多做两道，下一个单元对调。老师是同一个，教室是同一个，进度是同一个，剩下的差别里，卡片的份量就清楚多了。当然，同桌之间会互相看卡片，这种"串味"要记录下来，必要时改成按小组抽签。打过牌的人都知道，洗牌不是为了好看，是为了让谁也没法事先安排好手里的牌。

因果研究还有一条提醒，对 SDE 尤其有用：评价器会被投机。一个系统如果只奖励"订正写得长"，学生很快会学会写长；一个模型如果只在自己的评分体系里宣布进步，它可能只是越来越会讨评分的欢心。所以比较理论时，结局指标要放在各家理论都管不着的地方，比如两周后的换问法题、一道条件被改过的应

用题、学生会不会指出一个反例。谁的预测在这些外部指标上更准，谁就多一分。

◆ 四、老邻居的名字不改，增量要自己挣

再看那位心理学老师的话。让学生解释自己的步骤有助于学习，这是学习科学里被反复讨论的方向，名字就叫自我解释；隔一段时间主动回想，比反复重读更有利于保持，这个方向也有成熟的名字。理由卡如果起作用，很可能一部分作用正是从这两条路来的。这时候 SDE 该做的事很简单：已有成熟名称的机制，就用它原来的名字，不换成"回写卡"再端上桌。

这条规矩值得多说一句，因为换名字是理论最容易犯的错，也是最难察觉的错。一家饭馆把"老醋花生"改名"酸甜坚果小品"，菜单看着新了，盘子里还是那几粒花生。判断一个说法是不是新知识，有一个很好用的办法，叫第二次追问：先问它说了什么，再问它禁止了什么。换一个名字，通常不多禁止任何事情，所以不多出任何预测；而一个真正的新判断，会说出"如果是这样，那就不该看到那样"。

按这个标准看，第二十二章里有一处可能是 SDE 自己的东西。乘积 $d \cdot e$ 说的是"接住"和"留下"缺一不可，它推出卡片的好处应当随学生原有的订正承接而变大，对订正几乎为零的学生几乎无效。自我解释的研究也可能独立推出相近的预测，那样的话，这一点就是两家理论的会师，不归谁独占。但它至少不是换名字，它禁止了一件事：如果卡片对订正习惯差的学生和好的学生效果一样，这个说法就错了。推出来的新结论，和换出来的新名字，在这里分得开。

自我决定理论是另一位老邻居。它的大意是，人有自主、胜任、联结三种基本需要，环境支持这些需要时，内在动机更容易保持；外部奖励如果被体验为控制，可能削弱原本的兴趣。这一套和本书第一部讲的动力，有很大的交集。第六

章讲的分数与奖励，用自我决定理论的语言讲，也能讲得很好。SDE 在这里可能押的增量，是把时间和历史放进来：同一句表扬，落在一个上周刚被"接住"的落差上，和落在一个连续三次被写成"粗心"的学生身上，效果应当不同，因为前几轮已经改写了他的条件。这个说法如果站得住，应当表现为"同样的奖励，效果随前几轮记录的性质而变"。如果事实显示，只要知道学生此刻的胜任感，就足以预测奖励的效果，历史不再多提供什么，那么 SDE 在这一点上就该退回去，承认对方的模型更简洁。

建构主义那位老师说得也对，同化与顺应早就讲过新旧认识的冲突。SDE 的 123 原理在这里和它有亲缘，一个重要区别是，123 原理要求追问改变之后的回写：新的等式观念出现以后，它改了什么，学生下一次读题的方式、他对自己的判断、课堂上谁有资格提出反例，有没有跟着变。这是一个可以观察的追问，不是一个更高明的结论。它值不值钱，要看沿着它去观察，能不能发现原先漏掉而且影响后来结果的东西。

SDE 另外两样看家的东西，也得按同样的规矩上秤。六路径说的是，按任务最吃紧的那一维选入口，平均而言应当好过所有人走同一个入口；那就在相同课时、相同辅导量下，拿"按处境选入口"去和"统一先讲例题"比，若统一入口一样好，六路径在这个单元里就该收缩成一种讲法上的提醒。123 诊断说的是，先找准争的是哪件事、哪两维在打架，再找被忽略的第三维，能帮老师更准地定位问题；那就看几位老师独立用它诊断同一批案例，结论是否对得齐，按诊断去改，比凭经验去改多带来了多少信息。只问"老师觉得这个框架有没有启发"，是最容易得高分、也最不说明问题的检验。就像问顾客"我们的装修好不好看"，人家多半客气地说好看，第二个月来不来吃饭才是真答案。

还有一种检验，看起来有点狠，叫消融：在模型里把某一维拿掉，看预测会不会变差。比如把第二十二章模型里的 e 固定住，不让它被回写；如果固定版本

对两周后换问法题的预测和完整版本一样准，那么在这个单元、这个时间窗口里，第三条方程就没有贡献额外的东西，应当用更简单的版本。这种消融做在数据分析里，不是在课堂上真的把学生的材料没收掉。拿掉以后没变差，也有两种可能，一是这一维在这里确实不重要，二是测量太粗看不出来；该算哪一种，要按事先写好的规则判，而不是等结果出来再挑。

◆ 五、从一张桌子到一个领域

交流会散场时，四位提问的老师和林老师在走廊里又聊了十分钟，那十分钟比台上的四十分钟更有用。他们发现，最大的分歧不在理论，而在用词：系统动力学那位说的"反馈"，心理学那位说的"反馈"，和林老师说的"订正"，指的根本不是同一段材料。同一个词，三个人各谈一件事，这是教研会最耗时间的病。

所以一门学问从共同语言走向领域科学，第一步往往很不起眼：几个人看同一段课堂录像，独立标出"哪里是一次订正承接""哪里是一次新的显露"，然后比对分歧。分歧出来了先回到定义和原始材料，而不是听资历最深的人一锤定音。每个概念还要配一个反面例子，比如学生复述老师刚说的话，暂时不算独立理解的显露；一份新建的错题本，还不算已经改变了下一次的选择。经过训练还对不齐，就要怀疑概念本身太宽，或者材料不够，而不是怪同事"没学懂理论"。

在这条路上，失败的记录和成功的记录一样珍贵。设想(2)班的斜线检验最后没有出现，结果是一条平线，林老师把这个结果连同卡片样本、编码规则、一致性数据一起存进教研组的资料夹。明年新来的老师打开资料夹，就不必再花一学期去试同一件事，她可以直接去试"老师写的标准卡片"那条岔路。一项发现，不论正负，只要被这样留下来，就改变了后来者的起点。这正是第三条方程在研究工作本身上的样子：研究者的结果改写了下一位研究者的条件。

回到你那两个问题，坐在这张桌上还有一个意外的收获：它逼着两个问题各自交出观察对象。动力那一边，可以看学生遇到阻碍后有没有自己发起下一次尝试，看没有即时奖励时他还会不会选那道多出来的题，再把疲劳、题目太简单这些别的解释一一摆出来比。系统思考那一边，可以看学生能不能说出一个条件的边界，改动一个条件会牵动什么，隔一段时间才显出来的后果，以及碰到反例时会不会改自己的说法。两边的指标可能一起涨，也可能分道扬镳；分开了反而有用，它告诉老师下一轮该改的是机会、方法还是条件。只拿“愿意发言”去充当系统思考，就像拿嗓门大小去评唱得准不准。

这一章的判断在什么情况下会错，要在这里集中说一次。本章对系统动力学、控制论、因果推断、自我解释、自我决定理论、建构主义的描述，都只取公认的大意，并非对这些领域的完整评述，它们的现代版本可能已经容纳了这里归给SDE的那些候选增量；一旦如此，那些增量就应当记在会师名下，而不是记在SDE名下。本章提到的几个“SDE可能押的预测”，目前都只是候选，没有一项经过检验。更根本的一点是，SDE也可能在相当长的时间里拿不出独立的经验优势。母本对此的态度很坦率：那时它可以退回一种跨学科的组织语言。这不是失败的托词，组织语言自有它的用处，它帮老师把散在四个办公室里的说法放到一张桌上，提醒大家常被漏掉的那一问；只是这种价值和“独立科学理论的经验优势”是两种东西，要用两种尺子量。

本章的底牌是：SDE的价值要在比较中挣，不在宣布中得。挣的办法是让各家理论回答同一道题，已有成熟名称的机制用原来的名字，自己只押那些能被事实驳倒、而且别人没有说出的预测；押中了是增量，和别人同时押中是会师，押空了就收缩主张。你有哲学的底子，大概比多数人更清楚一个框架最危险的时刻，是它开始能解释一切的时候；让它天天坐在一张有对手的桌子上，是让它保持诚实最便宜的办法。

桌上有了对手，接下来的问题就很实际了：一所学校、一个年级、一年时间，应当先押哪几注？下一章把你的两个问题拆成几条可以分别下注、又能互相校正的研究线，写成一份明年九月就能开工的方案。

带走的话

SDE的价值要在比较中挣，不在宣布中得。

小 账

交流会是真的吗？ 交流会、四位提问者和小禾的换问法题都是构造的场景。

对各家的描述完整吗？ 不完整，只取公认大意；它们的现代版本可能已容纳这里归给SDE的增量，那就记作会师，不记在SDE名下。

哪一句还要检验？ 文中SDE押的预测，如订正内容的类型比复习量更起作用、奖励效果随前几轮记录而变，都只是候选，没有一项经过检验；押空了就收缩主张。

拿不出优势会怎样？ 那时SDE退回一种跨学科的组织语言，它的用处要用另一把尺子量，不能冒充经验优势。



24

第24章

两个问题的研究组合：给阳涌的一份工作方案

这一章的问题

动力和思维两个大问题，一所学校一年里该先押哪几注？

场景 开学前一周，周校长桌上摊着过去一年所有想法的打印稿，区里盼着一年出成果。

◆ 一、一张桌子摆不下四十道菜

八月底，开学前一周，周校长把七年级的三位数学老师和老陈叫到办公室。桌上摊着一叠打印稿，是过去一年大家提过的所有想法：理由卡、天平模型、倒逼型入口、错因编码、取消"最快交卷"的加分、数学社团、AI助教……周校长说，区里希望学校有一个"学习动力与思维培养"的研究，最好一年出成果。老陈翻了翻那叠纸，说："一年把动力和思维都研究清楚，跟一学期把孩子教成数学家差不多。"

老陈这话难听，但不糊涂。把所有好想法一次全上，期末成绩就算涨了，也没人说得清是哪一样起了作用；跌了，更没人说得清是哪一样拖了后腿。第二十一章讲过怎样把一个设想写成可证伪的研究，第二十二章讲过怎样用一个小模型把分歧压成门槛和形状，第二十三章讲过怎样让理论在有对手的桌上挣增量。这一章要回答一个更朴素的问题：一所学校、一个年级、一年时间，先押哪几注？

新开一片菜园的人，很少第一年就把每一垄都种上不同的东西。常见的做法是分三畦，一畦试新种子，一畦试新肥料，一畦照老法子种，旁边挂个本子记每

天浇了多少水。三畦互相照着看，第二年才知道该扩哪一畦。研究组合也是这个意思：两个大问题不必一次答完，拆成几条可以分别下注的线，每条线有自己的问题、证据和认输条件，几条线之间还能互相校正。

如果由你来牵头，下面这份方案可以在青石中学这样的学校里，从七年级开学第一周做起。设想七年级有六个平行班，每班四十五人左右，三位数学老师各带两个班，林老师带(1)(2)两个班。方案分三条线：理解形成线、路径选择线、回写与制度线。每条线只回答一个窄问题，但三条线合起来，正好覆盖你的两个问题。

为什么是这三条？粗看起来，它们大致各自压在一条方程上。理解形成线问的是第一条方程的那个问题：一种理解，是在什么条件里、经过哪些尝试显露出来的。路径选择线问的是第二条方程：给定学生眼下的理解和手边的条件，下一步从哪里起手。回写与制度线问的是第三条方程：这一轮的理解和尝试，给下一轮留下了什么。这只是分工上的方便，不是说第一条线只管S、第三条线只管E；第二章说过三个维度在一次发生里互相生成，每条线在自己的窗口里也会碰到另外两维，碰到了就记下来。

还有一层考虑是轻重搭配。第一条线成本最低，只动每节课的五分钟；第二条线成本居中，要重新设计一个单元的开头；第三条线牵涉的人最多，从学生的卡片一直到教研组的记录本。三条线的风险也错开了：便宜的那条最可能什么也看不出来，贵的那条最可能看出东西却说不清来源。放在一起，一条线落空，另外两条还在，就像出门旅行带一把伞、一件外套、一双好走的鞋，哪一样派不上用场都不要紧。

◆ 二、第一条线：等号是一架天平吗

理解形成线选的是一个小而要害的观念：等号。许多学生从小学带上的理解是"等号就是算出答案的意思"，看到 $8+4=\square+5$ ，会在方框里填12，甚至填17。这种理解在算术里一直管用，到了一元一次方程就开始绊脚：两边同时减去同一个数为什么可以，在"等号是出答案"的理解里找不到位置。第三章写过小宇在这里卡住，旧的算术习惯和新的操作在打架。

这条线的问题是：在方程单元里，每节课拿出五分钟做"关系任务"，可不可以让"等号是两边的关系"这种理解显露得更稳？关系任务长这个样子：不解方程，判断 $x+7=15$ 和 $x+8=16$ 是不是有同样的解；方框里该填7还是12；把 $3(x-2)=x+4$ 两边同时乘以2，解会不会变。对照组把同样的五分钟用来多做一道常规题。每位老师带的两个班，一个班做关系任务，一个班做常规题，这样三位老师的差别在两组之间是平衡的。

关系任务的讲法，可以借菜市场的老杆秤。一头挂着菜，一头挪秤砣，杆子平了，两头就"一样重"；往菜那头添一把葱，秤砣就得往外挪。卖菜的阿姨从不觉得杆子平了是"算出了答案"，她知道那是两头的关系。课上不必真搬一杆秤进来，但可以让学生在一个等式两边"添一把葱"，说清楚另一边要怎么动才能保持平衡，再说清楚哪些动法会让杆子歪掉。这种任务的要点不在天平这个比喻本身，而在让学生反复说出"两边之间是什么关系"。比喻用过就要收，否则有学生会以为负数是"往秤上挂一个气球"。

证据分三层。第一层是单元刚结束时的解释题，比如"为什么方程两边可以同时减去3"，由两位不知道分组的老师按事先写好的标准打分。第二层是两周后的换问法题，题型和课上做过的不一样。第三层放到下学期，二元一次方程组用代入法时，学生会不会把" $y=2x+1$ "当作可以整体替换的关系，而不是一道等

着算的式子。九月开学第一周还要做一次前测，用几道等号小题摸清每个学生的起点。

什么结果会迫使改口，要在九月写下来。若两组在第一层上有差别、在第二层和第三层上没有差别，说明关系任务带来的是当场的表达流畅，不是稳定的显露，这时要把"关系任务改变等号观念"收缩成"关系任务改善当堂解释"。若三层都没有差别，就承认在这个年级、这个剂量下，五分钟关系任务没有多出东西，常规练习已经够用。若只有前测里等号观念较好的学生受益，那么关系任务更像是给已有苗头的理解浇水，这个结果要交给第三条线去对照，因为它和"先接住、后留下"的说法有关。

这条线最大的好处是便宜。它不改教材、不改进度，只动每节课的五分钟；最大的风险是剂量太小，什么也看不出来。粗算一下，如果按学生个人比较，每组一百三十五人左右，个体分数波动假定在 0.15 上下，大约能看清 0.05 量级的差距。可关系任务是整班分配的，按第二十一章那个示意的班内相关 0.15 算，设计效应约 7.6，每组一百三十五人只顶十八个左右独立观察，能看清的差距要放大到 0.14 上下；所以第一年更现实的目标，是看测量立不立得住、方向对不对。这些数字是开工前的估计，到时要用九月前测的实际波动重算一遍。烧水的人都知道，火太小，盯着锅看一个小时也只看得见几个气泡，所以第一年也要准备接受"火候不够、还没结论"这样的结果。

◆ 三、第二条线：先吃苦头，还是先看例题

路径选择线回答的是第七章、第八章的问题：入口和处境配不配，是不是真的影响学习。第一年只比一件事，不比六条路，比的是倒逼型入口和统一入口。地点放在七年级下学期的一元一次不等式单元，因为这个单元的应用题天然带着"选哪个更划算"的问题，适合从一个真问题倒逼出新工具。

倒逼型入口的课这样开头：学校要印一批活动手册，甲店每张 0.3 元，另收 6 元装订费；乙店每张 0.5 元，不收装订费。印多少张时选甲店更省？学生先用自己会的办法试，列表、估算、画图都行，很快会发现印 30 张时两家一样，都是 15 元，多于 30 张时甲店更省。这时候老师再把" $0.3n+6<0.5n$ "写出来，问大家：我们刚才找的，其实就是让这个式子成立的所有 n ，有没有一种办法不用一张一张试？不等式的性质和解法，就是被这个问题叫出来的。统一入口的课则按常规顺序，先讲不等式的性质和解法，再做包括这道题在内的应用题。两种课用同样的课时和同样的练习量。

两种入口的差别，有点像两种学做饭的人。一种是先上烹饪课，刀工、火候、调味一样样学完，再去做一桌菜；另一种是某天饿了，冰箱里只有两个鸡蛋一把葱，硬着头皮炒出一盘，第二天才去查“为什么我炒的蛋这么老”。两种人都可能成为好厨子，问题不在谁更高明，而在这一回、这道菜、这个人手里有什么。倒逼型入口押的是：一个已经让学生想知道答案的问题，会让后面那段讲解有地方落脚。这个押注对不对，就交给这条线去查。

分组的办法和第一条线一样，每位老师两个班各走一种入口，但要和第一条线错开：上学期在第一条线里做关系任务的班，这学期在第二条线里走统一入口，另一个班则反过来。这样每个班一年里都既当过“新做法”的一方，也当过对照的一方，三位老师也都两种课各上一回。错开还有一个附带的好处：如果某个班不管做什么都赢，说明赢的是这个班本身，这条信息也要记进登记里。

这条线的结局指标特意选了一个对系统思考敏感的问题。单元结束两周后，给学生一道改过条件的题：装订费涨到 9 元，结论怎么变？答案是多于 45 张时甲店更省，因为 $0.3 \times 45 + 9 = 22.5$ ， 0.5×45 也是 22.5。会算的学生都能算出来，但有一部分学生会先停下来问“哪一个条件变了、它会推着答案往哪边走”，

这正是本书说的三句追问在一道题里的样子。动力的指标也一起记：课后附一道不计分的选做题，看学生选不选、做到哪一步、卡住以后有没有再试一次。

认输条件同样先写好。若在相同课时、相同练习量下，统一入口在条件改变题上和倒逼型一样好，六路径在这个单元的主张就要收缩，从"入口要按处境选"退成"入口是一种讲法上的选择"。若倒逼型只在老师特别投入的班里胜出，那么胜出的可能是投入，不是入口，所以每节课都要有一张简短的实施记录，写清楚老师讲多久、追问了几次、等了学生多长时间。还有一种可能值得留意：倒逼型的好处只在某一类处境里出现，比如前测里应用题读得懂、但解法还不熟的学生。这个结果不能写成"这类学生适合倒逼型"，第七章说过，路径不是学生的类型，它只说明在这个任务、这个时候，这个入口和这种处境配得上。

◆ 四、第三条线：理由卡和"粗心"两个字

回写与制度线分两半，一半在学生身上，一半在教研组身上。学生那一半，就是第二十二章的理由卡。时间放在上学期的有理数运算和整式加减两个单元，那里去括号、符号变化的错误最多，订正也最多。九月头两周先不发卡，只记录每个学生的订正，编出每人的订正承接起点 d_0 。然后在每个班里按抽签把学生分成两半，第一个单元一半用理由卡、一半把同样时间用来多做两道，第二个单元对调。

这一半要检验的，正是第二十二章算出来的那个形状。若老陈的说法对，卡片带来的差距和学生原来的订正习惯无关，按 d_0 分组画出来是一条平线；若林老师的乘积说法对，差距应当随 d_0 抬升，订正几乎为零的学生几乎不受益。另外再加一个小比较：在一部分学生里，把学生自己改写的卡片换成老师写好的标准理由卡。如果标准卡片一样好甚至更好，"学生自己改写"这个回写动作

在这里就没有多出价值，应当采用更简单的安排。三个形状、一个岔路，都在十月之前写进预注册卡。

工作量要算在前面，否则方案会死在老师的周末里。编码不必覆盖每个学生每一次订正：每轮在每个班随机抽十名学生，由两位老师分头评解释和订正，各自花二三十分钟就够；每两周的教研拿出四十分钟，专门对编码分歧。九月的前测和十月以后的每轮抽样，加起来一学期大约是十来次这样的工作。老陈适合当分歧的仲裁人，但仲裁要回到编码手册和原始作业，不能凭“我教了二十年”一锤定音。他自己大概也乐意，因为这回轮到别人拿着证据来跟他吵。

教研组那一半，动的是两样制度。一样是错因记录：从这学期起，教研组的错题分析里不再使用“粗心”这个词，改用几类可以说明的卡点，比如“符号跟谁走没想清”“把等号当成出答案”“单位换了没跟着换”。第十六章讲过，“粗心”一旦进了档案，会变成学生心里的一个条件；换成具体的卡点，下一位老师才知道该从哪里接。另一样是教研记录：每次教研结束，留一页“可交接记录”，写清楚这次讨论改变了哪个教学决定、依据是什么、什么情况下要改回去。

这一半的证据，不看记录写了多少，而看记录有没有被用。下学期同一单元的备课里，有多少个教学决定明确引用了上学期的记录？新来的老师读了这些记录，是否少走了某一段弯路？如果记录写得整整齐齐，却没有一个决定因它而改，那就是第十六章说的“有记录不等于有回写”，要改的是记录的格式和存放的位置，而不是要求大家写得更勤。家里的菜谱也是这样，一本抄得很漂亮却锁在柜子里的菜谱，传不下一道菜。

◆ 五、一年的日历和一张改口清单

把三条线放进一年，大致是这样走的。八月底，三条线各写一张预注册卡，写明问题、分组、结局指标、时间窗口和认输条件，交给一位不参与实施的同事

封存。九月是基线月：等号前测、订正记录、选做题的基线、编码手册的试用；三位老师和老陈用同一批作业练习编码，直到两人独立打分的一致程度达到事先约定的水平。十月到十一月，第三条线的理由卡在有理数运算和整式加减两个单元轮换。十一月下旬到十二月，第一条线在一元一次方程单元运行。一月做延时测，写一份半年登记。

下学期，二月到四月，第一条线在二元一次方程组里看迁移，第三条线的教研那一半开始查记录有没有被用。四月到五月，第二条线在不等式单元运行。六月做全部延时测，七月写全年登记。全年登记用同一种格式，每个预注册的判断标成四类之一：得到支持、被否定、没有结论、没能按计划实施。没能实施的要写清楚卡在哪里，比如运动会占掉了两周、某个班换了老师，这些也是下一年的条件。

三条线之间的互相校正，是这份方案的要害。若第一条线发现关系任务只帮了等号观念本来较好的学生，而第三条线发现理由卡只帮了订正承接本来较好的学生，两条线就在指向同一件事：留下来的东西，要有一个已经被接住的落差才有用，这时候第二年最该押的，是怎样先把落差接住。若第二条线发现倒逼型入口的优势在理由卡用得好的班里变小，那可能说明好的支持条件减少了对入口的依赖，路径和条件之间存在交互，这个发现比任何一条线单独的结论都更有用。若动力指标涨了而条件改变题没动，说明学生更愿意继续了，却还没看见过程，下一步该改的是方法；反过来，就该看看是不是机会给得太少。第五章说过，改变可以落在三个候选位置上：换讲法、换路径、换条件。三条线的结果合在一起，正好给第二年提供选位置的依据；但它们给的是候选，不是判决，选哪一个，还要比一比各自的机制、谁有权限动、要花多大代价。

这份方案也在替全书的两张底牌找第一批证据。第一张底牌说，动力断在"落差没人接"或"接住了没留下"，那么第三条线的斜线和第一条线的分层结

果，就是在查"接住"和"留下"是不是缺一不可；如果卡片对订正习惯差的学生和好的学生一样有用，这张底牌在这个单元里就要改写。第二张底牌说，会三句追问的学生在条件改变的新题上应当更好，那么第二条线的条件改变题、第一条线的换问法题，就是它的考场；如果只会按步骤解题的学生在这些题上一样好，它就只是一种好听的说法，导论里已经把这句话放在桌上了。

家里记账的人都有体会，第一年的账本最难看：分类老在改，有几个月漏记，年底一算，和银行流水对不上。可是有了这本难看的账，第二年才知道钱到底花在了哪几处，哪一项该先砍。研究的第一年也是这样，它要交出的不是一份漂亮的成绩单，而是一本能对上原始材料、写着哪里没对上的账。第二年押什么，就从这本账里长出来：哪条线得到支持，就把它扩到另一个年级或另一个单元去复查；哪条线被否定，就把它的材料和认输理由存进教研组的资料夹，让后来的人不必再从头试一遍。

这份方案在哪些地方会错，要在这里一次说清。它只在一所学校、一个年级、一年里运行，得到的任何结果都只说明这个范围里的事，搬到另一所学校之前，要重新检查那里的条件。老师们知道自己在做研究，投入程度本身就可能造出差别，实施记录只能减少这种混淆，消除不了。剂量小、样本有限，最可能的结局之一是好几个判断落在"没有结论"那一类。九月封存的预注册卡，看到结果以后不能回头改；探索中冒出来的新想法，单独记成下一年的问题，不混进今年的检验。伦理上，每个学生都会轮到理由卡，每个班都会经历两种安排，没有哪个孩子被固定放在"少教一点"的那一组；所有材料去掉姓名后再进入分析。

本章的底牌是：两个大问题不需要一次答完，需要一组能互相校正的小研究。理解形成线看显露站不站得稳，路径选择线看入口和处境配不配，回写与制度线看经验留不留得下来、被后来的人用上；动力和系统思考分开记、对照着看，分开的地方正好指出下一年该改什么。管过学校的人都知道，一项改革最怕

的不是失败，而是第二年没有人记得第一年试过什么；这份方案第一年最实在的产出，也许不是哪一条线赢了，而是一份写清楚支持、否定和没有结论的登记，让第二年的人从一个不同的起点出发。

方案写完，周校长把那叠打印稿收进了抽屉，只留下三张预注册卡。老陈看了一眼说："这回总算能看出谁错了。"林老师想的却是另一件事：等号小测的前测发到新一届初一手里，会有几个人在方框里填17；而已经升上初二的小宇，要是再做一遍这道题，会填几？下面，回到那个不再举手的学生。

带走的话

两个大问题不必一次答完，需要一组能互相校正的小研究。

小 账

方案做过吗？ 没有。这是给阳涌的设想方案，六个平行班、三位老师、每班四十五人都是假定的条件。

什么结果会迫使改口？ 三条线各有认输条件：关系任务只在当场有差别，就收缩成“改善当堂解释”；统一入口在条件改变题上一样好，六路径就收缩；卡片效果按 d_o 画出平线，乘积说法就输。

样本数字算准了吗？ 是开工前的粗算：每组约135人、个体波动0.15、班内相关0.15时设计效应约7.6，只顶18个左右独立观察；要用九月前测的实际波动重算。

结果能推到别校吗？ 不能直接推。一校一年级一年的结果只说明这个范围，搬走前要重查条件；老师知道自己在做研究，投入本身也可能造出差别。



结语

回到那个不再举手的学生

这一章的问题

一个不再举手的学生又举了一次手，这能说明什么、不能说明什么？

场景 三月底的习题课上，小宇在后排举手，问菜地课留下的问题：墙变短了，最好的答案为何落在墙边？

◆ 一、他又举了一次手

三月底的一节习题课上，林老师讲完一道行程题，照例问还有没有问题。教室里安静了几秒，后排有一只手举起来，举得不高，像是怕被人看见又怕没人看见。是小宇。他问的不是这道行程题，而是一个多星期前菜地课留下的那个问号：墙变短了，为什么最好的答案偏偏就落在墙的边上？

林老师没有马上回答。她让他到黑板上把墙画出来，再画几个长方形，一个比一个往外挪。小宇画到第三个，自己停住了，说："往外挪，面积就变小了，可是往里又挪不进去，墙只有这么长。"全班有人笑，因为他说这句话的口气，像是在跟那面墙讲道理。林老师在黑板右下角的"待决区"写了一行：最好的答案什么时候落在边上？没有人给他加分，下课铃响时这个问题也还没有完全收拢。

要说清楚，这一次举手不是故事的结局。它不能证明这本书里的任何一个判断，也不保证小宇下周还会举手；一个构造出来的学生，本来就证明不了什么。我们把它放在这里，是因为它恰好让前面二十四章说过的几件事同时露了面。他举手，不是因为被鼓励，而是因为一个落差被留了下来，没有被一句"记住就

行"抹平；他问的问题，是一个关于条件的问题；而那个问号能在笔记里活过一个多星期，是因为这个班有一块允许问题过夜的地方。

导论里，林老师把小宇的作业本从九月排到一月，想找的是"有哪些地方本来可以接住他，却没有接住"。走完这本书，我们可以把那个问题换一种问法：这个学期，有哪些地方接住了他，又给下一次留下了什么？前一个问法找的是缺口，后一个问法找的是回写。一本书能做到的，也许就是帮一位老师从第一种问法走到第二种问法。

◆ 二、收回第一张底牌：动力是被接住的落差

导论的第一张底牌说，学习动力不是装在学生身上的一箱油，而是一段过程的产物。现在可以把这句话说得更具体一些。动力的来源，是学生想往哪里去、手里已经有什么、眼下能做成什么三者之间的落差，第三章把它叫作一场架：旧的算术习惯和新的方程操作打起来，没有落差，就没有要去够的东西。动力的机制，是这场架被接住，长出一点新的显露，比如"等号是天平的那根针"，再回写成下一次的起点。

沿着这条线，前八章其实给出了一张诊断的路线图。动力断掉，可能断在三个不同的位置，第五章分开讲过：矛盾被压平，一切顺滑却什么也没长出来；某一维被当成第一因，"他就是懒"一句话把路堵死；回写丢失，一次公开课很成功，下周回到原样。断的位置不同，药方也不同，换讲法、换路径、改规则，各对着一个位置。第六章又补了一笔：评价不是在学习之后打分，它在学习之前就参与了发生，一把只量"最快交卷"的尺子，会悄悄把讨论和反例变成碍事的东西。

这里面有些是概念规定，有些是等着检验的判断，应当分开放。说"动力是过程的产物而不是存量"，是这本书选择的看法，它的用处在于把注意力从"学生

想不想"引向"落差有没有人接"。说"同样的鼓励，在落差被接住的处境里比在没人接的处境里更持久"，就是一个经验判断了，第二十一、二十四章把它写成了可以被事实推翻的研究。如果几轮比较下来两种处境没有差别，这张底牌就要改，而且要改在纸面上，不能只在心里悄悄改。

对一位做了十六年课程的人来说，这张底牌最实在的推论也许是这样一句话：真正稀缺的，往往不是学生的油，而是教室里接架的那双手，以及让这双手接住的东西能留下来的那套规矩。前者靠老师，后者靠学校。

◆ 三、收回第二张底牌：系统思考是三句追问

第二张底牌说，系统性思考的最小单位不是箭头，而是三句追问：它是在什么条件里、经过哪些尝试长成这样的？从现在出发，下一步会往哪里走？它又反过来改变了什么？第九章把这三句对上了三条方程，后面六章分别从显露、错误、条件、时间、尺度和自我检验几个方向，把这三句话磨得更锋利。

小禾是这条线上的主角。她的问题从来不是笨，而是只会在一张熟悉的地图上走：题目一换问法，她就去找例题。菜地课给她的，不是又一道题型，而是一次亲眼看见答案随条件改变的经验，从正方形到靠墙的长方形，再到墙只有八米时落在边上的答案。会问"是哪个条件让答案变的"，比记住"周长一定时正方形面积最大"更接近系统思考，因为前者在墙变短的那一天还用得上，后者在那一天恰好是错的。

第十五章又补了一块最容易被忽略的拼图：系统思考的成熟标志，是知道自己的解释在什么情况下会错。一张能解释一切的大图，就像一个什么都能解释的星座运势，听上去周全，其实没有回答任何问题。会问三句的人，也要会问第四句：如果我错了，会在哪里先露出来？这一句不在三条方程里，它是证据责任，是母本反复强调、这本书每章都留了一段来交代的東西。

这张底牌同样有待检验。第二十四章给出的判据是：学会三句追问的学生，在条件改变的新问题上，应当比只学会解题步骤的学生表现更好。如果在设计得当的比较中看不到这种差别，我们就应当承认，三句追问只是把好的数学教学已经在做的事情换了一种说法；那也不算坏事，只是要说得谦虚一些。

◆ 四、两张底牌其实是同一张

导论里说过，你的两个问题是同一件事的两面：动力问这个过程能不能继续，系统思考问这个人能不能看见这个过程。走完全书，这句话可以落在一个更具体的地方，就是回写。动力的机制在回写里完成，一次被接住的落差要改写下一次的起点；系统思考的第三句追问问的也是回写，它又反过来改变了什么。一个学生开始会问第三句，往往也就开始能自己接住一部分落差，不必每次都等老师伸手。

学校尺度上也是同一件事。第十九章写周校长的改革为什么总在公开课之后回到旧样子，答案不在老师不够努力，而在经验没有回写进课程、协作时间、资料 and 评价这几样彼此拴在一起的条件里。一个人凭热情坚持的课堂可以照亮学生，但只有回写进制度，下一位老师才不必从头摸索。从小宇的作业本到青石中学的修订条，这本书讲的其实是同一个动作在不同尺度上的样子。

所以，如果只能从这本书里带走一句话，我们希望能是这一句：入库不算发生，回写才算。学生做了多少题、听了多少课，是入库；他下一次面对问题时，起点有没有不同，是回写。学校开了多少次教研、写了多少份总结，是入库；明年接手的老师打开的是一张修订条还是一叠旧教案，是回写。

◆ 五、使用三方程时最容易走偏的地方

母本的最后一章专门讨论了这套理论最容易被用坏的地方，这里收成几句话，作为这本书的告别。第一，三个字母要守住各自的边界，不能把老师、学

生、教材分别贴成 S、D、E；同一个东西换了尺度可以换角色，但每次都要重新说明。第二，结果出来以后，不能随手调换字母的位置去认领它；一个解释如果怎样都对，它就没有经受检验。

第三，三条方程是关系的速写，F、G、H 是占位记号，不是可以把分数代进去算的公式；要变成模型，就得像第二十二章那样，交代每个量代表什么、怎样测、误差多大、怎样的结果会让人改口。第四，加入了 D 和 E 之后，如果并没有多出任何可以检验的区分，就应当承认这一回三方方程只是在整理语言；更简单的解释够用时，保留更简单的解释，这本身就是系统思考的一部分。

第五，也是对这本书自己最要紧的一条：理论不应当处处点头。这本书是为一位读者重写的，它努力贴近你的课堂和你的问题，但它没有义务同意你的每一个判断，也没有义务同意它自己。如果你在真实的班级里看到书中的判断不成立，那正是这本书最想收到的回信。

◆ 六、给你的下一步

阳涌，这本书不打算给你一套新的教学模式，你见过的模式已经够多了，学校的文件柜里大概也装不下更多的模式了。它想交给你的，是一种看课堂的办法，和一组可以在一所学校、一个年级里第一年就开始的小研究。第二十四章写了三条线：理解形成线、路径选择线、回写与制度线，各自写清楚了第一年要看什么、用什么证据、什么结果会迫使我们改口。

如果嫌三条线太多，也可以从最小的一步开始：选一个学生，一本作业本，一张记录卡。把他一学期的作业按日期排开，像林老师那样，贴上便利贴，找出那几个本来可以接住、却没有接住的时刻；再在下一个单元里，有意识地接住其中一种，事先写下要看什么、看多久，好坏都记。一学期以后，你手里就有了一

条属于自己课堂的差异序列，它比这本书里任何一个构造的例子都更有说服力，也更可能推翻这本书。

小宇的那个问题，最后是怎样收拢的，我们没有写，因为那是他自己的事。这本书能做的，是让他问题有地方过夜，让他的老师知道该在哪里伸手，让伸过的手留下痕迹。下一次学习如果因此有了不同的条件，这本书也就完成了它的一次发生。

带走的话

动力与系统思考是同一件事的两面：入库不算发生，回写才算。

小 账

这次举手证明了什么？ 什么也证明不了。小宇是构造的学生，这次举手只是让前面几件事同时露面，也不保证他下周还会举手。

什么结果会推翻它们？ 设计得当的比较中两种处境没有差别，第一张底牌就要改；只学会解题步骤的学生在新问题上一样好，三句追问就只是换了一种说法。

两张底牌都定了吗？ 没有。“动力是过程的产物”是本书选择的看法；“落差被接住时鼓励更持久”“会三句追问的学生在条件改变题上更好”是待检验的判断。

书给的是新模式吗？ 不是。它只给一种看课堂的办法和一组小研究，判断要靠读者自己的课堂来检验，甚至推翻。



附录

本书附三件材料：与母本的逐章对照、术语小词典、课堂与教研工具。

附录A

本书与母本的对照

为什么要有这张对照表

这本书没有按母本的章节顺序写。母本《SDE 三方程导论》共四十二章、九个附录，从三维定义一路走到三条方程、三原理、六路径、科学检验和技术应用，那是作者为一般读者铺的路。本书从阳涌的两个问题出发，把同样的理论重新编排成四部二十四章，路线、篇幅和案例都换了。

路线换了，理论不能走样。重写之前，我们先从母本中抽出二十七条"不变量"：三个维度各自的含义与边界，三条方程是占位记号而不是公式，123 原理的三笔纪律，回写要被观察，六路径不是学生类型，以及贯穿全书的证据责任。每一章写完，都要能说出它承载了哪几条不变量，并且没有一条讲歪。

下面第一张表回答"本书每一章来自母本哪里"，第二张表回答"母本每一章去了本书哪里"。两张表合起来，可以让读者在两本书之间往返核读，也可以检查有没有哪条理论在重写中被悄悄丢掉。

本书各章的来源

本书章节	母本主要对应章	承载的主要不变量
导论 一个不再举手的学生	导论、第1章	I-1、I-2、I-3、 I-4、I-6
第1章 先跟着他走一遍	第1、5、9章	I-1、I-2、I-3、I-4
第2章 三条方程	第2、17章	I-6、I-7、I-8、I-25
第3章 动力不是一箱油	第18章（前半）、第15章	I-9、I-11、I-12、 I-13
第4章 想去哪里	第10章	I-14、I-15、I-18

本书章节	母本主要对应章	承载的主要不变量
第5章 动力断在哪里	第18章（后半）、第19章、附录C	I-9、I-10、I-11、I-12
第6章 分数、奖励与"想学"的真假	第10章（后半）、第13章	I-3、I-15、I-18、I-24
第7章 同一种教法为什么总有人不适合	第22—25章、附录D	I-20
第8章 什么时候该换一条路	第26章、附录D	I-21、I-25
第9章 系统性思考不是一张更大的图	第3、12章	I-6、I-23、I-25
第10章 会答题以后还要看什么	第4—8章	I-1、I-5、I-24
第11章 错误怎样接成路	第9、11章	I-2、I-16、I-17
第12章 菜地与围栏	第36章（前半）	I-9、I-12、I-20、I-24
第13章 四十分钟并不只是一种时间	第21章	I-8、I-23
第14章 从学生到课堂到学校	第31、33、38章	I-4、I-23
第15章 系统思考的反面	第4、17、39章	I-7、I-24、I-25
第16章 回写	第15章	I-8、I-12
第17章 教具、符号与意义怎样彼此牵动	第13、14章	I-3、I-19
第18章 成熟、退化与重组	第16、20章	I-17、I-22
第19章 学校怎样记住经验	第16、36（后半）、37章、附录G	I-12、I-22、I-23
第20章 当 AI 进入课堂	第29、35章、附录E	I-12、I-26
第21章 把一个教育设想写成可证伪的研究	第4、27章、附录F	I-24、I-25、I-27
第22章 一个小模型	第40章、附录B	I-6、I-8、I-25
第23章 和系统科学、因果研究、其他教育理论坐一桌	第28、30、32、34章	I-24、I-25、I-27
第24章 两个问题的研究组合	第41章	I-10、I-20、I-24、I-25
结语 回到那个不再举手的学生	第42章、结语	I-6、I-11、I-25
附录B 术语小词典	附录A	全部
附录C 课堂与教研工具	附录C、D、F	I-12、I-20、I-21、I-25

母本各章的去向

母本的前二十一章讲三维、三方程、机制、回写与联立，在本书中被拆开，分别编入第一部（动力）和第二部（系统思考），因为阳涌的两个问题恰好从两个方向用到同一套理论。母本第二十二至二十六章的六路径，在本书集中成第7、8两章，并且全部改用数学课堂的入口来讲。

母本第二十七至三十二章讨论研究方法、跨学科比较、教育智能体与知识创新，在本书被分成两处：教育智能体（第29、35章）编入第三部第20章，研究与比较（第27、28、30、32章）编入第四部。母本第三十一章"教育经验走出课堂时的边界"并入第14章的尺度讨论。

母本第三十三章（自适应网格与因材施教）、第三十四章（科学发现怎样改变后来者的条件）和第三十五章（长期智能体）离阳涌的两个问题较远，本书没有单列成章，而是压缩成几段，分别放进第14、23、20章。理论内容保留，篇幅让给了与两个问题直接相关的课堂。

母本第三十六章的贯穿案例中，研究生与企业的对照没有沿用，校园菜地的数学课被扩展成本书第12章，作为同时回答两个问题的主课例；学校改革的那一半，进入第19章。母本第四十章的小模型在第22章重写，第四十一章的研究组合在第24章改写成给阳涌的工作方案，第四十二章"使用三方程时最容易走偏的地方"收进结语。

母本九个附录中，术语附录改写为附录B，张力、路径与研究登记的工具合并为附录C，建模附录并入第22章，智能体记录与教研经验附录分别并入第20、19章。母本附录H、I讲个人版本的继承关系与思想来源，由本附录和参考书目代替。

附录B

术语小词典

这份词典只收本书真正用到的术语，大致按它们在书里出场的次序排列。每一条先给一个大白话的意思，再给书里的一个小例子，容易用歪的地方补一句常见误读。查词典的用处，是把一个词送回它原来的问题里去，而不是让词替问题说话；哪一条读完仍然觉得空，回到它出场的那一章，看它在小宇、小禾的课堂里是怎样被叫出来的。

显露 (S)

显露是事物在一定条件下被看见、被维持、被识别的样子。它是一条从弱到强的连续谱，刚冒头的、暂时稳住的、已经僵化的，都算显露，所以它既不只是"最后结果"，也不只是"结构"。说一个学生的某种理解显露了，要顺带说清向谁显露、通过什么表现、在哪类任务里、稳到什么程度，可识别、可维持、可表达是三个不同的台阶。小禾的分数除法题全对，算是可识别；可她说不清三分之二除以三分之一为什么等于二，可表达那一级还没有到。常见误读是把答对当成显露的全部，其实答对只是其中一扇窗。

差异序列 (D)

差异序列说的是差异怎样被比较、试探、修正、承接，最后接成一条路。它关心的是这一环和下一环之间有没有可以说明的承接，所以它不等于"变化"，不等于"做了多少题"，也不等于动力。林老师把小宇九月到一月的作业按日期排开，哪一次错误有人帮他看清错在哪里，哪一次只换来一个红叉和一句"粗心"，这一串就是他的差异序列。常见误读是把D直接翻译成"动力"：一个孩子可能很愿意继续却找不到能接上的路，另一个能顺着步骤做完却不想再多问一句，这两件事要分开看。

特征纠缠 (E)

特征纠缠是知识、工具、规则、关系、身体和自我看法等特征彼此限定、缠在一起构成的条件，它参与发生，是一起上课的"看不见的同学"。小宇已有的分数知识、作业制度、同桌、课上谁有资格发言的规矩，还有他心里那句"我不是学数学的料"，缠在一起限制了他下一步能走哪里。用 E 解释一件事，至少要给出一条可以被反驳的作用链，比如"只收快速正确答案的规矩，让说出不懂的代价变高，于是错误不再被说出口"。常见误读是把 E 说成"环境"或"背景"，或者把人和物排成一张合影，就算交代了条件。

三条方程

三条方程是 $S=F(D,E)$ 、 $D=G(S,E)$ 、 $E=H(S,D)$ 。翻成大白话：眼下的理解，是在某些条件里经过某些尝试长出来的；下一步怎么走，由眼下的理解和条件一起决定；新的条件，又是这一下的理解和尝试留下的。放到小宇身上，就是三个可以回答的问题：他现在能做什么，是哪些尝试在哪些条件里造出来的；他下一步会怎么走；这一学期给他留下了什么新条件。第二部说的系统思考"三句追问"，就是这三条方程的日常版。用第三条方程时要把旧条件和时间放回去，新条件是由旧条件加上本轮的显露与路径更新而来的，否则就像每次学习都从一间刚打扫过的空屋子开始。

F、G、H

F、G、H 是三个不同的字母，提醒我们三条方程写的是三种不同的生成关系：生成显露、组织路径、更新条件。它们是元层次的占位记号，不是可以把考试分数代进去算的公式，也还不是已经估计好的模型。要把它们变成模型，得交代观察单位、变量、时间顺序、机制、参数和比较对象，第二十二章老陈和林老师争论时用到的 s_t 、 d_t 、 e_t 小模型，就是一次带着示意参数的尝试。常见误读是说一句"F 是一个复杂函数"就以为解释完了，这句话只是给还没说明的东西换了个名字。

互生

互生是说三维在同一次发生中相互生成：理解长出来的同时，路径在改，条件也在变。学骑自行车时，平衡感、蹬踏节奏和对这辆车的熟悉是一起长出来的，很难说谁先谁后。互生不等于循环论证，它站不站得住，要看三维在具体研究里能否分别被识别、能否面对独立的材料、能否和别的解释放在一起比较。常见误读是一遇到质疑就说"它们是互生的"，把这个词当成免检通行证。

承接

承接是本书里"接住"的正式说法：一个差异出现以后，它能进入下一步，后果被保留下来，局部结构能够形成，而且以后还能修订。林老师在小宇的错误旁边问一句"这一步你是怎么想的"，再把他的回答带进下一道题，这个错误就被承接了。日常里，菜咸了一次，下次放盐时想起它，是承接；吃完就忘，就只是咸了一次。

123 原理

123 原理是本书的动态引擎：两维之间的矛盾累积，逼出第三维改变，这个改变回写原来的两维，新的矛盾又在被改过的条件里生成。小宇学一元一次方程时，旧的"等号就是算出答案"（属于他的 E）和新的"两边同时减去同一个数"（属于 D）打架，这股张力被接住，长出"等号是一个天平"的新显露，再回写他下一次看等式的方式。早期的 123 原理还是一道诊断工序：先找准讨论的是哪一个发生事件，再识别冲突的两个视角，再找被忽略的第三个视角；只有当对立影响到价值获取时，矛盾才成为需要处理的问题。常见误读是把任何"一二三步"都叫作 123 原理，它只指这一个驱动循环。

三种改变

三种改变是 123 原理的三种应用，母本称为 SDE 三原理：D 与 E 的张力推动 S 改变，S 与 E 的失配推动 D 改变，S 与 D 持续不相容时改变 E。林老师对小宇的三次尝试正好落在三个位置上：换一个讲法，换一条任务路径，改发言与评

价的规则。三个位置都是候选，不是判决；字母排得对称，现实不一定对称，选哪个位置要比较机制、权限和代价。常见误读是看到几个"三"就以为是同一层理论，123 原理、三种改变和意义三律住在不同的楼层。

回写

回写是新显露反过来改变后来可用的信息、判断、工具关系或行动权限。林老师把小宇作业上的"粗心"改成"在符号转换处卡住"，如果之后的讲评、选题，以及小宇自己检查作业的方式都跟着变了，这次改写才算回写。回写要被观察，不靠宣布；写进了记录本、开过一次认真的复盘，都还不等于回写。日常里，钥匙找到以后，有人从此把钥匙挂在门口，有人下周照样满屋找，前者才有回写。

负向回写

负向回写是回写往坏的方向走：一次显露确实改变了后来的条件，却把条件改得更窄。"粗心"这个标签进了作业评语，进了家长会，最后进了小宇自己心里，以后他每次出错，老师和他都先想到"又粗心了"，真正卡住的那一步就再也没人去看。对付负向回写，要有撤销和修正的机制，让错的标签可以被拿掉，而且拿掉这件事本身也留下记录。

意义目标 (D1)

意义目标是差异序列里的方向层，回答"往哪里去"。它常常不是事先写在心里的一张纸条，而是在活动中长出来的：菜地那节课上，"围得最大"起初只是题目默认的要求，围成走廊的那一组说窄地好打理，全班商量过后，"先弄清最大能有多大"才成了一个被说明过的目标。常见误读是问"这个学生有没有目标"，更有用的问法是"他有没有机会让目标长出来"。

路径组织 (D2)

路径组织是推进方式，回答"怎么走"：先做哪一步，后做哪一步，哪里试，哪里停。菜地围栏那节课里，全班先用绳子围、试算几组长和宽，再猜最大面

积，最后才用剪纸去证明，这就是一种路径组织。D1、D2、D3 三层不是三种人格，三层之间也不是单向的指挥链，执行中的发现可以改目标，就像周末骑行途中发现一条河边小路，终点也跟着改了。

优化约束（D3）

优化约束管的是误差、冗余和损耗，回答"怎样少走冤枉路"。它是一把双刃剑：约束得好，学习省力；约束过度，就会"高效而贫血"，把还没证明有用的尝试提前删掉。一个班把"最快交卷"当作唯一指标时，讨论和反例都显得碍事，看上去效率很高，其实什么也没长出来。所以评价标准本身也要接受质疑。

特征律

特征律说的是：差异一再出现，渐渐稳定成可以指认的特征，目标才由此发生。"函数"一开始对初一学生没有可指认的样子，直到某次他亲眼看到两个量的联动，这个词才有了一张脸。日常里，一个人起初分不清两种咖啡，喝过十几次以后忽然能说出"这杯更酸"，从这一刻起，"我想找酸一点的豆子"才可能成为目标。

自由律

自由律说的是：矛盾纠缠触发，路径被裁剪，新的模式被激发；自由是长出新路的能力。量筒里放玻璃珠那节课，小禾习惯一行一行列表，问到水面要升到15厘米时表格长得写不下去，她才把"每颗0.4厘米"拿出来直接算，得到的不只是一个答案，而是"原来路可以自己开"。这条律并不贬低已有的选择权，能在几种现成方法里挑一种，也有它的现实价值。

幸福律

幸福律说的是：张力积累，模式转换，能量释放，它解释"继续做下去的那股劲"从哪里来。一道题卡了三天终于通了，那一下的痛快会把人推向下一道题，这就是幸福律在起作用。母本说的心的满足、身的快乐、灵的喜悦是解释的

维度，不是给学生打分的诊断量表。意义三律可以互生，但不是一条固定的流水线，它们和 123 原理也分属不同层次。

六步法

六步法是一条差异序列常见的推进节奏：猜想、执行、评估、反馈、修正、迭代。菜地那节课上，全班先猜“越方越大”，算几组数，比较结果，听别的组的反驳，修改猜想，再算下一轮。每一步都有常见的失败，比如评估只看对错，修正只是抄答案，书里的口诀是“猜想要野，承接要严”。学做红烧肉一次只改一个变量，就是在认真地走六步。

九步法（分化、重组、升维）

原有的问题结构承接不住时，在六步之后再加分化、重组、升维三步，合起来是九步。到顶的信号是：循环还在转，修正却不再带来改善。小禾在“去括号”上反复出错，平均分掩盖了两类不同的错误，把它们分开是分化；改按“符号跟谁走”重新组织是重组；追问“为什么要有负数”是升维。常见误读是一卡住就急着升维，其实多数问题在六步里就能走通。

秩序、混沌、介生

这是描述差异组织状态的三个分析词：秩序偏向差异被固定得很牢，混沌偏向差异很多却接不起来，介生是差异能够被承接的那种状态。介生的要害是承接，差异能进入，后果能保留，局部结构能形成，结构还能被修订。一个讨论热闹却什么也没留下的课堂偏混沌，一个只许照例题格式作答的课堂偏秩序。常见误读是把它们当成物理相变或好坏排名，它们只是分析语言，也没有一个可以测出来的“最佳中点”。

成熟、退化、重组

这三个词描述具体过程与结构的状态：成熟是结构能稳定地承接差异，退化是结构还在运转却越来越接不住新问题，重组是在条件具备时重新组织结构。书

里的数学社团从热闹走到成熟，又因为"太顺"慢慢僵化，后来在新的问题面前重组。它们说的是社团、课堂或某种做法，不评判任何学生的整体人格，也不是每个系统都必经的生命周期，重组需要条件。

三界（现实界、理念界、自我界）

三界是特征纠缠的一种分法：现实界是身体、器具和空间，理念界是概念、规则和制度，自我界是记忆、身份、情绪和意志。有理数减法那一周，过道上那条黄胶带数轴和学生转身、倒退的动作在现实界，减法法则和"走错不扣分"的约定在理念界，小宇心里那句"我算不好负数"在自我界，三者彼此牵动。一只杯子在现实里是玻璃，在理念里是"容器"，在自我里是"奶奶送的"，说的是同一个道理。母本还把信息分为符号、逻辑、数学三种模态，它们彼此往返，不是阶梯；把能量分为内能、动能、势能三种状态，这是组织性说法，不是物理量。

SIO

SIO 是主体、互动、对象三个词的缩写，是母本用来观察显露的内部语言。看小禾能否说清分数除法，要同时看她这个主体怎样理解，她和同学、老师怎样互动，分数这个数学对象本身怎样被呈现，三者是一起显露的。常见误读是把 SIO 当作 SDE 的另一套译名，主体、互动、对象和 S、D、E 并不逐字母对齐。

六路径

六路径是从 S、D、E 哪一维起手、按什么次序检查的六种排列，母本的名称是：EDS 沉淀型、ESD 锚定型、DES 倒逼型、DSE 原型型、SED 进入型、SDE 再创型。没有哪一条更高级，选哪一条，看这一次任务最吃紧的是哪一维。同一个学生在不同任务里可以轮换入口，常见误读是把它当成贴在学生身上的永久类型，比如说"小宇是倒逼型的孩子"。这本书本身走的就是倒逼型：从一个已经带着推动力的过程出发，再去找缺的条件。

沉淀型与锚定型

这两条都从 E 起手。沉淀型（EDS）从较丰富的条件与经验进入，让比较活动促成新的显露：体育委员抄了两个月的一分钟跳绳成绩，林老师组织大家比较谁进步得多，"多了几分之几"慢慢浮了出来。锚定型（ESD）先借一个可辨认的显露定方向：学生面对一堆生活数据无从下手，一张一周气温的折线图帮他们决定接着比较什么。用沉淀型要先查经验是否真的可以调用，资料夹厚不等于手里有知识；用锚定型要让锚点可以被修改，否则它会从路标变成禁止提问的展品。

倒逼型与原型型

这两条都从 D 起手。倒逼型（DES）从一个已经有推动力的问题出发，再去补解决它所缺的条件：小宇想知道哪种手机套餐最省，由此被逼出了"用字母表示一个会变的数"和"两边相等意味着什么"，也就是方程。原型型（DSE）先做一个粗糙但能操作的方案，再在试用里积累条件：先画一张菜地草图，围起来不对再改。用倒逼型要判断问题是否超出眼下可承受的范围，强烈的好奇不会自动兑换成全部前置知识；原型型的"先做出来"也不等于把风险都留到以后。

进入型与再创型

这两条都从 S 起手，起点是一个已经存在的好作品、好题或好做法。进入型（SED）先进入它赖以成立的条件，再组织自己的尝试：学一道经典好题，先弄明白它为什么这样设条件。再创型（SDE）从可继承的显露出发，通过改条件、找反例、换表示长出新东西：理解了围栏求最大面积的方法之后，追问"沿墙那条边能不能比墙还长"。算不算再创，要说清保留了什么深层关系、改动了什么、有没有长出新的判断能力。

任务 DNA

任务 DNA 指一个任务里 S、D、E 三维各自吃紧到什么程度，用来决定从哪一维起手。问题的推动力很强、条件却缺，适合倒逼型；材料堆得很多、方向却没有，可能需要一个锚点。日常里，去一个陌生城市，有人先看地图，有人先走

两条街，合不合适看的是这座城和这一趟要办的事，而不是这个人天生是哪种人。

换路

换路是在入口与处境不配时改用另一条路径，它需要依据：一个足够的运行窗口，出发前写下的信号，还要先排除疲劳、任务语言含混、时间被打断等别的原因。林老师给小宇试了两周倒逼型，效果不明显，该换还是该坚持，要回头看出发前写下的那几条信号。如果换路的同时老师多给了帮助，还要分清改善到底来自哪里。常见误读是凭当天的感觉换路，结果变成"教学版的频繁换台"。

尺度转换

尺度转换是在学生、课堂、学校之间换观察层级时，重新说明同一个事物扮演什么角色。一个学生的理解、一节课的讨论规则、一所学校的课时安排，放在不同尺度上，谁是显露、谁是条件，要每次重新定义，而且要说理理由。时间也有尺度，钟表时间、学习轮次、制度周期各是一种。常见误读是把个人成绩加起来就宣布学校成熟了，就像一家人各自作息都规律，并不等于这个家的晚饭开得准时。

证据责任

证据责任是全书的底线：用整体视角看问题，要承担的证据只会更多，不会更少。每个主张先领对自己的身份，是概念规定、哲学解释、经验判断还是实践建议；书里构造的课堂场景只作解释和推演，不当作已经发生的事实或实验结果。每个可检验的主张都要预先写好怎样算错；如果加进D和E以后多不出可检验的区分，或者结果出来后可以随意调换S、D、E的位置，这个解释就没有经受检验，而更简单的解释已经够用时，就保留那个简单的。第二十一章"倒逼型入口能否提升初一学生在方程单元的持续投入"那个设想，正是先写下"怎样算我错了"，才配叫一项研究。

附录C

课堂与教研工具

这里有三张卡，分别对应书里反复出现的三个关口：出发前怎样选路、改变之后怎样看它又改了什么、动手研究前怎样把判断写下来。它们都可以直接打印出来，一张卡对应一个学生、一个小组或一个研究设想，填不满的栏目就空着，空着本身也是信息。卡片的用处不在填得多齐全，而在于让下一位老师拿起来时，能看懂当时发生了什么、为什么这样做，而不只收到一句"这个班适合某某型"。

三张卡之间是接力关系。选路记录卡管的是第七、八章说的入口与换路；回写检查卡管的是第十六章说的"入库不算发生，回写才算"；研究预注册卡管的是第二十一章说的"写得出怎样算错的设想，才配叫研究"。一个想法往往先在选路卡上试几周，在回写卡上看出点门道，再被写进预注册卡，变成一项正经的小研究。

选路记录卡

这张卡用在出发之前和换路之前。它要求老师写下三件事：这一次任务最吃紧的是哪一维，为什么选这条入口而暂时不选别的，以及什么信号出现时继续、什么信号出现时换路。最要紧的是信号必须在出发前写好，否则两周以后回头看，人总会替当时的自己找一个顺手的理由，就像开车走错了路，事后都说"本来就想绕一下"。

林老师给小宇用倒逼型入口时，任务是从"哪种手机套餐最省"走到用方程比较两种计费。第八章写过，她头两周没有填这张卡，两周后看着作业本，每个现象都能往两边解释。补填的那一张，运行窗口写的是接下来三周；继续信号是"在题目没要求的地方追问一句'要是……呢'"、"列式前先用字母写出要找的

量";换路信号是"三周里问题仍停在'哪个便宜',说不出费用和流量怎样一起变"。"需先排除的原因"一栏里,她补记了前两周的元旦汇演和月考复习,还有出租车题里"超出部分"四个字造成的读题错误。三周后再翻作业,她先看的是这一栏和信号栏,而不是自己当天的心情。

卡上最后一栏"给下一位老师的一句话",要写条件和理由,而不是标签。"小宇在有真实比较对象的问题里愿意多算两步,但列式时符号转换会卡住",比"小宇适合倒逼型"有用得多,因为后来者能判断自己的处境和当时像不像。

栏目	填写提示
日期、对象与任务	写清是哪个学生或小组、哪一单元的哪一个任务。
这一次要处理的发生事件	用一句话说出要推动的是哪一段学习,避免泛泛写"提高兴趣"。
任务 DNA 判断	S、D、E 哪一维最吃紧,依据是什么(作业、发言、访谈中的具体片段)。
选定的路径及理由	写母本名称(沉淀型、锚定型、倒逼型、原型型、进入型、再创型)和选它的理由。
暂时不选的路径及理由	至少写一条,例如"学生还没理解示例依赖的概念,暂不用再创型"。
运行窗口	计划观察多久:几节课、几轮作业,或到哪个单元节点为止。
继续信号(出发前写)	出现什么可观察的表现,说明这条路值得走下去。
换路信号(出发前写)	出现什么可观察的表现,说明入口与处境不配。
需先排除的其他原因	疲劳、任务语言含混、时间被打断、额外的老师帮助或同伴变化等,逐条记下当期是否出现。
实际观察到的关键事件	记几个关键片段及当时的上下文,不必转录整节课。
决定及依据	继续、调整还是换路,对照的是上面哪一条信号。
下一步怎样修正前一步	写出具体改动,例如换了哪道题、加了哪个锚点。
给下一位老师的一句话	写条件和理由,不写类型标签。

回写检查卡

这张卡用在一次改变之后。课堂里的改变常常很热闹，一次公开课很成功，一次谈话很动人，一条新规则贴上了墙，可下周一切又回到原样。回写检查卡逼人追问的只有一件事：这次改变，后来又改了什么？它要求把"期望回写到哪里"拆开写，是后来可用的信息、判断、工具关系，还是行动权限，然后约定一个时点回头看。

林老师把小宇作业上的"粗心"改成了"在符号转换处卡住"。她在卡上写的期望回写有四处：批改时先看负号有没有跟着搬家，而不只看答案（信息）；小宇做题时在移项、去括号前停一下（判断）；草稿边上留一栏"代回检验"（工具关系）；小宇能说出"我在这儿卡住了"，而不只是被宣布"又粗心了"（行动权限）。观察时点定在寒假以后二元一次方程组的消元那几课，那里负号又要搬家。她还在"负向回写排查"一栏里写下：原来的"粗心"评语已经出现在两次家长沟通里，需要在下一次沟通时当面更正，并把更正这件事记下来。

这张卡也保存"没有回写"的情况。改了却什么也没留下，可能是时间不够，可能是建议本身没用，也可能是观察时点选错了。把这些写下来，下一轮设计才有地方下手；只保留成功的片段，后来的人会以为改变总在顺风里发生。

栏目	填写提示
这次改变是什么	写清日期、对象，以及改动落在哪个候选位置（讲法、任务路径还是规则）。
改变前的样子	用一两个具体片段描述改变前的表现，留作对照。
期望回写到哪里	分开写：后来可用的信息、判断、工具关系、行动权限，各期望怎样变化。
观察方法与时点	由谁、在什么时候、看什么材料来检查；时点要考虑延迟，别只看当天。
实际看到的变化	记录证据片段；区分"写进了记录"和"后来真的用上了"。
记录与回写的区分	这次的记录有没有改变后来的选题、讲评、分组或学生自己的做法。
负向回写排查	有没有标签、评语、档案或自我看法因此变得更窄；它出现在哪些地方。
撤销与修正办法	如果有负向回写，怎样撤下、由谁负责、更正本身记在哪里。

栏目	填写提示
没有回写时的原因	时间不够、建议无用、观察时点不对、条件被别的变化抵消等，照实写。
新出现的矛盾	这次改变之后，在被改过的条件里冒出了什么新问题。
下一次检查时间	定一个日期，并写明到时候看什么。

研究预注册卡

这张卡用在把一个教育设想变成研究之前。它的核心是在结果出现之前，先写下自己准备怎样判断，尤其是“怎样算我错了”。写不出这一栏，设想就还只是一个愿望；写得出，即使结果不如意，这次研究也交出了清楚的下一步。卡上还要分开主要结果和探索性结果，事后发现某个小群体好像受益，可以记作下一轮的假说，但不要悄悄把它改成研究最初的目标。

林老师 and 老陈想检验“倒逼型入口能否提升初一学生在方程单元的持续投入”。入口是整班一起换的，所以他们在卡上写的观察单位是班，学生个人的记录在班内汇总；比较对象是按常规讲授推进的班，常规班也用同一道文化衫题，只是放在讲完解法以后。主要指标只选一个，“第五、六周选做题的自愿完成率”，订正里写出的错因和单元结束两周后一道换了情境的延迟任务作辅助指标，并写明容易混淆的反例：课上发言变多不等于提出了更多独立的问题。竞争解释写了三条：新鲜感、老师投入增加、同伴效应，并约定记录两个班的老师辅导时长。老陈在“怎样算我错了”一栏写得很干脆：如果第五、六周实验班的自愿完成率没有比对照班高出十个百分点，就承认入口在这个单元里没带来持续投入上的差别；如果差别在前两周很大、到第五、六周几乎为零，就说明这个入口至多带来了新鲜感。

只有四个班时，即使随机决定哪两个班用新方案，也很难排除班级原有的差别，所以他们在卡上把这一轮定位为可行性检验和测量打磨，而不是效果证明。另外两栏同样重要：实施失败和理论失败要分开写，老师在合理工作量内做不下来，和预测被事实否定，是两回事；停止规则也要写，例如任务持续造成明显挫败时就停。学生参不参加研究记录，不影响他得到正常的教学支持。

栏目	填写提示
研究问题	一句话，包含对象、做法和想看的结果。
主张的身份	标明这是概念规定、哲学解释、经验判断还是实践建议；只有经验判断需要这张卡的后半部分。
观察单位	学生、小组、课堂还是学校；换尺度时角色要重新说明。
比较对象	和什么比：另一个班、同一批学生的另一单元、常规做法；说明两者在资源和时间上是否对等。
主要指标及操作定义	写清怎样测，附一个容易混淆的反例（如"发言多"不等于"独立提问多"）。
次要与探索性指标	单独列出，事先说明它们只作探索，不替代主要结论。
时间窗口	何时开始、何时测量；包括延时测量，因为有些显露会晚到。
竞争解释	至少写三条（如新鲜感、老师投入增加、同伴效应），以及怎样区分它们。
怎样算我错了	写出具体结果模式；若更简单的解释已经够用，就接受更简单的解释。
实施失败与理论失败	分别写：做不下来是什么样子，预测被否定是什么样子。
停止规则	出现哪些情况就停，例如持续挫败、工作量超出承诺、数据质量不足。
告知、同意与退出	按学校适用要求处理；参不参加记录，不影响学生的正常教学支持。
研究者自身的位置	写下研究者对结果的期待、学校的需求等可能影响记录和解释的因素。
修订记录	定义或计划若有修改，写明时间、理由，以及对原预测的影响。

参考书目

本书的思想母本与直接相关的 SDE 著作列在下面，供继续追索。母本原列的三十六条书目中，有关神经科学、生态学与人工智能研究的外部文献，本书没有直接使用，未予转录，读者可在母本中查到。

1. 王德生：《SDE 三方程导论：科学论证、运行机制与技术应用》，SDE Universes 第 51 号专著，2026 年 7 月网络版本。
2. 王德生：《SDE 本体论入门：世界是如何发生的》，终稿，2026。
3. SDE Universes：《SDE 本体论入门：世界是如何发生的》专著页，2026 年 7 月 11 日更新，<https://sdeuniverses.com/books/sde-ontology-intro/>。
4. 王德生：《从三视角的 123 原理到 SDE 的三原理》，SDE Universes，2026，<https://sdeuniverses.com/column/ontology-grid/123-to-three-principles/>。
5. 王德生：《SDE 内部的三角关系：从子三角到理想边界情形》，SDE Universes，2026，<https://sdeuniverses.com/column/triadic-relations/>。
6. 王德生：《共同点的陷阱：教育发生学中的"入方程"》，SDE Universes，2026，<https://sdeuniverses.com/column/into-equation/>。
7. 王德生：《追问即发生：提问的失稳一回写模型及其可裁决预测》，SDE Universes，2026，<https://sdeuniverses.com/column/questioning-as-genesis/>。
8. 王德生：《伪发生：当机器能流畅生成一切，如何分辨真的新结构》，SDE Universes，2026，<https://sdeuniverses.com/column/pseudo-genesis/>。
9. 王德生：《SDE 思想创新智能体的工程原理（增订版）》，SDE Universes，2026，<https://sdeuniverses.com/column/thought-innovation-agent/>。
10. 杨建（导师：王德生）：《大语言模型的本质：一个 SDE 发生学透视》，SDE Universes，2026，<https://sdeuniverses.com/column/llm-essence/>。
11. 王德生：《如何应用 123 原理》，2020 年课程，2021 年整理稿。

12. 王德生：《123 原理剖析本体论 27 宫格／123 原理奥秘初探》，2020 年课程，2021—2025 年整理稿。
13. 王德生：《六路径发生学方法论及其在教育、健康、商业中的应用》，工作稿，2026。



判 词

动力不是一箱油， 是被接住的落差。

——本书判词

一个五年级时会追着老师问鸡兔同笼的孩子，到了初一，数学书常常立着。另一个孩子熟题又快又准，题目换个问法就慌。这本书从这两个学生出发，回答一位数学教育者的两个问题：学生学习的动力从哪里来？学生怎样学会系统性地思考？

全书以王德生《SDE 三方方程导论》为思想母本，用初中数学课堂重写：等号是天平的那根针，错题怎样接成一条路，一块菜地的围栏怎样让动力和系统思考在同一件事里一起发生，学校又怎样记住经验。

书中人物与学校都是构造的，数学推导都经过核算；每一个可以检验的判断，都写明了怎样才算错。

入库不算发生，回写才算。

德麦国际出版社 · Demai International Press

德麦国际专著第 489 号 · 思想母本第 51 号 · 四部二十四章 · 约 15 万字

定价 US\$20.00

