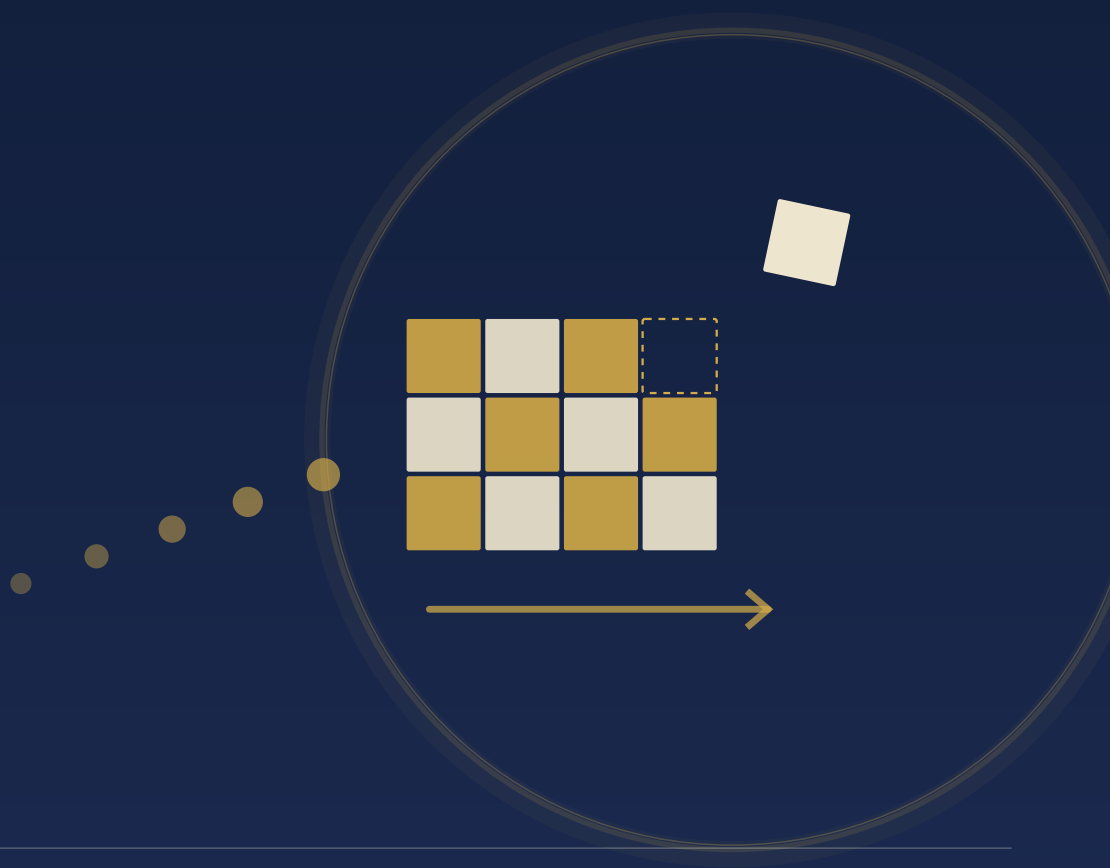


孩子的 数学理解 是怎样发生的

从旧知识的重新理解
到有根据的保留与修订



陈春妮 著

孩子的数学理解是怎样发生的

从旧知识的重新理解到有根据的保留与修订

陈春妮 著

小学数学·教师研修

SDE Universes 第531卷

2026年10月 网络发布版

出版说明

书名 孩子的数学理解是怎样发生的

副题 从旧知识的重新理解到有根据的保留与修订

作者 陈春妮

版本 2026 年 10 月网络发布版

系列编号 SDE Universes 第 531 卷

开本 190×250 毫米

内容 导论、五编二十五章、结语与六项附录

本书以小学数学课堂为主要场域，讨论新学习怎样改变旧知识的关系、条件与用途，以及教师如何在儿童的独立行动中观察这种变化。

文稿引述、已有研究叙述和为论证设计的任务分别标示。新增的课堂片段、任务卡及参考回答用于说明与研修；其数学关系可独立核查，学习效果仍需课堂研究验证。

网络阅读、逐章学习与“知返”智能体共用本版正文。书中保留的原始文稿编号，见附录 F；参考资料与思想来源，见附录 E。

本版为网络发布与教师研修使用版本。出版登记信息以正式登记文件为准。

<https://sdeuniverses.com/books/m/531/>

ISBN 979-8-90690-531-4

作者简介

陈春妮，1978年5月生，湖北宜都人。高级教师、楚天名师、湖北省特级教师，宜昌市第一届、第二届、第三届名师。担任北师大基础教育教材培训专家、湖北师范大学教师培训项目授课专家、宜昌市卓越教育人才培养计划项目组导师，入选宜都市拔尖人才。

现主要担任宜都市教学研究室教育发展研究中心主任、小学数学教研员，主持宜昌市和宜都市名师工作室。她的课堂情智共融，深受学生喜爱。曾获国家级赛课一等奖、省市级优质课奖，并获宜昌市教师基本功竞赛第一名。

在《中小学数学》《小学教学》等杂志发表文章四十余篇，已出版一部学术专著，研究成果获“宜昌好教研”成果二等奖。

主持的“春妮工作室”获评湖北省优秀网络教研工作室。她独创的“1+2+4”团队工作法有效促进了教师成长共同体建设，被评为宜昌市优秀班级管理作法。

怎样使用这本书

从一个孩子的判断开始

可以依次阅读五编，也可以先选择自己熟悉的一节课。先保留孩子在没有额外提示时的原话、作品或操作，再带着材料进入相关章节。读懂理论的起点，是说清这个孩子已经做到了什么，还有哪种判断缺少证据。

把保留与修改放在一起观察

本书关注“有范围的回写”：条件变化以后，哪些理由仍然有效，哪些判断需要修订，修订能否进入后续使用。比较改变、保持、恢复条件和替代依据的任务，有助于避免把“多改”误当成“理解更深”。

用学习包组织共读与教研

配套学习包按二十五章配置阅读目标、具体活动、参考判读和证据记录，并提供八次共读安排及六张课堂记录表。练习中的示例均为研修设计，使用者应保存自己的实际课堂材料。

让智能体帮助追问与核对

“知返”可以围绕本书定位观点、比较解释、推敲任务和复核判断。提问时提供章节与具体材料，要求它指出依据和尚不能判断的部分。AI 生成的回答需要回到原文与数学关系复核。

阅读、学习包与智能体的统一入口：sdeuniverses.com/books/m/531/

目录

导论 一节课怎样改变了我们对旧课的理解.....	1
第一编 课堂里的怪事.....	11
第1章 会算的孩子读不懂图.....	12
第2章 $3+2=5$ 对了, $5=3+()$ 却错了.....	21
第3章 三个月后, 孩子为什么仍在数格子.....	29
第4章 我是看出来的.....	38
第5章 规律对了, 锅换了.....	47
第6章 理解理论看见了什么 本书还能增加什么.....	56
第二编 理解是什么.....	67
第7章 理解的形成与显露.....	68
第8章 去程与返程 好的符号是能走回来的压缩.....	79
第9章 旧知改名: 从新学习中重新看见旧知识.....	90
第10章 孩子拿哪个不同在判断.....	107
第11章 理解的三块地.....	117
第三编 理解为什么发生与卡住.....	127
第12章 引擎 旧知与新差异的顶撞.....	128
第13章 显露怎样形成 讲授应当在什么地方到来.....	138
第14章 回写 会了以后回头改了什么.....	145
第15章 理解卡住的三种方式.....	160
第16章 并存与回弹 三个月后怎样继续观察理解.....	170
第17章 这台引擎不是三步教学法.....	179
第四编 老师能做什么.....	184
第18章 起手比用力更重要: 六类课的六种起手.....	185
第19章 让孩子自己走那段差异.....	201
第20章 设计相撞: 让旧知出庭.....	212
第21章 看见理解 三种证据与回看题.....	225
第22章 老师的理解也是这样发生的.....	238
第23章 AI 进课堂以后 孩子老师与机器.....	248
第五编 还没回答的问题.....	260
第24章 本书可能错在哪里.....	261
第25章 理解之后 留给初中别的学科与每一个孩子.....	269
结语 一棵树摇动另一棵树之后.....	278
附录 A 二十道回看题与参考判读.....	283
附录 B 三种卡住方式的课堂观察表.....	302
附录 C 课堂诊断与验证协议.....	305
附录 D 教师语言与理论术语的对照.....	311
附录 E 参考资料与思想来源.....	313
附录 F 陈春妮文稿与课例索引.....	317

导论 一节课怎样改变了我们对旧课的理解

从一份已经通过的教案说起

一份教案经过多次修改，课堂环节已经顺畅，同事认为可以拿去上课。这时，再提出“还可以怎样改”，往往比第一次备课更困难：每一处安排都已经合理，继续修改仿佛是在否定此前的努力。《数字编码》课之所以适合成为本书的起点，就在于它把问题推到了这一刻——一节已经得到认可的课，究竟还缺少什么？

我在《教育，是生命间的互相影响》（文稿 05）中回忆，这节《数字编码》课已经磨了好几遍，参与磨课的老师们都认为可以了，陈禄凤老师却指出学生的学习状态仍较被动，并表达了更高期待。我随后从阅读中获得启发，结合编码的数学本质，以任务驱动重新设计课堂；我记下的转折，是学生积极参与、有价值的发现与创意，以及自己由此产生的职业幸福感。这段自述提出了本书要追问的问题：当教师重新认识了“好课”，过去那些被称作好课的课，会发生什么变化？

过去的课当然不会重新发生。当年的板书、活动和练习仍然是那些板书、活动和练习，改变的是教师怎样理解它们，以及这种理解怎样参与下一次备课。一段过去看起来流畅的问答，后来可能被认作教师替学生完成推理；一段曾被认为拖慢进度的争论，后来可能被认作学生开始辨认概念条件的时刻。

这种改变不是给过去贴一张新标签。只有当新的理解能够指出旧课堂里谁承担了关键判断、哪些问题被提前回答、哪一种学生反应被遗漏，并使下一次教学出现有根据的调整，我们才能说，旧经验的意义发生了改变。倘若教师只把“讲清楚”换成“自主建构”，实际安排依旧让学生等待结论，词语更新了，判断课堂的方式却没有更新。

教师身上的这件事，为观察孩子提供了一个入口。学会一种新的计算方法之后，孩子有没有重新理解原来会做的计算？认识等号的关系含义之后，他怎样再

读曾经写过的 $3+2=5$ ？学过割补之后，他怎样说明数格子为什么能够测量面积，又怎样判断什么时候仍值得数格子？这些问题把目光从新课的终点，移回了旧知识重新被看见的地方。

新题做对以后还有什么需要看

设想这样一个教学片段。孩子计算 $28+4$ ，先把 28 补到 30，再加剩下的 2，得到 32；之后他学会竖式，也得到 32。这里的数字与任务用来说明问题，并不代表已经核实的课堂观察。如果孩子能分别执行两种方法，却不能说明口算中的“补到 30”与竖式中的进位怎样相关，我们已经看见两项技能，却还没有看清两项技能之间的关系。

教师可以继续增加新题，让孩子把算法练熟，也可以暂时回到 $28+4$ ，请他在自己的口算记录中指出竖式里的那个“1”从哪里来。后一问并不要求他机械复述一次教学过程，而是让新的写法解释原来的动作。当孩子能说明十个一被重新记作一个十，并把这件事用于解释旧题时，旧知识获得了一个可以继续使用的位置。

本书把新学习使旧知识的关系、条件或用途获得重新解释，并能够据此继续行动的变化称为“旧知改名”。“名”指旧知识在关系中的位置，改变可以显露在语言、操作、绘图、选择或纠错中。它不以出现新术语为标志，也不要求删除旧方法。

这里需要分清三件事：儿童当前能否接通新旧关系，这个儿童与自己先前相比是否改变，以及这种改变是否影响后续学习。当前任务可以支持第一种判断；第二种判断还需本人可比的旧作品或过程记录；第三种判断须有时间在后的独立结果，并处理其他可能解释。全书沿用这三个证据层级。

日常生活中，认识一座城市也有类似经历。一个人原来只会从家走到学校，学会看交通图以后，熟悉的小路可能成为两条线路之间的连接，原先认为绕远的

路可能在某些时段更合适。街道没有移动，变化的是它们在行动中的关系。这是帮助理解“改名”的类比，不是证明儿童学习机制的研究证据。

本书的中心问题

新学习能够改变旧知识，已有明确的研究前史。逆向迁移研究直接考察这种影响，折返研究讨论学习者重新进入并丰富早先理解，适应性专长关注随约束变化调整技能。SDE 相关前卷也已经讨论回写。本书接受这些继承关系，把进一步的问题放在修改的范围及其后续作用上。

当条件改变，儿童能否指出哪一条理由受到影响，保留仍有支持的部分，修改已经不适用的判断，并使修订进入下一次使用？本书把这个方向称为“有范围的回写”。范围是否恰当由具体数学关系约束，而不由教师希望学生改动多少决定。一个理由失效，只意味着该条支持需要重审；结论能否保留，还取决于是否存在其他有效依据。

这项区分带来三个相互衔接的问题。第一，修改有没有选择性，既减少该改未改，也避免不该改却改。第二，孩子是否能分开处理理由与结论，避免一条理由受损便全盘否定。第三，已经识别的修订是否进入后续行动，成为下一题检查条件和选择方法的资源。第 9 章界定其含义，第 14 章推演发生环节，第 21 章给出观察协议，第 24 章安排比较性检验。

本书据此提出一种可审查的诊断框架：在同一概念中配置改变、保持、恢复条件和替代依据任务，保存儿童自己的前期记录，分别观察保留、修订与后续调用。任务中哪些结论成立，可以用数学推导核对；儿童是否因此形成新的关系能力、该记录是否增加诊断或预测信息，则是需要课堂证据回答的问题。

例如，在每面连续烙三分钟等既定条件下，三张饼的锅容量从二增加到三，总工作量保持，原来的九分钟排程仍然可行，但六分钟的新排程使它不再最优；图示画大而实际尺寸标注不变时，实际面积应保持；材料叠放后，纸片材料总面积

积与桌面覆盖面积会出现不同变化。对象、表示、所求量与允许操作必须分别说明，才能判断哪里需要修改。

三种不同强度的主张

回看旧知识可以形成有内容的教学对话，也可以成为教师观察理解的任务。这是本书直接展开的教学主张。更强的诊断主张是：回看能补充一般解释、迁移、反例与延时任务未充分提供的信息。进一步的机制主张是：旧知识的条件关系经过重组，改变了后续判断和学习。后两者需要同其他解释和任务比较，不能只凭教学设计本身成立。

理解的观察应保留多种入口。儿童可以用动作、图示或简短选择说明关系；流畅复述也可能尚未接入独立行动。首次建立某个概念时，旧知识未必已形成清晰的可回看对象；熟练活动中，一些条件检查也未必逐句外显。因此，回看是理解证据的一项来源，其适用范围随内容、学习起点和支持条件而改变。

若公平比较表明回看记录没有增加信息，本书应将相应工具定位为一种便利的教学与观察安排；若价值只在某些内容出现，就明确那些条件。这样的结论仍能帮助教师选择工具，同时限制理论主张的强度。

相互联系的三个观察方面

“改名、并存、回弹”分别引向联系质量、策略关系与时间变化三个观察方面。改名问旧知识的关系和用途是否重新组织；并存问不同方法如何共同使用；回弹问曾经出现的新理解在后续条件下是否不再稳定。这些方面可能交叉，不能组成一张互斥、穷尽的儿童类型表。

并存尤其需要拆开理解。孩子可以有意识地选择数格子、分割、补形等不同方法，这种有联系的多策略使用往往很有价值；孩子也可能分别记住几套程序，碰到表面线索就调用其中一套，却不能说明适用条件。两种情形都表现为多种方法存在，其关系质量却不同，不能仅凭“用了旧方法”作出判断。

数格子本身也不是割补的错误版本。数格子通过面积单位的计数或估测获得面积，割补借助分割、移动与重组，在面积保持的条件下把难处理的图形变为容易处理的图形。两者可以在面积单位及面积可加性等关系上接通，但不能简单说成同一种程序，更不能因为孩子选择数格子就断定理解倒退。

回弹则是一个需要时间证据的说法。没有先前能够独立完成并解释的记录，后一次出错只能说明当前遇到了困难；它不能证明一种稳定理解曾经形成又消失。即使确有前后差异，也要考察任务难度、提示变化、表达负担和练习间隔，而不能把所有差异归于旧观念的力量。

本书将在第9章界定这些词，在第16章讨论其变化条件，在第21章转化为可修订的观察编码。遇到证据不足的回答，允许记作“暂不能判断”；同一个孩子在不同概念与任务上可以有不同记录。分类是帮助继续观察的工具，不能成为教师停止提问的理由。

三块地与一次理解的发生

本书用“手边的地、脑中的地、心里的地”表达理解发生的不同条件。手边的地包括可操作的材料、任务限制与同伴提出的证据；脑中的地包括孩子能够调用的概念、规则与经验；心里的地包括他如何看待自己的判断、能否承担尝试，以及是否愿意把不确定的想法拿出来。三者是相互影响的观察入口，不是三只彼此隔绝的容器。

例如，比较角的大小时，孩子可能先注意到边长，因为此前的测量经验让“长短”更容易成为判断依据。教师改变边长而保持张口，或者让孩子自己转动两条边，才可能使另一种关系进入观察。若孩子担心错误会立即换来否定，他可能继续猜测老师期待的答案，材料的改变便未必成为他自己的问题。

在这样的解释中，理解既不由材料单独产生，也不由一句启发式提问单独产生。我们需要追踪孩子原来据什么判断，新任务暴露了什么不一致，孩子承担了

哪些比较与修正，新形成的看法又怎样影响下一次判断。只有把这些关系写清，理论才没有停在为课堂现象重新命名的层面。

SDE 为本书提供组织这些关系的理论视角：显露 S 指理解中的某种关系在活动中变得可辨认，回答、图画和操作等表现是作出判断的证据；差异序列 D 追踪辨别、尝试与修正怎样接续，特征纠缠系统 E 说明形成条件如何相互限定并被活动改变。三式 $S=F(D,E)$ 、 $D=G(S,E)$ 、 $E=H(S,D)$ 在本书中表达三种生成关系；它们尚未被操作化为可代入分数计算的模型。第 11 章说明 E 的完整三层结构，并限定“三块地”这一课堂表述的范围。

从这个视角进入课堂，需要写清每一次联系：旧经验怎样参与当前判断，什么差异被孩子辨认，新看法通过哪些活动形成，又怎样影响下一次可用的经验与条件。三式不会替我们确定这些具体联系，也不规定三个固定教学环节；本书的任务与记录必须对其作出内容层面的说明。

不能把所有理论都画成一架梯子

“梯子”是本书反思某类课堂安排的有用比喻：教师把直观、图像、符号排成一次性上升的顺序，仿佛到了符号层，早先的经验就只剩铺垫作用。然而，把这种课堂简化图直接归给所有理解理论，会遮蔽它们本来讨论过的重组、折返、转换、社会互动与多策略共存。批评应当针对能够核实的具体主张，而不是先把不同理论压平，再宣布自己的视角填补了所有空白。

第 6 章比较相关理论怎样解释课堂问题，并用共同任务审查最接近的解释；第 9 章在此基础上界定旧知改名与有范围回写，给出数学任务、证据层级及可能失败的判断。本书的新增工作必须落实到可说明的任务、记录或适用范围。

从已有理论中获得支持与确立独立贡献，是两项相关的工作。回看工具可以具有课堂价值而不拥有首创的基本思想；新的任务组合也需要说明其增加了什么。本书以概念边界、共同任务与可核查材料说明贡献，不以自我评价代替外部比较。

跨学科材料也须服从同一纪律。记忆研究或机器学习现象，可以帮助提出问题，却不能因为某个描述听起来相似，就证明儿童课堂里发生了同一种机制。未经核实的候选文献先进入核查表，完成来源与结论范围核对后，才进入承担论证重量的位置。

理论继承与本书的位置

本书的理论立足点是王德生提出的 SDE 思想体系，数学教育中的具体讨论同时与理解、表征转换、逆向迁移、折返和适应性专长等研究对话。思想来源、研究文献与我及合作者的课例分别记录，使概念的继承和课堂材料的证据作用保持清楚。

《学习如何发生——SDE 三方方程的教育思考与实践》已经讨论理解的显露、回写及一次经验怎样改变下一次的条件。其第 10、11、16 章与本书问题直接相关。本书继续把这些问题细化到小学数学：一项旧解释对应什么任务，条件改变触及哪条理由，保留与修订如何分别记录。前卷的构造场景提供理论启发，不能充当本书儿童的实际记录。

本书也承认《答案之后——数学学习的智慧》等前卷已经提出旧知识改写与持续回看。教学场景、名称或观察栏目的增加，尚不足以建立新的学习机制。本书的候选增量在于成组任务及其判读关系：把需要改变与需要保持的情形配对，把理由支持与结论真值分开，再用独立后续任务检验这些判断是否进入使用。

我及合作者的课堂与教研文稿为本书提供具体问题、教学安排及部分研究记录。理论帮助这些材料形成可讨论的联系；材料中的限制、反例和数学细节也约束理论。正式引用保留合作作者与文稿编号，新增任务单独标明设计身份。任何一项原材料都只承担其实际能够支持的判断。

这种写作位置允许本书形成研究价值，而不提前认定一种全新的理解机制已经成立。可明确提出的概念区分先通过数学案例论证；能够试用的任务先检验题意、负担与评分一致性；涉及独立机制和效果优势的判断，再进入比较研究。

五编怎样相互接续

第一编从五类课堂疑问出发：会算为何未必读懂图，熟悉等号为何仍可能误读关系，延后使用旧方法意味着什么，沉默的判断如何被看见，条件改变为什么使规律失效。它们共同要求教师暂缓把“答对了”当成唯一终点，却不预先宣布所有疑问都只有一种解释。第6章把这些疑问带进理论比较，为后文确定讨论边界。

第二编回答本书怎样观察理解，逐步区分显露、返回、旧知改名、判断依据与发生条件。第9章是论证中心，它必须给出支持主张的材料，也必须主动呈现最强的竞争解释。读者应能据此判断，眼前出现的是一个新词，还是一项可通过课堂任务检验的变化。

第三编讨论理解怎样发生以及怎样卡住。张力、解释和回看构成需要反复检验的关系，不能变成要求孩子表演的流程；直接讲授、练习、好奇与工具发现等路径，也应在各自适用条件下得到讨论。特别是在学生尚缺必要经验时，教师提供信息可能使探索成为可能，而不是必然夺走探索。

第四编把前面的讨论落实为备课、追问、错例使用、回看题与教研安排。六种起手方式是一组帮助教师比较选择的提问，不是六类课固定对应六条路线的定律。同一种任务可以因儿童已有经验不同而改变入口，同一个孩子也可能在过程中转向另一种表示或解释。

第五编专门讨论本书可能错在哪里，并把检验延伸到初中及其他学科。附录提供可以修改的题目、观察表、研究方案和来源台账。工具一旦进入课堂，就应接受儿童实际反应的修订；若它只能记录预想中的三种回答，遇到其余反应就把孩子判错，那么需要先修改的是工具。

全书的材料与判断约定

附录F列出25份作者文稿，作为课例与研究叙述的来源索引。正文沿用“文稿00—24”编号，区分既有教学记述、共同研究与新增教学构造。不同文

本对同一事件的措辞与文学化程度不完全相同，本书不将其拼接成一份逐字实录，也不将不同孩子的发言接成一个人的连续经历。

全书采用三种材料身份。原稿记述支持对相应教学安排和作者经验的讨论，超出其记录范围的细节不作补写；构造任务用于推演数学关系和设计观察，可以直接核算其答案，却不包含已经发生的儿童反应；研究假设说明尚需比较的机制、诊断或效果主张。各章末的材料说明集中交代本章特有来源与限制，通用规则不再逐节重述。

判读遵循三项共同约定。第一，先保存儿童独立反应，再记录材料、同伴和教师的帮助；第二，确认个体变化须同本人前期资料比较，证据缺失可以暂不判断；第三，联系变化与后续进步的因果解释，需处理起点、练习、语言负担、教师支持及任务熟悉等竞争因素。不同表达渠道均可提供证据，但数学正确性及适用条件保持共同标准。

面积研究的原稿记述涉及五年级两个班 138 名学生、同一问卷前测与三个月延后测，以及 12 名学生访谈。本书所据材料同时报告汇总表与交叉表的部分人数和比例有待核对。第 3、16 和 24 章分别讨论其教学问题、时间解释及数据资格；未核准数字不承担成效断言，延后使用旧策略也不直接称作理解回弹率。

我关于《数字编码》及工作室课例研究的回顾，保留了教学修改、研究受阻和指导方式调整等经历。它们帮助提出问题，不被扩大为对每位学生或教师都成立的规律。遇到原文中的数学表述需要修正时，正文说明原句所指与修订理由，使对材料的尊重同对数学关系的负责保持一致。

我们希望读者读完这本书后，多获得一个能带回课堂的问题：这项新学习，使孩子怎样重新看待他原来会做的事？追问之后还要观察，他是否能独立做通，是否能在变化中解释，是否能在一段时间后继续使用。答案可以支持本书，也可以迫使本书收缩某个判断。

一节新课让旧课获得新意义，一个新概念使旧方法重新找到位置，一次新的观察让一本书修正自己的说法。这里有相似的方向，却不能跳过各自所需的证

据。若“往回长”值得成为本书的主线，那么本书首先应允许自己在读者与课堂的回应中，回头改写自己。

第一编 课堂里的怪事

第1章 会算的孩子读不懂图

图已经摆在眼前

黑板上写着 $28+4$ ，旁边放着表示计算过程的图。数字不大，材料也熟悉，孩子能够算出 32，课堂似乎具备了理解算理所需的一切条件。可是，当问题从“得多少”换成“图中这一部分对应你的哪一步”时，原先顺畅的回答未必能够继续。

我在文稿 21《从“附属呈现”到“核心支架”：小学数学图形表征的教学重构》中提出这一问题：教师安排操作、展示图示并讲解，学生能够口算，却难以说明图中各部分与计算的对应。原稿以 $28+4$ 提出图示匹配与算法比较的设计，未附困难人数和完整逐字记录。本章据此分析两种分解路线；具体图卡与变化任务属于可供试用的教学设计。

教师容易把这个困难理解为孩子没有认真看。图就在面前，圈出了该圈的部分，箭头指向该去的地方，颜色也分得清楚，为什么还会看不懂？然而，“看见一幅图”与“知道这幅图在解释什么”之间，有一段不能由印刷质量代替的工作：儿童需要确定图中什么被当作一，什么发生了合并或交换，什么虽然换了位置却没有改变数量。

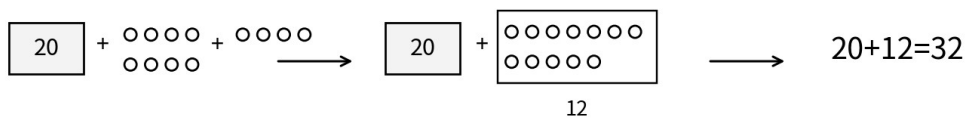
如果这一段工作尚未发生，图上的每一根小棒都可能被孩子认出来，整幅图的数学关系却仍然没有被认出来。正如人可以认出地图上的学校、桥梁与车站图标，却不知道从学校怎样到达车站；认出了组成图的对象，并不等于掌握了对象之间的路线。地图的这个例子是日常类比，用来澄清问题，不承担学习研究的证据作用。

本章要讨论的，不是算得快是否值得，也不是课堂应不应该用图。我们要追问，在材料、图像、算式同时出现的课堂里，谁完成了它们之间的对应；孩子能独立完成到哪一步；教师提供的帮助，究竟使这段对应成为孩子可以接着做的

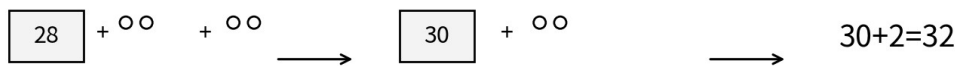
事，还是把它作为已经完成的答案交给了孩子。图在课堂中拥有一个位置，还不等于在儿童的思考中拥有一个作用。

两种图可以得到同一个 32

先把 $28+4$ 拆开来看。若把 28 看作 20 与 8，先算 $8+4=12$ ，再算 $20+12=32$ ，可以用“两捆各十根的小棒、八根散棒与新加入的四根散棒”表现；若先从 4 中取 2 补进 28，得到 30，再加剩余的 2，也能得到 32。两条路线的结果相同，动作安排与中间记录却不同。



甲 先合并个位



乙 先补到整十

方框表示框内标出的数量；每个小圆表示一个一。

图 1-1 进位加法中的两条数量保持路径

这一区别对于已经熟练计算的成人并不费力，因为成人可以在不同分解之间迅速转换。儿童未必如此：他可能已经熟练使用后一条路线，却仍把前一幅图看作一个需要另记的规定。教师说“都是一样的”，说的是两者在某种关系上的共同性；孩子听见“都得到 32”，却可能没有经历形成这种共同性的比较。

因此，呈现两幅图时，最先需要分清的是“都能表示这道题”与“最贴近我刚才的方法”。两幅图完全可能都正确，但不是同一动作记录。若题目只问“哪幅图对”，儿童选择了一幅正确图，我们仍不知道他是在匹配自己的操作，还是仅凭最后共有三捆两根判断。

教师也不能因为孩子选择另一幅图，就立即认定他没有理解。孩子可能在观察图时主动改用了另一种方法，或意识到自己刚才的口头说明并不精确。此时需要请他重新演示，让动作与语言互相校对；任务的目的在于看见对应关系，而不是逼他守住第一次说出口的路线。

进一步说，颜色也不能自动承担数学解释。红色表示新加入的小棒，是一种人为约定；十根散棒被捆成一捆，则体现了十个一与一个十之间的数量关系。前者需要读懂约定，后者需要认出单位转换。孩子混淆两者时，教师若只是重复“看红色的这一部分”，可能会使颜色成为新的答题线索，而不是帮助数量关系显露出来。

会算已经说明了什么

面对算得对却解释不清的儿童，最容易出现两种相反判断。一种认为结果正确就足够了，另一种认为不会解释就等于完全不懂。两种判断都过早关上了观察的门，因为结果正确确实提供了信息，却没有提供全部信息；解释受阻也确实值得追问，却未必说明已有能力只是空壳。

孩子可能凭熟练的凑十得到答案，说明他能够实施某种有效程序。也可能在心里使用了数量关系，却尚不能把它转换成教师要求的图式；还可能读不懂图的约定，但能够用自己的小棒摆法说明过程。若不改变表达条件，只重复同一个问题，这几种情况会在课堂上显得很相似。

教师因此需要把诊断问题拆开。先看孩子能否独立计算，再看他能否重现过程，随后看他能否把自己的过程与给定图对应，最后看换一幅画法是否仍能完成对应。这里说的是教师可以收集的不同证据，不是要求所有孩子严格按四个步骤学习，更不是把先后顺序当成理解发生的规律。

一个孩子可以先在图中发现关系，再改变原来的计算；另一个孩子可以先动手完成，再用箭头记录；还有孩子会先写分解算式，再回到材料检查单位。教学中的统一，应体现在数量保持、单位对应与解释可检验等标准上，不应体现在人

人必须同一时刻画同一种图。路径差异本身，往往就是教师识别学习条件的材料。

这些任务各有明确的结论范围。独立算对支持孩子能够执行当前计算，重现数量变化支持他能追踪一条过程，换图后仍能对应则进一步支持关系不只依附于原来的画法。证据可以累积，但不能相互冒充；某个环节受阻，应先定位受阻的工作，再决定需要补什么。

谁走过了图与算式之间的路

假如教师指着八根散棒说“这里是8”，又指着新添的四根说“这里是4”，接着圈出十根，解释满十进一，学生点头并抄下算式。这个过程可能有帮助：它向学生提供了观察方向和公共表达，也可能降低初学者面对复杂图形的负担。问题在于，点头之后还要知道，哪些关系孩子已经能够独立重建。

如果教师立即转向更多同型题，却没有让孩子承担一次对应，那么我们获得的是“说明已经提供”的证据，还不是“对应已经建立”的证据。教师说了什么，可以由录像核查；孩子获得了什么，需要孩子随后的独立活动提供材料。两者相关，却不能相互替代。

这里的独立也不是完全不给帮助。一个尚不熟悉图示约定的孩子，需要知道捆在一起的十根怎样画；一个语言表达困难的孩子，可能需要用指认或摆放回应。关键是帮助之后有没有留下需要他作出的判断，以及这个判断是否涉及本课的数学关系。若教师已经指定该选哪幅图、该圈哪几根、该写什么数字，学生只剩照做，那么操作虽然由孩子的手完成，关系的决定仍然可能由教师包办。

学做饭的日常经验能帮助理解这一点。有人把材料切好、火候调好、调料分成定量小碗，初学者照顺序倒进去，成品可能很成功；但换了锅、增加了人数，他未必知道该调整什么。这并不意味着示范没有价值，而是说下一次学习需要把某些判断交还给学习者，例如让他比较受热快慢、解释为什么此时调小火，并从结果检查自己的判断。

同样，一幅算理图应当成为孩子判断的对象，而不仅是答案的容器。教师可以保留示范，但在示范之后改变图的布局、去掉一种颜色、留下一个错误标记，观察儿童是否仍能找回数量关系。若所有理解只依附于原图的颜色和箭头，课堂就需要继续工作；若变了外观仍能解释，我们才多得到一条关系已经较为稳定的证据。

先接住图示教学已经提供的帮助

本章不把图示教学当作需要推翻的旧办法。图能够把隐蔽的中间步骤保留下来，让儿童重新查看；能够把不同方法放在同一视野中，减轻完全依靠口头记忆的困难；也能够给同伴之间的讨论提供共同对象。没有这些作用，许多数量关系会更难进入交流。

问题发生在一种过度推论上：既然图有这些潜能，只要展示了图，潜能就必然转化为每个孩子已经获得的能力。这个推论忽略了图如何被读，忽略了儿童此前掌握的符号约定，也忽略了同一个画面可以被不同的人依据不同线索解释。材料的可用性与学习者的实际使用，需要分别观察。

讨论图示教学，需要尊重已有表征研究对这一问题的贡献。本章批评的是某类课堂实施方式，不把某种简化的“动作—图像—符号”单向阶梯归给全部表征理论，也不声称已有研究没有讨论转换的方向与执行者。相关理论的具体边界将在第6章和第8章讨论；这里需要检查的，是某种课堂安排把三个形式依次展示，却没有进一步检查儿童是否建立了联系。

这一限制不会削弱问题，反而使问题更精确。我们不是要证明过去所有研究都漏掉了儿童，而是要查清在这一类课堂中，教师的实施方式是否把关键转换留在了自己的讲解里。对理论的公平与对课堂的严格可以同时成立，只有把批评限定到可观察的位置，下一步改进才不会散成态度宣言。

若从本书的三个观察入口来看，图、小棒与算式提供了可用条件，孩子所注意的颜色、数量、分组与位置构成了判断线索，他随后形成的解释则给出了当下

可见的理解。三者要连起来分析：不能只说材料丰富，也不能只说学生要主动，更不能因为出现了一个正确表达就宣布过程完整。新形成的解释还应能返回原来的操作，帮助孩子重新组织原先会做的事。

一次可以进入课堂的匹配设计

文稿 21 第二部分提出“你的想法和哪一幅图是一致的”这一匹配任务，并在匹配后追问两图的共同点、不同点及另一种算法的思路。下面沿着这一设计作进一步展开，具体图卡、追问分支和记录办法属于本章教学设定，供教师根据儿童起点修改。准备 $28+4$ 的题卡、足量小棒及两张简洁图卡：图甲把 28 分成 20 和 8，先将 8 与 4 合成 12，再与 20 合起来；图乙把 4 分成 2 和 2，先用其中 2 把 28 补到 30，再添剩余 2。图中每一步保留数量记录，不以颜色作为唯一线索，两图最后都得到 32。

先让孩子用自己选择的方法解决题目，并留下可以回看的痕迹。痕迹可以是摆好的材料、几个数、一条箭头，或由教师按孩子意思记录的简短说明。此时不急展示两张图，是为了尽量保留孩子自己的起点，而不是把所有人的操作预先整理成教材所提供的两个选项。

随后呈现图卡，提出一个有明确边界的问题：“哪一张更像你刚才的做法？请指出相像的地方；如果都不像，可以改一张，也可以自己画。”这一问保留了匹配目标，也允许孩子拒绝不适合的选项。教师所需的证据不是一个字母，而是图中某部分与孩子某次动作之间的对应。

若孩子只说“都是 32”，可以继续问：“结果我知道相同。你刚才先动的是哪一部分？图里哪里能找到这一步？”若他指出了位置，却不能继续，可以请他在图旁重新摆一次，而不立刻提供标准句。若他发现原来的记录不够清楚，允许修改；修订本身也是有价值的活动，不应被算作对第一次回答的惩罚。

在全班交流时，不必按“正确方法展示—教师总结”的单一路线推进。可以挑选两份结果相同但中间步骤不同的记录，让学生判断是否都成立；也可以挑选

一份图与算式不匹配的记录，要求指出最早出现不对应的位置。错误材料若由教师构造，应明确说是待检查的作品，不把它安到某个孩子名下。

接着设置一个局部变化。例如保持小棒数量不变，交换图上左右位置，或把红蓝两色都改为黑色，问原来的解释是否还成立。这个变化不需要让每位孩子完成很多道题，重点是比较他们依靠的是数量关系还是外观线索。对已经能稳定解释的学生，继续增加同型匹配未必有益，可以让他设计一幅“看起来接近、其实不能表示该步骤”的图，并说明问题所在。

最后回到孩子最初留下的记录，请他补上现在认为有必要的一笔或一句话。有人可能把口算中的“2”与图中的两根联系起来，有人可能补出“十个一换一个十”，也有人发现原来的图漏画了剩下的2。这些修改不必整齐一致；教师需要看的是，新任务有没有改变孩子解释自己原来方法的方式。

记录帮助的分量

如果一个孩子是在教师连续三次提示之后完成匹配，而另一个孩子独立完成，不能把两者都简单登记为“会”。但也不应把前者归作失败，因为提示可能已经使他获得下一次能够独立承担的线索。教学记录需要保留帮助发生的位置，才能决定后续是减少提示、改变材料，还是补充必要经验。

可以用简短叙述记录：孩子先依据总数判断，教师追问最先移动的一部分后，孩子找到图中的对应；更换布局后，他仍能指出该部分。这样的记录比“理解较好”更有信息，也比为每个细节赋一个分数更容易回到课堂。它同时保留初始依据、帮助内容与变化后的表现，没有把一次回答变成对儿童的固定评价。

教师还需要区分自己正在教学还是正在收集诊断证据。在诊断时直接告诉孩子“这里要看计数单位”，会改变任务原先要观察的东西；在教学时发现儿童缺乏这一认识，却坚持绝不提示，也可能让困难原地延续。两种活动都必要，区别在于事后如何解释结果：帮助之后的成功说明帮助下能够完成，不能倒写成帮助之前已经独立掌握。

什么时候不该继续加图

有些孩子的困难来自图式本身过于复杂。圈线交叠、箭头方向不清、三种颜色同时承担不同含义，都可能使阅读负担超过它提供的帮助。此时增加第三幅、第四幅图，未必丰富理解，反而可能增加儿童需要猜测的约定；教师应先简化一幅图，让它只承担当前最需要说明的一件事。

另一些孩子已经能够解释数量关系，只是不熟悉规定的画法。要求他反复临摹标准图，可能把原本的数学任务转化为格式训练。教师可以先接受有效的自创表示，再讨论怎样让别人更容易读懂；公共表示有交流价值，但其约定应被说明，而不是被当成儿童已有理解的唯一出口。

还要允许某些计算暂时主要依赖熟练程序。课堂时间有限，儿童注意也有限，不可能每一道题都完整展开其来路。本章主张的是在关键概念、代表性题目和出现疑点时保留返回的机会，并不要求持续拆开所有压缩。能在必要时展开，与每次都必须展开，是两种教学要求。

因此，本章的改进方向不是图越多越好，也不是儿童说得越长越好。教师要选择足以揭示关系的任务，给儿童承担关键判断的空间，再用适度变化检查判断是否依赖偶然线索。若一句简短说明和一个准确动作已经表达清楚，就没有必要为了看起来深入而延长问答。

怎样算本章说错了

本章提出一个可以检验的教学假设：相较于只观看教师说明，在适当支架下独立承担图与方法匹配，可能增加儿童对数量关系的独立解释与保持。若要检验，应使两种教学在学习内容、练习量、时间及材料清晰度上尽量可比，并在即时及延后任务中使用未原样练过的图。评分时应区分计算正确、对应正确、独立程度与条件变化后的解释，不把它们混成一个未经验证的总分。

如果样本与测量足以辨认具有教学意义的差异，而匹配活动仍未带来额外收益，那么“匹配优于讲解”的主张应收缩或撤回。若优势只出现在读图熟练的孩

子身上，应改写适用条件；若增加了阅读负担，反而妨碍原本能够完成的计算，也应据实记录。一次统计上不显著的结果不足以自动证明完全无效，但也不能以儿童“没有深度参与”为由无限逃避失败。

更直接的反例来自课堂本身：某些孩子听过清楚的示范后，便能独立换图、解释与迁移。这样的表现说明教师讲解也可能成为有效条件，我们不能因为孩子没有经历预设的匹配活动，就否认其理解。需要坚持的是检查儿童此后承担了什么，而不是把某一种教学形式宣布为通往理解的唯一入口。

本章结论与材料说明

图的价值，要看孩子能够借它完成什么判断，而不能只看教师已经用它说明了什么。

课堂问题与匹配思路来自文稿 21 的教学反思。两种小棒图、提示分支和变化任务为本章设计；原稿未提供其效果比较数据。教材原图及学生作品可作为后续验证材料，图式转换的理论背景见第 6 章。

留给下一章的问题

当孩子能够在小棒、图与算式之间找到联系，我们似乎向理解又走近了一步。但还要留意，算式内部的符号是否也被同样地理解：孩子读懂了加号两边的数量，却可能把等号只当成“接下来写答案”的信号。于是，同样是 3、2 和 5，只把式子换成 $5=3+(\quad)$ ，熟悉的计算就可能突然失灵；下一章将从这个位置继续追问，旧符号究竟在孩子那里叫什么名字。

第2章 $3+2=5$ 对了， $5=3+()$ 却错了

一个被描粗的等号

孩子没有把空格填完，而是在旁边重新写下 $3+2=5$ ，并把等号描得又粗又黑。这一细节出现在我的文稿 06《蹲下来看孩子，破除“知识诅咒”效应》中：面对 $5=3+()$ ，小凯没有给出预期的填空形式，而是回到自己熟悉的等式；同一篇文稿还记述，小文写出了 $5=3+(8)$ 。纸上都有等号，却不能据此认定孩子们已经赋予它同一种意义。

文稿把这些表现放在一年级新教材《挖红薯》的教研讨论中。教师提出的疑问是，既然早已告诉孩子“等号表示相等”，为什么还要重新认识等号？作者借这些作业片段提醒同伴：成年人听见一个符号时，已经自动带入多年累积的关系；孩子听见的，可能只是反复见过的一种书写安排。

这里需要保留观察与解释之间的距离。小凯改写式子，可能因为他把等号理解为计算结束的位置，也可能因为不熟悉空格出现在右边加数位置的题型；小文填 8，可能在调用“把前面出现的两个数加起来”的习惯，也可能只是一次偶然错误。单次作答不足以确定内在原因，但足以让教师停止把“已经讲过”当成“不必再看”的依据。

本章并不打算给这些孩子补上一段心里独白。我们要把已记录的反应转化为可以继续验证的问题：他认为等号两侧各在说什么？他会不会检查填入的数是否让整个式子成立？当两边的表达方式不同，却表示相同数量时，他能否承认两边相等？这些问题指向等号的关系含义，也指向孩子怎样重新阅读曾经做对的旧题。

正确答案为什么没有暴露问题

在 $3+2=()$ 这样的题目中，至少两种理解可以导向同一个答案。孩子可能认为左边的 $3+2$ 与右边待填的数必须相等，因此填 5；也可能认为看到等号就

把前面的计算结果写到后面，因此同样填 5。对这一道题而言，两种解释的动作没有分开，教师便无法仅靠正确结果判断孩子依据的是哪一种。

$5=3+()$ 让原先重合的两种解释分开了。若把等号右边一律当成答案位置，孩子可能无法把 5 看作左边已经确定的数量；若把等号理解为两边数值相等，则可以寻找一个数，使 3 加上它等于 5。计算难度并未突然增加很多，书写安排却要求孩子停止沿单向习惯读题。

因此，一组全是标准形式的正确题，可以证明孩子在这些形式中能够算对，却未必充分证明他理解了等号的关系性。说“未必充分”很重要：我们不是否认孩子已经具有关系理解，而是承认题目还没有把这种理解与另一种可行解释区分开。评价的不足有时不在学生表现太少，而在我们的任务允许不同认知得到同一外部结果。

从答案的位置转向两边的关系

等号的基本数学含义，是其两边表达式表示相同的值。 $3+2=5$ 与 $5=3+2$ 都可以成立，因为交换两边的位置并不改变相等关系； $3+2=4+1$ 也成立，因为两边虽然写法不同，表示的数值相同。这里没有要求两边的字数相同、算式形式相同，或必须一边是计算、一边是单独的数。

如果只向儿童增加一句定义，问题可能暂时被新的标准话语覆盖。孩子可以背出“两边相等”，遇到空格仍然把前面的数全部相加。教师需要让这句话进入可执行的检查：左边表示多少，右边表示多少，填入的数是否改变其中一边，怎样知道改变后仍然相等。术语要能约束行动，才不只是额外记住的一句话。

以 $5=3+(8)$ 为例，直接告诉孩子答案是 2 当然可以纠正这道题。但若希望观察他怎样理解原来的填写，更有信息的做法是请他把自己所写的式子两边分别表示出来，再问是否相同。摆出左边五个物品、右边三加八个物品之后，孩子面对的就不仅是教师说错了，而是自己的记录与所表达数量之间出现了不一致。

这种不一致并不保证每个孩子立即改变看法。有的孩子可能说题目本来就要求算 $5+3$ ，有的孩子可能不理解为什么要分成左右两边，还有孩子会怀疑是否允许把答案写在等号左边。教师由此获得的不同反应，比统一追问“等号表示什么”更能揭示下一步需要处理的条件。

天平帮助了什么又没有帮助什么

文稿 06 还记述了小轩在天平活动中的表现，并以两侧平衡作为理解关系的直观经验。天平可以使“只看一边”不够用：左侧增加或减少重量，会影响两侧的平衡；如果想保持平衡，就要同时考察另一侧。这种可见的反馈，为儿童理解相等关系提供了一种可操作的模型。

但是，等号不等于“一样重”。数的相等可以用重量模型表示，也可以用两组同样多的物品、两段同样长的线段等模型表示；数学关系本身不局限于任何一种物理量。若把“一样重”直接作为定义，儿童到了没有砝码的数量关系或数值关系中，仍可能需要重新建立联系。

模型还带着自己的限制。天平上的同色物体不必同重，异色物体也可以同重，只有在任务明确约定每枚单位砝码的重量相同时，数量与重量才能建立相对应。原稿没有给出小轩活动中砝码的完整配置，我们不能由“移动三个砝码后平衡”的叙述反推出一条具体数值等式，更不能把颜色当作重量值的证据。

因此，本章建议教师在使用天平后安排一次脱离天平的检查。请孩子判断 $5=3+2$ 是否成立，并让他选择自己的解释方式；如果他继续使用天平语言，可以追问“没有重量的数字，左右为什么也能写等号”。这一问不是故意增加抽象难度，而是检查模型所支持的关系是否已经能够离开模型的某些外观。

日常生活中的排队号码也有类似限制。拿号码牌帮助人们理解先后次序，但号码的颜色与纸张大小通常不决定谁先办理。模型中的哪些特征承担关系，哪些只是方便观察的安排，需要在使用中逐渐分清；否则，帮助理解的具体形式也可能成为限制理解的条件。

旧题怎样获得新的读法

本书所谓“旧知改名”，在等号问题上可以有一个较小而清楚的含义：原先被当作“写出答案的信号”的符号，逐渐被用于表达并检查两边的相等关系。改变的不是等号形状，而是孩子怎样使用它来组织和验证自己的书写。这个变化可以通过口头说明显露，也可以通过改错、摆放或选择反例显露。

因此，在孩子完成若干非标准形式之后，值得回到那道原先做对的 $3+2=5$ 。教师可以问：“现在再看这道题，你觉得等号两边分别在说什么？”如果孩子只是把刚学到的句子贴在旧题上，我们还需要观察他能不能用这句话处理自己的旧写法，例如判断 $3+2=5+1=6$ 这条记录有没有问题。

这条连写记录具有迷惑性。若按先算 $3+2$ ，再加 1 的时间顺序阅读，它似乎记录了有效过程；但等号连续连接的各式应表示相同的值，而 $3+2$ 与 $5+1$ 的值不同，因而这条等式链不成立。可以分别写 $3+2=5$ 和 $5+1=6$ ，或者写 $3+2+1=6$ ，把计算过程与相等关系安排得更清楚。

对低年级孩子而言，不必立刻引入“等式链”的术语，可以让他检查每一个等号两边是否同样多。若孩子发现自己的过程算对了，但记录方式让人误读，并主动把它拆成两行，这比只复述定义更具体地显示符号作用的改变。他保留了原来的计算，同时调整了用符号表达计算的方法。

当然，也有孩子能正确改写，却不愿意说“以前的我错了”。教学无需把概念变化变成一次公开认错。可以说“你原来记录的是先后步骤，现在要让每个等号都表示两边相等”，帮助孩子辨认两个任务的差别。让旧经验找到位置，比要求孩子否定过去更利于继续交流。

教师已经知道的恰是困难所在

文稿 06 借“知识诅咒”表达教师的一种处境：一个关系过于熟悉时，成人不容易重建尚未掌握它的人会怎样读题。本章把它作为教学反思用语。教师可以直接检查自己的语言：一句“很明显”，究竟省略了哪些仍需儿童完成的判断？

例如，“把5移到右边去想”对成人可能只是一种灵活说法，对一年级儿童却可能混淆符号位置与数量关系。再如，“答案不一定在后面”虽然纠正了书写习惯，却未必解释为什么；孩子可能只得到一条新规定，觉得老师现在允许把答案放在前面。教师需要让说明回到相等关系，而不是仅仅扩充可以接受的格式。

这并不要求教师始终假装自己不知道。专业知识的价值，正在于帮助教师预判哪些任务可以区分理解，哪些表达会造成额外困难，以及怎样用最少的提示使孩子继续判断。需要抑制的不是专业判断，而是把自己已经完成的推理误认为孩子也自动完成了。

一次不急着给定义的诊断

下面是一项新增教学设计，不是原稿06的课堂重现。可以先让孩子独立处理四种写法： $3+2=(\quad)$ 、 $5=3+(\quad)$ 、 $3+2=(\quad)+1$ 、 $4+1=3+2$ 。前两种中出现同一组基本数量，后两种让等号两边都出现运算；教师应逐题记录解释与提示，不以四题总分直接决定孩子属于哪一种理解类型。

如果孩子在第一题成功而在后面困难，不必立即公布关系定义。可以选其中一题，问“你怎样判断这个数可以填进去”，允许画物品、摆学具、口算两边或尝试代入。不同办法都可能显示关系意识；要求所有人必须用天平解释，反而可能把模型熟悉度混入判断。

若孩子把第三题填成5，可以请他按自己的填写分别表示等号两边，再观察反应。此时教师应尽量避免说“右边还多了一个”，因为这句话已经提示了要考察的差异。可以用“请把两边各自表示清楚，我想知道你怎样检查”保留更大的判断空间，再在必要时进入教学帮助。

如果孩子能够发现不相等，却不知道怎样修改，这仍是一条有价值的证据：他已经在使用相等关系检查，但尚需协调加法与未知加数。教师可以单独支持这部分计算，而不把计算困难整体解释为不懂等号。反之，若他迅速给出正确数字，却不能接受 $4+1=3+2$ ，应继续观察他是否只学会某种空格题技巧。

这样的诊断不需要一次收集所有可能形式。低年级儿童的注意、语言和情绪状态会影响表现，教师可以分散在短活动中进行，保留日期与任务。工具的价值是让后续提问更准确，不是把一节课变成持续测验，更不是让孩子觉得每一次犹豫都在被分类。

从比较到有理由地改变

诊断之后，可以组织有目的的教学。先让孩子比较两组相同数量但排列不同的物品，讨论为什么能够表示为相等；再让其中一组用合并的形式表示，例如三枚加两枚，对应另一组五枚。重点不是排列好看，而是孩子能否保持“表示的数量相同”这一判断标准。

之后改变表达式的位置，让 $5=3+2$ 与 $3+2=5$ 并排出现，请孩子说明它们表达的共同关系。对于仍把等号当箭头的孩子，交换物品的左右位置可能提供帮助；对于已经能理解的孩子，可以请他创造一条两边写法不同却相等的式子。两者都围绕同一检验标准，却不需要承担相同任务。

再往后，可以给出两个都可能成立的填写：在 $(\quad)+2=(\quad)+4$ 中，左框填 5、右框填 3 成立；左框填 8、右框填 6 也成立。此时不是要求儿童列尽所有数对，而是请他们观察这些例子怎样保持两边相等。若范围限定为非负整数，应明确说明；如果不给范围，就不能把自己的有限答案清单说成全部可能。

最后回到旧题，询问儿童愿不愿意修改自己原来的解释。这个回看不应变成固定台词“我以前认为……现在认为……”，因为有些孩子原先就有关系理解，有些孩子变化发生在检查方式而非语言上。可以接受“我原来就这么想，但现在会这样检查”的回答，只要有具体行动支持。

本章提出的教学顺序是供比较的一种安排，并非理解发生的统一路径。一个孩子可能在错误式子的检查中抓住关系，另一个孩子可能在天平上先看见平衡，也有人从同伴创造的两个表达式中得到启发。教师需要守住数学关系和证据标准，同时允许这几种起点在课堂中共存。

哪些变化还不能叫改名

出现标准表述而没有相应行动，是第一种需要警惕的情况。孩子说“左右相等”，却仍接受 $3+2=5+1=6$ ，说明新话语尚未稳定约束所有相关书写；这并不意味着他毫无进展，但不能只收一句回答就结束判断。教师可以保留“局部能用，换形式仍困难”的记录，继续观察。

第二种情况是只会处理训练过的反向填空。若孩子反复练习 $5=3+(\quad)$ ，可能学会“左边减右边已知数”的程序，却仍拒绝两边都有运算的等式。程序也有用，但它不能自动替代对等号关系的检查；回看题若只重复同一道形式，就会把熟练度误作关系变化。

第三种情况是教师在问题里已经给出新理解。例如问“你现在是不是知道等号表示两边相等”，孩子回答“是”，只能说明他同意教师的表述。应当另找一个不给关键词的任务，观察他怎样判断、怎样纠错；同时允许不善于说完整句子的孩子用动作展示，避免把语言流利度当成唯一证据。

第四种情况是没有旧表现却断言发生了变化。若第一次记录时，孩子已经能够解释并检查，我们只能说观察到了相应能力，不能替他编出一段原先只把等号当答案提示的历史。前期记录也不必是错的：孩子可能原来已会比较两边数量，后来又能解释连等和多解情形，正确认识同样可以获得拓展。本书讨论变化，必须尊重时间证据，不能为了观察改变而先诱导儿童说错；一个合理的理论故事，不能替代真实的前后材料。

这项主张怎样接受检验

本章较弱而直接的主张是，改变等式形式可以帮助教师发现标准计算题尚未区分的解释。它需要通过儿童实际反应检验：任务是否清楚，额外的语言或版式是否造成干扰，不同教师能否依据同一作品作出相近判断。若主要错误来自不熟悉题目指令，就应调整任务，而不能把全部错误归于等号观念。

更强的主张是，新学习使儿童重新理解旧等式，并对后续独立判断产生额外帮助。检验时需记录教学前后儿童的解释和行动，使用不完全重复的形式，并与获得相同练习时间、必要讲解的其他安排比较。不能仅因上完活动后的正确率提高，就认定改善由“回看”独立造成。

如果儿童的旧题读法没有明显改变，却能够稳定处理新等式、纠正错误记录并迁移到后续问题，那么“口头改名是必要标志”的主张应撤回。若关系性行为已经变化，语言仍然简短，就应修改表达要求；若回看任务不能比一般关系任务增加诊断信息，也应缩小它的特殊地位。允许这些结果出现，本章的主张才保留了接受检验的余地。

本章结论与材料说明

重新认识等号，关键在于孩子能否用相等关系检查旧写法，而不只是在原来的符号旁添上一句新定义。

作业片段、教研疑问与天平活动来自文稿 06。诊断题、等式链辨析及教学顺序为本章设计。原材料呈现的是个别表现及教师反思；判断某个儿童的理解是否改变，仍需保存其本人前后可比的作品与提示记录。

留给下一章的问题

当孩子能够回头解释 $3+2=5$ 时，原来那种“等号后面写答案”的使用习惯去了哪里？它可能在熟悉计算中仍然出现，却不再支配所有判断；也可能与新的解释互不相识，换一类题便重新主导行动。若过了一段时间，孩子又选择了旧方法，我们究竟应说他没有理解、理解消失了，还是他在合理地调用仍然有用的经验？下一章把观察拉长到三个月，继续分辨这些不同可能。

第3章 三个月后，孩子为什么仍在数格子

旧方法没有离场

一节课结束时出现了新方法，三个月后再次面对图形，有的孩子仍然数格子。教师可能感到失望：割补已经教过，学生也动手做过，为什么没有把更方便的办法留下来？然而，在提出“为什么又回去了”以前，还应先问一句：这一次数格子，究竟说明了什么？

我的文稿 02《以操作性理解的策略促进学生面积概念的发展》提供了一个值得细读的研究现场。研究选取五年级两个班共 138 名学生，由研究者本人教学，实施前测与课后三个月延后测，两个时间使用同一份问卷；另从两个班按数学学习表现选取 12 人访谈。问卷涉及三个面积问题，题目均有格子背景，研究既考察作答，也关注学生采用的方法。

文稿的价值，在于没有把课堂当场的成功直接当成学习故事的结尾。它把观察延伸到三个月后，试图追踪孩子怎样比较图形面积、哪些经验继续影响判断。原稿报告了割补方法使用增加，也记录数格子及其他判断方式仍然存在；这些现象把方法的获得、选择与保持区分开来，迫使我们追问一次教学留下了什么。

现有材料不能支持“三分之一发生了理解回弹”这一判断。原稿各表存在人数、百分比及分类合计的口径冲突，而且没有全体学生即时后测中稳定理解的记录。即使延后测里能够可靠地确认某些学生数格子，也仍不能由此证明他们原来已经稳定掌握另一种理解，后来又退回去了。把观察写成一个问题，是为了保留这些尚未被材料回答的可能，而不让一个醒目的比例替我们作出结论。

先把方法与理解分开

“用了什么方法”是可观察的信息，“为什么选它”则需要更多材料。一个孩子数格子，可能因为图形很小，直接计数清楚可靠；可能因为他知道如何割

补，却暂时没有发现方便的切法；也可能因为他只记得数格子这一条路。三种情况使用同一外部方法，所依赖的关系却不相同。

同样，使用割补也有不同可能。孩子可能知道分割前后总面积保持，知道重组不能重叠或漏掉部分；也可能只是记住某个熟悉图形应该从哪条线剪开，然后照着操作。后一种情形在原题中可能成功，图形变换位置后却失去依据。新方法的出现，不足以单独证明新理解已经形成。

因此，把数格子排列在低水平、割补排列在高水平，然后按照方法给儿童排序，容易省略问题的关键。教学确实可以帮助孩子获得更有效的方法，但有效性依赖具体任务：图形边界是否清楚、单位格是否完整、有没有合适的切分、是否要求精确面积。方法选择的合理性，需要放在这些条件中判断。

日常出行可以提供一个类比。一个人学会乘地铁后，去家门口的小店仍然步行，不能说他退回不会乘地铁的状态；另一个人只会照熟悉线路上车，站点一变就迷路，也不能因为他乘了地铁就认定他掌握了城市交通关系。需要观察的，是路线选择与任务条件是否相配，以及改变条件后能否调整。

这让本章与前两章接上了。会算不等于读懂图，写出等号不等于检查两边关系，采用割补也不等于已经说明面积为什么不变。我们不断遇见同一类认识限制：一个可见动作可以由不同理解支持，教师必须寻找能够区分它们的后续证据，而不能仅凭动作名称作结论。

数格子与割补怎样相遇

数格子的核心，是选定面积单位并确定图形包含多少这样的单位。若每个小方格面积是1平方厘米，图形恰好由12个完整小方格组成，面积就是12平方厘米；若有不完整小格，则要进一步分割、合并或估测。它并非一种等待被高级方法淘汰的笨办法，而是面积度量的重要经验。

割补处理的是图形重组。把一个图形分成若干部分，在不改变各部分形状大小的前提下移动或旋转，再无重叠、无遗漏地拼合，可以使不易计数或计算的形

状变得容易处理。这里所保持的是这些部分的面积总和，新的外形可能改变，边界长度也可能改变，面积却可以保持。

两者的联系，不宜表述为“数格子是割补的特例”。它们可以共享面积单位、面积可加性以及分割不改变总面积等基础，但具体程序不相同；数格子未必进行图形重组，割补也未必以逐格计数作为最后一步。把关系说明白，比把一种方法直接收入另一种方法的名下更有数学价值。

可以制作一个确定的教学例子：在单位方格纸上画三行左端对齐的方格，自下而上分别为6格、4格、2格，构成12格的阶梯形。沿底行从左数第4格与第5格之间的竖直格线剪开，取下底行最右侧相连的2格，将这块向左平移2格、向上平移2格，补到顶行右侧的两个空位；其余部分不动，得到3行、每行4格的长方形。原来逐格计数得到12，现在按行计算 3×4 也得到12，两种办法能够互相检查，是因为每个单位格都被保留且只计算一次。这个明确的制图与剪移方案属于本章教学设定，不是原研究中的学生作品，实施前可依格线逐一核对。

若孩子能够说出“我原来数的是这些单位面积，现在把它们排得容易数了”，旧方法便可能获得了新的关系位置。但也不必要求出现这样完整的话：他能逐格标记对应、发现拼合中的重叠，或纠正漏掉的一块，同样能提供联系已经建立的证据。关系通过行动显露时，不应因缺少漂亮表达而被抹去。

什么变化保持面积

原研究安排了一个有意义的辨析：能否把图形的边拉直后比较面积？文稿第五部分指出，部分学生把长方形与平行四边形之间的拉动经验用于面积判断，教学则通过想象与演示让学生比较拉动和分割移动。这里的重要问题不是孩子记错了一句话，而是他把哪一种“不变”移到了不适用的变化上。

需要进一步限定原稿的表述。“拉动”不是一种具有统一数学后果的操作：若使用四条长度固定的边组成可活动框架，改变夹角时，周长保持而面积通常改

变；若只是平移图形的一部分并保持底和对应高，则可能形成另一种面积保持的变形。教师不能只按动词分类，而应说明到底固定了什么、改变了什么。

例如，四根等长硬杆铰接成正方形框架，向一侧推斜成为菱形，边长和周长不变，但高度变小，面积也变小。若换成纸片，剪下一个三角形并平移补到另一侧，只要不重叠、不遗漏，各部分总面积保持。这个对照说明，外观都像“斜着动了一下”，保持的量却可能不同。

原稿背景部分还出现复制与面积不变并列的表述。本书需要说得更准确：复制品可以与原图形等面积，但原图形和复制品一起计入时，总面积增加；多个部分拼合，也只有在无重叠计数且不遗漏时，拼合图形面积才等于各部分面积之和。承认原稿的启发，不意味着把其中需要限定的句子原样当作定理。

这些数学条件能够成为观察理解的窗口。孩子若只是记住“动一动面积不变”，遇到框架变形就容易误判；若能够追踪部分是否保留、是否重叠及哪些长度改变，就开始拥有区分变化的依据。旧知识被重新组织，往往首先表现为原先使用过宽的规则获得了边界，而不一定表现为换上一个更抽象的名称。

延后测告诉了我们哪一段时间

前测与三个月后的延后测，可以显示两个时间点的表现差异，却不能自动显示中间的全部变化路线。一个孩子可能在教学后立即掌握、随后遗忘；也可能当时只部分理解，在后续学习中逐渐形成；还可能在延后任务里调用另一种方法。若缺少中间记录，这几条路线在两次测量之间都可能成立。

原研究的访谈补充了学生对方法的主观认识，但12名受访学生的叙述不能代表全体138人各自的形成轨迹。访谈提出的“收获”“喜欢哪种方法”等问题，也不等同于独立完成新任务的证据。它们可以帮助解释、提出假设，却需要与作品、操作及不同时间的任务相互印证。

同一问卷重复使用有其价值，因为内容可比，便于看同一问题上的变化；同时，也要考虑记得题目、后续相似练习等影响。没有对照安排时，不能将所有变

化归因于这一节教学。研究者本人同时授课、收集和分析材料，也需要在后续研究中通过匿名评分、共同编码等方式减少判断偏向。

这些限制不是要否定一线教师开展研究的价值。恰恰因为研究把问题带出了即时课堂，我们才有机会看见应增加哪些记录。一个小规模探索能够发现值得检验的现象、改进任务和明确下一次比较，但不必为了显得完整而承担它没有设计能力回答的因果问题。

原稿数字应怎样使用

本书已核对原稿文字与表格，发现必须回到原始数据确认的冲突。例如，割补方法汇总表把第二题后测写为 45%，同题交叉表却列 45 人，占 138 人的 32.6%；第三题也出现汇总百分比与人数表之间不一致的情况。第一题后测的三类百分比相加超过 100%，需要确认分类是否互斥、是否存在誊录问题。

这些冲突不能由写作者凭直觉选一组“看起来合理”的数字解决。即使某处很像把人数误写成百分比，也必须由原始记录确认；缺少确认时，只能把各表的具体冲突列入核查台账，不再据此计算总回弹比例或宣称某一比例已经验证本书。若准确表达比例与 0/1 评分使用同一指标和样本，第二题前测及第三题的比例与评分均值也不能直接对应；各表还须核对分母、汇总方式、题目编码与统计输出。

另一个问题是，同一批学生前后测的策略变化属于配对资料。若把前后人数直接当成两组独立观察进行比较，可能忽略同一学生的关联；进一步检验需要个体层面的前后转移记录及与问题相配的分析方法。原表显示的 $p=.000$ 也不应写成概率为零，本章不据现有汇总重算显著性，更不补造个体数据。

因此，本章把原稿当作已取得的一线探索材料，保留其研究设计、教学任务与提出的问题；对发生冲突的数值结论暂不作确定援引。待作者提供原表和编码后，可以恢复适当的描述与分析。守住这一边界，研究才有机会修正；若为了叙事有冲击力而保留“三分之一回弹”，则会把尚未成立的判断写进全书地基。

三个观察方面不能变成三种孩子

“改名、并存、回弹”分别关注旧知识联系的变化、多种方法之间的关系及变化在时间中的保持。它们是可以交叉记录的三个观察方面，仍需检验其判读价值，不构成互斥且穷尽的学生类型。同一个孩子可以在某项关系上出现改名，同时合理保留几种方法，也可能在后来某类任务中重新遇到困难。

并存既可能是有联系的灵活选择，也可能是互不相识的分开存放。孩子根据图形选用数格子或割补，并能说明为什么，是一种情况；孩子只按题目表面的颜色或方向猜方法，则是另一种情况。两者不能仅凭“同时会两种方法”区分，也不能把并存统一当成需要消灭的过渡阶段。

回弹的判断条件更严格。至少需要先在足够相近而又不过度提示的任务中，观察到孩子能够独立解释和行动；随后出现有意义的改变，并排查任务变难、读题受阻或情绪波动等影响。单次延后使用旧方法不满足这些条件，因此原稿不能被直接当作三个观察方面已经得到验证的研究；其中任何一方面的材料不够，都应保留“证据不足，暂不判断”。

改名也不是学会说“都和面积有关”就足够。孩子需要在具体任务上显示两种方法怎样共享某些关系，又怎样各有适用条件。若他承认数格子可靠，却发现割补在某类图形上更省事，并能用面积单位保持解释这一点，就比笼统说“新方法更高级”提供了更清楚的材料。

第9章将进一步界定这些观察方面，第16章讨论它们随条件变化的机制。“证据不足”适用于每一方面的判断，不是另列一种儿童类型。让作品保留超出预想的可能，再检验现有概念能否接住它，才能避免分类反过来制造自己期待的材料。

给延后任务补一扇窗

如果在原研究基础上设计下一轮观察，可以保留一道面积比较题，同时补充一个不直接指定方法的追问：“你这样做，为什么能够比较面积？”孩子可以

摆、画、标记或口述，教师记录具体理由。先让方法自然出现，再收集依据，可以减少题目主动提醒割补而造成的策略偏向。

接着提供另一种已经完成的做法，但不说哪一种更好。例如同一个图形一份作品按单位格计数，另一份作品分割后重新拼合，要求孩子指出两份作品各自依靠什么，是否都成立。这个比较任务是新增教学设定，不是原问卷已有内容；它的目的，是获得方法之间关系的证据，而非强迫儿童在两法中选出唯一胜者。

条件变化可以分开安排。第一类保留格线但增加图形的不规则程度，观察是否仍能准确处理不完整格；第二类去掉部分格线但保留必要尺寸，观察孩子是否能调用关系补足信息；第三类故意让拼合出现重叠或遗漏，询问面积是否仍然保持。每次变化应有明确目标，避免同时改变许多因素后无法解释困难来自哪里。

回看任务则请孩子重新打开此前的作品，指出现在愿意保留什么、修改什么，并用修改后的看法做通原来的问题。儿童可能发现原来的数格子其实正确，只是没有说明面积单位；也可能发现一次剪拼漏了一个部分；还有孩子认为原方法更适合这道图。这些回答都应得到具体检验，不应预设“改成割补”才算成功。

如果希望观察时间变化，可以分别保存教学前、教学后不久及延后一段时间的作品，并记录期间的相关学习与提示。后测时间应服务于研究问题，不必把三个月神化成统一门槛；关键是各次任务的可比性和记录完整度。完整方案与评分协调将在后面的评价章及附录展开，本章强调的是这扇窗应看见关系，而不只统计方法名称。

老师在复习课中可以改变什么

面对延后仍数格子的孩子，教师可以先请他把一种做法完成，不急着纠正为新方法。若答案正确，再问是否有更省事而且可靠的安排；若计数困难，就针对漏数、重复计数或单位不清提供帮助。这样既承认旧方法的价值，也能让方法改进从具体困难中出现，而非来自教师对新方法的偏爱。

对能熟练割补却解释不清的孩子，可以把一个看似熟悉的剪拼故意做错。只问“是不是这样剪”容易唤起记忆，要求他指出哪一块被重复使用、哪一处缺少了面积，则需要追踪保持条件。若孩子能纠错，教师便获得了比流畅模仿更有力的材料；若不能，复习应回到面积关系，而不是加快剪拼速度。

同伴之间可以交流“为什么这次选择它”，但不必把每一种策略都轮流演示一遍。讨论应围绕有价值的差异，例如同一图形上数格子与割补分别减少了什么困难，或两种割补为什么只有一种保持面积。学生承担的不是评价谁的方法高级，而是提出可以被同伴检查的理由。

教师也要留意自己在评价中传递的暗示。若每次都对割补说“巧妙”，对数格子说“还可以”，孩子可能学习到猜教师偏好，而非比较任务条件。更合适的回应是具体说明证据：“你把每块都保留了”“这里避免了重复数”“这个图用单位格检查很清楚”。评价指向关系，儿童才较容易把方法选择理解为数学判断。

怎样算本章的区分没有用

本章提出的区分是否有价值，可以从两个层面检验。首先，不同观察者能否依据作品与访谈，较稳定地区分有联系的方法选择和缺少联系的调用；如果判断高度依赖教师印象，就需要修订任务与编码。其次，这一区分能否帮助预测或解释后续任务中有意义的差异，例如检查割补错误、选择合适策略或处理新图形。

如果在可靠测量、足够观察与可比条件下，关系说明并不比方法名称提供额外信息，那么本章应缩小对其诊断价值的主张。如果儿童不擅长口述，却能在动作与改错中显示关系，就应调整证据通道，而不是坚持原来的语言要求。若数据主要被练习量、任务熟悉度或教师提示解释，也应明确说明，不能把剩下的一切都命名为“尚未回写”。

同样，一次没有发现差异，不足以自动把复杂的观察退回“学会与没学会”的二分。可能是理论区分无效，也可能是任务没有捕捉到差异、样本不足或

类别定义重叠。研究的责任是逐项排查并作出有限结论，既不逃避反例，也不让一次检验承担它无力承担的终局裁决。

本章结论与材料说明

旧方法仍然出现时，先追问孩子为什么选择它，再判断新学习究竟改变了什么。

研究背景来自文稿 02：两个五年级班共 138 人，同一问卷前测与三个月延后测，另有 12 人访谈。原稿各表的计数及比例尚需回到个体记录核对，故本书不据此报告回弹率或验证“改名、并存、回弹”。阶梯形重组、框架变形和补充追问是说明性设计。

留给下一章的问题

我们希望孩子说明自己为何选择一种方法，却还会遇到另一种困难：他做得有道理，开口时却只说“我是看出来的”。这句话可能藏着判断，也可能掩盖误判；教师若只追求完整解释，可能错过尚未说清的关系，若只回答“很好”，又可能放过错误依据。下一章回到一节角的比较课，考察怎样让证据显露出来，同时不替孩子制造本来尚未形成的解释。

第4章 我是看出来的

一句还没有被听完的话

“我是看出来的。”在角的大小比较课上，这句话可以让讨论很快结束：教师说“很好”，转向下一位学生；也可以使讨论从这里开始：你看的是哪里，那里为什么能够告诉你角的大小？两种回应都不长，却给后续观察留下了不同空间。

我的文稿09《以情绪为桥，循认知而教》记述了一次师徒分段接力教学。王老师负责前半段，学生操作后展示了不同作品；当教师请学生说明比较方法时，回应较少，有学生说自己是看出来的，教师没有继续追问。后来学生在座位上说明叠合方法，表达也较模糊，同伴难以明白。

我接手后，先说明不完整的表达也可以拿出来讨论，再追问观察作品的学生看的是哪里。原稿记载，一名学生指着角的符号弧线，说那条线长一些；另有学生帮助解释“宽”的意思，并上台用双手表现张口。教师随后把这一动作与两条边张开的大小联系起来，使讨论获得了更具体的对象。

这一段材料不能被改写成“同一个孩子从看弧线转变为看张口”的连续故事。原稿出现了创作者、补充者与上台者，未明确这些身份都属于一人；把不同学生的表现拼成一个人的概念变化，会制造原记录没有提供的形成证据。我们能说的是，追问、补充与动作演示让班级中原先未充分展开的不同判断进入了公共讨论。

也不能因为教师认可“张口”的表达，就宣布全班已经稳定理解了角。原稿记录的是课堂交流与教师反思，没有提供每个孩子在不同图形、不同时间的独立表现。它让本章看到一条有价值的线索：当表达方式改变，教师可能获得新的认知证据；至于新证据能够支持多强的判断，还需要进一步区分。

沉默不能替我们作出结论

教师看到一个孩子不举手，可以想到许多解释：他可能尚未形成办法，可能不知道怎样把动作变成语言，可能担心说错，也可能只是需要更长的整理时间。哪一种解释成立，不能由教师的善意或直觉决定。把沉默直接认作不会，会过早关闭学习机会；把沉默一律解释为“其实都懂，只是不敢说”，也会遮蔽实际困难。

同样，“看出来”并不天然代表直觉理解。孩子可能在比较角的张口，也可能在比较边长、两边围成的视觉面积，或教材标记弧线的长度。几种依据有时恰好给出同一个答案，只有改变图形条件，才可能看出哪一种正在起作用。

因此，本章的基本立场不是替沉默辩护，也不是强迫每个判断都立刻变成长篇说明。我们关心的是证据通道：当前要求的回答形式是否让孩子有机会显露已有判断，这种形式有没有无意中替他提供答案，以及接下来能用什么变化区分竞争解释。教学的耐心若能落在这些具体问题上，就有了可执行的内容。

一条弧线为什么会误导

比较角的大小，需要关注从一条边转到另一条边的张开程度，而不是把所画边段的长度当成角的大小。在本章讨论的小学平面角模型中，用从同一点引出的两条射线表示角的两条边，图中只画出有限长的一段，是表示上的需要；把两条边画长或画短，不应改变所表示的角。儿童在纸上看到的线段长度却很显眼，因而值得通过变化专门辨认。

弧线又增加了一层约定。标记角时画在顶点附近的弧线，用来指明所讨论的角，它的长度同时受到张口和所画半径的影响。只有在相同半径等适当条件下，较大张口对应较长弧线；若半径不同，就不能直接比较弧长判断角大小。原稿中“这条线长一些”的说法，究竟是错误依据还是在特定图上间接利用了张口，必须结合图形与进一步任务判断。

例如，两个相等的角，一个把标记弧线画得离顶点近，另一个画得远，弧长可以不同。若孩子因此改判角不同，教师便得到他可能依赖弧长的证据；若他坚持相等，并能说明边的张开程度未变，则表明他可能已区分标记与对象。这个任务是本章设计的辨析，不是对原课学生表现的补写。

“看起来宽”也需要继续澄清。在两条有限边段之间，离顶点越远，间隔通常越大；若孩子只比较某个末端间距，也可能受到所画边长影响。手势可以帮助表达张开，但教师仍要看看改变手臂伸展长度、保留转动方向时，孩子是否保持同一判断。一个形象的词是沟通入口，不是概念检验的终点。

日常看照片也有相似问题。照片里的人显得大，可能因为本人更高，也可能因为离镜头更近；仅凭影像长度，不能直接决定现实身高。这个类比帮助教师记住，显眼的量与要判断的量可能相关，却未必在所有条件下保持同一种关系。

动作怎样成为可以讨论的证据

当孩子用双手比划张口，教师获得的不是一段标准定义，而是一种有待解释的动作。可以请他保持一个手臂方向，用另一个手臂转动，表现角怎样变大或变小；也可以让同伴照他的动作摆学具，看看能否得到他认可的样子。动作由此成为可以重复、比较与纠正的对象。

但教师的翻译必须谨慎。孩子伸开双手，成人可能立即说“你想表达的是两条边张开的大小”，这是一种有用的命名，同时也可能把成人的概念放进尚未充分明确的动作。翻译之后需要把解释交回孩子：“我这样理解你的动作，对吗？换成这张图，你还会这样比吗？”认同本身仍不够，后续选择和变化任务能提供更多材料。

原稿里的同伴补充也有双重作用。一方面，另一位孩子的语言可以帮助大家理解含混表达；另一方面，补充者可能给出了比原发言者更完整、甚至不同的解释。教师应区分“这个补充在数学上成立”与“原来的孩子就是这样想”，避免把集体共同完成的论证记到每个个体名下。

因此，动作证据既不能被降为“不够规范”，也不能被浪漫化为比语言更接近理解。它能提供语言暂时没有提供的信息，同时也有含混与模仿的可能。最稳妥的做法，是让动作、作品、语言与条件变化彼此校验，允许其中一些一致，也允许不一致继续成为问题。

从叠在一起到有条件地叠合

文稿 09 还记述，学生比较角时存在顶点不重合、边不对齐的困难，我请两位学生上台演示不同叠合方法，再让班级比较。这个环节把“叠一叠”从一个动作口号转向具体条件。只有把对应顶点与一条边适当对齐，另一条边的位置才便于比较张开程度。

为了避免图形方向造成新的混淆，还应让两个待比较角的内部处在同一侧，并明确正在比较的角是哪一部分。对小学阶段常见的非优角比较，教师可使用透明片或活动角，先保持顶点一致，再对齐一条边，最后观察另一条边。若材料不透明或线条过粗，儿童看不清重合处，错误可能来自操作条件，而不必然来自概念缺失。

会说“顶点与一条边重合”仍然可能只是记住操作要求。可以给出一幅顶点错开却两边看似平行的叠合图，让孩子判断能不能据此直接比较；也可以让他解释为什么只对齐顶点仍然不够。若儿童能指出比较基准没有固定，就比机械完成步骤提供了更深入的依据。

另一方面，不应把叠合作为唯一合法方法。有的角大小差异明显，可以直接判断；有的图能借助直角等已知参照比较；有的孩子已经能够理解旋转与方位改变不影响角大小。任务若只允许叠合，就可能看不见这些有效经验。本章强调的是方法所依据的条件，而不是把一套操作统一到每一个儿童身上。

表达门槛与数学标准可以同时调整

降低表达门槛，不等于降低数学判断的要求。让孩子指一指、摆一摆，是改变他提供证据的方式；要求他区分边长与张口、解释为什么叠合有效，则仍然守住数学关系。两者若被混在一起，教师容易在“鼓励发言”与“坚持正确”之间形成不必要的对立。

例如，孩子说“这个口大”，教师可以先接住这句不规范的表达，请他用学具表示，随后通过改变边长检查“口大”指什么。若关系明确，再帮助连接“角的大小”“张开程度”等公共语言。若关系尚不明确，则继续比较材料，而不是一边纠正措辞一边假定理解已经完成。

反过来，孩子说出完整定义时，也应获得同等的检验机会。可以请他画两个边段长短差别明显但角相等的图，或解释为什么把一幅图旋转后角不变。这样做不是不信任表达流畅的孩子，而是避免评价偏爱某一种呈现形式，把能够说出句子误作已经协调关系。

温暖的回应怎样进入学习

原稿描述，我告诉学生说得不完整也没有关系，并把一位学生联系数学与生活的发言称作“角的小哲学家”，随后观察到举手增加。我们可以据此讨论教师如何回应学生，但不能把前后相继出现的现象直接当成单一因果证明：课堂中同时发生了追问变化、动作展示、同伴支持与教师接力，材料不能分离每一项的独立作用。

具体到教学，允许不完整表达的价值，在于孩子不用先把答案整理成完美句子，便可以把可讨论的部分拿出来。教师随后认真追问，说明这份不完整并非敷衍过去，而是值得共同检查的起点。安全感与认知要求在这里可以相互支持：学生敢提出不确定想法，教师也可以更准确地看到需要处理的差异。

但表扬本身也需要检查。若只有新奇、聪明或“像哲学家”的发言得到热烈回应，比较朴素的解释是否会被忽略？孩子是否开始追求让教师惊喜，而不愿意

说自己仍然困惑？本书不据这一个片段否定鼓励，而是提出下一步需要观察的影响，尤其关注没有被点名的儿童怎样继续参与。

可以把评价更多放在可见动作上：“你指出了需要比较的位置”“你让我们发现这个方法少了一个条件”“你愿意修改原来的解释”。这样的语言既肯定贡献，也使贡献能够被同伴学习；它不把一次表现固定成儿童的身份。对于尚未形成想法的孩子，允许继续看、重新操作或稍后回应，也比不断催促“大胆一点”更有具体帮助。

一项从指认开始的观察设计

以下是一项新增教学设计。准备三组角图：第一组边段长短相同而张口不同；第二组张口相同而边段长短不同；第三组同时改变方位与边段长度，但保留清楚的角关系。每组先单独呈现，让孩子判断并说明依据，不把“看张口”写进题干，以免提前交付所要观察的线索。

如果孩子说“看出来”，先请他在纸上圈出自己看的位置，或用手指出，不立即要求完整句子。教师记录他指的是弧线、边段末端、顶点附近，还是两边整体关系；位置本身不能直接决定结论，但可以帮助下一步选择材料。若他不愿指认，可以请他自己画一组容易判断的角，再从作品中继续问。

接着选择一个与初始依据有关的变化。若孩子盯着边长，可以保持张口不变而延长一条边；若孩子盯着弧长，可以改变标记半径；若孩子主要依赖方位，可以旋转整张透明片。每次只改变一个主要条件，减少解释困难，使孩子也能看清自己原来的判断受到什么挑战。

然后允许儿童修订。可以保留最初的选择，请他在旁边补画、换色标记或重新说明，不要求删去旧痕迹。这样既让教师看到变化，也让孩子有机会比较前后依据；错误不必成为公开表态，而可以成为一份逐渐清楚的记录。

最后安排一个短暂延迟后的独立任务，材料换一套，但关系相近。若儿童在当场帮助下成功，稍后仍需要同样提示，记录应保持为“在帮助下可完成”；若

他能够独立识别变化并说明条件，才获得更强的证据。一次活动不用宣布最终等级，记录应为下一次选择支架服务。

观察不是偷换成另一种教学

教师追问“你看的是哪里”，有时只是打开表达通道，有时本身就促使孩子重新观察，进而形成原先尚未明确的看法。两种情况都可能有价值，但它们对“本来是否已经懂”的回答不同。若把追问后的新表现直接写成追问前已有的理解，就会把教学造成的变化误作纯粹测量到的状态。

因此，记录可以保留三个时点：最初独立表现，教师提供的帮助或任务变化，帮助之后的表现。这样不必猜测理解究竟在心里哪一秒完整形成，却能清楚说明可观察证据怎样出现。遇到材料不足时，承认无法区分“原已形成而未显露”与“追问中继续形成”，比编出一个确定故事更诚实。

这也是本章对“显露台阶”的限制。会指、会摆、会画、会说、会给同伴解释，不必总是固定先后，也不是越靠语言末端就必然越高级。有的孩子说得好却画不清，有的孩子操作准确但叙述吃力；不同通道提供不同方面的证据，应联系具体任务判断，而不能排列成人人必经的年龄阶梯。

本书使用“未形成与未显露”的区别，是为了防止单一评价过早定论，不是宣称教师能够直接看到儿童内部的完整状态。我们能够做的，是改进任务、增加相互独立的观察、保留帮助记录，并用随后表现修订判断。认识的谨慎并不会使教学停住，它使教学知道下一步该多看哪一处。

课堂热闹之后还应看谁

全班举手增多，是参与方式变化的一种表现，却不能代表每个人都在进行相同深度的判断。有人被同伴的动作启发，有人开始愿意表达，也有人只是觉得气氛活跃。教师需要在集体讨论后保留简短的个体任务，避免只从最醒目的发言推断整个班级的理解。

可以请每个孩子纸上画一个与黑板角大小相等、但样子不同的角，并标出自己认为不能改变的地方。教师不必当场让所有人演示，只需收集若干具有代表性的差异：有人改变了方位，有人延长边段，有人连张口也改变了。下一次讨论便可以从这些差异出发，而不是继续重复上一位学生的精彩解释。

对始终未显露足够证据的儿童，应安排更低压力的观察条件，例如两人交流、教师短时个别对话或材料选择，而不把他固定为不愿参与者。与此同时，也要允许“暂时没有形成办法”成为正常记录。若教师过于急于证明每个孩子其实都懂，学生的实际困难反而可能得不到必要支持。

怎样算本章说错了

本章提出，改变表达通道与追问方式，可能帮助教师获得单一口头或纸笔任务未能提供的信息。检验这一主张，需要看新增证据是否可靠、是否对后续独立任务有帮助，以及不同评分者能否作出相近判断。若动作、指认与图画记录只增加印象，没有改善判断或教学选择，就应修改工具，而不能把丰富记录本身当作有效性。

还要检查新的方式是否对某些儿童制造额外困难。公开比划可能使害羞的孩子更紧张，材料操作也可能增加动作负担；教师应允许替代形式，并比较不同形式下的表现。若只有在强提示下才能出现所期待的解释，就不能宣称已经发现了潜藏的独立理解。

最后，若规范表达对某一具体任务具有不可替代的作用，例如需要准确向同伴传递作图要求，本章并不主张取消表达学习。我们只是反对把一种表达形式当成所有理解的唯一入口。证据应随任务目标调整，不能因为强调显露的多样，就忽略公共语言、书写规范与精确交流本身也需要学习。

本章结论与材料说明

孩子说“看出来了”时，先让他指明自己看见的关系，再判断这份看见能够走多远。

师徒接力、弧线追问、同伴补充与叠合活动来自文稿 09；不同儿童的发言不合并为一人的变化轨迹。角图变式、延迟任务与记录办法为本章设计。课堂参与增加说明交流条件发生了变化，个体理解的保持与迁移仍需另行观察。

留给下一章的问题

当教师终于看清孩子据什么判断，就会发现，判断还依赖任务的条件。眼前这幅图上可用的线索，换一种画法可能失效；眼前这口锅里成立的安排，换一种容量也可能失效。孩子不仅要看见关系，还要逐渐知道关系在什么条件下成立，下一章将从烙饼任务进入这个问题。

第5章 规律对了，锅换了

课堂现场 一口新锅让旧答案停下来

三张饼需要九分钟，这个结论并不是老师直接给出的。我与熊艳妮在文稿 00 《自主建构模型 凸显优化思想》中记录，学生先研究一张、两张饼，再比较三张饼的两种安排：先完整烙完两张再烙一张，需十二分钟；把只烙好一面的饼暂时拿出，与第三张轮换，则可以缩短到九分钟。两种安排的差别不在最后有没有熟，而在锅的空间是否被充分使用。

原稿中的学生通过质疑与解释指出，第二次换入第三张饼，使最后一次仍有两张饼可烙。教师随后把这种安排命名为“交替烙”，并联系充分利用空间、节约时间的优化思想。这一先后关系值得保留：策略的具体理由来自学生的交流，公共名称由教师提供；若将两件事合并成“孩子自己发明了名字”，会遮蔽教师在概念整理中实际承担的工作。

接着，讨论扩展到四张、五张以及更多饼。学生发现偶数张可以两张一组处理，大于三的奇数张可以先处理三张，再处理成对的部分；由这些安排，得到在相应条件下用时与饼数的关系。文稿记录了一个解释方向：锅里每次烙两个面，这两个面合起来相当于一张饼的总工作量，于是每增加一张饼，增加三分钟的工作时间。

课堂没有停在规律形成处。原稿最后换成一次能够烙三张饼的新锅，教师请学生重新判断三张饼的时间，又询问哪些数量可以借助已有经验解决，哪些数量仍值得研究。旧答案没有因为刚刚获得赞许就得到豁免；条件一变，它必须再次接受检验。

这段作者课堂叙述给本章的材料，不只是一次成功的发现。它显示“知道一个答案怎样使用”与“知道它依赖什么”可以在同一节课中被分开观察。孩子如果只是记住饼数乘三，换锅就容易继续套用；如果他关注的是每张饼要完成的两

面、锅在每个时段能容纳的面数，以及哪些安排允许同时进行，就可能在旧式子停止适用时仍然继续思考。

这一章要说的话 理解一个规律也要理解它的边界

本章的判断是：一个规律成为思维工具，需要带着条件一起被掌握。会代数、会计算、会在熟悉题目中解释，都不能单独保证孩子知道条件改变后哪些部分应保留、哪些部分需要重建。边界不是数学结论之外的一段补充说明，它参与决定结论说的究竟是什么。

这一判断并不意味着每次学完都要立刻增加复杂难题。边界检验可以很小：只把锅的容量从两张改成三张，只把每面的时间从三分钟改成两分钟，或只问一张饼是否适用同一公式。改变一个条件而保留其余条件，可以让教师看清孩子究竟追随表面词语，还是在追踪关系。

先把烙饼问题说完整

本章使用一个明确的数学模型：每张饼有两面，两面都要烙；每面必须连续烙三分钟；一张饼的两面不能同时烙；锅最多同时容纳两张饼，每面连续占用一个固定锅位直到完成；翻面、取放和暂存不另计时间，暂存不影响已经完成的一面。目标是使所有饼的两面全部完成，比较的是这一目标实现的最短总时间。现实厨房未必满足这些条件，数学讨论在这些约定之内进行。

说出约定，不是在赶走生活经验。原稿教学评析提醒教师避免被“饼会不会凉”一类细节带离主要问题，但如果孩子确实提出这个疑问，教师可以把它接住，再说明本轮研究暂时不计这一因素。问题被暂时排除，是为了建立一个能处理的模型，不是因为孩子提出了无价值的生活问题。

一张饼需要六分钟，因为两面必须先后完成。这一点立刻给“用时等于饼数乘三”划出边界：饼数为一时，乘三得到三分钟，无法安排出符合条件的烙法。

若教师只展示三、四、五张的表格而省去一张，学生很容易把在部分范围成立的规律当成所有正整数上的规律。

两张饼可以同时烙正面，再同时烙反面，共六分钟。三张饼可以在第一段三分钟烙甲正与乙正，第二段烙甲反与丙正，第三段烙乙反与丙反，共九分钟。这里给出的是根据模型重写的合法排程；原稿十二分钟方案表的末行重复写为同一正面，按其前后叙述应为第三张饼反面，本章不把这一笔误当成另一种数学安排。

当饼数为不小于二的偶数时，可以分成两张一组，每组六分钟；当饼数为不小于三的奇数时，可以先安排三张九分钟，再将其余分成两张一组。两种情形都得到三乘饼数分钟。构造出排程说明这一时间能够达到，却还需要说明为什么不能更短，否则我们只有一个较好的方案，尚未证明最短。

每张饼贡献两面，每面三分钟，因此总共有六乘饼数的“面分钟”工作量。锅同时最多烙两个面，所以任何方案所用时间至少是总工作量的一半，即三乘饼数分钟；前述排程恰好达到这个下限。因此，在模型条件下，饼数不小于二时最短用时为三乘饼数，一张饼则另为六分钟。

数字背后的不变量与限制

工作量下限解释了原稿中“锅里不留空”的意义，但它也提醒我们不能把这句话单独当作万能规则。要减少空位，首先必须有可以放进去的饼面；一张饼只有一面能够接触锅底，另一面此时不能占用第二个位置。空位在这里是对象限制的结果，不能通过一句“充分利用空间”取消。

教师可以请学生把每张饼画成两张关联的面卡。两张卡都需要被安排，却不能在同一个时段同时进入锅；相邻时段是否需要紧接，本模型并不要求。这样的表示把“总共多少工作”与“哪些工作不能同时做”分开，为后面换锅后的思考留下两把不同的尺。

这两把尺也能解释为什么只计算总面数不够。总工作量告诉我们不可能比某个时间更短，却不自动保证这个时间一定能实现；实现与否还取决于顺序、配对和可同时执行的条件。小学阶段不必引入复杂术语，但可以反复追问：“算出来的这个时间，你能排出一个不违反规则的过程吗？”

锅变了，什么没有变

换成最多同时烙三张的锅，三张饼可以先一起烙一面，再一起烙另一面，六分钟完成。每张饼的两面、每面三分钟以及同一张不能同时烙两面的限制都没有改变，改变的是每个时段可并行的面数。原来的九分钟之所以可以缩短，是因为容量约束放宽了，而不是除法或乘法突然失效。

对六张、九张等三的倍数，可以按三张一组，每组六分钟安排。原稿把这类数量作为“已有经验可以处理”的对象，再把四张、五张留作继续研究的方向。这里的学习价值在于分类依据的改变：旧锅下两张与三张的组合很关键，新锅下三张一组成为一个更直接的入口。

四张饼共八个面，每三分钟最多完成三个面，因此至少需要三个时段，也就是九分钟。一个合法安排是第一时段甲正、乙正、丙正，第二时段甲反、乙反、丁正，第三时段丙反、丁反；最后有一个空位，但九分钟仍已达到时段数量的下限。这个新增教学例子表明，最优不总是每时每刻都满锅，必要空位可以出现在最优方案中。

五张饼共十个面，三时段最多只能完成九个面，因此至少需要四时段，即十二分钟。可以先完成三张的两面，用两个时段，再完成剩余两张，用两个时段；这个方案虽有空位，却已经达到下限。即使允许不同饼面在不同起始时刻下锅，这一下限也成立：把三个固定锅位分别看，少于十二分钟时，每个锅位最多完整完成三个面，三个锅位合计最多九个面，无法完成十个面。四张饼的九分钟下限同理：少于九分钟，每个锅位最多完成两个面，总计最多六个面，不足八个面。

这个论证仍要求每面连续占用一个锅位三分钟、不在烙制中转移锅位，也不允许同一张同时烙两面；不能不加说明推广到可中断、可任意转移的现实安排。

让学生比较四张与五张，可能比要求立刻背一个新公式更有价值。两道题都用同一口锅，但工作量与时段容量的关系不同；九分钟与十二分钟的差别不能通过继续使用“每张三分钟”解释。教师不必急于收束所有数量，先让孩子在两个具体方案中看见旧想法怎样被修改，已经有明确的数学工作。

旧说法接住了什么、漏了什么

模型教学帮助学生从情境中提取数量与约束，寻找可以推广的关系。本章接住这一方向，也尊重原稿对优化意识而非单一公式的强调；我们不把“模型教学只停在得公式”作为整个研究传统的结论。需要审查的是某一次课堂是否在公式出现后停止追踪条件，是否让公式的熟练运用遮住了最优性的证明。

从发生条件看，饼、锅、时间、目标以及学生已有的同时做事经验，都参与了思考。只保留式子，孩子难以检查安排；只保留情境，讨论又可能停在生活建议。教师要做的不是二选一，而是帮助儿童说明哪一个情境特征进入模型，哪一个暂不进入，并让这些决定能够被追问。

从改变过程看，旧规律失效提供了一个机会，但失效不自动产生新理解。孩子可能只是换记一个新答案，也可能意识到需要先数总面数、再看锅容量，并检验能否排出来。两者在四张题上也许同样答对，只有让孩子说明条件或面对另一数量，差异才可能继续显露。

从起手方式看，可以先让孩子预测换锅的结果，也可以先给两份合法方案比较，还可以从一个被误认为最优的安排开始。入口取决于孩子当前卡在哪里，不能为了让课堂符合预设路径，强迫所有人先犯同一种错误。探索的共同之处是遵守可检验的约束，探索的具体顺序则可以因人而异。

适用范围怎样进入判断

“饼数乘三”在旧锅中可靠，不等于锅的容量改变后仍然可靠。回看旧规律，要把三个问题分开：这道题的对象和目标是否改变，支撑原来算法的限制是否改变，原来的结论是否仍有别的合法安排支持。儿童只说“锅变大了”，还没有完成后两个判断；同样，知道旧公式不能照用，也不等于原有的总面数计算已经无用。

这一区分给教学留下了明确的观察位置。记录孩子是否仍正确计算总面数，是否重新确定同时可烙的面数，是否用合法排程检查时间下限。新的认识如果只增加一句“要看条件”，却没有改变这三项工作中的任何一项，就还不能说明旧规律已经获得可使用的新范围。

老师可以这样做 让规律带着条件出场

教师在学生写出“饼数乘三”时，可以先不评价规律有多漂亮，而请他们在式子旁边画出它所服务的锅，再写明每张几面、每面几分钟。对低年级或表达困难的孩子，图标与口头补充同样可接受。这样做不是增加书写负担，而是让结论与情境保持可以返回的联系。

随后只问一个很小的问题：“一张饼也这样算吗？”这道题不需要新的计算技巧，却能检查儿童是否把范围作为结论的一部分。如果孩子发现不成立，教师可以追问是规律完全没有用，还是需要补上适用范围；在修订中学习保留一个结论有效的部分，比简单宣布“规律错了”更接近数学论证。

第三步可以拿出两个方案：一个十二分钟的三张饼方案，一个九分钟方案。请孩子分别核查是否每张两面都完成，再说明为什么九分钟不能继续缩短。先审合法性、再比较优劣、最后论证下限，这些是可共享的检验工作，但不必规定每个小组都按完全相同的发现顺序形成思路。

换锅之后，教师可以让学生先保留旧纸，不急于发一张全新的学习单。在旧记录旁边标出还有效的句子与必须修改的句子：每张两面仍有效，锅同时容纳两

张需要改，三张的九分钟结论需要重算。这样安排使回看成为具体工作，而不是课尾笼统说一说“你有什么收获”。

对已经迅速找到新方案的孩子，可以追问“有没有最优方案也留下空位”。四张饼三容量锅的例子能帮助他修改“最优方案一定不能留空”的过强表达，转而把不可能再少一个时段作为论证。对仍难以安排的孩子，可以提供面卡与空锅位，但不直接摆出完整顺序，保留选择与核查的部分由孩子承担。

评价时还要记录提示的程度。孩子在老师提醒“看看总共有几个面”之后找到下限，与独立提出总面数，是不同的证据；前者显示某种支持有效，后者显示当前可独立承担的工作。两者都值得保留，但不能合并成同一个“会了”的勾。

一份可回看的旧作业

下面是一项新增教学设计，不属于原稿课堂实录。学生先保存三张饼二容量锅的旧方案，数日后换成三容量锅，请他在不查看原答案的情况下安排四张饼，然后回到旧方案解释两个任务为什么都可能需要九分钟。两题时间相同，但工作量与容量不同，正好可以避免只凭结果判断模型是否相同。

一个有信息量的回答应指出，旧题六个面、每次最多两个面，至少三个时段；新题八个面、每次最多三个面，也至少三个时段，并分别给出合法安排。孩子不一定要使用“下限”这一术语，只要能说明两个时段做不完、三个时段确实可以，就已经提供了可检查的理由。反之，单说“都是九分钟，所以方法一样”，仍需继续追问。

回看时还可让孩子检查自己原先写下的“不留空”。若他把这句话改为“能减少的空位应减少，但是否最短还要看能不能少一个时段”，我们看见的是旧判断条件变得更精细。这一变化判断还须依据该学生原先自己的记录；若旧句只是教师提供的题设材料，则只能确认当前能够辨析该规则，不能单独确认儿童本人发生了变化。如果他只是把二换成三，却仍认为最后一轮有空位就一定不最优，则新锅任务尚未回到旧规则中产生足够修订。

这种设计不把孩子划成永久的类型。某个孩子今天能够解释，下一次可能因注意力、表示方式或任务负荷而表现不同；另一个孩子虽然口头说不清，却能通过排程否定错误方案。记录应保留具体任务和支持条件，并在后续再看，而不是凭一次活动宣布理解已经完成或彻底失败。

怎样算我说错了

若在练习量与任务难度相近的条件下，加入边界讨论的学生并未比常规练习组更能解释换条件后的方案，本章关于教学增量的主张就需要收缩。检验应同时看孩子是否读懂条件、能否构造合法方案、能否说明最短，而不只比较答案正确率。否则，一个题目中的阅读负担便可能掩盖数学上的进展。

若孩子可以稳定处理变化任务，却不能完成本章要求的旧句修订，也不能据此断言没有理解。可能是回看任务的语言设计不合适，可能是旧记录已经不能代表他当前经验，也可能是回看并未增加已有任务之外的信息。工具需要接受这些结果的修订，不能把所有不支持的表现解释成孩子理解还不够深。

带走的话

规律能够继续帮助孩子思考，要靠他知道条件变了以后，哪些理由仍在，哪些结论需要重建。

材料与判断

原课堂来源为我与熊艳妮合写的文稿 00。三容量锅中四张、五张饼的具体排程、最短性分析及旧作业回看题为本书教学设计。所有最短时间结论限于本章明示的连续烙制、固定锅位、取放翻面不另计时等模型条件；这些设计的学习效果尚待课堂研究。

留给下一章的问题

前五章从图形、等号、面积、角与烙饼中提出了不同疑问。它们是否必须被一种理论统一解释，还是需要几种视角互相校正？下一章将把这些疑问带到已有理解理论面前，先辨清各自看见了什么，再决定本书还能够增加什么。

第6章 理解理论看见了什么 本书还能增加什么

课堂现场 五份记录不能被一句话收走

把前五章的课堂疑问并排放在桌面上，很容易产生一种冲动：找到一个共同原因，把它们全部解释掉。会算却读不懂图，可以说成缺少联结；熟悉等号却误填空格，可以说成概念错误；过了一段时间重新使用旧策略，可以说成保持不足。每一种说法都能接住一点东西，可是如果说完便停止观察，我们可能只是用五个理论词语，把五个尚待追问的问题分别装好。

我的文稿 21 在“问题提出”部分讨论学生会算而读不懂图，文稿 06 记录等号研讨中的误读，文稿 00 与 09 则分别展开烙饼与角的比较。它们是作者的课例及教学叙述，不等同于独立核验的课堂录像，因此本章不额外补写孩子的逐字对话，也不把后文的说明性教学设计当作调查事实。本章要做的是一次解释工作的检查：面对同一现象，不同理论允许我们提出什么问题，哪些问题仍需要新的材料才能回答？

例如，面对一个能写出 $28+4=32$ ，却不能解释算理图的孩子，教师首先需要知道，他是没有理解图上的表示约定，还是没有建立个位凑十与整体数量保持之间的联系。也可能他已经能够在小棒操作中说明关系，却不熟悉教材图里的箭头和括号。几种困难都能产生相同的表面结果，若先决定这一定是“没有理解”，后面的提问便容易只寻找支持判断的证据。

面对重新数格子的孩子，问题又有所不同。他可能觉得这一次的图形适合数格子，也可能忘了割补的构造方法，还可能记得怎样移动纸片，却没有把面积保持作为使用条件。单凭策略名称，无法区分这些情况。理论应帮助我们把问题分开，而不是让所有材料更快地进入同一个结论。

这也是本章对“梯子”比喻的第一次限制。某些教学安排确实把学习想成单向上升：操作完便收掉材料，看过图便进入算式，会用公式便不再追问来路。但不能因为课堂里存在这样的安排，就推断所有理解理论都只承认单向上升。把理

论压缩成一个方便批判的图像，会重演本书正在批评的事情：只留下结论，抹掉它形成时的问题与条件。

这一章要说的话 理论的价值在于让问题更精确

比较理解理论，首先要确定它们是否在回答同一个问题。理解的性质、表征转换、社会支持与发展水平各有研究对象，不能用一种理论没有承担的任务宣布它失败。本章先把有关视角放回课堂判断，再选最接近“旧知改名”的研究进行同题比较。

比较须落到三个层面：解释主张是什么，需要什么材料才能支持，以及面对同一份儿童作品会安排哪一种后续任务。共同使用“变化”“关系”或“返回”，不证明理论相同；换一组词语，也不证明理论不同。只有新增区分能改变记录、预测或教学选择，它才值得成为独立的分析工具。

皮亚杰视角 不能把发展差异写成孩子的命运

把孩子当作能够主动组织经验的人，而不是等待成人填入知识的容器，是本书需要接住的思想方向。同化、顺应与阶段涉及不同层面的解释，不能用一种课堂简化说法代表它们全部的研究范围。本章先限制批评对象：我们批评把阶段名称直接当作课堂诊断的替代品，不把这种简化用法归为整个理论唯一的意思。

设想给孩子两幅底和对应高分别相等、倾斜程度不同的平行四边形，他认为较斜的一幅面积较小。教师若只说他处在某个阶段，便没有说明他究竟根据什么作出判断；若进一步让他比较覆盖的单位、边界的变化以及剪拼前后的纸片，问题才开始具体。孩子可能盯住视觉上的高矮，也可能把周长与面积混在一起；两种情形所需的材料并不相同。

从条件看，我们要同时记录可操作材料、孩子原有的判断和任务的语言；从改变看，要观察他能否用新的面积关系重新解释原来的图形；从起手看，可以从错误判断开始，也可以从一次保持面积的剪拼开始。任何一个入口都只是探查路

线，不能因为教师计划制造“不平衡”，就宣布孩子已经经历了同样的认知变化。

发展水平提供较大的观察背景，具体诊断仍须落到儿童依据的关系。同时，任务本身必须数学明确：同底同高的平行四边形保持面积；保持两条邻边长度而改变夹角，则面积可能改变。若教师没有说清保持什么，儿童的不同答案可能反映不同任务理解，不能先归结为发展阶段。

因此，本书不把“旧知会变化”据为独有发现。既然顺应这一候选理论已把旧有组织方式的改变作为重要议题，后文就必须说明“旧知改名”增加的具体任务与证据是什么。若最终只是用一个容易传播的新词重复已有解释，本书应承认其贡献主要是教学转译。

布鲁纳视角 表征方式不能变成一次性的接力棒

动作、图像与符号是理解数学表征时需要认真比较的对象。它们提醒教师，同一个数学关系可以通过摆、画、说、写等方式被表达；但不能把这三种方式压成一条只许向前的路线，再将它归为整个理论唯一的主张。我们能够直接审查的是一种常见的教学设计：先操作、再看图、最后写式子，然后把前两种方式永久撤走。

以 $28+4$ 为例，小棒、算理图和算式不是同一件东西的三张照片。小棒可以移动，图形依赖约定，算式依靠符号规则；孩子在每一种方式中需要辨认的信息不同。教师把三种材料依次展示，不能自动保证孩子知道它们如何对应，更不能保证他能够从最后的算式返回自己原来的动作。

这里的条件问题是：每一种材料让什么容易看见，又让什么被遮住？改变问题是：新的写法有没有使孩子重新解释原来的分组与交换？入口问题是：一定需要每次从实物开始吗，还是可以从一道已经会算的题出发，让孩子选择一种表示来说明理由？后者既保留已有能力，又可能暴露新的困难。

本书对这一视角的补充，应落实到双向任务的设计。给图写式与给式画图分别需要什么判断，在哪一步可以互相验证，哪些表征不适合直接互换，都应在任务中显现。第8章将集中讨论这些问题，本章只确定比较的边界：我们反对的是教学中把表征模式僵化为单行线，不能未经核查便把这条单行线写成某位学者全部思想。

斯肯普视角 会按规则做与知道理由不能互相冒充

斯肯普1976年的论文区分工具性理解与关系性理解，并注明这两个名称来自梅林—奥尔森的提示。论文既讨论只会执行规则的局限，也承认工具性方法在有限任务中的便利与即时成功感；不能把它概括为反对一切规则。他还明确讨论已有图式重组的困难，因此“只描述两种结果、不关心组织变化”也不是准确的批评。以下课堂分析承接这一问题，而不把本书的教学设计倒写成原文结论。

在课堂层面，区分“能按某个规则得到结果”与“能说明这个规则为何适用”很有必要。孩子会给长方形面积使用长乘宽，未必知道乘法中的两个数分别计数什么；但反过来，他能解释单位面积的排列，也未必已经具备足够熟练度，能够在较复杂任务中稳定调用关系。教学不能为了强调理由，否定必要练习，也不能因为练习正确，就免去对理由的检查。

从条件看，要记录孩子可调用的规则、具体表示以及任务负荷；从改变看，要检查理由是否影响他选择和修正规则；从入口看，可以先让孩子解释，也可以先让他做，再依据关键错误追问。若把“你为什么这样做”变成每道题都必须完成的长篇口述，表达负担可能掩盖数学判断，教师便需要允许画图、摆放或比较反例。

本书希望增加的追问是：孩子新获得的理由，有没有回到他原来使用的规则之中？假如他能够讲清单位面积，却在看见斜放的长方形时仍把水平投影当作长和宽，说明解释与使用之间仍有需要探查的间隙。“旧知改名”若有价值，就应帮助教师把这个间隙变成可以观察的任务，而不是再为“懂理由”换一个称呼。

范希尔视角 层次描述必须重新落到这一次判断

几何学习中，认出一个形状、列出性质、理解性质之间的关系，确实是不同的任务。范希尔几何思维水平为这一讨论提供了相关视角；以下分析针对课堂使用层次框架的方式，不把课堂简化用法归给原作者。层次可以帮助安排问题，却不能仅凭一道题给孩子贴上固定水平标签。

例如，一个孩子可以在熟悉摆放的图形中认出正方形，却不接受斜放的正方形；另一个孩子能说出四边相等，却不能解释为什么菱形不一定是正方形。前者可能受典型形状影响，后者可能尚未协调边与角的条件。若两人都被笼统记成“空间观念不足”，教师就失去了决定下一份材料的依据。

条件检查要求我们改变图形摆放、大小和非关键外观，同时保留要检验的性质；改变检查要求孩子回头辨认原来那些典型图形，说明它们为什么属于某一类；入口检查则要求教师选择最能暴露判断依据的任务。可以让孩子分类，也可以请他画一个反例，还可以从一张他已经画出的图开始询问，不能只认一条标准路线。

使用层次框架时，教师仍需记录学生在哪一种图形、语言与帮助条件下作出判断。层次标签不能取代这些材料；同一儿童在不同任务中的差异，也不能仅凭层次图上有没有箭头来解释。本书据此保留层次描述的组织价值，同时要求把每次具体变化重新落实到作品。

杜瓦尔视角 转换方向本来就是需要认真看的问题

杜瓦尔把同一表征系统内部的处理与不同表征系统之间的转换区分开来，并强调二者可能形成不同的学习困难（Duval, 2006）。因此，表征协调及转换方向不能作为本书首次发现的问题。第1章的图式匹配和第8章的返程任务，应放在这一研究传统中说明其具体设计价值。

设想学生把一段数量关系写成算式，又根据算式选择一幅图。两次任务都涉及相同的数，并不意味着认知工作相同：从文字到算式，需要确定哪些量进入运

算；从算式到图，需要为符号找到一种满足关系的表示。图形也可能不唯一，教师若只接受教材中的一种图，便可能把可接受的另一种表达误判为不会返回。

条件问题在这里非常具体：题目中哪些对应关系是直接可见的，哪些需要孩子主动辨认？改变问题是：学会一种表示以后，他能否修正另一种表示中原先遗漏的关系？入口问题是：孩子是先看到情境、图形还是符号，以及改变顺序会带来什么？这些追问与表征转换研究接近，本书需要在继承中提供小学课堂的具体工具。

语言翻译可以帮助理解这种不对称。读懂一条外语提示与把同样的意思完整写出来，使用的知识有重叠，困难却不完全相同；能做一个方向，也不能据此认定另一个方向已经掌握。这只是日常类比，数学表征并不是普通语言翻译，但它能提醒教师不要把双向关系的逻辑成立与双向任务的同样容易混为一谈。

本书可以争取的贡献是把小学数学中的去程与返程做成可比较的任务：区识别与构造，记录绘图和语言负担，保留提示前后的表现，再观察返回是否改变旧方法的使用。若一种设计只是把已有转换任务换名，仍可有教学便利，却不能因此增加一项理论首创。

维果茨基视角 帮助的存在与帮助怎样被使用

一个孩子独立完成任务，与在他人支持下完成任务，可能呈现不同的表现。最近发展区使社会互动成为需要关注的条件，但不能因此把它简化为成人向儿童的单向传递。我们要检查的是课堂帮助如何发生，以及帮助撤除以后孩子能够承担什么。

教师提供一个例子、同伴提出一个反例、孩子追问一个词的意思，都会改变任务中的可用条件。若只记录最后的答案，便会把这些条件抹平；若把所有受过帮助的表现都排除，又会看不见理解怎样在交互中形成。两种记录都需要，但它们回答不同的问题：一个显示支持中的可能性，一个显示当前能够独立承担的部分。

改变检查不只询问孩子是否记住了帮助，还要询问他有没有改变原来的判断依据。一个同伴指出角不能只看边长，孩子随即答对，尚不足以判断他能够独立比较；让他面对边较长而张口较小的另一个角，并允许自己选择工具，才可能继续辨认帮助留下了什么。这里不必预设每个孩子都在同一时刻、以同一种表达完成变化。

本书在这里要补充的是证据颗粒度，而不是宣布发现社会互动。课堂观察应记录谁提出关键比较、谁排除反例、谁说明条件，接着观察这些工作怎样逐渐转由孩子承担。若新概念只停留在共同对话之中，仍不能确定孩子独立使用时会怎样；若独立任务表现不足，也不能抹去他在支持中已经显露的进展。

课堂进阶框架 排序有帮助，排序不能代替发生

课堂讨论中还会使用“算法水平—概念水平—统计水平”与“具象—转化—融合”等表达。这些名称不是同一作者、同一研究设计产生的一套理论，必须分别查明来源，不能打包成一个已经证实的共同前提。当前更合适的做法，是把它们当作教师组织学习目标的候选框架，检验每一层究竟要求学生完成什么。

以平均数为例，能算出平均数、能解释均分意义、能讨论它作为一组数据的代表是否合适，是相互联系而不相同的任务。但学生可能在计算尚不熟练时，已经注意到一个极端值改变了代表效果；也可能能完成规范计算，却把平均数当作每一个人的实际数值。把目标排成序列，不能因此断定每个孩子的学习也必然按同样顺序发生。

条件检查要求我们同时看到数据情境与已有算术经验，改变检查要求新的统计理解能否重新解释原先那个数，入口检查允许从争议、数据、计算错误或代表性的选择开始。这里的“从哪里开始”由具体问题决定，不能为了对应某一种路径而制造本不存在的冲突。共享数学检验标准与保留探索差异，并不矛盾。

把最接近的解释放到同一份材料前

对“旧知改名”最有力量的检验，来自那些已经研究新学习怎样改变旧理解的理论。这里不把它们安排成等待被超越的台阶，而以同一组等号任务检查各自能看见什么。以下任务是本书提出的比较设计，不是已有论文的实验复现；其用途是把理论分歧落到共同材料，而不是借用别人的结果替本书证明效果。

先请已掌握相关加减运算的儿童独立完成 $4+3=\square+2$ ，并保存解释。答案 5 可能来自两边相等，也可能来自“把前两个数相加，再减最后一个数”的位置程序。之后分别呈现 $3+4=\square+2$ 、 $4+3=\square+1$ 、 $4+3=\square-2$ 和 $4+3=9-\square$ ，答案依次为 5、6、9、2。第一题可以保留答案与原算法，第二题要改答案而可保留算法，第三题只改变右侧运算符号，要求重建求缺数的动作；第四题相对于起始卡同时改变运算、已知数与空位位置，是综合边界检验，不能用其成败孤立推断某一个因素的作用。这些题仍可保留“先确定左边为 7、再检查两边相等”的依据。教师须先确认儿童具备相应未知加数、被减数和减数的经验，以免把先备知识不足误判为关系理解不足。

学生注意的变化能解释什么

Hohensee (2016) 已经研究新学习中学生注意到什么，以及这些注意如何联系旧有推理的变化。研究以 7 名七、八年级学生的二次函数学习及一次函数前后访谈为材料，并分析个体注意与课堂社会过程的联系。它提供了机制线索，而非证明任何一种注意变化必然造成旧知改善的普遍因果律。

借这一视角，等号任务可以问：孩子何时开始注意两边表达式的值，谁提出了这一比较，原来只看数字位置的做法何时失去支配作用？若孩子经同伴提醒才检查右边，随后又在独立题中主动检查，这是一条值得追踪的注意变化。因而，“关键差异由谁发现”“新注意怎样影响旧做法”并不是本书独占的问题。

折返已经包含旧理解的重构

折返也早已超出简单回忆旧知识。Martin（2008）提出更细的观察分类，并以录像材料讨论其表现；Martin 与 Towers（2016）进一步用十二年级向量课堂讨论教师如何有意促进折返，使学生处理既往经验中的限制。把返回设计成教学活动、让旧理解在返回中改变，均已有明确近邻。

放到本章任务，孩子可先回到原来的物品配对或等量图，再带着新辨认出的相等关系重新读 $4+3=\square+2$ 。原来的算法没有被删除，却获得了更清楚的理由与范围。这种变化完全可能被折返与理解加厚解释。本书若只记录“回去以后解释更丰富”，尚未证明需要另设机制；需要进一步检查丰富究竟发生在哪条依据上，以及它是否影响了后面的判断。

差异与不变怎样被儿童辨认

Marton 与 Pang（2013）把学习条件中的变化与不变作为核心问题，并以四年级学生的计算机拍卖任务检验特定安排。其讨论区分教师提供的变化和学习者实际经历的变化，也承认前者不能保证后者。因此，本书不能把这一近邻描述成只关心材料、不关心儿童。

依这一视角，四张变式卡有不同的设计责任。前两张分别突出加数位置改变而数值保持，以及已知加数改变后待填数须调整；第三张在数字和空位位置不变时只改变右侧运算，第四张再检查多个条件共同变化时能否重建关系。这样的安排便于定位，但不保证四题认知负担相同；综合边界题更不能单独承担隔离因素的实验结论。第 10 章关于“孩子拿哪个不同作判断”的分析，应承认与差异辨识研究的联系，不能只因改用了 D 的语言就重复计算新意。

本书进一步记录哪条理由支持哪个判断

在这些近邻已经能够解释的工作之上，本书尝试把记录推进到“依据与结论的支持关系”。仅仅发现题目变了，还不足以判断该改什么：换了加数位置时，求和值与求缺数动作都可保留；已知加数由 2 变 1 时，答案需要改变，求未知加

数的方法仍成立；右边改成减法时，具体动作需要重建，相等关系仍然有效。回写的质量由修改是否对准受影响的依据来判断，不以改口多少或解释长短来判断。

这一尝试首先增加的是观察分辨率。对于同样答对四道题的儿童，一份记录可能显示他依次重算，另一份可能显示他主动保留可用部分、只重建受影响的部分。两种做法都可能正确，不能预设后一种必然更好。只有在后续负担、错误识别或新内容学习中出现稳定而有意义的区别，这项细分才获得额外解释价值；若没有区别，应承认它主要方便教师描述过程。

还要把“理由失效”与“结论必错”分开。在一道题中，一条解释不成立，结论仍可能由另一条独立理由支持；反过来，答案碰巧没变，也不能保全已经失效的依据。等号任务先提供局部入口，第9章再用面积题展开这一区分。它要追踪的是旧关系如何有范围地被保留、修订和再次调用，并不声称此前没有信念修订、策略选择或概念重组研究。

怎样比较才可能知道增加了什么

比较时可让同一组材料接受几套独立判读：按学生实际注意的关系记录，按折返及后续理解记录，按关键差异的辨识记录，再按依据与结论的支持关系记录。不同判读者先依据各自明确的规则工作，随后检查哪些判断重合，哪些分歧可以由作品定位。理论可以互补；不能为了显示本书独特，就故意把其他框架限制为一句粗略评价。

下一步应使用未参与制定判读规则的新任务，并保留两类机会：确实需要修改的条件，以及仍允许保留的条件。分别记录“该改未改”与“不该改却改”，同时记录计算、表达和提示依赖。如果依据定位记录只在原题上细致，却不能改善对后续表现的判断，其诊断增量就没有成立；如果只是让孩子更频繁地修改，反而损害本来正确的判断，也不能称为学习提升。

若要研究教学效果，应在同样内容、时间与必要帮助下比较不同安排，把教师热情、额外练习和工具新颖性尽量分开。注意变化、有效折返与差异辨识可以作为强比较条件，不能只选缺少解释与反馈的薄弱课堂作对照。即使本书安排胜出，也应先解释它在哪一种任务、哪类起点上提供了帮助，再讨论是否需要扩展理论。

这样的比较把贡献放在可以承担责任的位置：本书先提供小学数学中可实施的成对条件任务和较细的记录方式，再争取证明这些记录是否增加了有效信息。第9章将把“有范围的回写”界定得更清楚，第21章及附录给出记录和研究办法。理论创新的力度应由这条工作链逐步支持，而不能由术语的醒目程度预先决定。

带走的话

让理论帮助我们多看见一个关系，并让课堂材料有权改写理论给出的判断。

材料与判断

课堂背景来自我及合作者的相关文稿；本章等号变式与多框架判读方案均为教学研究设计。理论比较采用作者年份引文，完整书目及来源范围列入附录E。各项外部研究支持其自身问题中的结论，不直接验证本书工具；同题比较所提出的区别仍需课堂资料检验。

第二编 理解是什么

第7章 理解的形成与显露

课堂现场 同一个20，为什么不是同一回事

小明和四位同伴完成作业的时间分别是22、22、20、12、24分钟。五个数相加得到100，再除以5，平均数是20分钟；其中一位同学实际用的时间也是20分钟。数值碰在了一起，概念却没有因此合并：一个20来自对某个人的记录，另一个20来自对这一组数据的处理。

这组数据见于肖玉竹与我合写的文稿08《抓代表性核心 明平均数本质》。文稿在方法比较之后提出两个20的区别，借此让学生辨认个人实际用时与一组数据平均用时的关系。本章保留这个问题，但不沿用“平均数始终不是真实数据”的绝对说法；平均数可以与一个实际观测值相等，区别在于统计身份，而不是一个真、一个假。

课堂问题的力量正在这里。若只问平均数是多少，学生算出20便可以结束；若问两个20是否相同，回答“相同”与“不相同”都还不够。按数值比较，它们相同；按从哪里来、代表谁、随什么改变来比较，它们不同。教师需要帮助孩子说明比较的方面，而不是将一个预设口令认作唯一正确回答。

原稿中，平均数通过寻找代表数的需要进入课堂，随后比较移多补少与求和平分，再讨论数据变化。这个安排为观察理解提供了多个窗口，却不能仅凭课堂叙述证明每个孩子都已完成同样的概念变化。一个孩子可能从图中看懂均衡，另一个可能先通过计算发现总量的作用，还有孩子需要在修改数据后才辨认出平均数与个人数值的差别。

假设把最后一个24改为29，其他四个数据保持不变。原来用时20分钟的同学仍然用了20分钟，但全组平均数成为21分钟；这是本书新增的检验题，不是原稿实录。它让两个原来数值相等的20分开了，使“个人记录”与“整体统计量”的身份差异能够通过行动被看见。

先分清能力 形成过程与当下表现

讨论理解，需要分开三个相互关联的问题：孩子目前能够做什么，这种能力怎样形成，以及它在眼前任务中怎样表现。若把三者合在一个“懂了”里面，就容易由一道题判断全部能力，或把教师刚刚引导出的表现倒写成儿童早已拥有的理解。

本书所说的关系能力，是在一组适当变化的任务中，辨认对象、单位、依据与适用条件，并据此行动和修正的能力。它不是靠一项外在行为直接看见的实体，也不等于流畅说出定义；对它的判断来自多份有边界的证据。跨任务较稳定的表现，使我们有理由作出较强判断；表现不一致，则要求缩小结论或继续检查条件。

形成过程关注前后怎样改变。旧经验可以被重新组织，原有正确解释可以获得更宽的范围，也可能只是把尚未熟练的使用变得稳定。确认变化须有本人可比较的前期材料；只有教学后的回答，至多说明当前表现，不能补出一段未被记录的形成史。

显露指某种关系或判断依据在具体活动中变得可辨认。回答、选择、图画、动作与修订是判断这种显露的可记录证据，需要结合题目、材料、提示、表达方式和当时状态解释。这里既不把每个外显动作等同于理解本身，也不把一时没有表现视为能力不存在；它说明教师从哪里获得证据，以及这份证据在怎样的条件下出现。

以两个 20 为例，儿童一次指出“一个是个人用时，一个是全组平均”，只支持本次区分成功。若他在 24 改为 29 时仍能保留个人 20、把均值改为 21，就增加了关于关系使用的证据。若此前他把两个 20 当作同一个记录，现在能够独立作出这种区分，才进一步支持发生了变化。能力、形成与显露可以由同一组材料共同研究，却不能互相代替。

一个数怎样获得不同身份

20 可以表示 20 分钟、20 厘米、20 个单位，也可以只是数轴上的一个数。即使单位同为分钟，20 也可能是某次用时、一个小组的平均用时、一个计划上限或一个允许误差范围中的参考值。理解这些表达，不只是认出数字与单位，还包括认出它在关系中承担的工作。

回到原稿中的数据，个人的 20 分钟回答“这一位用了多久”，平均 20 分钟回答“把这五个用时总量按五人等量分配，每人对应多少”。实际时间不能倒回去重新分配，图上的移多补少是一种表示与计算，不是对真实经历的改写。如果孩子认为慢的同学把几分钟送给快的同学之后，大家昨天都用了 20 分钟，就把模型操作与历史事件混在了一起。

教师不必用一句“平均数是虚拟的”结束这个困难。可以请孩子先圈出原来五人的记录，再在旁边画出五条同高的条形，比较两幅图有哪些总量保持、哪些个人高度改变。这样，所谓虚拟性就有了可追踪的关系：平均数描述整体的一种方式，但不要求每个个体都曾取这个值。

同样，平均数也不必与所有个体数值不同。22、22、20、12、24 的平均数恰好等于其中的 20；若五个数据全部为 20，平均数仍为 20，并且与每个个体都相等。概念身份不能靠“有没有在原数据中出现”来判断，只能回到它是怎样被确定、用来回答什么问题。

日常类比是同一个人在家庭和工作中的称呼。一个人没有因为被称为父亲或组长而变成两个人，但不同关系会使他承担不同职责。类比帮助我们理解“数值相同而身份不同”，同时也有边界：数学中的平均数有确定计算关系，不像社会角色那样完全由习惯决定。

从移多补少走到求和平分

在条形图上，把 24 的 4 分钟和两个 22 各多出的 2 分钟移给 12，可以使五条都成为 20。移动前后总量仍为 100，只是分配的形态改变；求和再除以人数，也

是在总量保持的条件下求等量分配后的每份。两种方法能够接通，靠的是总量与份数的关系，而不是因为它们偶然都算出同一个数。

原稿通过比较两种方法推动学生理解，本书进一步要求区分方法的可用范围与使用成本。数据较少时，移多补少便于看清补偿；数据很多或差距很大时，直接计算更方便。但是图形与计算不能简单排成落后和先进：图可以揭示一个不合理结果，计算可以处理图上难以准确表示的数量。

若孩子算出这组数据的平均数为 25，他无需先重算每一步，也可以检查 25 超过了最大值 24。对于有限个实数的普通算术平均数，平均数不小于最小值，也不大于最大值；数据不全相等时，它严格位于最小与最大之间。这个条件既帮助检验计算，也让“整体代表”不再只是一个笼统词语。

原稿在某一组不全相等的数据中使用严格不等式，这在相应条件下成立，却不应推广成不带例外的定义。教师可以让全组都用 20 分钟作为反例，询问平均数是否必须比 20 大又比 20 小。这个很小的条件变化，能够帮助孩子把范围说得更完整，而不必引入超出年级的形式论证。

如果学生发现了这个例外，教师应把它当作概念精细化，而不是认为他在为难标准答案。理解的显露有时正发生在孩子不接受过强说法的地方。一个能够给出有效反例的孩子，即使尚不能流畅解释所有术语，也已经提供了值得认真保留的数学证据。

可识别 换了外观还知道在做什么

“可识别、可维持、可表达”在本章承担三个观察方向：能否在变化中辨认关系，能否在时间间隔后继续使用，能否通过适合任务的方式使判断可讨论。它们不是三种已经验证独立存在的心理能力，也不是人人必须依次通过的阶段。所谓可识别，首先是认出当前任务涉及什么关系，而不只认出熟悉题目的外观。

教师可以把五人的用时写成表格，换成条形图，再换成一句描述，让孩子判断哪些信息足以求平均数。也可以保留数字，却改变所问对象：求五人的平均用

时，与问其中一个人比另一个人多用了多少，不能因为数据相同就使用同一计算。可识别包括认出适用之处，也包括拒绝不适用的调用。

进一步的变化是数据个数不同。比较两个小组时，只看总时间通常会受到人数差异影响；求每人的平均用时可以在一个明确维度上提供比较。但是平均数并不自动使所有比较公平，作业难度、完成质量、计时方式以及学生所处条件若不同，平均用时也不能独自回答谁学习更好。

原稿用作业用时引出代表数，本书必须保留这个边界。用时短不等于数学理解更深，用时长也不等于能力低；平均数只是描述所记录数据的一种统计量。若教师把平均用时直接变成评价儿童价值的尺度，就把统计方法承载不了的判断压到了一个数上。

可识别也不是遇到任何情境都能立即选择最佳统计量。小学阶段可以先认识平均数的一种用途，再通过极端数据体会它有局限，不必要求儿童一次掌握所有统计指标。教学的进步在于他们开始询问“这个数用来代表什么”，而不是随处背诵“平均数最有代表性”。

可维持 过了一段时间还能够重新建立联系

一次活动中形成的解释，可能依赖刚刚听到的提示、刚刚看到的图或同伴的表达。过几天换一道内容相近但表面不同的题，孩子还能否自己寻找总量与份数，才提供了另一类证据。可维持不是永不遗忘，也不要求每次用完全相同的速度和语言复现；它关心关系在适当条件下能否被继续调用或重新建立。

延后任务若突然大幅增加阅读难度，就可能把维持问题与语言问题混在一起。比如原来用简单条形图，后来换成含有大量背景信息的长题，答错不能直接说明平均数概念消失。比较时需要尽量明确哪些条件保持、哪些条件改变，并记录学生是否需要提示。

教师还可以观察修复过程。孩子最初忘了求和除以个数，却能通过重新画图找回计算关系，这与完全等待别人报公式不同；他没有立即给出答案，却仍可能保留了可以重新组织的知识。若只按第一反应计分，就会遗漏这一种维持方式。

这并不意味着所有迟缓都应被解释成潜在理解。孩子也可能反复试猜，在多次暗示后终于说出老师要的话；此时需要区分自发修复与答案被提示出来。记录提示的内容、次数以及孩子之后能否独立做另一个任务，能够减少过度乐观与过度否定两种倾向。

一个日常类比是学会认路。多年没去某条街的人可能一开始迟疑，但看到路口后能重建路线；另一个人则只能紧跟导航，离开提示便不知道身处何处。两人都可能最后到达目的地，过程却提供不同信息。这仍是类比，而非对记忆机制的实证说明。

可表达 把表达通道打开，而不是只等标准句

表达可以是说，也可以是画、指、移动、选择、纠错或为别人补上一处遗漏。一个孩子不能完整定义平均数，却能在数据增加 5、人数仍为 5 时，把平均条形整体抬高 1，他已经展示了总量改变与平均量改变之间的关系。教师可以继续问他为什么，但不应抹去动作本身已有的信息。

反过来，孩子能够背出总数除以份数，却可能把题目中所有数字都加起来。规范句子在这里没有保证关系被辨认，反而可能使教师更早停止追问。表达的质量应看是否与任务中的对象、条件和行动一致，不能只看术语是否齐全、语气是否自信。

降低表达门槛，也不等于取消检验。孩子指向某条形说“这里”，教师需要追问具体指长度、位置还是数值；孩子说“匀一匀”，需要让他显示匀的过程中什么保持。支持应帮助意思变得可讨论，而不是替他补上全部理由后，再宣布他原来就是这么想的。

在小组中，教师还要注意表达所有权。某位同学提出总量保持，另一位同学重复这句话，不能自动认定两人都已建立同样理解；但重复也可能是正在学习的一个环节，不宜立刻贬为鹦鹉学舌。后续给第二位同学一个稍变条件的任务，才能知道这句话在他那里开始承担了什么工作。

表达的机会还受课堂关系影响。孩子担心出错被嘲笑，可能宁愿沉默；擅长口头组织的孩子则更容易被教师看见。评价若只收集抢答与完整句，就会把表达条件的差异混入概念判断。本书在第 11 章继续讨论这些条件，这里只确认一个原则：表现缺席需要解释，不能直接当作理解缺席。

三个方向怎样共同使用

可识别、可维持、可表达并不是三道依次通过的闸门。孩子可能先在动作中识别，再逐渐表达，也可能先学会公共语言，再通过使用修正其意义；保持程度则只能在时间中继续观察。把它们视作不同证据方向，有助于教师安排下一步任务；把它们机械合成一个总分，反而容易遮蔽差异。

例如，甲能准确计算、解释图形，却在两周后需要提示；乙口头表达短，但能独立处理变化数据；丙能背定义，却不能识别一个极端值对均值的影响。给三人排一个“理解深度”单序列，可能没有足够依据。更有用的记录是他们目前各自能够独立承担什么，以及下一份支持应落在哪里。

这三个方向也不穷尽所有证据。孩子是否能够提出反例、能否迁移、怎样回看原来的做法，都可以继续提供信息；本书将“回看”作为值得细化的一项观察，而不把它放在其他证据之上成为天然裁判。只有比较研究显示额外解释力时，才有理由提高某一种工具的地位。

若某个任务同时包含复杂阅读、计算和口述，结果很难说明具体哪一环有困难。教师可以把任务拆开，让孩子先选择图，再解释一处关系，最后独立计算。拆开是为了定位，不是把学习永远切成碎片；定位以后仍需回到完整问题，看这些能力能否合作。

旧说法接住了什么、漏了什么

把理解描述成知识之间建立联系，有助于我们摆脱“多记一个事实”的想法；把计算过程看成可以被整体把握的对象，也能帮助解释符号为何有力量。这些解释应在具体论证范围内比较，不能简化成“只看对象、不看条件”。我们要讨论的是对象化在课堂使用中可能出现的两种不同结果。

一种结果是，孩子把一段计算压成可调用的整体，需要时能够解释其中的数量关系。另一种结果是，他只保留一个名字或程序，与任务中的对象逐渐脱离。平均数都可以被叫作一个数，但前者知道它属于哪组数据、受哪些变化影响，后者只知道什么时候按计算器上的某个键。

从条件层看，数据、计算工具与儿童已有经验要共同进入观察；从改变层看，新的整体数怎样影响他对原来个体数据的解释；从入口层看，可以从计算开始，也可以从代表性争议开始。我们不能要求每次都先制造争论，因为有些孩子需要先获得必要的表示经验，才有可能参与有意义的比较。

这里的教学主张是：知识被压缩成便于使用的对象以后，仍应能在必要时重新打开其来路与范围。至于儿童是否确实因此获得了新的关系能力，需要在解释、独立使用与延后表现之间建立证据联系。一个有助于组织观察的说法，不能单凭自身连贯就充当形成机制已获证明的结论。

老师可以这样做 让两个 20 分开又接通

一项可执行的设计可以从原稿五个用时开始，但先请孩子分别写“谁的 20”和“哪一组的 20”。教师不提供“个体”“统计量”等术语，让孩子用自己的词辨认来源，然后通过两幅图对照。若孩子认为它们完全一样，暂不纠正，先请他预测把 24 改成 29 以后两个 20 怎样变化。

接着让孩子实际检验预测。个人 20 保持，平均数从 20 变 21；如果他说“多了 5 所以平均数也多 5”，可以请他在五条均衡条形上安排增加的 5，而不是直

接报出除以 5 的规则。材料在这里承担的是把关系放到孩子能检查的位置，不是用漂亮画面替代推理。

再把修改撤回，回到旧数据，请孩子解释为什么原来平均数恰好等于某个人的记录。一个有信息量的回答是，两者数值相等是这组数据计算后的结果，而两者的确定方式不同；他也可以构造一组平均数不在原数据中的例子。教师不必要求所有孩子造出复杂数据，2、4 的平均数为 3 已经足够说明问题。

然后给出全相等的例子，检验平均数是否必须严格位于最大最小之间。若孩子能够修订自己的句子，教师可以保存修订前后记录，作为回看证据；若他只是跟着老师说“也可能相等”，还需通过另一组数据继续观察。条件表述的更新与实际使用的更新，应相互印证。

最后安排一个非计算问题：“如果两组平均用时相同，是否表示每个人用时都相同？”让孩子尝试构造两组数据，可以先用三个人的整数用时。10、20、30 与 15、20、25 均值都是 20，却分布不同；这个新增设计帮助孩子看见平均数保留了某类信息，也压缩掉了个体差异。

对于不善表达的孩子，可以让他用积木高度摆出两组，教师记录摆放与检查过程。对于已经熟练的孩子，可以进一步询问哪组更集中，但不急于引入新的正式统计量。每个人的下一步可以不同，共同要求则是给出的例子必须满足自己提出的条件。

从回看中辨认变化

学习之前，孩子可能把 20 看成某个人的时间，或把平均数只看成算出来的答案。学习之后，教师让他重新解释原来写下的 $100 \div 5 = 20$ ，询问 100 保留了什么、5 数的是什么、20 如何用于比较。这时，旧算式没有改变，算式中各个位置可能获得了更明确的意义。

确认“旧知改名”须比较这个孩子自己的前后记录。旧解释可以已经正确，变化发生在它获得更宽的范围或更明确的条件；没有前期资料，则只记录当前能

够重解旧题。还应在另一组数据中检查他能否辨认总量、人数与所求：若回看时说得清楚，换题却把组数当人数，证据便只支持局部表现，尚不足以推断稳定的关系能力。

回看也可能发现原来的理解并不需要大幅改写。有的孩子在新课之前已经知道平均数描述整体，新课主要提升计算熟练度或扩展应用条件；不能为了符合本书主线，强迫每个人都呈现从错误到正确的戏剧性转变。没有变化也可以是一份诚实记录，它可能说明起点不同，或任务没有捕捉到变化。

怎样算我说错了

若三个观察方向在可靠测量中几乎总给出同样信息，而且分开记录不能改善教学决策，就应考虑简化工具。若所谓显露只依赖教师把含糊回答解释得越来越丰富，却没有独立任务支持，本章的观察方式也需要重做。可观察不能等于可以任意解释，支持强度应与证据相称。

如果学生不能完成口头身份区分，却能稳定、独立地处理平均数的变化与反例，本书不能坚持口述是必需门槛。反之，若学生会谈身份但不会计算，也不能把技能问题一笔带过。理解与熟练度可以相互促进，教学需要明确当前限制，而不是用一个宏大判断替代具体帮助。

带走的话

看见理解，是看见孩子怎样让一个数在具体关系中承担恰当的工作，并让这种判断接受变化与时间的检验。

材料与判断

五人用时、两个 20 及移多补少与求和平分的比较，来自肖玉竹与我合写的文稿 08。24 改 29、全相等数据及相同均值不同分布为本书教学设计。三个观察方向用于组织证据，尚不是经过本书数据验证的测量结构。

留给下一章的问题

平均数可以把多项数据压成一个数，竖式可以把一串交换和累加压成几行符号。压缩使数学便于使用，却也可能让来路被遮住。孩子从动作走到符号以后，怎样再从符号回到对象与关系，返回又为什么不一定只是把原来的路倒着走一遍？

第8章 去程与返程 好的符号是能走回来的压缩

课堂现场 图已经画过，理由却没有跟上

文稿11《数形结合 从形数割裂到形数共生》讨论了两节分数除法课。作者指出，一种安排很快从画图转向算法总结，另一种安排虽然同时展示图与式，却没有充分追问它们之间的对应。这里的困难不是完全没有图，也不是完全没有计算，而是图与计算可能在孩子那里分别存在。

这两类课堂提醒教师：图形的出现与关系的建立，不能仅凭形式相似而等同。下面使用一项明确的教学设定展开分析，并与文稿14的分饼过程相互参照；新设计不冒充原课堂中已经发生的观察。

设想一个孩子看到“4张同样大小的饼，每份 $\frac{1}{3}$ 张，可以分成多少份”，画图数出12份；他又学会 $4 \div \frac{1}{3} = 4 \times 3 = 12$ ，之后能够直接计算 $7 \div \frac{1}{3}$ 。若教师此时只继续增加被除数，孩子可能表现得越来越熟练。但当问题改为“算式里的乘3为什么出现”，他是否能够重新指向每张饼包含三个 $\frac{1}{3}$ 张，就需要另一次观察。

文稿14《聚焦素养 抓住本质 建构运算一致性认知》正是以分饼任务讨论这种联系。它把 $1 \div \frac{1}{3} = 3$ 作为理解若干具体算例的支点，再拓展到一般分数除数，最后回到同单位的数量比较。本章接住这一教学方向，同时对原稿中个别单位表述与算法解说作必要校正，不把忠于材料理解为沿用材料中的每一句话。

从情境得到式子，可以叫作本章的去程；从式子重新说明一种满足条件的情境、图或数量关系，可以叫作返程。两个词只是为了讨论方向，并不意味着所有学习都先走同一条去程。孩子也可能先会算式，再借一个问题发现它的意义；这种路线同样值得观察。

这一章要说的话 压缩应当留下可以重新展开的关系

符号的价值在于压缩。我们不必每次相加都重新摆出全部小棒，也不必每次除以分数都画出所有分割；熟练符号运算让注意力可以转向更复杂的问题。但是压缩后的规则需要在必要时接受解释与条件检查，否则孩子可能只知道怎样操作，却不知道操作适用于什么。

返程不是要求逐字回忆教师上课的顺序，也不是要求每道题都画图。它要求孩子能够依据符号重建一段有效关系，并说明图、量与算式如何相互约束。重建可以有多种形式，也可以不同于最初学习的路径；只要数学关系成立，就不能因为与教材示意图不同而被排除。

先分清数、量与份

在“4张饼，每份 $\frac{1}{3}$ 张”的任务中，4张是总量， $\frac{1}{3}$ 张是每份量，商12表示标准份数。把“张”作为共同量单位，两者相除以后得到的是份数，而不是12张新的饼。若孩子算对12却把单位写成张，不能简单视为无关紧要的小错，因为它可能暴露了他没有分清所求对象。

当总量改为1张、每份为 $\frac{2}{3}$ 张时，算式 $1 \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$ 表示总量相当于一个半标准份。若任务问“最多能让几个人都分到完整的 $\frac{2}{3}$ 张”，答案应是1人，余下 $\frac{1}{3}$ 张；若问“相当于多少份这样的份量”，答案可以是 $\frac{3}{2}$ 份。情境的问法决定对结果怎样解释，不能把一个半标准份直接写成一个半完整的人。

原稿14在这一位置使用人数表达，本书将其改为标准份额或补足完整人数的限制。修订不改变除法的数值关系，而是使商的意义与实际问题的意义一致。数学理解在这里不是会不会乘倒数，还包括能否判断一个算术结果能否直接作为现实答案。

同一个 $4 \div 2$ 也可以表示把4张饼平均分成2份，每份2张；还可以表示4张饼按每份2张来分，共2份。两个数值计算相同，所求量与已知量的位置不同。返程任务如果只接受一个故事，便可能错失学生对另一种合法解释的掌握。

教师可以要求孩子先给量标名，再选择图形。这并不是让每一题增加冗长说明，而是在含混处把单位关系显出来。等孩子能够稳定区分，记录可以简化；简化是建立在关系可恢复的基础上，而不是从一开始就假定所有数字都能脱离对象使用。

为什么除以 $1/3$ 会出现乘 3

把一张饼平均分成三份，每份为 $1/3$ 张，一张里有三个这样的单位份。四张同样大小的饼，就有四组各三个单位份，得到 $4 \times 3 = 12$ 份。这里的 3 来自每个原单位包含的目标单位份数，而不是教师因为看到分母 3 就发出“改乘 3”的指令。

如果把每份改成 $1/5$ 张，每张就包含五份，四张对应 4×5 。孩子若能够说清这一步，已经显示他正在跟踪单位的改变；若只说“分母搬上来”，仍需通过图或情境检查这句话是否有意义支撑。两种表达不应仅凭术语是否规范来判定，关键是能否在变化中继续使用。

这条解释也有边界。对 $2/3$ 这样的除数，一张饼并不包含三个完整的 $2/3$ 张，而是包含一个半标准份；此时若继续把分母直接当份数，就会出错。教师需要把“先变成 $1/3$ 张的小单位，再每两小份组成一个标准份”的关系展开，让分子 2 承担实际作用。

例如，4 张饼共有 12 个 $1/3$ 张的小份，每两个小份组成一份 $2/3$ 张，于是共有 6 份。算式可以写成 $4 \div 2/3 = 4 \times 3 \div 2 = 6$ ，也可以压缩成 $4 \times 3/2$ 。乘 3 与再除 2 分别对应改变小单位与重新成组，不是两个凭空出现的符号动作。

对于不易画清四张饼的学生，可以先画一张，再用四份相同结构表示；对于已经能整体思考的学生，则可以先说一张相当于 $3/2$ 个标准份，再乘 4。两条路线都合法，也都可以成为返程。统一的应是关系检验，不能为了展示一种标准发生过程而抹去另一条合理路线。

同单位比较怎样让旧除法重新出现

$3/4 \div 2/5$ 可以把两个分数都写成二十分之一为单位： $3/4$ 是 15 个 $1/20$ ， $2/5$ 是 8 个 $1/20$ 。于是比较前者包含后者多少倍，可以转成 $15 \div 8$ ，得到 $15/8$ 。共同单位在这里使两个量的大小比较转化为单位个数的比较，单位选取与商的意义需要一起说明。

另一条符号路线利用商不变：被除数与除数同时乘 20，分别成为 15 和 8，商仍为 $15/8$ 。原稿 14 在解释这一步时说“让除数变成 1”，与其所列式子不一致；这里乘 20 后除数变为 8，若要让 $2/5$ 变成 1，应同时乘 $5/2$ 。两条转化都可以成立，却不能把一条的式子与另一条的理由拼在一起。

20 在这一例子中是分母 4 与 5 的公倍数，不能称为“两个分数的最小公倍数”。这是一个看起来很小、却关乎解释质量的修订：孩子若只记住让数字变整齐，却不懂选择 20 的来路，就可能在新的分母前任意操作。返程应当能说明这个共同单位为什么同时适合两个分数。

回到 $60 \div 20$ ，60 可以看作六个十，20 看作两个十，比较得到 $6 \div 2 = 3$ ；回到 $0.6 \div 0.2$ ，则是六个十分之一与两个十分之一的比较。文稿 14 用这两类旧算例建立运算一致性，本章沿用其明确例子。它们显示新学习可以帮助旧运算获得更清楚的单位解释，但并不因此证明所有学生都发生了同样的变化。

这个共同单位解释也不能无限扩张为所有现实除法的唯一读法。等分问题、比值问题以及带单位的复合量问题，所求对象可能不同；数学数值关系可以相通，情境解释仍要分别检查。小学阶段的统一性，应通过具体对应逐步建立，而不是靠一句“所有除法都是一样的”跳过差别。

去程与返程为什么不一样难

从一幅已经分好的图写出算式，孩子可以沿着图中显著的分组线索进行；从一个算式画图，则需要自己决定总体、单位、分割方式与所求对象。两次任务使

用相同数字，也未必要求相同程度的组织。返程有时更难，但不能由此把所有困难都归为理解不足，还要看图形绘制与表达本身的负担。

表征内部处理与跨系统转换的区别，已有杜瓦尔的研究基础（Duval, 2006）。本书把这一问题落实到小学数学的任务比较：从图到式与从式到图各要求儿童决定什么，困难来自转换方向，还是额外的构造与表达负担？先把这些工作分开，才可能判断返程任务增加了什么信息。

一个返程题可能暗中加入去程题没有的要求。例如，给出线段图选算式是识别任务，给出算式完整画线段图是构造任务；两者差异既涉及方向，也涉及任务形式。若要研究方向本身，应设计相对可比的识别与构造组合，并记录绘图技能，不能直接拿两题正确率之差宣布一个普遍机制。

教师在日常诊断中不必每次做严格实验，但仍可保持这种敏感。孩子不会画饼，不等于不能解释包含关系；可以提供空白等长纸条，让他自己分组，也可以给几幅候选图让他说明哪幅满足条件。提供载体降低的是表达负担，是否把关键判断一并给出，则需要另行检查。

压缩并不意味着只能解出原来那一个故事

$4 \div 1/3$ 可以对应分饼，也可以对应把 4 米绳子按每段 $1/3$ 米切分，还可以在纯数的层面问 4 中包含几个 $1/3$ 。若孩子从算式返回了绳子而不是饼，只要单位和关系正确，就是合法的展开。教师要求返回的是关系，不是对最初课堂故事的背诵。

同样，一幅图未必唯一确定一个算式。画着四个相等整体、每个分成三份，既可以用于表示 12 个 $1/3$ ，也可能用于说明 4×3 个小份；必须看问题所问及各符号的指代。图不是自带全部数学意义的透明窗口，教师需要让孩子说明正在用它表达哪一项关系。

这也使“符号是压缩包”的类比需要修正。计算机压缩通常追求按规则恢复特定原文件，数学符号却可以对应许多满足条件的具体情境。它保留的是某些结

构，舍去的是与该结构无关的细节；好的返程未必恢复唯一来历，而是重新建立一份足以支撑解释的关系。

理解的成长可以表现为能够接受这种多样性。孩子最初可能认为除法只与东西有关，后来可以用测量、比值和数轴来解释；新的表示不必删除旧表示，而是使旧表示成为一类适用的情境。若他能够指出不同表示共享什么、各自不能说明什么，压缩就没有把差异彻底压平。

同样填出 5，接下来该查什么

下面是本书自构的诊断任务，不是原稿中的学生实录。三名孩子都在 $4+3=\square+2$ 中填 5：一人先得 7 再求缺数，一人发现右边的加数少 1、另一个数须多 1，一人只说“前两个相加，再减后面的数”。第三句话既可能是对关系的简写，也可能是只会照位置执行，不能凭表达短便判为不理解。

可接着给 $4+3=9-\square$ ，仍允许摆物或画图。此题答案是 2；若机械照搬“前两个相加再减 9”，就不适用。教师先记录儿童怎样处理，再请他指出原来的解释哪一部分仍成立、哪一部分需要改变。算出左边 7 仍有用，但寻找右边缺数的动作变了。不能因为旧动作不能照搬，就要求把整套解释推倒重来；也不能因为仍得到一个数，就放过等号两边是否相等的检查。若两条原路线都能正确调整，应保留两条，题目不必强行分出优劣。

这类分叉题的用处，是让一个新条件检验此前未分清的两种说法。若儿童尚不熟悉减法中的缺数，后题还增加了先备负担，失败便不能单独证明等号理解不足。教师可以先降低数值或换用实物，并记录所给支持；帮助后的答案另记，不能倒填为独立表现。

转换时还须分清改了哪一层。把“五”写成“5”主要是记号改变；把五个点换成数线上长为五个单位的线段，是表示改变，要补明单位和对应。把“每次取两个”改成“取后放回再取”，则改变允许动作，原来的不重复计数理由可能失效。对象域改变又是另一回事：把整张饼扩为允许半张后，可回答的份额不

同，但“完整人数”的目标不能随之偷偷改成标准份额。这几层不是儿童必须依次跨过的阶段。

因此，返回不同故事、采用不同符号或提出新操作，都要先通过数学关系的检查才能保留。两堆东西都能分成若干包且余 2，只说明余数相同，并不说明总数相同；若孩子说“它们一样”，教师可以请他指明一样的是哪一项。名称变化本身不算对象变化，解释扩大也不自动改变原来的运算规则。可以把核验收成三个短问：“变了什么？原来的哪条依据还够用？下一步先查哪里？”教师依据回答安排下一题，而不把三问变成每题必须背诵的口令。

图与式的对应由谁完成

操作和图形能够为符号提供可以观察的关系，这是数形结合教学已经强调的方向。原稿 11 进一步批评教师包办解释与静态并排展示，本书接住这两点，却不把“只要动态图就能懂”作为新的结论。动画可能同样由教师替学生完成关键判断，手动操作也可能只是模仿。

从条件看，图形需要表示约定，操作需要目标，符号需要规则，儿童需要可调用的经验。哪一项更紧缺，决定帮助从哪里开始；不能认为材料越多越好，因为多种表示若未建立对应，也可能增加负担。让孩子说明一个局部对应，常常比一次呈现完整多媒体过程更便于判断当前困难。

从改变看，我们不仅关心图是否帮助算出新题，还要观察新符号能否让孩子重新解释旧图。学习竖式以后，孩子可能更清楚小棒交换中的计数单位；学习分数除法以后，可能更清楚原来整数包含除的关系。这里与第 9 章衔接，但返程本身不等于改名：一个人能够恢复旧操作，却未必改变对旧操作的理解。

从入口看，可以先给符号，请孩子寻找一个解释；可以先给错误图，让他修改；也可以从实际分组开始，让符号作为记录进入。教师不能因为本书强调返回，就要求所有课程都先教算法再补图，也不能因为强调形成，就禁止必要的直接说明。入口选择要服务具体困难，不能被口号代替。

老师可以这样做 四类返程题

第一类任务是给算式选择或构造表示。例如给 $4 \div 2/3$ ，让孩子画一种图，并标出 4、 $2/3$ 和商分别对应什么。教师应先检查总体单位，再看分组与所求，不把图画得像不像教材作为主要标准；如果孩子选择数轴，可以请他说明一个跳步代表多少、商怎样出现。

第二类任务是给结果补足情境。只给答案 6 不足以恢复除法关系，因此可以同时给算式 $4 \div 2/3 = 6$ ，请孩子写一个符合它的问题。若故事说成把 4 张饼平均分成 6 份，求每份多少，虽然数之间有关，所问已经变成另一个算式；这不是简单判错的终点，而是让孩子比较三种量的位置。

第三类任务是解释符号的一笔。对进位竖式，可以问那个小小的 1 表示一个一还是一个十，它与旧口算记录中的哪一部分相关。对分数除法，可以问乘 $3/2$ 中的 3 与 2 如何在单位份中出现。局部解释有时比“说说整个算理”更可操作，也更容易定位当前需要帮助的环节。

第四类任务是检查规则的适用边界。给出“除以一个数等于乘它的倒数”，请孩子说明为什么要补上除数不为零；在其已有知识范围内，可以从寻找一个与 0 相乘得到 1 的数来讨论倒数不存在。不能要求儿童以未学的形式理论证明，但应保留规则所必需的条件。

四类任务无需每次全部出现，也不构成固定教学四步。教师根据学生作品选择最有区分度的一类，避免把诊断变成额外题海。对一个已经能解释乘倒数却频繁计算失误的孩子，当前更需要的是有反馈的练习；对一个计算流畅却混淆所求单位的孩子，则需要把量关系重新展开。

一次不替孩子完成的提示

设想孩子为 $4 \div 2/3$ 画了四张饼，每张分三份，却不知道下一步。教师若直接圈出每两份一组，孩子很容易跟着数出 6，但关键分组已由教师完成。一个更小

的提示可以是：“题目说一份有多大，你画出的每小块又有多大？”它把比较对象指向两种单位，却把怎样组合留给孩子。

如果孩子仍没有前进，教师可以请他在一张饼中指出 $2/3$ ，再回到全部材料。提示逐步加大并不自动违背自主学习，重要的是记录支持改变了什么，以及撤去支持之后孩子能否独立解释另一题。把帮助看成可以调节的条件，比坚持绝不提示或一次讲透更接近课堂实际。

也可能孩子已经理解分组，只是不知道怎样在纸上表示跨饼组合。教师可以允许剪开或使用独立小块，降低表示限制；若因此顺利完成，就说明原困难至少部分在材料组织。这样的结果也会反过来修改教师对“他不懂分数除法”的最初判断。

这一教学设定中的诊断链不是预先保证成功的脚本。孩子可能提出一种教师没有想到的图，或指出问题问的是完整人数；教师需要沿着实际反应继续安排。共同准则是数学关系与证据，具体路径则在互动中形成。

从返程到回看还差什么

返程可以让孩子把一个符号重新连到对象，但本书还要问这是否改变了原来的知识。孩子能为 $4 \div 1/3$ 画图，可能只是恢复了刚学过的分饼过程；若他进一步回到 $60 \div 20$ ，发现二者都可以通过共同单位的个数比较来说明，旧除法便可能获得新的解释位置。这后一项变化，才进入第9章的核心讨论。

但不能把两者排成价值高低的固定等级。对刚形成分数单位的孩子，可靠返回已经是重要进展；过早要求跨数域统一，可能使他重复成人语言而失去具体意义。教学应根据当前任务决定下一步，不能为了证明全书母命题而让每节课都强行产生宏大的知识重组。

回看也需要保留旧记录。若没有孩子原来怎样解释的证据，教师不能确认新说法是变化，还是他此前已经知道。当前能够重解旧题仍是一项关系表现，应照实记录；只是它与这个孩子发生变化的判断不同。旧解释也不必错误：一个原本

正确的局部解释获得更宽的范围，同样可能是需要记录的变化。可以在学习前保留一小段图、算式或录音，之后用相近任务再看；记录目的不是给孩子制造错误档案，而是让变化不完全依靠成人的印象。

在这一过程中，有些旧方法会保留，有些会被修订，有些会在特定任务下暂时搁置。理解并不要求操作痕迹永远出现在纸上，也不要求熟练者每次都返回。能否在需要时重新建立关系，与是否每次都把关系写出来，是两回事。

把不同返回方式放在一起检查

一次教研可以收集三份不同作品：一份以饼图表示，一份以线段表示，一份直接用共同单位解释。先不按照图的直观程度给作品排序，而请教师逐项查找总体是谁、标准份是谁、商表示什么，以及每一步是否保持了同一关系。这样的比较能防止一种图形成为理解的唯一通行证，也能发现某份看起来简洁的符号说明其实遗漏了必要条件。

随后让学生相互解释作品，但不要求把所有作品改成同一种格式。能指出别人的图与自己的式子在哪一处对应，比简单赞同“方法都很好”更有信息；能指出一幅图不能说明什么，也比盲目追求方法越多越好更有价值。多样表示只有进入相互检验，才成为关系的丰富表达，而不是并排陈列的装饰。

教师还应保留无法互译的部分。有时两份作品在当前问题中得到相同结果，却建立在不同假设上，例如一份允许切分成任意份额，另一份要求完整人数；此时不能急于说它们本质相同。先把问题问法和模型条件讲清，再决定怎样转换，才是和谐地处理差异，而非抹去差异。

最后可以请孩子选择一种自己暂时不熟悉的表示，说明愿意从哪里开始尝试。教师依据他的选择提供局部支架，并在结束后让他用原来的方式再解释一次。这样，返回既可以是检验，也可以成为继续生成关系的机会，但每次具体出现了什么变化，仍须由作品与行动来说明。

怎样算我说错了

如果在控制识别与构造形式、表达负担和题目难度之后，返程任务没有提供去程任务之外的信息，本章关于独立诊断价值的主张需要缩小。若返程表现只是绘图熟练度的另一种名称，也应改进工具，而不是把不会画图的孩子统称为没有理解。方向问题需要被操作化，不能只靠比喻获得说服力。

若孩子能稳定解决变化题并解释条件，却不能复现最初学过的图，本章应承认这种不能复现不构成反证。反之，孩子画得完全正确却只是在记忆模板，也不能因为返回表面完成就判定理解稳定。解释、迁移、反例与延后任务仍需共同参与判断。

带走的话

好的符号让孩子能够走得更远，也允许他在需要时停下来，重新找到正在使用的对象、单位与理由。

材料与判断

课堂问题来自文稿 11 及胡红婷与我合写的文稿 14。量、份与单位的区分，以及同乘 20 的解释，按本章给定数学关系表述。图式任务、提示分支、等号分叉题和条件层次比较为本书设计；其诊断价值仍需与已有转换任务比较。关于数学意义及人机共同判断的讨论，同时参照王德生《意义数学的诞生》与《人与 AI 一起发生新数学》，不以这些理论讨论代替儿童学习的实测证据。

留给下一章的问题

孩子能从符号返回关系以后，原来会做的事是否获得了新解释？返回旧路与改变旧路的意义又有什么区别？下一章将直接讨论“旧知改名”，并把它与顺应、折返、网络重组及逆向迁移等邻近解释放在同一张桌面上比较。

第9章 旧知改名：从新学习中重新看见旧知识

课堂现场 一项新本领怎样回到了旧题

一节分数除法课已经接近结束，通常最容易被留到最后的，是几道供学生试用新规则的题。新课讲过了，孩子算对了，教师便可以带着一种相当踏实的感觉进入下一单元。然而，胡红婷与我合写的《聚焦素养 抓住本质 建构运算一致性认知》（文稿14），把我们的注意力引向另一个方向。文章第四部分“本质回归”在讨论分数除法后，安排学生重新解释 $60 \div 20$ 和 $0.6 \div 0.2$ ，让相同计数单位的个数关系把不同算式联系起来。原稿提供了这一教学安排及作者整理的学生回答，它使我们能够细看回看发生在哪里。

$12 \div 3 = 4$ 是孩子可能早已会算的式子。若把它放在 12 块饼、每人 3 块的情境中，商 4 表示可以分给 4 人；若把 12 块饼平均分给 3 人，商 4 则表示每人 4 块。计算结果相同，已知量与所求量的角色却不同。所谓回看，不能把这两种解释匆忙合成同一句口号，而要让孩子说明，在眼前的任务中，谁作为一份、共有多少份、每份是多少，以及式子如何记录这些关系。

学习 $4 \div \frac{1}{3}$ 时，如果每人得到 $\frac{1}{3}$ 块饼，那么 4 块饼含有 12 个 $\frac{1}{3}$ 块，可以分给 12 人。这里可以先将 4 块改写为 12 个 $\frac{1}{3}$ 块，再比较每人需要的一个这样的单位。回到 $12 \div 3$ 的包含情境，孩子于是可能看见：过去熟悉的“12 里面有几个 3”，同样需要先说明比较的量是什么，单位是否一致，商记录的是怎样的份数。变化不只在计算范围扩大，还在旧式子怎样被理解。

另一条线索来自文稿 21《从“附属呈现”到“核心支架”》第三部分：文章明确建议在第二课时学习竖式时，回调前一课时的图示与口算算式，比较哪一种口算思路与竖式相承。这里是原稿提出的教学安排，不把建议性叙述扩大成已经追踪过全班每个学生的实证结果。 $28+4$ 可以先算 $8+4$ ，再与 20 合并；也可以把 4 拆成 2 和 2，先给 28 添 2 得到 30，再加剩下的 2。竖式并非把这两种口算的每一个动作按原样排在纸上，它把相同数位的数量集中处理，再用进位记录单位的

转换。让孩子比较对应与不对应之处，比要求他说“它们完全一样”更能看清联系。

这些旧题的答案没有改变，甚至连计算速度也未必立即变化。变化可能发生在孩子选择方法时的理由、解释一个数字时所依据的单位，以及遇到错误时知道应检查哪里。教师因此需要一种不以新题数量为唯一衡量的观察：新学习有没有使孩子重新组织旧经验，又有没有使这种重新组织成为今后能够使用的资源？本章从这个问题开始界定“旧知改名”。

旧知改名与有范围回写

旧知改名指新学习使学习者对旧知识的关系、条件或用途作出重新组织，并能够据此解释或完成相关任务。当前能接通关系与本人已经发生变化，按导论的证据约定分别判断。旧记录可以本来就是正确的，新理解可能使其适用条件更清楚、理由更充分或用途更广。

有范围的回写是其中一个更具体的研究方向：当对象、表示、目标或条件改变时，学习者能够辨认哪些支持关系受到影响，对应地保留、补充或修订判断，并将这一调整用于后续活动。这里的“有范围”强调有根据的选择，不是要求改动字数最少，也不把变化越多视作理解越深。

本章先确定这套判断在数学任务中如何成立，再提出观察儿童的办法。数学关系提供共同约束，儿童通向它的路线可以不同。任务的可核算性使我们能够检查判读规则；是否由此观察到新的学习机制，则须有儿童的实际过程与比较结果。

先把“改名”从改口中分出来

孩子从“等号就是得出答案”改口说“等号表示两边相等”，值得教师注意，但还不足以结束观察。我们需要知道他能否处理 $5=3+(\quad)$ 、 $3+2=(\quad)+1$ ，以及一个左右调换仍成立的等式。若新的说法只能在背诵时出现，一到任务中仍

按“从左算到右”的方式运行，我们看到的是词语发生变化，关系是否改变尚未确定。

相反，一个孩子可能没有说出“关系”这个词，却在同伴写出错误等式时主动调整一边的数量，并解释两边不能不一样。这样的行为不应因为缺少规范用语而被排除。旧知改名所寻找的，是原来那个符号如何进入一种可以辨认的关系，而不是教师指定的词有没有被孩子念出来。

名称是一种便于交流的压缩，但压缩之前应有可返回的内容。孩子把进位称作“换成一个十”，教师还要让他指出哪些一被重新组成了这个十，为什么总数量不变，以及这个十为什么写在十位的计算中。若不能回答，可以继续用材料观察，而不是立即判他不会；若能通过材料做清楚，再逐渐减少材料，才知道解释在什么支持下成立。

还应区分改名与给旧知识加一条说明。孩子原来会用某种方法，现在多知道它的适用条件，即使主要操作没有变化，也可能构成有意义的重组；反之，增加一段与实际选择无关的说明，未必构成这种改变。本书不要求每次新学习都彻底推翻旧知识，而是关注旧知识在新的关系中获得什么位置，边界是否更清楚，使用是否更有根据。

在这里，旧知也不一定是一条完整的公共定义。它可能是一个常用动作、一种没有说出的判断习惯，或几次成功解题累积成的期待。一个孩子从未正式说过“边越长角越大”，却总按边长选角；当他开始保持张口而改变边长进行比较，原来的判断依据已成为可以被重新审视的对象。没有旧术语，不等于没有可被改变的旧经验。

回到原稿 关系要接通也要校正

文稿14的本质回归环节，先将 $\frac{3}{4}$ 与 $\frac{2}{5}$ 通分为 $\frac{15}{20}$ 与 $\frac{8}{20}$ ，再比较15个 $\frac{1}{20}$ 与8个 $\frac{1}{20}$ 。随后回看 $60 \div 20$ 时，原稿写到6个十与2个十的比较；回看 $0.6 \div 0.2$ 时，又写到6个0.1与2个0.1的比较。三个例子让共同计数单位成

为贯穿不同数域的解释资源，这是本章讨论旧知改名时可以直接依据的原稿内容。

不过，来源真实并不意味着其中每句数学说明都无需审查。原稿对另一种同乘 20 的算法，误将结果解释为“让除数变成 1”；实际 $2/5$ 乘 20 等于 8，该算法把两个分数转成整数 15 和 8。20 是分母 4 与 5 的公倍数，不能含混地称为“两个分数的最小公倍数”。本书保留算法与关联意图，同时纠正这两处表达，使新解释确实能够把旧事做通。

原稿在 1 张饼、每人 $2/3$ 张的情境中，还把 $1 \div 2/3 = 3/2$ 表述为可以分给 $3/2$ 人。若问标准份额，1 张饼相当于一份半，每份为 $2/3$ 张；若问每个人都得到完整规定数量时能分给几人，则只能分给 1 人，余 $1/3$ 张。算术的商与情境要求的整人数应分开，本书后面的教学示例因此优先使用连续量与“份额”语言，并在涉及人数时说明是否要求完整分配。

文稿 21 同样允许我们把主张说得更精确。它没有要求将竖式与所有口算方法一概认作同一过程，而是让学生辨认哪一种口算思路与竖式的数位处理更直接相承。数位分解与凑十都可能得出 32，但它们拆分的对象和记录顺序不同；理解共同基础并不要求抹去方法差异。这一辨认使“改名”获得具体内容，也防止统一性被误作所有方法必须一样。

这些校正提示一种对研究写作同样重要的回看。我们在阅读原稿时既接住其教学贡献，也让新的审查回头改变对原句的使用方式，不把忠于材料理解成逐字照搬错误。引证的责任包括准确转述与明确指出修订，尤其当一处小小的单位含混会改变儿童所面对的问题时。

三个观察方面与暂缓判断

“改名、并存、回弹”可以帮助教师提出不同问题，但不能直接成为给学生贴上的三种标签。一次任务只提供一定条件下的表现，不能包办全部概念和未来变化。同一个孩子可以在进位加法中建立明确联系，在分数除法中保留互不相连

的程序，又在新的语言任务中暂时难以表达；把他笼统称为“改名型学生”会丢掉这些差别。

改名需要寻找新旧关系能够被使用的证据。孩子不但能做旧题，还能说明一个新的表示怎样解释旧动作，或在旧任务发生小变化时调整自己的做法。若这种关系只有在教师把关键词全部说出后才出现，记录中就应保留提示条件；自主完成与跟随完成都值得了解，却不能记成同一种程度的证据。

并存至少包含两种情况。一种是孩子知道不同方法的联系与适用场合，能够基于任务选择；另一种是各套方法分别存在，孩子按表面线索调用，却暂时不能说明它们为何相关。前一种并存可以与改名同时出现，后一种则提示教师继续寻找联系。因此，三种说法在本书中不是互斥的逻辑分区，而是对关系质量及时间变化的观察方向。

拿面积任务来说，数格子和割补可以继续共同存在。数格子以选定的面积单位计数或估测，割补依靠适当分割和重组保持面积，再转成容易计量的图形；它们共享面积单位、可加性等基础，却不是同一条程序。孩子选择数格子，可能因为图形很小、边界已经落在方格上，也可能为了验证割补结果，不能仅凭方法旧就判作倒退。

回弹需要一条时间上的证据链。我们必须先看到孩子曾在一定条件下独立理解并使用新的关系，再看到后来相近条件中原先的解释重新主导，且新关系不能稳定调出。若第一次只是跟着教师完成，第二次独立完成失败，变化也许在帮助撤除，而不在理解消失；若后一次题目明显更难，也不能把难度差异写成回弹。

每一个观察方面都允许记录“证据不足，暂不判断”。它不是研究失败后的收容箱，而是诚实观察的必要出口。孩子可能有身体不适、表达负担、读题困难或从未接触某种表示的情况；教师可以安排不同形式的补充任务，但不能为追求分类整齐，把所有未表达的关系都归为并存或回弹。

日常生活里，一个人同时会骑车和乘车，不会因继续骑车而退回早期阶段。他是否理解两种出行方式的关系，要看路程、天气、费用和时间变化时怎样选

择，也要看他能否说明自己的理由。这个类比帮助我们警惕“旧方法出现就是退步”，却不构成学习机制的实验证明；数学课堂仍需自己的任务和证据。

旧说法已经看见了什么

新知影响旧知有多种已有解释。顺应关注经验怎样改变原有认知组织，知识网络视角关注联结的形成与重组，折返讨论学习者重新进入早先理解并使之丰富。这些观点都可能解释孩子重新连接竖式、口算和图示的表现。第6章已作集中比较，本章不以名称不同来推定机制不同。

Hohensee (2011, 2014) 直接研究二次函数教学如何影响学生先前的一次函数推理，并有意设计教学以促成有成效的逆向迁移。有意返回旧任务、促成旧推理改变，因而不是本书独占的创新。Hohensee (2016) 进一步把新学习中学生注意到的特征与原有推理的变化联系起来，使“关注依据改变”也必须进入既有研究的比较。

折返与加厚研究同样要求认真对读。Martin 与 Towers (2016) 分析教师怎样有意引导学生重新处理先前经验，使理解更具联系和一般性。这与本书鼓励返回旧作品的做法相邻；其学段与内容不同，可以成为小学任务设计的比较起点，不能仅凭换了学段就认定出现新的理解机制。

概念转变、重叠波及适应性专长则提醒我们同时关注改变与保留。多种策略并存可能体现有根据的选择，原来的正确解释也可以继续有效。本书不以新法取代旧法作为进步的默认方向，而要求儿童说明当前对象和条件下，各方法的依据与成本。

本章进一步承担一个较窄的比较：同样能够解释并完成普通迁移任务的儿童，在支持条件改变、仅表示改变、原条件恢复及仍有独立依据的任务中，是否呈现不同的修订模式？这些差异是否有助于教师选择后续任务？已有理论也可能解释全部差异；若如此，本书的贡献应定位于任务组织与诊断便利，而不扩大为独立机制。

温故之后也可以重新理解故

“温故而知新”提示新旧知识并非彼此隔绝。本书提出“知新之后再看故”，并不需要把这句传统表达解释成只能向前走的旧办法，也不能宣称倒转四个字就完成了理论创新。值得讨论的是课堂时间怎样安排：当新关系出现后，是否还有机会让学生重新解释原来的题，而不是立即全部换成新题。

常见的复习导入已经让旧知识参与新学习，但旧知识往往以一块稳定台阶的形象出现。教师问几个旧题，确认学生能够回答，然后沿预定路线进入新内容。如果最后再拿出其中一道旧题，让学生检查自己现在能否给出更完整的理由，旧题就从背景材料变成了需要重新审视的对象；这种安排可以设计，却不能预设每个孩子都会经历同一种改变。

日常学做菜也有相似的回看。一个人原先照着时间表煮面，后来开始观察面条粗细、火力与口感，再回头使用原来的时间，便知道那个时间在什么条件下可靠。原来的做法可以继续有用，只是不再被当作不问条件的命令。这个例子是解释性类比，它使“旧规则没有消失却换了身份”较容易理解，不替代数学学习的证据。

回看作为独立观察方向的条件

已有SDE教育前卷讨论解释、迁移、反例、延时及回写。本书把回看单独列出，首先是为了保留信息：一项新解释是否改变了旧任务的使用方式，能够与即时答题结果分别记录。这种记录安排并不预设心理能力恰好分成五块，也不需要把它们加成一个理解总分。

独立价值要通过内容和证据确定。同一道回看题可以同时要求解释与反例判断；若其结果完全被已有任务吸收，它便是一种不同的提问方式。若成对任务稳定暴露一般题未显示的依赖混淆，且能帮助选择更合适的教学回应，才有理由保留额外诊断主张。

因而，本书在记录上分开五个观察面，在理论上保留它们可能重叠的事实。第 21 章给出共享的判读办法，第 24 章讨论怎样比较额外信息；这样的分工使任务设计、构念区分与实际证据各自承担应有的工作。

老师可以这样做 先保留孩子原来的解释

回看若要观察变化，需要知道孩子先前怎样做、怎样解释。若仅能纠正另一名学生或构造人物的旧说法，可以记录当前关系理解，却不能因此确认这个孩子本人发生了改名。教师可以在教学前留下一个简短作品：一道熟题、一个选择理由、一张操作后的图，或一段不超过一分钟的口述记录。旧记录可以正确，新学习也可能使正确解释得到扩展或适用条件更清楚；不必专挑错误作品。不是每次都要增加正式测验，但至少要有具体对象可回到，而不只依赖教师关于“他以前大概懂什么”的印象。

在设计上，第一步是指定一项旧知识。以进位为例，指定的不是笼统的“加法”，而是孩子此前计算 $28+4$ 时怎样处理 8 个一和 4 个一；以等号为例，指定的是此前如何读 $3+2=5$ 。对象越明确，教师越容易区分所观察的变化来自哪个关系，也越容易避免把一切新的好表现都解释为旧知改名。

第二步是避免在问题里预先交出希望看到的新解释。刚讲完“十个一换成一个十”，立刻问“这里是不是十个一换成一个十”，能检查孩子是否跟上，却不足以检查他能否自主使用这个关系。可以先问“请说明竖式里的这个 1 是怎样来的”，再依据回答决定是否提供材料；不同层次的提示要记下来，而不是都算独立完成。

第三步是让旧任务继续做通。请孩子用刚才的解释重新完成 $28+4$ ，再让他检查一个进位位置写错的竖式，或说明 $28+1$ 为何没有同样的进位。数学内容上的正确性不能被生动解释取代：一个故事讲得很好，却把十个一变成一个一，仍未建立所需的单位关系。

第四步是请他说明新旧之间的关系。问题可以是“这次的写法与上次的小棒做法，哪些地方相同，哪些地方不同”，而不是“请证明它们完全相同”。允许孩子指出表示方式省略了动作、把一组数量压缩成数字、或在纸上采用了不同的记录顺序；这些差异是理解表示的机会，不是偏离标准答案。

在完成四项设计后，还应加一个不带解释的独立检验。教师可以换成同类但未练过的数字，或者隔一段时间再出一道结构相近的题，观察关系是否仍能调动。这里的间隔与难度应当记录，而不能把任何延后出错都解释为回弹；比较对象需要尽可能相近，尤其要注意提示是否撤除。

三个回看任务怎样避免只考会说

第一个任务围绕等号。教学前保存孩子对 $3+2=5$ 的读法与一个变式答案；教学后给出 $5=3+(\quad)$ 和 $3+2=(\quad)+1$ ，让孩子填空并解释，再请他回头读最初的等式。正确答案分别是 2 与 4，但教师还需要看他依据的是两边数值相等，还是只把可见数字相加。必要时可以让他用等量的小物品摆出两边，材料支持应记入记录。

若孩子说不清，却能独立调整两边使其相等，当前证据支持关系在操作中可以运行，尚不能据此说口头表达已经稳定。若孩子准确背诵定义，却仍把第二个空填成 5，教师应继续追问实际判断依据。两种作品都不适合被一个“理解/不理解”的二值盖住，回看提供的是下一步提问的方向。

第二个任务围绕包含除法。给出 12 升果汁，每瓶装 3 升，可以装几瓶；再给出 4 升果汁，每瓶装 $\frac{1}{3}$ 升，可以装几瓶，最后请孩子回看第一题，说明两道题中“一瓶”怎样确定。答案分别为 4 瓶与 12 瓶，分数题可以把 4 升换成 12 个 $\frac{1}{3}$ 升来处理。若儿童还没有接触分数除法，这项设计不应提前当作相应学段的常规测评。

教师还需防止自己在“统一除法”的愿望下抹去数量角色。将 12 升平均分给 3 人时，3 表示人数，商表示每人分得的升数，不能直接说所有已知量都是同一

种实物单位。算术上可以讨论数的商，情境上却要分清量的含义；同单位比较适合所选的包含情境，不应被扩写成所有除法题唯一的语义解释。

第三个任务围绕面积。给孩子一个在方格上表示、可以明确计数的图形，请他数出面积，再给出经过合法剪拼得到的等面积图形，让他说明为什么面积没有改变。回看原来的计数时，期待看到的是单位面积的合计与重组之间怎样联系，不是要求孩子承认数格子低级、割补高级。重组应无遗漏、无重复，单位大小也保持一致，否则“剪了就一样大”会成为新的口号。

如果孩子选择数格子来检验剪拼结果，这可能是有根据的策略协调。若他只能给出同样的答案，却无法说明没有重叠和遗漏，则需要增加对面积保持条件的观察。回看在这里没有取消计算，而是让计算结果与保持条件共同承担证据；它也提醒教师，不要把自己的方法偏好写进学生理解的评分。

哪里该改与哪里仍然有根据

有范围回写的判读单位，是一项具体任务中的“对象与所求量—条件—理由—结论—后续使用”关系。教师先写清自己正在判断哪一项关系，再观察儿童的作品。题目换了颜色、图形换了方向、对象实际尺寸改变和所求量改变，可能产生不同要求；这些变化应分别设置，而不笼统记为“新情境”。

第一条原则是选择性。条件只影响某一部分时，修订应当追随受影响的关系。第二条原则是支持与真值分开。一条理由不能继续使用，首先意味着需要重新求证；结论可能由另一独立理由维持，也可能需要撤回，不能机械翻转。第三条原则是行动接续。新的判断须在后续任务中进入信息选择、方法调用或结果检查，才能支持它已成为新的可用条件。三者相互嵌套：选择性规定修订是否恰当，支持与真值分离说明怎样作出这一判断，行动接续检验判断是否继续参与使用；它们不预设三种独立心理能力。

这三条原则先是一套可以公开核对的规范性判断。它们说明什么样的修订在数学上有根据，并不单凭自身证明儿童内部发生了某种特定过程。把规范性判断

进一步用来解释儿童的变化，需要本人前期资料、形成过程与无提示后续任务；主张其优于其他诊断方式，还需要积极对照。

以下面积任务逐项分开这些要求。先保留旧任务的独立记录；新题中同时安排应改与应保留的部分；最后再问儿童如何理解原来的理由。图 9-1 展示题目的已知条件，答案与判读在正文说明。图版和题目均为本书构造的教学材料。

下面是一组本书设计的面积任务，适合已经学习长方形、平行四边形面积及割补的儿童。先保留孩子独立解释一块长 6 厘米、宽 4 厘米长方形面积的记录。24 平方厘米是正确答案；若他能说明同一面积单位怎样排成 6 列 4 行，这也是有根据的旧理解，后续学习无需先把它判错。

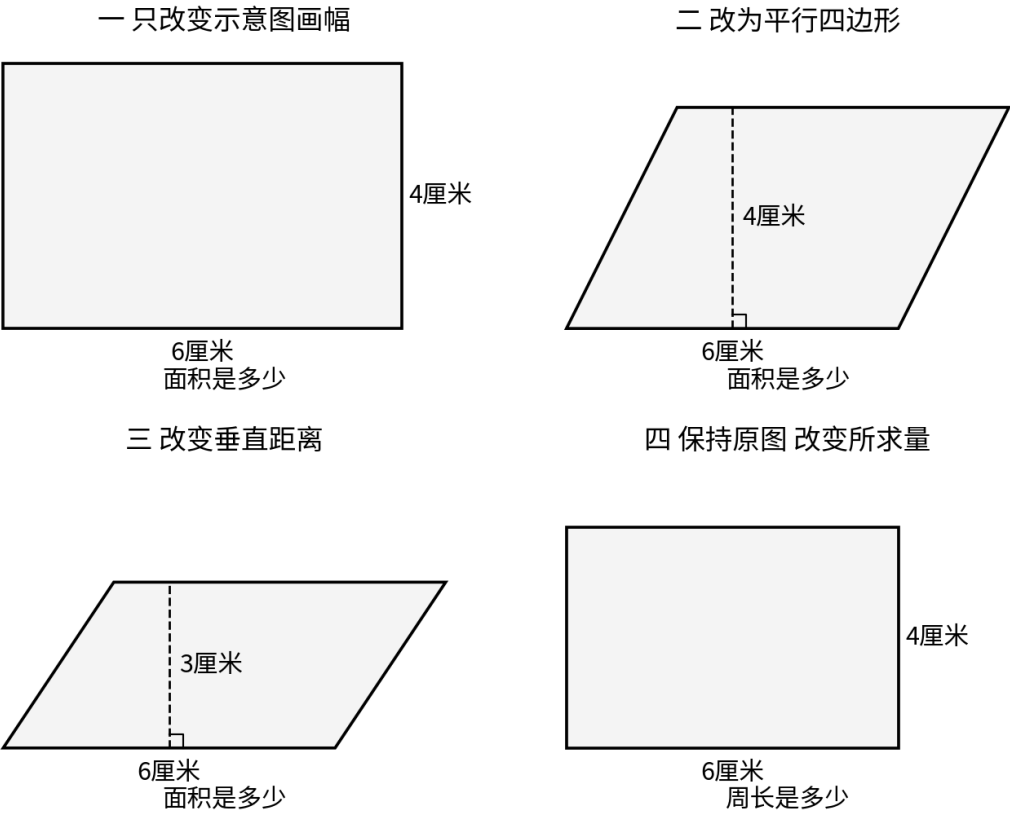
第一张新题卡只把示意图画大，标注仍为实际长 6 厘米、宽 4 厘米，并明确图不按实物大小绘制。对象的实际尺寸未变，改变的是表示，面积仍为 24 平方厘米。孩子若因纸上的图变大而修改实际面积，应回到表示与对象的区别；教师不能因为自己安排了“新题”，就要求每个人改写旧结论。

第二张题卡换成平行四边形。教师可用厘米为单位在方格纸上依次取 $A(0,0)$ 、 $B(6,0)$ 、 $C(8,4)$ 、 $D(2,4)$ ，连成四边形；上下底长 6 厘米，平行线间垂直距离 4 厘米。它的面积也是 24 平方厘米，但“两个相邻边分别长 6 厘米和 4 厘米”已不能解释这幅图，因为斜边并非 4 厘米。旧长方形公式仍正确，只是不能把新图中的任何相邻两边直接代入。

这里有一条可操作的独立依据：在上底取 $E(6,4)$ ，沿 BE 剪下右侧三角形 BEC ，向左平移 6 厘米，恰好填进左上方空缺，拼成 6 厘米乘 4 厘米的长方形。各片无重叠、无遗漏，面积单位不变，所以原平行四边形面积仍为 24 平方厘米。若对新平行四边形先用相邻两边相乘来说明 24，这条理由并不成立；割补提供了对新对象的独立支持。孩子回看旧长方形时，可以补充：宽恰好也是与所选底对应的垂直距离。这是在正确旧解释上增加关系，而非推翻过去。此处保持的是面积数值 24，所指对象已经更换，关于新平行四边形的判断仍须重新取得支持；答案相同不使两个对象的面积命题成为同一项事实。

第三张题卡保持下底 AB 不动，把上方两点改为 C(8,3)、D(2,3)。现在平行线间距离降为 3 厘米，同样割补可拼成 6 厘米乘 3 厘米的长方形，面积为 18 平方厘米。前一题的“外形改变而面积不变”不能原封不动沿用，因为支持 24 的高度条件已经改变。第四张题卡回到最初长方形，却问围一圈的长度；对象未变，目标量变了，应求周长 20 厘米，而不是给面积 24 换个单位。

这四种变化不能由“新题就换方法”处理，也不能由“总有一个不变量”敷衍。孩子需要分清当前问什么、哪些条件实际改变、原来的哪条理由受到影响。教师可以先让他独立处理，再请他对照本人旧记录说明哪些部分保留、哪些补充。所谓修改不求字数最少；有时需要重画整幅图才能保住正确关系，不能为了“少改”保留错误。



示意图不按实物大小绘制；实际尺寸以标注为准。原任务为长6厘米、宽4厘米的长方形面积。

图 9-1 对象、表示、条件与所求量的四种变化

四张题卡之后，再补一个恢复核验：把第三张平行四边形的垂直距离从 3 厘米恢复到 4 厘米，底仍为 6 厘米，仍然求面积，其余条件保持。面积应回到 24 平方厘米。这里检查儿童是否能恢复原来成立的支持关系，并将它同第四张“目标量改变”区分；只重认一个熟悉数字还不足以说明这种关系。

回写能否改变下一题先查什么

本书提出的机制假设是：旧规则与其适用条件重新接通后，熟悉图形可能不再只唤起一个公式，也会使相关条件进入儿童的选择和检查。例如，儿童先前把

任意相邻两边当作底和高，后来通过割补说明垂直距离的作用，那么后续陌生图形中是否会主动寻找该距离，就是需要另行观察的结果。

后续任务可把底换成 7 厘米，分别给出垂直距离 3 厘米与 2 厘米，并改变斜边画法；两题面积分别为 21 与 14 平方厘米。另给出只有整幅示意图旋转、实际尺寸不变的任务，面积应保持。先保存无提示作答，再询问理由。观察关注的是修改能否对准依据，不能以“每题都改”或“每题都说条件变了”作为成功。

两个儿童可能在原题中都得到 24，在一般迁移题中也都答对，却在新图上分别按斜边长度和垂直距离作判断。这种可能差异为诊断设计提供理由，但它仍是构造的比较情形。实际研究应检查两人的先备知识、表示经验与支持水平，避免把题目经验不足当作缺乏回写。

后续任务的正确处理可以支持独立使用。过程证据若来自选择、标记、操作或自然说明，可以进一步支持条件检查；熟练儿童未逐句报告，不等于没有检查。教师追问后才出现的关系，单列为提示下表现。能指出高度变化却仍沿用旧数值，则说明显性辨识与后续调用尚未在该任务中接通。

检验增量时，先封存形成任务与判读规则，再使用未参与规则修改的结果题。结果任务可以来自另一数学内容，但必须确认儿童已经具备所需先备知识。分别记录需要改而未改、不需要改却改、有效独立依据及实际更新，避免把它们压成一个偏好变化的总分。

如果这些记录在可靠测量下不能增加对陌生任务的诊断或预测，相应的诊断或预测优势主张就应收缩；过程机制的解释力还须结合形成过程及竞争解释另行判断。如果改善只发生在练过的面积题上，就限定其适用范围。若减少漏改的同时增加误改，教学安排可能教会了撤回口令，需要调整任务配比。附录 C 提供先试用、再比较的实施协议。

哪些情况不适合急于要求改名

儿童初次接触某个领域时，教师可能还找不到足够稳定、可明确指认的旧知识。这时，要求学生解释“新旧关系”会变成猜教师想听什么；更合适的是先让经验积累、让比较发生，再决定是否有必要回看。并非每一节课都要设置相同的回看环节，工具的使用应由任务需要决定。

有些学习主要涉及约定。某个符号怎样书写、某种单位的规范名称是什么，可以直接说明，不必制造冲突让孩子独立发现公共约定。回看能够帮助儿童理解约定怎样组织已有经验，却不能把约定本身伪装成每个人都必须重新推导的自然必然。是否需要探索，应与是否需要解释区分开来。

还有一些儿童在讲述经验时负担很重，但实际操作与选择已经较稳定。若教师每次都要求一长段语言自述，回看可能变成额外障碍；可以改用配对、画图、操作与错误辨认，观察同一关系是否跨形式出现。改变表达形式不是放松数学要求，而是减少与所测关系无关的困难。

熟练度也不能被当作理解的敌人。若基本计算尚需耗费很大精力，孩子可能没有余力解释更多关系；适当练习可以使资源腾出来，关系解释也可以让练习更有方向。本书要检验的是回看能否增加有用信息，而不是预先将所有改善归功于回看，将所有机械性归罪于练习。

怎样算本章说错了

本章最弱也最稳妥的主张，是回看任务能够为某些小学数学内容提供有用观察。若教师根据任务得到的判断在不同评分者之间分歧很大，或者儿童换一种表达形式就被随意改判，工具首先需要重做。不能将评分者的不一致解释成儿童理解复杂，以此免除修订责任。

更强的主张是回看能够补充其他任务。如果控制已有水平、练习量、语言负担与教师支持后，回看表现几乎完全重复其他指标，不能提供额外诊断，那

么“第五个观察方向”的独立价值需要收缩。它仍可能是一种方便的课堂组织方式，却不应继续被宣传为不可替代的判据。

最强的主张涉及预测优势：回看能否更好地预示三个月后的保持及下一单元起点。要检验它，需要先约定任务、编码、比较方式与成功标准，再收集数据，不能看完结果后反复更换指标。一项样本很小、任务不可靠的研究未发现差异，不足以宣告一切无效；但多次设计充分的比较仍未支持优势，就应撤回优势主张。

三种观察方向同样可以失败。若改名、未建立联系的并存、疑似回弹不能稳定区分，或分类不能帮助教师选择有效的后续任务，就没有必要为了保留三个名称而继续使用。分类应让判断更清楚，而不是把每一种回答都解释成分类正确；证据不足的情况必须允许停留在证据不足。

带走的话

判断新学习带来了什么，可以回到一项旧知识，看孩子是否能够重新解释它、继续用它做事，并说清变化的条件。

材料与判断

本章的原作依据主要为胡红婷与我合写的文稿 14 第四部分“本质回归”，以及文稿 21 关于回调图示与口算资源的教学设计。原稿记述保留其材料身份，未扩写为逐字录像或全班效果证据。同乘 20 的算法说明、非整数人数与数位对应等问题，已在相应段落说明修订理由。

等号、果汁、面积四卡及后续条件任务是本书构造材料。其数学关系可直接核算；儿童是否发生选择性回写、评分者能否稳定识别、是否具有额外诊断信息，均待课堂试用及比较。三种观察方向与一般证据层级遵循导论约定，不另以本章术语给学生分类。

留给下一章的问题

即使孩子能够回看旧题，我们仍要问：究竟是哪一种判断依据发生了变化？他以前看边长，现在看张口；以前只找数字，现在先问单位；以前只看答案，现在检查条件，这些改变各自怎样出现？下一章从“孩子拿哪个不同在判断”进入更细的课堂观察，让旧知改名不只停留在结果描述。

本章的理论对话

本章主要与 Pirie 和 Kieren（1994）的数学理解增长模型、Hohensee（2011，2014，2016）的逆向迁移与学生注意研究，以及 Martin 和 Towers（2016）的折返教学研究对话。理论来源与书目信息集中列于附录 E。文献中的函数与向量课堂不直接验证本书的小学任务，其作用是限定概念前史，并帮助形成可比较的问题。

SDE 相关继承关系参见《学习如何发生》第 10、11、16 章与《答案之后》第 3—5 章。本书承担的新增工作，是在小学数学内容中公开给出条件变化、保持与恢复任务，说明相应的判读关系，并检验它们能否帮助理解与教学。

第10章 孩子拿哪个不同在判断

课堂现场 他说自己已经看见了

在《角的大小比较》的师徒同课中，我记录了一次容易被略过的回答：一个学生说自己是看出来的，教师先前以肯定回应，却没有继续追问。接力教学时，我把问题改成“看的是哪里”，学生指向图中表示角的弧线；另一位学生补充了“宽”的说法，随后用双手比划张口。这个过程见文稿 09 第二部分，几位学生共同参与了意义的展开，不能合并写成同一个孩子独自完成的转变。

在教师看来，这可能都是“观察角”的活动；在孩子那里，观察却可能落在不同对象上。有人看边画得多长，有人看两条边之间纸面上围出的部分，有人看角符号的小弧线，有人已经注意到两边相对张开的程度。答案相同的时候，这些依据可以暂时隐藏，只有材料的特征不再同向变化时，区别才容易显露。

例如，一幅图把较大的角画得边也更长，孩子无论依据边长还是张口，都可能选中它。教师若只记录“比较正确”，便无法区分不同理由；若立刻说孩子理解了角的大小，更是超出了这一次任务所能提供的证据。问题并非孩子没有观察，而是教师还不知道他把什么当作需要比较的差别。

原稿还记载了叠合比较中的困难：学生有时未使顶点重合，有时没有对齐一条边。把两张角片放到一起是一种可见动作，但这个动作是否构成有效比较，取决于它保留和消除了哪些差异。比较小学阶段的非优角时，使顶点和一边重合，并把两角内部置于共同边的同一侧，必要时旋转或翻转角片，另一边的位置才使张开程度容易比较；若起点本来就不同，眼前的远近便可能混入无关因素。

这节课的价值，不仅在于教师从沉默中引出了发言，还在于我把一个笼统的“看”拆成可以检查的判断。文稿记录的是作者整理的课堂叙述，不能据此计算每一种判断依据在班级中的比例，也不能从举手增多推出所有孩子都已完成概念转变。它所支持的具体问题是：教师怎样让判断依据显露，并让孩子检验这种依据是否可靠？

这一章要说的话

理解的变化，常常包含判断依据的变化：原先显眼但不决定结果的特征，逐步让位于能够解释任务关系的特征。我们既要看儿童选择了哪一个答案，也要看他借助什么差异作出选择。这样的观察能够帮助教师设计下一步，却不能预先把全部错误归因于“比较错了”。

计算失误、读题困难、记忆负担和不熟悉的表示方式，都可能让一个已有正确依据的孩子答错。判断依据需要通过连续而有控制的任务来推测，而不是从一个答案直接读出头脑里的结构。教师要收集可相互印证的证据，同时保留别的解释。

一个正确答案可以沿着不同的路到达

设想教师准备两个角，甲角张口较大且两边画得较长，乙角张口较小且两边较短。问哪个角大时，答案甲没有区分力，因为边长与张口提供了同一个方向的提示。若孩子答对，教师只能说他在此材料下选对，不能断定他已经排除了边长的影响。

把材料换成甲角张口较大但边画得短，乙角张口较小但边画得长，情况就不同了。孩子原先依靠的特征现在发生分离，必须选择哪一项与角的大小有关。这个设计不是为了把孩子骗错，而是使两种原本都能带来正确答案的依据接受不同条件的检验。

教师还可以保持同一个角的张口不变，只把图中两条边画得更长，再问角是否变化。角由具有共同端点的两条射线形成，图上只能画出有限部分；画出的线段长短不等于射线自身的长度属性。课堂说“角的大小与边长无关”时，应让儿童逐步理解这种表示关系，不能让他们误以为数学中的射线具有一段固定长度。

这也说明，错误的依据不一定没有生活来历。儿童比较绳子、桌面边缘和行走距离时，长短曾经是有效信息；面对角的图形，熟悉的判断便可能先被调动。

教师不必把这种使用解释成粗心或不认真，而应让孩子看清：过去可靠的特征为什么在这个任务里不能单独承担判断。

日常辨认容器容量也有类似困难。一个杯子更高，并不保证装水更多，因为宽度也会改变容量；若总把高且宽的杯子与矮且窄的杯子比较，只看高度也能屡屡成功。这个例子是日常类比，帮助说明材料中相关特征会遮蔽判断依据，并非关于儿童角概念形成的直接研究证据。

把差异分开比把答案说出来更重要

有效的变式不只是不断换数字。它需要清楚知道哪些条件保持，哪一项发生变化，以及变化是否能区分两个竞争解释。若教师一次同时改图形朝向、边长、颜色、位置和张口，孩子答错以后，仍很难知道是哪一个条件造成影响。

在角的任务中，可以先保持张口与位置，只改变图示边的延伸长度，再保持边的可见长度，改变张口。随后改变整个角在纸面上的朝向，而保持两条边之间的夹角不变。这样的顺序只是一个可用设计，儿童若提前提出新的问题，可以改变次序；共同要求是每次比较有足够清楚的控制条件。

教师不必事先把“无关特征”这个结论告诉孩子。可以让他们预测、操作、记录，并说明为何前后判断相同或不同。若儿童提出另一种解释，如弧线更长，教师就需要调整材料：画同样张口的角，在离顶点不同距离处画弧线，帮助他们发现弧线长度同时受半径影响，不能仅凭它判断角的大小。

这里还有一个容易遗漏的数学条件。在同半径的圆弧上，较大的圆心角对应较长的弧，但不同半径的弧长不能直接用来比较角。小学阶段不必引入弧长公式，可以用同一张角片先近后远地画标记，再保持角片开口不动，让儿童看出小弧线的画法改变了，张口没有改变。教师的任务是让条件清楚，不是用超前公式压住疑问。

若孩子坚持比较两边之间的“空地方”，教师也要先弄明白他指的是什么。他可能是在用手势粗略表达张口，也可能在比较由有限线段及想象边界围成的面

积。两者需要不同追问，不能听见不规范词语就立刻判定错误；先让他指、画、延长或叠合，判断依据才可能被区分。

从角的长短走向面积的覆盖

文稿 02《以操作性理解的策略促进学生面积概念的发展》在讨论中记载，有学生仍用角或周长是否相等判断面积是否相等。这一现象提示，图形中已经熟悉的属性可能在另一类问题里继续承担判断。这里采用的是原稿的质性观察，不使用其中口径尚未核清的表格比例推断发生率。

周长和面积都属于同一个图形，却回答不同问题。周长涉及边界的长度，面积涉及覆盖平面的大小；把围一圈的长度相同理解成覆盖大小相同，是把一个任务的判断依据带到了另一个任务。教师可以说明两者定义，更需要让孩子看到，在精确控制条件的材料中，两种量确实会分离。

取长 4 厘米、宽 2 厘米的长方形，其周长是 12 厘米，面积是 8 平方厘米；取边长 3 厘米的正方形，其周长同为 12 厘米，面积是 9 平方厘米。它们边界长度相同而覆盖大小不同。材料无需依赖一张可能画歪的示意图：可以在厘米方格纸上画出，先沿边数单位线段，再逐行数单位正方形，两个量对应的单位清楚分开。

再取长 6 厘米、宽 2 厘米与长 4 厘米、宽 3 厘米的两个长方形，面积都为 12 平方厘米，周长却分别为 16 厘米与 14 厘米。两组材料互相补充，使孩子看到周长相同并不决定面积相同，面积相同也不决定周长相同。课堂不能只让学生背两句否定结论，还应让他们说明哪一种计数保留、哪一种计数改变。

数格子在这样的任务里非常有价值，因为它把“覆盖”变成可逐一核对的单位面积。学习割补之后，数格子仍然可以作为检验与解释的方法；它不是等待被高级方法淘汰的过渡行为。判断依据变得更合理，可能恰恰表现为孩子知道何时应回到格子，而不是从此不再使用格子。

文稿 02 还提醒我们注意把长方形“拉成”平行四边形的旧心像。若用四根长度固定的杆围成长方形，再改变夹角，边界长度保持但高会改变，面积一般不

保持。合法剪拼保持面积，铰接拉动保持边长，两者都在“动”，所保持的关系却不同；将它们统称变形，很容易掩盖数学条件。

判断依据与动作方式相互影响

一个孩子说按张口比较，却在叠合时没有对齐顶点和一条边，教师应如何判断？这时不能只在“概念懂了”和“概念不懂”之间二选一，因为语言中的依据与操作程序可能尚未协调。教师可以让他解释为什么这样放，又可以请他调整位置使比较更清楚，观察他能否发现对齐条件的作用。

反过来，孩子可能熟练完成叠合，却说不出为什么这样做。若换一个方向的角片仍能独立对齐，并能指出错误叠合哪里不公平，我们已经有比口头定义更丰富的证据。不能因为他说不出规范语言就把操作全部归为模仿，也不能因为操作成功就停止检验。

判断依据因此不是藏在心里的一个词。它包含儿童在材料中注意什么、采用什么动作、把结果归因于什么，以及面对反例愿意调整什么。教师观察的是这些环节能否接上，而不是把学生所有表现归结为一个固定观念；同一学生在不同表示下出现差异，本身就是需要解释的材料。

做菜时按味道加盐与按勺数加盐，也不是单纯记住两条规则。锅中食物的量、盐的颗粒与勺子的大小都会影响判断，熟练的人可能先按量估计，再尝味道修正。这个类比提醒我们，判断依据可以组合使用，理解的进步未必是旧依据被一个新依据彻底替换，而可能是知道各自什么时候有用。

从既有研究中确定本章的任务

把相关特征分开，使儿童有机会辨认判断所需的关系，已有重要的研究基础。Marton 与 Pang（2013）以保持背景条件、改变所关注特征的教学安排检验意义辨识。这与本章让边的可见长度和张口分别变化的设计直接相邻。因此，

本章不能把“通过差异看见关键特征”单独当作新的学习机制；角片任务首先是这一研究方向中的具体数学设计。

判断依据也不只是儿童独自选择了哪一个刺激。Hohensee (2016) 研究新概念学习中的学生数学注意，讨论课堂中注意到的关系怎样同原有概念推理的变化联系起来，并分析个人与社会过程的作用。这使我们必须同时记录材料、教师追问、同伴说明与儿童自己的回应，而不能把班级共同说清的关系全部归到最先发言的孩子名下。

本章要推进的较窄问题，是怎样在小学数学材料中区分两种原本给出同一答案的依据，再追踪这种区分是否改变了同一个儿童的选择。角大且边长的题目不足以区分看张口与看边长；大角短边、小角长边的配对则使两条依据给出不同预测。随后恢复一致条件、改变朝向或改用动作回答，是为了检验儿童依据的是关系，还是新学会的一项判题线索。这组配对设计的贡献，应由可复核记录及后续任务检验。

具体分析时，应先写出两种以上竞争解释。例如，“按边长判断”与“知道看张口但不会叠合”需要不同的补充任务；前者需要分离特征，后者需要检查操作条件。不能把一次答错直接改写为某种固定迷思，也不能把解释中的每个词都当成稳定的心理结构。理论近邻的系统比较见第6章，本章以这些能够区分解释的任务承担比较。

必要讲解仍可进入这一设计。当儿童不知道如何使顶点和一条边重合，示范能使比较成为可能。示范后要观察的，是他能否说明对齐的作用，并在另一组角片中自行处理；教师有没有讲话，不能代替这项判断。

老师可以这样做 一组可以直接准备的材料

准备两张硬纸角片，用量角器分别制作 30° 和 60° 的角。 30° 角的两条可见边各长 8 厘米， 60° 角的两条可见边各长 4 厘米，标清顶点，不画额外花纹。先让儿

童独立判断哪个角大并说明依据，再提供透明纸或相同角片让他们验证；这是一项教学设计，并非文稿 09 已经记录的具体材料。

接着给同一个 30° 角延长两条边，要求儿童预测角会不会变大。不要立即收标准答案，先请他在原图与延长后的图上指出决定角大小的部分。若儿童仍按边长判断，可以固定其中一边，让另一边绕顶点转动，比较“延长”与“转动”带来的不同变化。

第三项任务可以由儿童自己制造一对“看起来容易认错”的角。要求他给出可验证的说明，不只是故意画得潦草；同伴先判断，再用叠合检查。孩子设计材料时必须主动区分相关与无关特征，这能提供另一种证据，但绘图能力不足时可以提供现成角片供选择，避免把画不好当作不理解。

面积材料则用前述周长同而面积异的两个图形，以及面积同而周长异的两个图形。先让学生自己决定需要哪种工具：细绳、尺子、方格纸还是面积单位片。工具选择本身也值得记录，因为它显示儿童把问题理解成测量边界还是覆盖；但选择错误仍应允许调整，不把第一步选择当作最终判断。

最后让学生回到先前答过的一道题，问“你现在仍用原来的办法判断吗，为什么”。这里不要求他必须改变答案或方法；有时他原来已经选择正确依据，现在只是能够说得更清楚。回看应允许“原来就合理”的结果，否则教师会暗中把改变设成获得认可的条件。

追问可以深入也可以把答案代走

“你看的是哪里”比“你看的是不是张口”留下更多观察空间，但前者也不是万能问句。孩子可能不知道“哪里”可以指一种关系，而不是图中的一个部位；教师可以允许比划、画记号、移动角片，使回答形式与任务相配。追问的目的在于获取依据，而不在于让儿童猜中教师准备的句子。

当一个学生回答之后，教师还应分清同伴补充与原回答者的理解。文稿 09 中的“宽”和手势来自接续发言，说明班级可以共同把一个想法说清楚；它不自

动证明最初看弧线的孩子已经改变依据。可以在稍后的独立小任务中回到他那里，看看新的解释是否进入他的行动。

错误回答也不必立即成为公开展览。教师可以匿名选取两种理由，让全班讨论条件；若学生愿意说明自己的想法，再邀请他参与。错误需要受到数学检验，儿童却不需要因提出错误而承担人格上的羞辱；这一区分为下一章的自我关系留下了问题。

记录时可以写具体行为：“延长边后仍判角不变，并用角片重合解释”，而不只写“空间观念好”。另一条记录可以是“说看张口，独立叠合未对齐，提示后完成”，它同时保留能力与支持条件。这样的记录比一个笼统评价更能指导下一次教学，也更容易由同事复核。

差异材料不能替代完整数学解释

有时儿童通过几组对照，学会了选择教师期待的特征，却不能解释它为什么与任务有关。例如，他记住“角看张口”，但不知道叠合为何需要对齐；记住“面积不看周长”，却没有建立单位面积的计数。此时变化可能只是判题线索更新，需要继续回到概念与操作关系。

因此，变式后要有解释的工作。比较角时，儿童应有机会理解顶点与两条边所确定的张开程度；比较面积时，应有机会说明同样大小的面积单位如何覆盖图形。对照材料把原依据的限制显露出来，新的依据还需要在可以做通的任务中建立，不能因为发现旧办法有错就认为学习已经结束。

一个反例也不能抹掉旧依据在其他任务中的价值。边长仍能用于长度测量，周长仍能用于围栏问题，图上的高度在特定图表中也可能表示某个量。儿童需要学会的是依据与问题之间的关系，而不是把某种特征永远列入错误名单；否则新的学习会制造另一种僵化。

教师可以在收束时提供一对相邻任务：同一个长方形，先问围一圈需要多少绳子，再问覆盖它需要多少单位方片。儿童若能根据问题切换工具与单位，就比

只会说“周长不是面积”更接近关系的区分。这个收束也使先前的旧知识保留其合法位置，与本书的旧知改名主线接通。但它首先证明儿童当前能够区分关系；若要判断其本人由哪一种依据转向另一种依据，还须比较同一儿童的前期记录，不能用全班先后出现的不同说法拼出个人变化。

让下一次观察少一点预设

教师在观察之前，可以先写下两种可能解释，以及什么表现会使自己放弃其中一种。如果预想孩子按边长判断，就准备一个边长变化而张口不变的任务；如果预想孩子只是不会操作，就在不泄露答案的情况下提供对齐工具。事先写出可推翻自己的条件，有助于避免把儿童后来的每一个动作都读成最初猜想的证明。

同事之间也可以交换匿名作品，各自先判断再讨论。分歧不一定说明谁的教学经验不足，可能说明一份作品还承担不了如此确定的解释；这时最有价值的结果是设计一道补充题。课堂诊断由此从“我看出了问题”转向“我们知道还需要什么证据”，孩子也就不必被一次印象固定下来。

本章主张怎样接受检验

这组材料首先应提高诊断的可复核性。两位观察者看同一份动作或作品记录，能否区分按边长判断、按张口判断、操作未协调与证据不足？若分歧主要来自记录缺少关键动作，应补充记录；若材料已经充分而判读仍任意，就要修改任务和规则，不能把分歧全部归于儿童思维复杂。

诊断更清楚还不等于教学更有效。教学比较须遵循导论的证据约定，并检查儿童在新表示、无关系提示及延后任务中能否继续使用依据。若优势只出现在练过的角片上，应把主张限定为这类材料中的表现改善；若本章记录不能增加第9章所述的诊断信息，也应相应收缩其用途。

带走的话

答对以后再问一句：他依据什么答对，而这个依据在条件改变后还能成立吗？

材料与判断

本章课堂叙事依据作者文稿 09，保留不同学生先后发言的区别；面积问题依据文稿 02 的质性讨论，不用口径尚未核清的比例推断发生率。 30° 与 60° 角片、长方形尺寸及补充追问均为本章教学设计，计算可独立核对。杯子与做菜用于解释，不承担课堂成效的证明。变异理论及学生数学注意的文献身份见附录 E。

留给下一章的问题

同一组材料摆在面前，有的孩子愿意把不确定的依据说出来，有的孩子却只想等一个安全答案。儿童选择什么差异，不只受图形特征影响，还受已有经验、同伴活动与自我处境影响。下一章将这些条件放在一起，讨论理解生长的“三块地”。

第11章 理解的三块地

课堂现场 同一个平均数进入了不同的生活

《平均数的再认识》并没有从重新背诵平均数公式开始。我与罗善彪在文稿07中记述，学生先调查幼儿园大班儿童的身高，再将自己收集的数据与课堂提供的另一组数据比较。原先可以通过求和与除法完成的练习，在两组结果不一致时变成了新的问题：样本是否具有代表性，时间和地区的差异会不会改变结果？这里转述的是作者课堂记录，不将其所引历史票规和身高统计直接认作已经独立核实的外部事实。

这一次讨论至少涉及三个相互牵连的条件。孩子手边有自己参与取得的数据及其表示，脑中已有平均数、测量和比较的经验，问题又关系到他们能够理解的日常公平判断。若只保留平均数计算，讨论会失去样本从哪里来的问题；若只保留公平感受，数学又可能只剩给意见装饰的数字。

原稿记录的学生解释，既有对样本代表性的怀疑，也有对不同时期儿童身高变化的猜测。前者提醒我们核查采样对象与方式，后者则需要可靠的跨时期统计才能支持。儿童提出一个合理可能性，已经是有价值的思考，但合理可能性还不是得到证实的结论，教师需要让这两种身份保持清楚。

同样需要校正的是“某个标准高于平均数，所以大多数人低于这个标准”的推断。平均数不能单独确定阈值以下的人数比例；五个数据可以有四个略高于某标准、一个明显低于标准，平均值仍低于标准。原稿的课堂问题可以保留，作出的结论却要回到数据分布检查，不能用温暖的公平讨论遮住统计条件。

这不是要削弱生活情境的价值。恰恰相反，当生活提出的问题认真进入课堂时，它会要求数学解释承担更多责任：统计量代表什么，谁被代表，规则依据的目标是什么，哪些决定还包含公共价值选择。数学理解在这里既与对象相连，也与已有概念和参与者的立场相连，本章把这些不同入口称为“三块地”。

这一章要说的话

手边的地、脑中的地、心里的地，是观察理解发生条件的三种入口。材料与情境提供可以操作和检验的对象，已有知识影响孩子看见什么关系，自我与他人的关系影响他能否、愿否以及怎样承担判断。三者不按固定顺序轮流工作，也不是可以独立添加的三种配料。

这个说法不意味着只要材料丰富、概念讲清、气氛温暖，理解就必然发生。我们仍要追踪孩子实际做了什么，哪些联系由他建立，哪些只是教师讲完。三块地帮助提出问题，不替代对课堂过程的证据分析。

手边的地不是越热闹越好

课堂里的现实条件不只包括实物。画在纸上的图、同伴的一句话、数据取得的方式、任务允许的工具、教师给出的时间，都可能改变儿童怎样行动。把“现实”仅理解成摆几个教具，会漏掉许多对理解有决定影响的限制。

平均数课的身高数据之所以有价值，不只是因为来源贴近儿童。孩子参与测量，就可能知道鞋子是否脱下、同一把尺子是否使用、年龄是否一致，以及记录是否漏人；这些细节使数字具有可以追问的来路。若教师只投影一列处理好的数，再说它来自生活，学生仍可能只能把它当作等待计算的材料。

不过，真实数据也可能带来隐私与比较压力。教师可以使用匿名记录，讨论群体统计而不评价某个孩子高矮优劣；若班级条件不适合现场测量，可以使用明确标注的教学数据。真实与构造材料各有作用，关键是说明来源，不把设计出来的数字伪装成调查结果。

日常修一张摇晃的桌子，手边有尺子、垫片与桌腿，才有机会比较原因并尝试修正。但工具多并不保证判断好，拿着水平尺而不知道放在哪里，仍可能不停增加垫片。这是类比：材料的意义来自它参与什么检验，而不是来自“动手”这个外形。

脑中的地包括知识也包括习惯

已有概念不是储存在脑中的一张清单。儿童面对数据时，可能先想到总和，可能先看最大值，也可能先问每组人数是否相同；这些选择与此前怎样使用知识有关。教师要了解的，不只是孩子是否学过平均数，还包括他在什么问题里把平均数当作合适的代表。

文稿 07 的另一个情境，让学生比较不同营业员获得的等级评价。原稿呈现了只数最高等级、只关注一个较低评价，以及给等级赋分后计算平均分等不同想法。它使我们看到，同一个材料可以激活不同的判断资源；教学工作不应只让最后一种方案获胜，还要让儿童解释每一种方案忽略了什么。

等级赋分尤其需要边界。把非常满意到很不满意赋成几个数，是建立了一套模型，并不自动证明相邻等级之间的差距相等；改变分值间距，结果可能变化。原稿给出的某一套赋分可以用于讨论，但不能从一次计算扩写成所有合理赋分都会得到同一个结论。

教师因而可以把“怎么算”与“这样算意味着什么”分开。先确认所有人明白规则，再比较另一套赋分是否改变结论，追问什么依据能够支持采用这套规则。儿童不必在小学阶段掌握复杂测量理论，却可以开始知道：把文字变成数字是一个需要说明理由的决定，不是数字自己从材料里走出来。

心里的地不是一节课外加的鼓励

孩子判断自己的想法能否进入课堂，会影响他怎样参与数学活动。若每次发言都只有一个迅速被确认的标准答案，他可能学会等待；若不完整的说明能够被追问与检验，他才可能把暂时不能保证正确的想法拿出来。这里关注的是具体参与条件，不是从一次沉默诊断儿童的性格。

文稿 09 记载，我在接力教学中先承接不完整表达，再通过追问、同伴补充与手势把“看出来”说得更清楚。鼓励与认知支持在同一过程中出现，因此不能

把课堂变化单独归功于一句赞美，也不能说只要保持温暖语气就能产生角概念。我们能较稳妥地说的是：儿童获得了更多表达形式与继续解释的机会。

原稿中“角的小哲学家”的命名，可以作为教师认可学生联想的课堂片段，但不能直接证明此后所有学生的自我观发生改变。举手增加是作者观察到的参与现象，理解是否更稳定仍需独立任务。一个课堂片段能够启发教学，但不能承担超出其记录范围的心理结论。

同时，孩子愿意发言与能够独立判断也不相同。有人热情地复述同伴的解释，有人安静地完成有效推理；评价如果只奖励外显活跃，会把另一部分儿童的思考遮住。心里的地需要被看见，却不能用“是否兴奋”来代替它，更不能把安静当作缺乏动力。

评价把什么放在了中心

文稿24《老师请勿轻易说“我喜欢……”》提醒教师，评价可能把注意力引向教师喜好，也可能引向行为的作用与理由。本书接住这一问题，但不沿用“一句评价造成某种人格”的确定因果说法。人格与长期关系的形成不能由一类课堂用语单独诊断，评价的实际意义也受到语境、频率与后续行动影响。

在数学课堂里，值得比较的是两种反馈让儿童下一步注意什么。“我喜欢这个答案”没有说明它为什么值得信任；“你把顶点和一条边对齐了，所以大家能检查比较过程”则指出了可以继续使用的标准。后一种表达仍然可以温暖，理性说明不要求教师去掉感情。

教师也不必禁止自己所有第一人称表达。可以说“我还没有听懂这里为什么不变”，把自己的理解困难作为需要澄清的问题；可以说“这使我发现刚才漏看了一个条件”，示范修正判断。需要避免的是让个人赞许成为数学正确性的最后依据，而不是让课堂成为没有情感的审判室。

日常一起整理房间时，说“你这样摆我很高兴”表达了关系中的感受；说“常用的工具放在这里，大家下次容易找到”又说明了行动效果。两者可以共

存，但若所有安排都只以取悦一个人为标准，其他人就难以独立改进。这个类比帮助说明评价焦点，不是关于儿童人格发展的因果证据。

合作把谁的需要带进了任务

文稿 10《好玩的华容道》记录了两个典型小组的互动。一组中，移动棋子的速度与记录速度不匹配，角色交换后出现等待同伴确认再行动的做法；另一组通过协商决定谁先操作。这里的数学实践不仅有棋盘与规则，也有同伴是否来得及记录、工具如何轮流等现实关系。

等待并非与学习无关的礼貌附加项。如果记录者无法跟上，棋步就不能成为后续讨论的共同材料；操作者再快，合作任务仍没有完成。角色交换让儿童接触到此前未承担的限制，新的协作方式也就改变了任务能否继续进行的条件。

但是，两组典型案例不足以推出所有儿童都按同一阶段发展。原稿中的效率提升百分比与全班协商比例缺少可复核的分母和计算过程，本章不据此作量化论证。我们保留可以描述的动作与互动次序，把普遍性留待更充分的研究。

这个案例也纠正一种常见简化：自我界不是一个人关起门来的情绪。儿童如何理解自己与同伴的责任、是否认为自己的记录重要、能否提出速度调整的请求，都会参与知识活动。数学讨论要成为共同检验，首先需要各方的行动能够进入共同材料。

三块地怎样同时改变

以角片比较为例，教师提供透明纸改变了手边条件；儿童能够把两个角叠合，可能重新理解顶点与一边重合的作用；如果同伴愿意等待他的说明，他也可能开始相信自己的方法值得检验。这三个变化不是互不相关的三个结果，它们在一次行动中彼此支持，也可能彼此牵制。

若材料太复杂，儿童即使愿意尝试也可能无法操作；若概念基础不足，讨论气氛再好也难以作出可靠判断；若评价过早判定正误，已有能力也可能没有机会

显露。观察三块地的作用，在于帮助教师找到当前最妨碍行动的条件，而不是每节课平均分配三份时间。

有时最值得改变的是任务语言。把“完整证明你的想法”改为“先指给同伴看你比较了哪里”，可以降低表达门槛而保留数学要求；有时最值得改变的是材料，让两个特征分别变化；还有时需要直接补足一个术语或规则。选择不同入口并不破坏统一性，统一的是追踪关系和检验结果的责任。

教师不能仅凭自己的设计意图宣布三块地已经齐全。应看孩子实际调用了什么，哪个限制仍在，新的条件是否改变了后续行动。若教具没有被使用、同伴意见没有被听见、评价没有触及判断依据，它们虽然在教学设计中出现，尚未在这次理解中发挥预想的作用。

老师可以这样做 把备课问题换一种问法

备课时先写一个具体学习目标，例如“能说明周长相同的两个长方形面积未必相同”，再写儿童可能用来判断的旧依据。随后准备一项足以区分依据的材料，并确定学生可以用哪些方式表达。这样，三块地围绕同一个数学问题展开，而不是分别添加一个情境、一段知识与一句鼓励。

手边条件可以问：学生能否直接操作，材料是否引入不必要的困难，重要的量与单位是否看得见。脑中条件可以问：需要的旧知识是否已能调用，题目可能激活哪一种不适用的经验，教师准备怎样检查。自我与互动条件可以问：谁有机会提出不确定想法，错误怎样被讨论，安静学生有没有独立留下作品的途径。

课堂中不必同时填写繁复量表。可以只选两三个学生，记录一个关键动作前后发生了什么，再收全班一道短小的独立任务。用少量可核对的材料深入分析，比笼统写“全班积极参与、知识自然生成”更容易发现下一次需要调整的地方。

课后讨论也可以保留竞争解释。若孩子表现改善，是材料更清楚、练习更多、同伴示范有效，还是新的评价方式扩大了表达机会？单次课堂很难分开所有

作用，教师可以在下一次只改变一个可控制条件，或者用不同表达形式补充观察。教研由此形成连续问题，而不是一次成功叙事。

理论对话与边界

自我决定理论并非只把情绪当作外部润滑因素。Ryan 与 Deci 的 2000 年论文明确讨论社会情境、自主动机与心理需要之间的关系，关注自主、胜任和关系支持。因此，本书不能用“别人只看外部变量，我们才看主体条件”来制造差别；更合适的是说明本书如何把相关问题落到某一段小学数学推理之中。

三块地也不等于这三种心理需要的中文换名。它们属于不同层面的组织方式：本书的现实、概念、自我入口围绕理解活动展开，心理需要理论有自己的概念与研究证据。可以对话，但不能因两边都出现“三”就宣布一一对应，更不能一方的实证替另一方全部背书。

本章不对儿童做心理诊断。持续而明显影响学习与生活的焦虑，需要由家长、学校及合适专业人员共同关注；课堂上的一次沉默或紧张不足以判断原因。教师能够直接负责的是减少羞辱、澄清任务、提供可承受的帮助，并观察这些改变是否改善参与和学习。

第二编理论底座与课堂观察的对应

第二编从显露、返程、旧知改名与判断依据，进入理解的发生条件。在本书采用的 SDE 口径中，S 是显露，D 是差异序列，E 是特征纠缠系统。课堂上所说“孩子依据哪些差异作判断”，是观察 D 的入口；“某种关系怎样通过行动或表达显露”，是观察 S 的入口。它们都不能只由最终答案倒推，须放在任务及支持条件中辨认。

E 的完整结构包含三层：E1 为三界，即理念、现实、自我；E2 为信息，即符号、逻辑、数学；E3 为能量，即内能、动能、势能。这一层次与顺序是本书理

论用语的共同基准。三层不是给同一课堂再贴九个标签，而是要求研究者说清，本次解释实际涉及哪些条件，哪些尚未进入研究。

“手边的地、脑中的地、心里地”主要是 E1 三界的教学化表达，分别从现实条件、理念关系与自我处境进入课堂观察。三块地不等于 E 的全部，也不是三个彼此隔开的容器。同伴的一次质疑是现实事件，可能改变儿童对数量关系的理解，也可能影响他是否愿意继续提出判断；将它唯一分到某一格，反而会割断需要研究的联系。

E2 提醒我们把信息形式与推理作用接起来。平均数课中的数据表、等级词语、赋分数字和算式具有不同的表示作用；“相邻等级是否等距”涉及模型假设；从总和与人数得到平均数则需要相应数学关系。记录这些区别，比只说信息丰富更具体。本书用图、式、语言的转换及理由检查展开其中一部分，不据此声称已经穷尽信息层的全部问题。

E3 保留能量层的理论位置，但本书没有测量儿童的物理内能、动能或势能。注意、兴趣、信心与可用时间不能直接折算成这些物理量，课堂动作增多也不能证明能量利用改善。疲劳、操作负担、休息及资源是否可用，可以作为影响活动的具体条件记录；如果将来要提出能量机制，必须另行给出系统边界、测量单位与证据。本书目前的课堂诊断不以这种未经测量的机制作为解释前提。

$S=F(D,E)$ 表示显露同差异序列及特征纠缠系统之间的关系。例如，角大小不变的判断可以在“延长边、保持张口”的对照中显露，也可以借叠合操作显露；相同句子在不同帮助下出现，所支持的独立程度不同。F 在这里没有经过数值估计，不能用来计算一个儿童的理解分数。

$D=G(S,E)$ 要求继续观察：已经形成的看法，在现有条件中会不会改变儿童随后选择的差异。理解面积单位后，他面对新图形可能先检查覆盖，而不只看边界长短。这里的“可能”须由后续任务检验；一次说出单位名称，不能直接当作判断习惯已经稳定改变。

$E=H(S,D)$ 要求把活动条件的变化纳入分析。新的概念联系能够使原先无法执行的任务变得可做，儿童的作品也可能成为同伴下一轮讨论的材料。条件因此可以被活动重新组织。第9章的旧知改名与第14章的有范围回写，讨论其中可以通过数学任务追踪的一部分，不代表所有回写都只发生在概念命名上。

这三式是关系表达，不能未经说明就当三个依次执行的时间方程。课堂可以先给材料、先比较做法，也可以先展示一个待解释的结论；起手次序并不决定哪一维是唯一原因。若要研究时间上的改变，应分别留下先前条件、实际活动与后续表现，不能用同一次答案同时定义三者，再把彼此关联当作已经得到的因果解释。

框架应当增加什么判断

三块地的价值首先在于帮助教师发现原先漏掉的条件。例如，学生有正确想法却无法用规定句式表达，所需调整可能是回应形式；能参与讨论却始终调用错误单位，所需调整可能是数学关系；在强提示下完成，则须继续观察独立使用。若三块地只能在课后把故事分成三段，不能帮助辨认这些区别，它的实际用途就应缩小。

本章不要求材料越多、气氛越热烈、语言越完整就越好。应保留儿童在安静书面任务中形成关系、在热闹合作中仍只跟随答案等反向材料，检查解释是否经得起这些情形。框架提供观察方向，数学关系、个人记录及比较研究决定具体结论能够走多远。

带走的话

理解发生的条件需要一起观察，也需要逐项说清它们怎样参与了儿童的判断。

材料与判断

本章依据作者文稿 07、09、10、24 的课堂叙事与教学分析。历史票规及身高统计不作为已经独立核实的事实；平均值与人数比例的推断作了数学校正，等级赋分保留模型条件，华容道材料中缺少口径的百分比未用于量化论证。自我决定理论用于说明社会情境与心理需要已有相应研究，不直接证明本书三块地分类的效用（Ryan、Deci, 2000）。

留给下一章的问题

条件具备并不意味着理解会自动发生。孩子的旧判断与新任务之间出现什么不一致，才能让新的比较、尝试和解释成为他自己的需要？第三编从这股张力开始，但也会检验它何时可承受、何时需要帮助，以及为什么不能把它规定为每个人统一走过的三步。

第三编 理解为什么发生与卡住

第12章 引擎 旧知与新差异的顶撞

课堂现场 四张饼不能只分出一点点

胡红婷与我在文稿14中记录了分数除法学习中的一个错解： $4 \div \frac{1}{3}$ 被写成 $\frac{4}{3}$ 。若只看算式，这个错误可以被迅速归为把除法当成乘法；放回每人分 $\frac{1}{3}$ 张饼的情境，儿童却有机会用自己已经理解的关系检验结果。一张饼就能分给3人，4张同样的饼不可能反而只能分给少于3人。

这里的反驳并没有先调用乘倒数的规则。它借助“一张饼怎样分”的已有经验，发现式子的结果与情境中的分配发生矛盾。原稿随后追问为什么一张饼含有三个 $\frac{1}{3}$ 张，以及多张饼如何累积；错误因此没有只被擦掉，而成为需要解释数量关系的入口。

另一份原稿把类似问题放到了面积单位中。我在文稿15《教研员上“下水课”》记述，学生曾把边长100米的正方形面积判断为100平方米，在交流中重新连接边长与覆盖，得到10000平方米。我还记录了学生围绕边长10米、100米的正方形提出临时名称，并逐步与公共单位名称关联的过程。

这两份原稿中的困难都不是一片空白。分饼的孩子已经知道一张饼可以怎样分，面积单位的孩子也已经接触平方米；正是这些已有经验，使新的结果显得可疑。若儿童完全没有可调用的资源，错误可能只是无法解释的结果，未必形成有方向的疑问。

本章关心的，是这种不一致怎样变成学习的动力。教师可以故意呈现一对冲突材料，但儿童是否感觉到需要解释，取决于他原来的想法、任务是否能够操作，以及矛盾是否落在可承担的范围。外部制造了反差，并不等于内部已经发生探索。

这一章要说的话

旧经验与新任务的差异，可能使儿童原来不必回答的问题变得不能回避。当他能够借助已有资源比较、尝试并检验新的解释，张力就可能推动理解继续形成。教师要保护的是这段由儿童承担的解释活动，不是把“发生冲突”本身当成教学成果。

本章不宣称所有理解都必须先遭遇明显错误，也不把直接讲解排除在学习之外。好奇、新工具、熟练操作中逐渐看出的关系，都可能带来新理解；对于缺少基础资源的孩子，适当说明往往是探索的条件。冲突是否有用，需要看它使谁能够做什么，以及随后是否建立了更可用的关系。

错误怎样成为儿童自己的问题

教师知道 $4 \div \frac{1}{3} = 4/3$ 不成立，与孩子知道自己的解释哪里出了问题，是两件不同的事。若教师宣布错误，再写出正确算法，儿童可以记住答案，却未必注意到自己把“取4的 $\frac{1}{3}$ ”与“4里有几个 $\frac{1}{3}$ ”混在一起。只有当两种任务的对象和动作被区分，错误才有机会转化成可修正的判断。

可以让儿童分别画两幅图。一幅表示4张饼的 $\frac{1}{3}$ ，也就是将4张作为整体取其中三分之一；另一幅表示每份 $\frac{1}{3}$ 张，用4张饼能得到多少份。两幅图中的“ $\frac{1}{3}$ ”承担不同角色：前者指相对于整体的比例，后者指每一份的量。比较不只是为了把乘法与除法贴上不同标签，而是为了说明为什么相同数字在不同关系中要用不同运算。

这里需要警惕语言含混。“把4张饼分成3份”和“每份 $\frac{1}{3}$ 张”不是同一任务，教师若在叙述中来回替换，就可能把儿童合理的困惑制造成所谓认知冲突。先检查问题本身是否清楚，是使用错例之前的责任；不能把出题者的含混当作学习者需要突破的障碍。

当儿童用一张饼可分 3 份的事实反驳 $\frac{4}{3}$ 时，我们也不能立刻推断他已理解一般分数除法。他可能已经排除这一答案，却还不能处理每份 $\frac{2}{3}$ 张的情况。错误被排除意味着旧解释受到限制，新解释是否形成，还要通过后续推理来观察。

日常按地址找门也有类似经验。走到熟悉的位置却发现门牌不对，会使人停下检查，但停下来不等于已经知道正确路线；他还需要地图、路标或向人询问。这个类比提醒我们，矛盾能够打断旧动作，却不会自动提供新的关系，支持条件决定了打断之后能否继续前进。

可承受的张力需要可调用的资源

一个问题对教师而言清楚，并不表示对每个儿童都具有可进入的难度。若孩子还不能把一张饼平均分成三份，直接要求解释分数除法，会同时增加分割、分数表示与运算意义的负担。教师可以先确认最小必要经验，再决定应提供实物、图片还是一句明确说明。

“可承受”也不能只按题目难度判断。儿童是否有时间尝试、能否获得不羞辱他的反馈、是否看见局部进展，都影响他怎样面对不确定。一个连续失败又没有有效反馈的任务，可能只增加困惑；不能因为儿童坚持得痛苦，就说张力更深、理解将更充分。

教师可以把大问题拆成一个能检验的小判断，但这不等于事先替孩子安排全部思考。先问一张饼能分几份，可能帮助他确定量的关系；至于如何表示四张的分配，可以允许画图、列表或口头推理。共享的是数学条件和检验要求，具体探索路径则应保留儿童自己的选择。

当某个儿童已经理解一张饼的分配，继续让他重复许多相同操作也未必必要。可以邀请他预测更一般的情况，或检验另一个人的错误解释，让已有资源承担新的任务。同一课堂中不同儿童所需要的张力不一样，统一目标并不要求所有人同时卡在同一处。

从面积的错答看见单位结构

边长 100 米的正方形为什么不是 100 平方米？仅仅提醒“面积要乘两次”可以纠正一次答案，却未必使儿童看见单位的组织。平方米表示面积单位，边长 100 米表示线性尺度；把后者直接带到面积数值上，遗漏了覆盖需要同时沿两个方向组织单位正方形。

可以先画边长 3 米的正方形，并用边长 1 米的单位正方形铺满。每排 3 个面积为 1 平方米的单位正方形，共 3 排，共 9 个，因此面积为 9 平方米；再画边长 4 米的正方形，比较每排数量与排数怎样同时变化。这里的图可以按比例缩小，但必须说明一个小方格代表 1 平方米，避免纸上厘米长度与实际米长度混为一谈。

当关系能够被解释，再讨论 100 米的正方形，不需要实际画出一万个格子。每排 100 个面积为 1 平方米的单位正方形，共 100 排，共 10000 个，因此面积为 10000 平方米；表达的压缩由已经理解的排列关系支撑。教师若先让儿童看见 3 与 4 的情况，也应问他们为何相信同一关系能够延伸，不能把几个例子本身当作完整证明。

文稿 15 中的“平方 10 米”“平方百米”是儿童探索命名的线索。它们可以暂时指向边长 10 米、100 米的正方形面积，但容易与 10 平方米、100 平方米混淆。教师应把临时名称写成清楚的描述：边长 10 米的正方形面积为 100 平方米，边长 100 米的正方形面积为 10000 平方米，再与公亩、公顷等规范名称联系。

公共名称需要介绍，面积关系却需要解释。儿童不能仅凭探索必然发明历史上已经约定的同一个词，教师也不必为了维护自主性而拒绝告诉他们名称。允许儿童先说出自己的意思，再引入共同语言，可以保留探索的痕迹，又使今后的交流不被各自的叫法阻断。

冲突可以发生在规则也可以发生在表示

有些不一致来自答案与数量关系不符，有些来自两种表示似乎说了不同的话。孩子可能会算 $28+4$ ，却看不懂同样计算的图；此时未必需要制造一个错误答案，比较自己操作与图示之间的差异，就可能产生解释需求。问题是怎样让孩子愿意寻找对应，而不是只让教师指出图中每一处。

还有一些冲突来自方法适用范围。某种烙饼安排在一口锅的容量下有效，换一种容量后需要重新设计；儿童原来相信公式可以直接照搬，条件变化使这种期待受到限制。这里改变的不是数学真理本身，而是模型适用的条件，教师要把这一点说清。

也有冲突发生在评价标准之间。一个学生的方法更快，另一个方法更容易解释；若任务目标只是得到结果，前者可能合适，若要让同伴检查每一步，后者可能更有价值。课堂讨论需要澄清正在比较什么，不然“最好方法”的争论会由教师喜好决定。

这些类型提示，冲突不应被等同于故意让学生算错。教师可以从无法对应、条件改变、不同目标等多处打开问题。不同入口保留了探索的多样性，也减少把课堂变成连续陷阱的风险；儿童不需要先被证明无知，才有资格形成新的理解。

既有研究与本章的解释范围

认知冲突与概念改变是本书必须继承而非重新发明的研究方向。这里的重点是把课堂中的不一致拆成可观察过程：儿童是否注意到它，能调用什么经验，随后建立了哪一种解释。仅有教师安排的反差，尚不足以说明儿童获得了有方向的学习问题。第13章将结合讲授与探索的研究，进一步讨论支持应在何处进入。

因此，不能把皮亚杰的平衡化简化为消灭所有不平衡，也不能在缺少原著对读时断言布鲁索只关心课堂导入。相关理论能够提出哪些预测，应由具体论述确定；本章以分饼与面积单位任务承担自己的解释，不用尚未核实的理论差别制造原创性。

不出现明显冲突也可能形成理解

儿童可能在连续铺方片中逐步看出单位计数的关系，也可能因为透明纸使准确叠合成为可能而建立新联系。这些过程中可以有差异，却未必有一段能够被记录为旧信念遭到反驳的冲突。适时介绍名称、工具或必要条件，同样能够让后续推理继续。

本章把可承受的不一致作为一条有条件的学习路径。若儿童没有可报告的冲突，却已能独立解释和使用关系，就应承认这项证据；不能事后把一切理解都归入某种隐藏冲突。判断张力是否有帮助，要看它使儿童多承担了哪一段比较与解释，以及是否留下新的无效负担。

老师可以这样做 一个分饼任务的不同分支

先给出4张同样大小的饼，每份 $\frac{1}{3}$ 张，问可以得到多少份，并请儿童画图或写出依据。不要先把错误答案放在最显眼的位置，否则部分儿童可能只是为了反驳而寻找教师期待的说法。收集独立作品之后，再选择实际出现的不同解释，或明确标注教师构造的错例供讨论。

若儿童已经通过一张含3份推出12份，可以让他说明为何 $\frac{4}{3}$ 不合理，并把两种式子对应到不同情境。若儿童仍把4乘 $\frac{1}{3}$ ，可以先让他实际分一张饼，再比较“每份 $\frac{1}{3}$ 张”与“取总量的 $\frac{1}{3}$ ”。这两条分支的支持不同，不必让所有孩子等待同一种提示。

随后可以改为每份 $\frac{2}{3}$ 张，先选2张饼，得到3份，避免一开始混入完整人数与分数份额的语义负担。再讨论1张饼相当于多少个标准份额，此时答案是一份半，而不是一名半完整得到规定数量的人。若题目要求完整份数，则需说明只有1份并余 $\frac{1}{3}$ 张，两个问法不应混在一起。

儿童提出的方法可以有差异：先把所有饼分成 $\frac{1}{3}$ 张，再每两块合成一份；先说明一张相当于一份半，再累积；或者利用已经理解的数关系推理。教师要求

每种方法说明份量、总量与份数，并检查有无重复或遗漏，不要求动作顺序完全相同。

最后回到整数包含除法，例如 6 升水每份 2 升，问刚才分数任务中的“每份量”在这里对应什么。儿童可能发现单位份量改变，比较总量与份量的关系仍可解释。这个回看为新旧除法的关系接通提供了观察机会；儿童若能独立说明，可记录当前联系成立。是否由本次学习改变了他原来的整数除法理解，还须比较本人前期记录；是否稳定，则需后续独立检验。

让冲突继续工作而不延长困惑

有的课堂把冲突安排在开头，教师随后迅速给出结论，最后只做同型练习。这样，儿童可能经历了惊讶，却未经历解释与检验；本书主张继续追踪张力，是要求旧问题在新解释中得到回应，而不是让课堂一直保持不安。一个问题应当有机会被解决，同时留下新的可探索条件。

在面积单位课中，解决 100 米边长对应 10000 平方米后，可以再问边长增加到 200 米时，面积增加多少。儿童若只记住“多两个零”，可能需要重新回到两方向的单位排列；若能够解释长与宽同时扩大 2 倍，则可进一步比较面积与周长的变化。后续问题检验的是新解释的适用范围，不是无休止地增加难度。

教师也要设置暂时停下的条件。若多数儿童已无法说明正在比较的对象，先收束材料、补足必要知识，比继续制造反差更有价值；若少数儿童需要更多时间，可以留下操作材料与个别支持。保护探索不等于拒绝结束，明确一个阶段解决了什么，反而有助于下一次继续。

新看法怎样改变旧经验的使用

分数除法的解释建立后，旧整数除法可以获得更清楚的数量角色：总量、每份量和份数分别对应什么。面积单位的关系建立后，平方米可以成为沿两个方向

组织覆盖的单位。要判断这是同一儿童的变化，使用第 9 章规定的个人前期记录；本章继续追问的是，这些联系随后参加了什么判断。

以前只按换算口诀作答的孩子，面对新单位时会不会检查它代表多大的正方形；以前先找乘法口诀的孩子，遇到除法时会不会先辨认已知量与所求量。这些只是待观察的方向。某项联系能够在提示后使用，与它已经进入独立选择，应分别记录。

旧经验也对新解释提出要求。新口诀若不能解释熟悉的整数例子，儿童有理由追问；新面积说法若把长度与覆盖混为一谈，也需要修正。新关系应同时说明旧知识曾在哪些条件下有效，以及条件变化后哪里需要调整。这是第 14 章有范围回写的起点。

教师怎样保存形成过程

一份关键片段至少应保留儿童原来的判断、材料呈现的不一致及其后续动作，并注明必要帮助来自哪里。记录可以很短，但不能只留下教师提出反例与全班答对两个端点。即时结果、延后使用及教学方案的比较，分别按导论的证据约定处理，不由课堂叙事代替。

一份课后复盘怎样继续生成问题

以分饼课为例，教师可以挑选三份作品进行复盘，而不是只挑解释最完整的一份。第一份可能已经算出 12，却没有写理由；第二份可能画出了十二个小份，但仍沿用错误算式；第三份可能解释一张饼，却在扩展到多张时遗漏了数量。这三份作品分别提示表达、表示协调与累积关系的不同问题，不能用同一句“还需要加强理解”代替分析。

复盘首先把教师的解释与作品本身分开。作品中只有图时，不写儿童已经理解乘法算理；作品中只有算式时，不写他只会机械套用。可以在下一次短访谈中

请儿童说明一个局部，并记录所需的提示，再决定课堂需要补什么。这样的谨慎不会让教学停滞，反而使有限时间用在更具体的地方。

另一个值得追踪的是儿童如何处理不一致。有的学生立刻放弃自己的答案，有的学生坚持原答案却愿意重新画图，还有的学生不愿公开发言但在纸上修改。不能按接受新说法的速度给思考质量排序，快速改口也可能只是服从，暂时坚持也可能包含合理的检验要求。教师应看他是否使用证据，是否能够说明修改或保留的理由。

同伴提出正确解释后，课堂也还没有自动完成。教师可以让原先提出不同想法的儿童用自己的材料重新说明，或给一个轻微改变的任务让他选择；这不是追着错误者考问，而是在确认公共讨论有没有成为个人能够调用的关系。若当事人不愿公开，可以通过课后作品或个别交流完成，证据获取方式本身也应尊重儿童。

对教师来说，最有价值的课后问题可能很小：下一次应把每份量写得更清楚，先给一张饼还是四张饼，是否需要保留两种图一起比较。小调整能够形成可核查的差别，比把整堂课归结为“冲突不够强”更有操作性。理解的研究由这些具体变化持续积累，而不是由一次被包装成成功的课堂结束。

本章主张怎样接受检验

对于分饼或面积单位任务，可以比较先辨认不一致再解释，与及时说明后再解释两种安排。两者都须有合理支持，并记录初始经验、学习时间、练习与反馈。若某类起点的儿童在及时说明后更能独立处理，应据此限定冲突任务的适用范围，而不是把效果不佳解释为冲突还不够强。

还应检验可能的代价：学生是否只学会猜教师设置的反转，是否因为持续困惑而减少有效练习，公开错误讨论是否使部分儿童回避表达。出现这些情形，应修改任务或支持。统计结果怎样限制主张，遵循第 24 章及附录 C 对测量与估计精度的约定，不因一次未显著而作全部否定，也不以实施困难保护所有原判断。

带走的话

让旧想法遇到新限制之后，还要给儿童足够的资源与责任，使他能够亲自建立并检验下一种解释。

材料与判断

分饼错例与面积单位叙事分别来自作者文稿 14、15；面积方格、分饼分支及后续任务为本章设计。份额与完整人数、边长与面积单位已作区分，原稿同乘 20 的说明错误见第 9 章。本章没有用神经机制解释教学成效，也没有把教学设定当成已实施研究。

留给下一章的问题

儿童已经看见一个需要解释的差别时，教师究竟应该等多久？过早提供答案可能代走关键推理，过晚提供帮助又可能让探索失去方向。下一章讨论这两种风险之间的具体判断，让“别剧透”成为有条件的教学选择，而不是永远不讲的戒律。

第13章 显露怎样形成 讲授应当在什么地方到来

课堂现场 一条顺畅的问题链留下了什么

纸盒放在桌面上，教师问需要多少包装纸，随后让学生辨认展开图中的六个面，再把每个面的长、宽与长方体的长、宽、高对应起来。一步接着一步，计算式很快写出来，公式也获得了整齐的形式。这样的课并没有明显的数学错误，问题却可能藏在它的顺畅里：把一个空间对象拆成六个面的关键判断，究竟是谁完成的？

我在文稿13《基于教育理念的教学行为反思》中，记录了听一位青年教师执教长方体表面积后的疑问。我指出，课堂以包装礼品盒提出问题，却主要依靠教师预设的问题链推进，学生承担的任务容易变成依次应答。我据此建议让学生先尝试解决包装问题，再在已有活动上组织归纳。这里引用的是作者的听课反思，不把文稿未给出的学生作品、回答比例和学习效果补写进去。

这份反思提供了一个值得分析的现场，却不要求我们接受其中所有概括。例如，不能因为学生处于某个年龄阶段，就断言他们不能从二维展开图推理；也不能把“教师直接讲授时间低于20%”当作普适有效的标准，原稿没有给出这一数字可核查的研究出处。需要保留下来的问题更具体：当教师先替学生拆解任务时，有没有把本来要让学生学习的那一段判断也一起做掉？

想象两种外表相近的提问。“长方体有几个面”可能只是核实一个已有事实，也可能使孩子注意到漏算的背面；“这两个面的面积相等吗”可能开启判断，也可能只让孩子猜教师期待的词。提问的价值不由它是否带问号决定，而由孩子此前做了什么、问题开放了什么，以及回答之后还有什么需要独立处理来决定。

若一名学生面对纸盒，先计算自己看到的三个面，然后发现包装纸还不够，他拥有的是一种需要修正的方案。若教师一开始就把六个面全部编号、配对、标好尺寸，学生再计算，则拥有的是一个已经整理好的问题。后者未必无效，尤其

在学习示范时可以很有帮助，但它提供不了前者那种“为何要把遗漏面找回来”的活动经历。是否需要这种经历，要由学习目标判断。

文稿 00《自主建构模型 凸显优化思想》提供了另一种课堂推进。三张饼的排程出现 12 分钟与 9 分钟方案后，学生比较为什么第二种能够少用一次，讨论中把中途取出一张已烙一面的饼、换入第三张饼，与锅位持续利用联系起来。原稿随后是教师将这一方法命名为“交替烙”，并非学生先提出术语；学生形成策略与教师提供公共名称，应当分开叙述。

这个区别很重要。儿童可以先作出一种安排，而名称由教师给予；也可以先听到一个名称，再通过尝试才理解它表示的关系。我们关心的是名称进入之前和之后，孩子分别承担了哪些判断，不把“词必须由孩子自己发明”规定为自主学习的资格。数学语言包含大量公共约定，教师可以明确介绍，探索不需要从重新发明所有词语开始。

讲授怎样留下儿童可以承担的判断

延迟结论的目的，是留下值得儿童比较、解释和检验的关系。提供一个名称、说明一个题意或示范一种记录，有时恰能使这些活动开始。讲授是否合适，首先取决于它解除什么困难，以及信息提供后还有哪一段判断需要由儿童完成，不能仅按先讲或后讲决定。

备课时宜区分三类信息。公共名称与题目条件需要清楚交代；工具的基本用法可以根据需要示范；关键数学关系则要根据儿童已有经验，决定怎样让其通过比较、解释与检验承担。三类信息常出现在同一句教学话语里，不拆开，就容易把必要说明误作包办，或把已经做完关键推理的提问当成脚手架。

长方体表面积课可以直接说明暂不计算纸张重叠、粘贴与裁剪损耗，只求覆盖六个面的面积总和。这是确定模型范围。若学习目标改为估算实际包装用纸，相关因素就要重新进入任务。说明边界与代做推理是两件事；公开边界，反而让儿童知道后面的计算究竟回答什么问题。

讲授与探索的研究带来什么约束

Schwartz 与 Bransford (1998) 的研究考察比较案例怎样为后续讲授或阅读创造条件, 提示我们关注儿童在听解释之前已经辨认了什么。其研究对象和任务不同于本章的小学课堂, 不能据此宣布所有课都应先探后讲。Kapur (2008) 的研究同样提醒我们, 初次尝试及其后续处理需要共同分析, 失败本身并不是一种教学成效。

这些研究不允许把探索与讲授简单分成互斥阵营。本章沿着它们提出更具体的教学问题: 儿童留下的旧方案有没有成为后续解释的对象, 新的说明解决了原方案的哪一处困难, 帮助减少后还能否使用。研究中的整体效果不能直接移作本章设计的效果, 本章也不把有意回看另算成此前无人研究的机制。

名称可以给出关系仍须检验

文稿 00 中“交替烙”的名称由教师提供, 学生此前比较了具体排程。名称帮助压缩交流, 并不要求儿童先发明公共术语。相反, 即使孩子早已背过表面积公式, 也仍可通过说明对应、处理无盖盒子及检查漏面形成新联系。教学要安排这些尚未完成的工作, 不必要求已经知道结论的孩子装作不知道。

长方体表面积 一个可以被改写的任务安排

下面提出一组教学设定, 用于具体说明讲授与探索怎样分工, 不作为原稿 13 中已经发生的课堂实录。给出一个长 5 厘米、宽 3 厘米、高 2 厘米的长方体纸盒, 要求求六个面的面积总和, 暂不计接缝与损耗。提供可展开的同尺寸纸盒模型、直尺与空白纸, 先请孩子记录自己的办法, 再比较不同记录如何避免漏算或重复。

有的孩子可能逐面记录, 得到 15、15、10、10、6、6; 有的孩子可能直接配成三组, 写 $15 \times 2 + 10 \times 2 + 6 \times 2$; 也有人可能只计算看见的三个面。教师可以先让这些记录接受同一个检验: 每一个面在记录中出现在哪里, 有没有一个面被算

了两次。这里不预定哪名学生一定出现哪种答案，更不把预想错误安排给一个虚构人物后称作观察。

若孩子不清楚某个面的长宽，可以让他把模型中那个面指给同伴，或展开后与原位置对应。若孩子已经能逐面算对，却不懂为何能配对，则把两个相对面拿来比较，再说明两组边分别相等。教师的追问或示范针对不同困难，不能对全班重复同一句“再想一想”。讲授的有效位置，是它能够接住学生已经辨认而尚不能处理的差别。

当学生出现不同但正确的算式时，公式的归纳便有了可以解释的对象。 5×3 对应哪一组面， 5×2 与 3×2 又分别对应什么，乘2为什么不能漏掉，括号为什么可以把三个乘积合在一起，这些都能在原记录中找到来路。教师此时给出表面积的计算公共表达，不必假装公式只能由全班独立发现；关键是儿童能否把表达认回自己的做法。

计算结果为62平方厘米。这个结果还要接受一个返程任务：如果有人写成 $5 \times 3 \times 2 = 30$ 平方厘米，问题不只在答案不同，而在三个长度相乘计算的量与六个面面积之和不同。孩子可以借助模型说明两类量的差别，不宜只说“表面积公式不是这个”。这里的“30平方厘米”沿用的是待辨析的错误记录：三个长度的积不是面积量，若以厘米为长度单位，其乘积对应立方厘米。对尚未学习体积的孩子，教师只要求逐项检查六个面是否被计入、每个面积乘积表示哪个面，不必提前背另一条公式。

最后再改变任务：纸盒不带盖，或者只给其中四个侧面贴纸。若孩子根据覆盖对象删去相应面积，就显示公式没有完全遮住问题；若仍机械计算六个面，则需要返回公式中每一项的意义。这里的回看承接第14章，不意味着讲授失败，而是提供讲授后还需要什么学习活动的证据。

这个安排并非唯一适用的路径。已有较强空间经验的孩子，可以先读一份正确展开图并解释公式，再回到模型验证；对操作较困难但能理解图示的孩子，教师可以提供半完成的对应，保留其余部分让他补足。共享的是面与面积的检验标

准，具体承担的探索路线可以不同。只有把路线差异与支持条件记下来，我们才知道某种安排究竟帮助了谁。

烙饼 从一次尝试走向公共名称

文稿 00 的三张饼讨论，有一个不宜被口号覆盖的细节：学生比较的不只是 9 分钟小于 12 分钟，还追问为什么少了一次。时间结果是入口，锅位在各轮怎样被使用才是进一步解释的对象。若教师一开始只教“奇数先烙三张”，孩子可能得到便捷策略，却还不知道这一策略如何解决空位问题。

在锅最多同时放两张饼、每面连续烙 3 分钟、两面都要烙、翻面与换饼时间忽略的模型下，可以用三轮安排完成三张饼。第一轮放 A 正与 B 正，第二轮放 A 反与 C 正，第三轮放 B 反与 C 反，总计 9 分钟。六个面至少需要三个满容量轮次，而这个安排达到下界，才说明在上述模型下最优。不能只凭比 12 分钟少，就宣布再无更快方案。

教师将这种换入换出的办法称作“交替烙”，能够减少交流负担，名称本身也没有伤害自主性。但命名之后仍应请孩子解释，哪一次换出使后面的两个反面能够同轮完成；若没有这项解释，词语便可能覆盖了原来需要辨认的关系。本章在这里补上的问题不是“谁发明了词”，而是名称怎样保存而非吞掉儿童形成的策略。

还应允许儿童对模型提出质疑。若他说换饼需要时间，教师可以明确说明本题暂忽略该时间，并把“若换饼耗时不再忽略，最优方案会不会变化”保留为后续问题。现实因素不是天然的干扰，只有在本次模型边界已经明确之后，才可以暂不纳入计算。把儿童的现实追问一律称为跑题，会削弱他对条件的敏感。

与此同时，课堂不必把所有模型变体立即研究到底。若本节目标是理解锅位利用，教师可以先处理统一面时长和固定容量，再记录其他问题。保留问题与无限扩张范围不是一回事；教师需要说明为何暂存，而不是用“数学里不用管”取

消提问。儿童因而既知道当前推理在什么条件下成立，也知道条件改变后有重新研究的资格。

根据儿童正在承担的判断决定介入

首先看问题是否已经可处理。儿童连量、单位或对象都不能辨认时，继续等待通常不能提供所缺的信息；可以澄清题意或示范工具。儿童已经有两个方案却无法比较时，则可帮助他建立共同检验标准。相同的教师说明，在这两种起点中承担不同作用。

其次看尝试是否产生了新信息。重复一个无法解释的动作，与发现某项条件未满足并据此调整，并不是同一种探索。教师可请儿童只检查方案的一部分，降低同时处理的负担；如果仍没有可辨认进展，就应改变支持，而不把漫长沉默自动解释为深入思考。

最后看讲授之后留下什么独立任务。给出展开图后，儿童还可自行指出原盒子每个面的对应；介绍交替烙后，还可自己完成合法排程并检查下界。如果后续只剩抄写，讲授已承担了本次关系工作的主要部分；如果后续仍有选择与论证，它可以成为探索的支持。不同儿童需要的帮助强度可以不同，共同的是数学检验标准。

对已经熟练的儿童，应允许其从已知公式开始追问边界，而不是重复第一次发现的外形。对尚缺必要经验的儿童，应提供足以开始判断的帮助。教师的专业性表现在说明为何在此刻提供这项支持，以及支持后谁完成了下一步，而不在于维持统一的沉默时长。

两种安排怎样公平比较

比较先探后讲与先讲后用，须把探索内容、讲授信息、练习量和反馈写清。可以保留介入前的一份作品，随后用相同目标的独立任务检查面与算式的对应，

并用无盖容器考察条件变化。这样比较的是具体安排能帮助谁完成什么，不是两个教学名称的胜负。

若及时示范使经验不足的儿童更能独立解释，便应调整等待条件；若先比较旧方案使另一组儿童更能辨认漏面，便进一步研究这类起点。第 17 章据此讨论路径多样性，本章不再把任何一种顺序设为普遍优先。

带走的话

讲授的时机，要看它能否让孩子接着判断，而不只看它出现在探索之前还是之后。

材料与判断

长方体课堂依据作者文稿 13 的听课反思，烙饼策略与教师命名依据文稿 00；两者不是同一课堂。本章纸盒尺寸、变式及下界检验是教学设定。原稿中未提供可核依据的 20%讲授时长要求未采用，也不按年龄直接规定儿童不能完成哪一种推理。

相关研究采用 Schwartz 与 Bransford（1998）关于案例比较与讲授准备的讨论，以及 Kapur（2008）的生产性失败研究；其对象、任务与本章不同，书目信息见附录 E。理论来源支持问题的提出，教学效用仍由本章任务的实际实施检验。

留给下一章的问题

结论被解释之后，学习仍可能停在这一节课里。新的看法有没有改变旧知识的使用，孩子下一次会先检查什么，不能由本次讲授的流畅推断。下一章沿着这些问题，把有范围的回写落实为可论证的任务与待检验的命题。

第14章 回写 会了以后回头改了什么

课堂现场 两节都上过却接不起来的课

单元结束时，教师把几节课的标题连在一起，很容易看见一条清楚的线索：先观察，再探究，最后应用。可是，这条线索也许只存在于教师的备课本里。孩子记得第一节课看过有趣的图案，第二节课算过一些角，第三节课完成了作品，却未必知道作品中的一个变化，为什么需要前面学过的那个关系。

我在《课程内容结构化：为学习活动立序》中，以密铺单元分析了这一疑问。文稿23第二部分“单元视域下”指出，第一课时若仅停留在埃舍尔作品欣赏和剪切、平移变换，随后便直接探究拼接点的角度关系，孩子就难以看见两者与最终创作之间的联系。我特别指出，缺少的桥梁是让学生思考：用于这类变形创作的基础图形，本身能否实现密铺。这是我的教学观察与分析，不是带有个体记录的对照实验；我们据此追问的是，内容先后出现，是否等于关系已经建立？

密铺是一个特别容易暴露这种差别的内容。孩子可以喜欢某幅图案，也可以算出几个角的度数，但只有在考察拼接处为何没有缝隙、也没有重叠时，角的关系才参与解释图案。随后再看原来的作品，他可能注意到从前只觉得漂亮的接合部位，开始检查那里怎样围成一周；这时，新的数学看法才回到了旧作品之中。

这里仍要分清局部条件与整体实现。在通常的平面密铺中，一个内部顶点周围的角需要合成周角，但仅检查某一处角度之和，并不能保证整套图形能够无缝且无重叠地铺满平面。边的对应、图形的安排以及局部拼接能否一致地延伸，同样需要检查。若课堂把“围成 360° ”说成任何图形都能密铺的充分条件，所谓回看反而可能把错误的简化写入旧经验。

与此相对，文稿21《从“附属呈现”到“核心支架”》第三部分提出，在学习笔算竖式时再次调用前一课的图示与口算拆分算式，追问竖式的道理与哪一种口算思路相通。作者给出了明确的教学建议，但没有提供逐名学生的前后变化记

录，因此不能将建议直接写成已证实的学习效果。值得追问的差别已经出现：后一课究竟是另添了一种写法，还是让孩子重新看清前一课自己究竟做了什么？

下面用 $28+4$ 说明这一差别，所有问答安排均为本章提出的教学设定，不作为既有课堂实录。孩子原来可能把 4 分成 2 和 2，先算 $28+2=30$ ，再算 $30+2=32$ ；也可能先算 $8+4=12$ ，再把 12 与 20 合起来。两种口算都可以正确，竖式也可以正确，教学的任务并不是把其中一种宣布为唯一正途，而是让每一种做法能够说明自己处理了哪些数量关系。

竖式里，个位的 8 加 4 得到 12 个一，其中 10 个一换记为 1 个十，余下 2 个一。回看第一种口算时，孩子会发现“先补到 30”并非随意挑选一个容易的数，而是在原来的 28 上补足一个十；回看第二种口算时，他会发现把个位相加得到 12 以后，十位数量已经发生改变。新的记录方式若能照亮这两种旧活动，竖式就不只是作业纸上的又一种格式。

教师也可能已经把这些关系完整讲过。可是，讲过与孩子能够独立辨认仍是两项需要分别记录的事实。如果教师每指出一个数字，就立即说出它对应的数量，孩子只负责点头，我们掌握的是解释曾经在课堂出现的证据；若孩子能够在自己的旧记录中找出同一关系，并用它纠正一次错误进位，我们才多获得了他承担连接动作的证据。

本章检验回写怎样进入下一次判断

第 9 章把有范围的回写界定为：辨认改变触及了哪一条理由，保留仍成立的关系，修订已经不够用的判断，并让这种分辨进入后续行动。本章不再增加一套总定义，而用一项可以逐步核算的面积任务，推演这一定义要求教师观察什么，以及它可能在哪里失败。

重点有两处。第一，改变并非越多越好：新材料可能只使一条旧理由失效，另一些结论仍然有根据。第二，能够在追问下说明该改哪里，还不等于下一次会

自行检查。回看旧任务与后来怎样选择信息，需要分别留下证据，然后再讨论二者是否相连。

复习与逆向迁移提供的已有基础

复习可以使先备知识重新可用，也可以暴露原先掌握得不稳的关系。回写关心的是新学习怎样重新组织旧知识的解释和使用，两者可以在同一任务中相互支持。没有必要贬低熟练度或每次重做全部操作；能够在需要时重建理由，与每次都展开理由，是不同要求。

新学习影响先前理解，已有逆向迁移研究；理解发展中的折返也已有明确讨论。第 6、9 章已处理这些近邻，因此本章不把返回旧题本身另算原创。这里需要承担的增量，是把保留与修订放进成对条件任务，分别记录误改与漏改，再用后续任务检查是否有可增加的诊断信息。它首先是一项研究设计，不因采用 SDE 语言就自动成为得到验证的新机制。

十二张纸片中的选择性修订

以下是一项论证型构造案例，题目的数学关系可以直接核算，儿童实际怎样回应仍待课堂研究。准备十二张边长一厘米的正方形纸片，先排成三行四列，各片边与边相接，没有重叠。让儿童分别回答：“这些纸片自身的面积加起来是多少？”“桌面被这些纸片盖住的区域有多大？”两问此时都得十二平方厘米，但所求对象不同。

第一问累加每一张纸片的面积。每张一平方厘米，十二张合计十二平方厘米。第二问测量桌面上至少被一张纸片盖住的区域；同一位置若被盖两次，作为桌面覆盖区域仍只计算一次。开始时没有重叠，两种计量恰好得到相同数值。这种数值相同容易遮住对象不同，正适合成为随后比较的起点。

教学前的个人记录可以很短：两个答案及一个理由，或一张圈出所量对象的图。不要求儿童先作出错误解释。一个已经能区分材料与覆盖的孩子，在这项任

务中可能没有发生需要归于本次学习的改变；他的现有能力应如实记录，不能为了完成回写叙事而替他补造旧误解。

然后把右上角的一张纸片完整取下，叠到左上角的纸片上，其余各片不动。原来右上角的位置空出，左上角出现两层。现在纸片总数仍为十二，每片的形状和大小没有变，所以材料总面积仍为十二平方厘米；桌面只剩十一个单位正方形的位置被覆盖，覆盖面积为十一平方厘米。

这一步没有使“移动纸片，面积不变”整体变成真话或假话。若所指是十二张纸片的面积总和，移动和叠放没有改变它；若所指是桌面覆盖面积，叠放使其中一个单位面积被重复覆盖，原有结论需要修订。儿童需要增加的是对“量什么、在什么条件下保持”的区分，而不是背一句与旧口号相反的新口号。

教师可以用两个不同检查支持这一点。让儿童重新逐张清点，检查的是材料总量；让他在桌面方格底板上标出所有被覆盖的位置，检查的是覆盖区域。两个检查得到不同数值并不矛盾，因为它们回答不同问题。若只让儿童看外框，空缺和叠层可能被遮住；若只让他数纸片，又会遗漏重复覆盖，两种材料应各自对准所求量。

再把叠放的那张移回原位，覆盖区域恢复为十二平方厘米，材料总面积仍为十二平方厘米。恢复条件不是可有可无的收尾：它检验儿童是否因一次反例而过度撤回原有方法。数格子在单位一致、边界清楚时仍有充分根据，完整移动而不重叠、不遗漏的剪拼也仍可保持面积；反例修订的是条件范围，不是这些方法的一切合法使用。

同一移动怎样改变不同的量

如果儿童已具备周长知识，可以在这项构造上增加一层，而不改动十二张纸片的大小和张数。最初三行四列的覆盖区域是长四厘米、宽三厘米的长方形，周长为十四厘米。将右上角一张叠到左上角以后，覆盖面积降为十一平方厘米，覆

盖区域的周长却仍为十四厘米：原来右上角外缘的两条单位边不再属于边界，但与相邻两格交界的两条单位边变成了新的外边界，边界总长没有改变。

把纸片恢复后，另取最上面一行的第二张，叠到左上角，便得到一个从上边凹入的缺口。这次覆盖面积同样为十一平方厘米，周长却变成十六厘米。原来该格顶部的一条单位边退出边界，左、右、下三条原内部交界线成为新边界，净增两厘米。两次操作都少覆盖一格，却不导致相同的周长变化。

这个延伸使“改变的范围”有了更严格的内容。同样是移动一张纸片，材料面积可以保持，覆盖面积可以减少，而边界长度可能保持也可能增加。儿童不能仅按“形状变了”统一改动全部结果，也不能凭某个数值未变推断所有关系未变。每个结论需要沿自己的支持关系检查；局部修订指的是理由涉及的范围，并不等于纸面上只改一个数字。

教师可以分别保留三个问题，再让儿童用单位边和单位方格检查。覆盖面积和周长的单位不同，叠层又属于材料关系，标注时不要只写一个没有对象的“面积”。如果儿童尚未形成周长概念，本延伸应暂不使用；它用于增加条件依赖的区分，不能以超出先备经验的任务负担证明儿童缺乏回写。

图形摆得不整齐会增加额外解释困难。这里各片均与方格底板对齐，叠放完整重合，既不剪切也不拉伸；所说周长只指桌面覆盖区域外边界的长度，不计被压住的纸片边缘，也不把叠层的全部边长相加。把这些条件交代清楚，才可能判断儿童是在处理数学关系，还是在猜一张含混图片。

还可以补一张“信息不足”题卡：只告诉儿童十二张同样的纸片已经重新摆放，允许叠放，却不展示具体位置。材料总面积仍可确定，覆盖面积却不能据现有信息唯一确定。允许叠放不等于实际发生叠放，更不等于恰好少盖一格。若儿童直接把覆盖面积写成十一，他可能记住了上题的结果，却没有区分一个条件未被保证与该条件已经被违反。

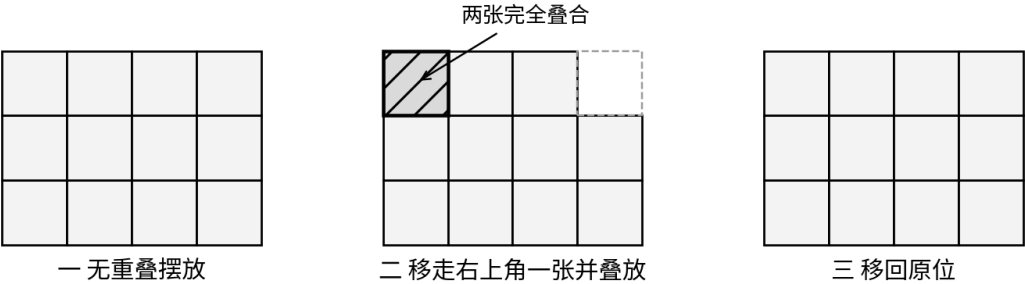
这张题卡要求保留暂缓判断的位置。儿童可以要求看摆法，询问是否重叠，或说明需要知道哪些区域被覆盖。合理的不确定不是能力不足，也不是拒绝使用

知识；它表明当前依据尚不能支持唯一结论。第 9 章面积四卡还给出另一种情况：旧的邻边乘积理由不适用于平行四边形，割补却能独立支持相同面积。因此，理由需要修订时，结论可以改变、保留，也可以暂缓，须分别检查。

为使诊断具体，教师可以构造几份待辨析的答案，但不能把它们写成已经采集的儿童作品。一份把叠放后的两问都写成十二，遗漏了覆盖中的重叠；一份都改成十一，把对覆盖的修订扩大到材料总量；另一份写对十二与十一，却仅复述教师最后一句话。前两份需要不同的数学帮助，后一份仍需独立任务来判断联系能否使用。它们是不同的证据状态，不是三类儿童。

本任务也不要求儿童必须先用语言再动手。有人可能先把两层分开清点，再画出空缺；有人先圈出所量对象，随后核算。教师记录的是哪些区分由儿童作出，提示在哪一步进入，改变后的理由能否承担结论。把过程压成一套统一操作顺序，反而会使本来要观察的个人判断消失。

这项推演得到的确定结论仅限于数学：在规定的摆法中，材料总面积与覆盖面积可以不同；条件恢复后，原有覆盖结论可以恢复；缺少摆放信息时，不能唯一确定覆盖面积。由这些数学事实进一步预测儿童会怎样学习，需要下一节的命题及实际记录。



每张纸片边长1厘米。每个阶段分别问：纸片材料总面积是多少？桌面覆盖面积是多少？

图 14-1 纸片材料总面积与桌面覆盖面积

三条命题怎样进入教学研究

命题一 修订应当同时具有改变与保留的选择性

如果儿童已经把结论同它的适用条件联系起来，条件变化后的改善不应只表现为更愿意改答案。他应有机会修改受影响的判断，同时保留仍有依据的判断。十二纸片任务中，覆盖面积从十二改为十一、材料总面积仍保留十二，合起来才支持这一次选择性；恢复摆放后，也应允许覆盖面积重新回到十二。

这一命题要求把两种方向的错误分开。需要修订的题目中有多少仍沿用旧结论，是一类记录；无需修订的题目中有多少被无根据地改动，是另一类记录。两类题目的数量应分别保留，不能用一个“改对率”混在一起。一般计算错误、题意未辨清及合理暂缓判断另行记录，否则分数变化仍可能来自与选择性无关的原因。

如果某种教学使儿童更善于发现错误，却也更频繁地破坏有效结论，不能称为选择性全面改善。它可能提高了警惕，却没有教会边界。这里的教学问题是怎样把反例与恢复条件配对，而不是让儿童面对每张新题卡都猜测哪里必须反转。

命题二 结论与支持理由应当分别接受检验

某条理由失去支持，既不直接证明结论为假，也不允许继续把原理由当作有效。儿童需要判断是否存在其他独立依据；有则据此保留结论，没有则根据现有信息修订或暂缓。第9章平行四边形的二十四平方厘米，可以由割补继续支持，尽管直接相乘两条邻边的理由不能成立；纸片摆法未知时，则不能仅凭总张数决定覆盖面积。

因此，教师至少应分别留下“结论是什么”与“凭什么作出”两项材料。同一正确答案可以来自有效理由、偶然猜中或跟随提示；同一原理由失效，也可能导向不同处理。不能把指出别人理由有缺口，直接记成儿童已经找到了相反结论，更不能把正确答案一律视为理由已经充分。

教学上的关键补充，是让儿童练习修订理由而不必改动数值，也练习在需要改变结论时不以旧答案为目标拼凑理由。这比一味鼓励改错更接近有范围回写。它是否构成一般概念理解之外的独立能力，仍需比较，本书不预先把二者割裂成不同心理模块。

可以把理由支持写成一张简短的依赖记录，而不要求儿童学习新的形式逻辑：材料面积十二依赖纸片张数和每片面积；覆盖面积十二还依赖将每张纸片的覆盖全部计入，且不同纸片无正面积重叠；周长十四依赖当前覆盖边界的排列。这不是把所有知识拆成互不相干的小块，而是让同一条件对不同结论的作用可见。张数不变只能保护第一条，并不能独自保护后两条。

当摆放信息被隐去时，“没有重叠”只是尚未确认，不是已经被否定；当实际叠层可见时，原先按每片恰覆盖一格求覆盖面积的理由才明确不再适用。这一区别能防止一种新错误：把证明缺一项前提，理解成相反结论已经得到证明。数学课堂可以用作品与操作说明这点，无须让儿童背“充分条件”或“必要条件”的术语。

独立依据也应真正独立于已经失效的那一步。例如，原先只是数纸片，后来通过方格底板直接标出十一块覆盖位置，是新增的一种检查；把“十二张所以十二”改说成“每张一所以还是十二”，则没有补上重叠条件。判读应看依据承担了什么工作，不能因儿童更换了一个词或重说一遍就记成理由更新。

这种记录有助于把数学纠错同评价孩子本人分开。某一答案的支持不足，只要求补足或撤回那项判断，不意味着儿童整个理解系统失败；已经有效的单位计数、乘法与面积可加性仍可作为下一步资源。有范围回写因而既避免僵守旧结论，也避免用一次反例摧毁本来仍有用的知识。

命题三 回写是否进入后续判断须用独立任务检查

儿童在教师追问后说明了材料与覆盖的不同，首先证明这项关系能在当时支持下使用。要进一步判断它有没有影响后续选择，应换用未练过的任务，先观察

而不送出“想一想重叠”之类关系提示。依据可以通过圈画、取工具、操作或简短解释显露，不要求所有儿童逐项口述内部过程。

例如，下一题用八张一平方厘米的纸片先排成两行四列，再将右侧一列的两张分别叠到左侧一列的两张上。材料面积仍为八平方厘米，覆盖区域为两行三列，共六平方厘米。这些数字与前题不同，但需要检查的关系相同。可记录儿童是否先辨认所求对象、是否处理叠层与空位，以及最终结果是否正确；只会复述“十二与十一”不能完成这项检验。

同内容换数只能检验有限范围的使用。还应在另一数学内容中检查条件调用，例如角的图示边延长与张口改变、分饼中每份量改变与图画大小改变。跨内容任务需先确认相应知识已可用，否则失败可能来自新内容尚未学会。第 21 章及附录 C 据此安排独立结果题，不把用于修改判读规则的材料又当成检验材料。

后续作对也不等于儿童必然采用了本书设想的过程。若没有显露检查动作，却能正确处理变化条件，应保留成功证据，并把过程记为未取得；若必须经关系提示才调整，则记录提示下表现。命题检验关心这套记录能否增加信息，不能要求儿童按理论指定的外形证明自己。

三条命题怎样相互约束

选择性规定该保留和该修改的范围，理由检查说明修改为何有根据，后续任务检验这种区分是否被再次调用。三者共同构成一项比“回看后成绩提高”更窄的研究假设：把旧规则与其依赖条件重新联系，可能改善后来处理条件变化的判断。它不预先宣称优于变异教学、一般解释或适应性训练；若这些既有解释已能提供同样的诊断与预测，现有证据仅足以支持本书任务组织的价值，尚不足以据此主张新增机制优势。

与近邻解释共用一组任务

本章任务中的差异辨识，与第10章讨论的变异理论直接相关；新学习中注意到什么又影响旧推理，与学生数学注意研究相邻；在约束变化后调整方法，与适应性专长及逆向迁移也有重叠。因此，不能把“条件—理由—修订”换一种排列，就当作已经取得独立的机制地位。

有意义的比较应使用同一批任务。若一般关系解释已经足以预测儿童何时保留、何时修订以及何时主动检查，那么另加回写编码的收益可能有限。若在已有水平、关系解释与常规迁移表现相近时，先前取得的条件依赖记录仍能改善对新题的判断，才有理由继续研究其增量。结果无论支持哪一种解释，都能帮助教师减少不必要的观察与提示。

一个较有区分力的比较，不应让回写组拥有全部解释、变式与反馈，而让另一组只重复计算。两组都可以辨认材料与覆盖、都可以练习重叠题；特别要比较的，是在新关系形成后，把儿童本人先前的理由重新交还给他、检查依赖与保留范围，是否增加了后来处理未提示变化的能力。即使发现差异，首先支持的也是这项具体安排，不能直接归功于整个SDE框架。

还要留意新旧任务之间相同到什么程度。若后续题仍是相同颜色的十二张纸片、相同位置叠放，成功可能来自位置记忆；若突然改成儿童尚未学习的分数，失败又可能来自内容陌生。可以先改变数目与叠放位置，保持所需数学关系，再在先备知识明确的另一内容中检验。这个递进区分近处使用与跨内容使用，避免把二者合成一个没有边界的迁移结论。

仅有额外预测也还不足以说明新增了一种独立心理能力。一个善于说明一般数学关系的儿童，可能同时表现出更好的条件检查与后续作答；二者相关未必表示回写独自发挥作用。因此，应保留一般理解和语言负担的指标，并允许结论停在“这项任务更便于教师发现依赖错误”。一种诊断工具可以有价值，而不必先被宣布为全新心理机制。

对于形成机制，最需要补出的证据是一段可追踪的变化链：先前的哪条依据在任务中受到何种限制，儿童怎样重新安排理由，后来哪项没有被直接提示的判断使用了这种安排。每一段都应有个人作品或行为材料，不能用班级里不同儿童的优秀表现拼成一条完整链。没有取得某一段时，就指出缺口；理论的下一轮工作由缺口决定。

本章不借动物记忆实验或机器泛化现象证明儿童机制。跨领域类比可以启发问题，眼前的争点却已经能够通过小学数学任务直接推进：儿童保留了什么，修改了什么，理由是否充分，后来是否再次使用。把这些证据做完整，比增添遥远的相似现象更接近本章的研究责任。

老师可以这样做 把返回安排在关系需要出现的地方

回看不一定是一堂课最后追加的五分钟。教师可以在新表示出现时返回旧操作，在一个错误暴露时返回旧规则，也可以在单元终课返回开始时的判断。安排的依据不是流程表上缺少一个环节，而是孩子是否需要借助新关系重新处理此前的问题。不同孩子甚至可能需要返回不同位置，统一回顾全部内容未必是最有针对性的支持。

以 $28+4$ 为例，可以先收集孩子已有的口算记录，再进行竖式学习。这里的收集不是为了寻找一份标准答案供全班模仿，而是为了保留后面能够回看的真实对象。若没有保留原来的痕迹，教师容易把自己整理过的漂亮过程当成孩子的出发点，所谓“旧知”便已经被成人提前改写。

竖式学习后，教师把原记录交还给孩子，提出一个不直接送出联系的问题：“这两种记录在做同一件事吗？请在你原来的记录上标出能够说明的地方。”不急着限定必须使用哪一句话，允许圈画、摆放或简短说明。对于找不到联系的孩子，可以再问“这里得到的 12 表示多少个什么”，但应记录这一步提示，因为它改变了任务对独立连接的要求。

随后需要一项能够检验连接的任务。可以给出一份把 $8+4$ 所得 12 直接写在个位位置、却没有正确处理十位的错误记录，请孩子说明问题发生在哪里，再用原来的口算核对。教师不只看他是否改成 32，还看他能否解释两个“1”在不同位置的数量意义。若只是记住竖式外形，换一张排版或换一个数字，联系可能立即失去作用。

再把题目改为 $28+40$ 或 $38+4$ ，观察孩子怎样选择旧经验。前者检验他是否区分加数的计数单位，后者检验同一种进位关系在数字变化后能否继续使用。这两题不宜被合并成一个笼统的“迁移分”，因为各自提供的信息不同；孩子在其中一题出错，教师需要知道究竟错在单位识别、运算执行还是说明表达。

密铺单元可以保留第一节的作品，并在研究局部拼接条件之后让孩子回到自己的作品。要求不是照着教师的新样图修改，而是指出原作品中哪一处拼接值得重新检查，说明检查了什么、还不能据此保证什么。若发现缝隙，可以提出一种修改并实际检验；若一时找不到可行修改，也可以清楚说明失败由哪项条件造成。

这个设计的价值不在于保证每份作品都变得更复杂。孩子可能经过检查后保留原来的简单图案，却比以前更清楚它为什么能够延伸；也可能制作了更炫目的图案，却说不清接合关系。教师要让作品的美感与数学论证各有位置，不能用复杂程度替代理解程度。改动作品是可能的结果，有根据地不改，同样可能包含回写。

单元层面则可以选择少量具有代表性的旧问题，而不必把所有练习再做一次。每一道回看题应有明确对象：一个旧符号、一种旧方法、一条旧规则或一次旧判断；还要说清本次新学习可能改变它的哪一项关系。若教师自己也说不出预计观察什么，只因题目学过便重新安排，那么这项活动更适合称作复习，不必强行赋予回写的名称。

记录变化 不替孩子写好变化

一种容易执行的记录方式，是保留三个时点的作品：学习前的处理、学习后的回看，以及间隔一段时间的独立处理。教师可以在旁边简记当时给过什么提示、孩子使用什么材料、哪些解释来自同伴。这些条件不必全部量化，却应尽量留痕；否则，后一份作品少了一根提示，可能就被误认成孩子理解倒退。

记录也不要孩子写统一格式的反思。有的孩子用一句话说出变化，有的孩子删去一个箭头重新画，有的孩子能够修改错误却还说不完整。教师需要追问和比较，但不应先提供“我以前以为……现在知道……”的唯一正确内容，再把全班填满的表格当成关系改变的证明。相同句式有助于表达组织，不能代替学生自己的判断。

回看也可能暴露新旧知识之间暂时无法协调的地方。孩子发现一种方法更容易使用，另一种解释更能说清，但还不知道怎样结合，这不是必须立即消灭的尴尬。教师可以把未解决处留下，安排下一次材料或比较，让问题继续存在；如果急于要求全班宣布已经接通，表面的和谐就会遮住需要教学的差异。

家长使用类似做法时，范围宜更小。让孩子找一道自己原来会做的题，问新学的知识能不能解释其中一个步骤，就已经足够形成有价值的谈话。若孩子暂时说不出，可以先听其原来的解释，而不是当晚反复追问到他说出成人期待的结论。家庭支持的目标是让关系有机会出现，不是把课外时间变成更密集的审问。

三条命题怎样被检验与限制

第一次试用应先检查材料是否使儿童理解两种所求量，图示是否明确呈现叠层与空位，评分者能否依据相同作品区分双向错误。若连材料对象都未被可靠辨认，不宜急于把结果归入回写强弱。用少量作品修订任务可以改善工具，但这些作品随后只能承担工具开发的角色，不能同时充当独立效果检验。

比较研究可让不同安排拥有相近的时间、数学解释与练习机会，一种特别安排条件撤去、恢复及旧理由重审，另一种提供同样认真的一般概念解释与变式。

先前作品、关系解释和常规迁移分别记录，结果题预先冻结。先看双向选择性是否改善，再看后续任务的独立使用，最后讨论条件依赖记录能否增加诊断或预测，不能因总分较高就跳到机制成立。

三条命题各有明确的收缩位置。只增加改错却同时增加误改，不能支持双向选择性；只会指出旧理由失效却不能区分保留与暂缓，不能支持理由和结论已经分开；只在教师提醒后成功，不能支持无提示调用。若这些区别在可靠测量中仍不提供额外信息，应收缩新增诊断或预测优势的主张。机制判断仍须依据过程链与干预证据分别推进，不能仅由无增量认定机制不存在；课堂组织价值也可独立评价。

完整的儿童机制研究还需要将过程与结果联系起来。某个孩子后来表现更好，可能来自更多练习、一般概念理解或更清楚的题意；条件依赖记录与成功相连，也不单独证明前者造成后者。第 24 章及附录 C 承担比较与替代解释的进一步处理，本章不以构造案例替代这些研究。

带走的话

新学习怎样进入知识生活，要同时看它如何解释旧事、怎样限定修订，以及后来的判断是否再次使用了这些联系。

材料与判断

密铺单元分析来自作者文稿 23，口算与竖式的连接建议来自文稿 21；两者提供教学问题和路径建议，不含验证本章三条命题所需的个体追踪证据。十二纸片、八纸片、未知摆法及新增回看题均为本书构造的教学研究任务，尚未报告实施结果。其数学结论可直接核算，其教育效果仍待检验。

留给下一章的问题

如果新的看法没有回到旧知识里，困难可能发生在最后的连接，也可能更早就已发生：任务中的差异被教师提前解释，材料遮住了数学关系，或者学生仅学

会重复一种表达。下一章不把这些情况笼统归为“不懂”，而要分别检查关键动作在哪个位置被取消、被替代或没有接续，以便给出不同的支持。

本章资料的进一步查阅

作者文稿 21、23 的身份与对应位置见附录 F；逆向迁移、折返及学生数学注意的书目信息见附录 E。第 6、9 章提供理论近邻比较，第 21、24 章与附录 C 提供观测及研究安排。不同部分共同约束本章任务，不能用一种资料的身份替代另一种证据。

第15章 理解卡住的三种方式

课堂现场 改得更多却走得更远

一次集体备课之后，年轻教师拿到了数十条建议。提问可以更开放，小组交流可以更充分，学困生应得到更多关注，每条单独看都有道理；可当这些建议同时进入一节课，教师却未必能在现场把它们接起来。文稿16中，我记述青年教师小A在第二次试教前的慌乱，以及她因难以承接学生的发散而频繁打断、把讨论拉回预设流程的情形。

这段教研叙事不能直接证明某种一般学习机制，却把一个具体问题摆在眼前：增加正确要求，为什么可能没有增加行动能力？小A并不一定反对开放探究，也不一定不愿改课；困难在于她尚不能同时处理新任务要求、学生回应与原有节奏。若只继续强调“要放手”，便没有回应当下究竟卡在哪里。

孩子也可能处在类似的结构中。教师要求他观察、操作、表达、概括，环节都很丰富，但孩子尚未建立其中的关系，于是只能追随下一项指令。若课堂将其表现概括为“不善于思考”，就把教学中应当继续辨认的差异压成了对人的评价。教师的专业判断需要更细：哪些材料尚不可用，哪一个关系被提前说出，哪一项任务已经完成却没有接到后面的学习？

文稿21对进位加法的分析、文稿13对表面积课堂的反思，以及文稿23对学习活动中断裂的讨论，都提供了寻找这些位置的材料。本章将它们组织为三种观察方向：值得比较的差异被过早抹平；某一种表示或要求独占判断；本次成功没有形成可以接续的关系。三个方向用于打开诊断，不声称穷尽所有学习困难，更不用于把课堂分成好课和坏课。

“卡住”也不是永久状态。有时学生只需换一种表示，有时需要补回一个先备概念，有时需要教师清楚说明一个约定，还有时需要暂停一项过重的任务。相同的错误答案可能对应不同困难，相同的安静场面也可能包含专注思考或无法进入。观察要从具体行为开始，不能从理论标签倒推儿童内心。

这一章要说的话 先找到被取消的关键动作

一项学习活动是否支持理解，不能只看课堂中有没有问题、材料和答案，还要看儿童承担了怎样的连接与检验。当关键动作被教师或同伴提前完成，当某种表面要求替代了数学关系，当新发现没有机会重新处理旧经验，学习就可能停在外在完成。这个“可能”必须由后续独立任务确认，而不是听课者凭一个片段作终局判断。

本章据此提出三组诊断问题。第一组看比较与修正是否仍然开放，第二组看材料、符号、情境及评价是否相互制约，第三组看当前结果能否进入以后的解释与行动。它们可以在同一课堂交织出现，也可以只出现其中一项；教师应选择证据最清楚、最值得先改的一处，而不是同时给课堂加上三套改进要求。

第一种卡住 差异还没有成为问题就被抹平

文稿 21 指出，在一些进位加法教学中，教师负责解释图形、比较方法并建立关联，学生主要听取结论。这里不是说教师不应该解释图，而是提醒我们检查任务的目标：若目标正是让孩子学会把自己的操作与图示对应，教师一次性做完所有对应，学生便少了一次承担该动作的机会。图出现了，学习图的活动却可能没有出现。

设想孩子把 $28+4$ 拆成 $28+2+2$ ，另一个图示则先把 28 分成 20 与 8。教师可以直接解释两图都对，也可以先请孩子选择哪一图记录了自己的做法，指出另一图与自己不同的地方。第二种安排没有保证每个孩子都会理解，却保留了一个必须由其判断的差别；第一种安排若随后另有独立辨认，也不能仅因先讲解就被判定无效。

因此，观察的单位不宜只是某一句话，而应包括它之前的问题和之后的活动。教师说“这个 1 表示一个十”，可能是在儿童尝试后提供必要确认，也可能在任何尝试之前替其给出关系。二者使用同一句话，承担的教学作用不同。没有前后信息，就不宜把这句话编码为包办。

差异被抹平还可能发生在学生之间。小组中一名儿童总能迅速指出正确方法，其他人负责记录，看起来分工明确，却可能使他们没有机会形成自己的判断。解决办法并非禁止能力较强解释，而是让每名成员之后承担一个可独立完成的动作，例如换一道题标出对应关系，或说明自己起初误判的原因。合作是否支持学习，需要越过集体成果再看个人证据。

教师也可能出于保护而过早结束错误。孩子刚提出一种不成立的猜测，成人立即说出正确答案，避免其尴尬；可是，猜测为什么不成立、哪里还保留有用想法，便未进入共同讨论。更稳妥的支持可以先把判断与人格分开，再请其检查一个条件，或者让同伴提供反例。保护儿童不等于保护所有说法免受检验。

这里也存在边界。若错误涉及危险操作、持续羞辱或明显超出当前目标，教师应立即介入，不必为了保存所谓冲突而等待。数学关系也不是所有情境都要重新争论，一些公共约定可以直接说明。诊断关注的是与本次学习目标有关的判断是否被代替，不把教师的每一次明确指导都视作理解的障碍。

第二种卡住 一样东西替所有关系作了决定

符号、操作、情境和鼓励都可能支持学习，也都可能在失去相互检查时遮住学习。问题不是它们出现得多，而是它们是否成为唯一允许的依据。一个孩子能背口诀但不能解释对象，一个孩子持续摆材料却不检查保持的量，一个孩子不断补充生活细节却没有确定当前模型，都会提醒教师看看关系是否被某一方面替代。

文稿 11《数形结合》批评只剩算法结论或图形仅作装饰的情况，本章采用其中关于表征关联的教学问题，不沿用缺少可核来源的 87% 数字，也不猜补文本提取中缺失的分数公式。对于只会按规则计算的表现，首要任务不是取消规则训练，而是找到规则与数量关系尚未相接的位置。必要的熟练度与理解可以互相支持，不能被人为分成敌对目标。

例如，孩子记住“同分母分数相加，分母不变，分子相加”，可以有效计算 $3/8+2/8$ 。教师进一步问为什么相加后不是 $5/16$ ，可以让他在同一个整体上指出八分之一这一单位没有改变；这里的图帮助检查规则，而不是为了让每道题都重新画图。若图中的整体大小不一致，规则的解释反而会混乱，因此直观材料本身也要受数学条件约束。

操作独大则常表现为只看完成了什么，不看为何能够这样做。孩子照着剪拼步骤把平行四边形拼成一个长方形，成品正确，并不能独自证明他理解面积保持。可以改变切割位置，或者故意在重组时留下一条空隙，让他判断这次能否直接使用长方形面积；若能够追踪各部分不重不漏，操作便开始承担论证作用。

但沉默操作不能自动判作没有推理。有的儿童通过反复调整已经在检验关系，只是表达尚未形成；教师可以请他选择两种结果、指出哪一步不允许，而不必马上要求完整口述证明。诊断既要防止动作冒充理解，也要防止语言要求抹去动作中已经出现的理解。支架的调整要让已有判断更可见，而不是只提高表达门槛。

文稿 20 与 22 反思课堂转型只复制热闹形式而缺少数学推理，这一提醒适用于任何外来或本土方法。我们不能把问题归咎于某个教学流派的名字，因为同一种形式可以被有根据地使用，也可以被机械复制。应追问活动服务于哪个关系，儿童在其中承担什么判断，什么表现会迫使教师修改原来的解释。

情境独大也需要谨慎判断。文稿 00 为使学生聚焦烙饼优化，提前处理锅容量、每面时间等条件，同时将取饼、翻面耗时等暂不纳入模型。儿童追问饼会不会凉，并非天然没有数学价值；在现实优化任务中它可能十分重要。教师需要说明当前问题为何先忽略这项因素，并允许在改变模型时把它重新纳入，不能用“这不是数学问题”一概排除。

如果情境细节使讨论不断扩张，可以请儿童共同确定当前要比较的目标与暂时保持的条件。例如，先比较完成全部饼所需的总时间，而不同时优化口感、能

耗、等待顺序和操作难度。条件公开后，讨论才有共同尺度；否则，两个孩子可能各自作出合理安排，却因目标不同被误判为一个对一个错。

评价独大的情形更隐蔽。文稿 24 提醒教师不要反复用“我喜欢”替代对行为价值的说明，因为孩子可能逐渐把成人喜好当成判断依据。本章保留这种教学风险，但不从一句评价推断儿童形成某种人格，也不把温情表达本身当作错误。需要观察的是，教师是否同时提供可讨论的理由，以及儿童提出不合教师预期的观点时能否继续获得公平检验。

比如，孩子提出一个与教师不同但成立的方法，教师只称赞“你很大胆”，却不讨论方法是否正确，认可可能仍然停在情绪层面。更有信息的反馈可以指出他改变了哪个条件、用什么检查结果，同时邀请同伴比较适用范围。这样的评价把注意力带回行为与证据，而不是要求儿童猜测怎样获得好感。

第三种卡住 本次成功没有接到下一次

文稿 23 的密铺分析显示，多个课时可以围绕同一个总任务，却仍缺少连接各项活动的推理问题。作品欣赏、角度研究和最终创作都已经安排，并不意味着孩子明白基础图形的选择怎样约束变形设计。单元的统一不能只靠标题一致，还要靠儿童能够说明前一项活动为后一项提供了什么。

第 14 章已经讨论回写，本章不再重复其全部做法，而是把目光放在诊断信号上。新旧方法均被教过，却没有任何任务要求两者相互解释；课尾题全部紧贴示范，离开同样排版就无法辨认；下一课调用旧名称，却没有检查适用条件。这些现象提示教师进一步观察，但还不能直接宣布理解没有形成。

有的课时主要目标就是初次获得一种方法，暂时没有安排远迁移并不构成缺陷。问题在于单元后续是否接续了这项工作，以及教师是否把初次成功提前写成稳定掌握。如果后续另有比较、变式和延时使用，就应把它们纳入观察；若只看单节公开课，结论范围也应明确限定在单节。

“会了就完”还可能成为成人的记录习惯。作业批改只保存对错，不保存孩子当时使用的图、解释与提示，于是几周后再出错，教师只记得“以前都教过”。没有可靠的早期表现，就难以区分遗忘、情境变化、提示撤除和先前根本未稳定形成。下一章将进一步处理这一时间问题。

孩子自己也可能将学习理解为交出一次答案。若每项活动在得到正确结果时立即结束，他很少有机会检验答案怎样得来、哪里会失效或怎样解释旧经验。教师可以选择少数关键任务，把正确答案当作继续问一小步的起点，而不是让每道题都延长为大型探究。这样既保留练习节奏，也给关系稳定留下位置。

换个地方看 修机器之前先查哪一处不工作

一盏台灯不亮，可以是没有插电、开关损坏，也可以是灯泡失效。若维修者只知道“不亮”，便不断更换更贵的灯泡，可能做了很多事却没有触及故障。这一生活类比说明诊断需要定位，但它不是把儿童当机器；人的学习具有动机、解释与社会互动，不能由单一部件因果完全说明。

类比的帮助在于提醒教师不要把所有困难都用同一种补救处理。若儿童缺少可辨认的对象，增加练习量可能继续复制困惑；若他能解释但执行尚不熟练，重新讲一遍概念也未必最有效；若他只在强提示下成功，则需要逐步观察撤去提示后的处理。不同证据指向不同支持，而不是先规定所有孩子都必须再听一次或再做十题。

不过，课堂中的原因常常相互影响。表达负担过重可能使孩子放弃说明，沉默又使教师误判其没有思路，更多提示随后让孩子更加依赖。诊断因此是一个可被新证据修订的过程，不是一次找到唯一病因。教师应把最初判断写成“当前最需要检验的解释”，而非给儿童盖上不可改变的印章。

老师可以这样做 用小观察替代大标签

附录 B 给出了九项观察信号，分别对应三种卡住方向。使用时先选一个短片段或一名儿童，写下任务、教师提示、儿童动作与结果，再提出可能解释。不要一边听课一边只勾“教师包办”“活动低效”，因为这些词已经包含结论，无法让另一位观察者核查你究竟看到了什么。

例如，可以记录“教师圈出十根小棒后，学生写下进位的 1；随后练习只要求计算，没有再次解释进位”。这支持的判断是：尚不清楚儿童能否独立建立这一对应。下一步可以给他另一道同关系的题，允许自行选择材料，观察其能否指出进位来源。如果他能够完成，原来的怀疑便应缩小，而不是坚持用第一次片段给他定位。

若观察对象是小组合作，可以在共同展示之后请组员分别解释一个环节。不是为了找出谁偷懒，而是为了辨认协作成果与个人理解之间的差别。对于无法说明者，先换一种回应方式或缩小任务，再判断是否需要更多学习；不能把语言表现与思考贡献直接画等号。

若怀疑操作替代了推理，可以暂不增加操作次数，而改变其中一个条件。剪拼任务中让一块小片叠在另一块上，问还能否直接用外框面积；数格子时把单位格大小换掉，问数字是否还能直接比较。这类变式不需要复杂材料，却可以让“保持了什么”成为儿童必须处理的问题。

若怀疑情境吞掉模型，则请学生把条件分成当前必须考虑和暂时保持不变的部分，并分别说明理由。教师可以提供例子，但不预先将所有现实因素判作干扰。若某个被忽略因素会改变结论，就应修订模型边界；模型的简洁不能以隐瞒关键条件为代价。

若怀疑评价替代了依据，可以回听自己几次反馈，看看是否说明了孩子做了哪项有价值的动作。把“我喜欢你的答案”改为“你把两个方案的条件分别列出来，所以我们能比较”，并不要求教师变得冷淡。温情可以继续存在，只是判断正确与否还需要公共可检查的理由。

若怀疑新旧断链，可以取一份儿童旧作品，请其选择一个地方重新解释。教师不必要求全班回看相同位置，有人需要追踪单位，有人需要区分模型条件，还有人需要说明图与式的对应。不同返回点服务于同一个目标：让当前关系进入已有经验，而不是让所有反思长成同一种句子。

一次教研只先改一个承重点

回到小 A 的经历，数十条正确建议之所以难以同时转化为行动，提醒教研组缩小改进的焦点。若本次最关键的困难是教师无法承接开放讨论，可以先选择一个容易观察的关系问题，让她预想几种回应并练习追问；不必同时改情境、合作、板书、评价与节奏。对改进目标的节制，是为了让变化有可追踪的依据。

这里也不能把简化误解为降低标准。数学正确性、儿童尊严和基本课堂安全仍是底线，只是专业发展中的多个改进目标可以有先后。先让教师能够说明一处介入为什么发生，再逐步扩大可处理的复杂度，比要求一次呈现全部理念更可能形成可复用的判断。这是对文稿 16 提出问题的解释性展开，不宣称已有对照数据证明其效果。

教研记录可以采用前后对照：原来在什么情况下打断，修改后保留了什么空间，儿童因此多承担哪一步，新的困难又是什么。若修改后儿童仍然依赖教师，便继续检查支架，而不是把结果归于教师执行不到位。主张也必须接受现实的回写；不能理论永远正确，所有失败都由实施者承担。

三种方向之外还要看什么

本章三分法不能覆盖任务语言困难、感官障碍、缺课经历、家庭压力或持续焦虑等全部条件。教师遇到反复而广泛的困难，应与相关教师、家庭及必要的专业支持协作，不能把所有问题都解释为课堂某一步被代走。保留理论边界，是为了让儿童获得合适帮助，而不是削弱教学责任。

即便只讨论数学，困难也可能来自题目本身。图形画得不准确、单位不清、条件矛盾、答案不唯一却被规定唯一，都可能使学生合理的判断被当作错误。教师使用观察表以前，应先审题，确认材料允许希望学生作出的推理。若成人提供的问题有缺口，就不能把补足缺口的责任悄悄转嫁给儿童。

还要留意不同文化与语言表达下的理解方式。儿童可能使用家庭语言、手势或自创图记表达一项有效关系，教师不熟悉其表达并不意味着表达没有意义。先请其指认对象、举例或做一次操作，再讨论如何转化为公共数学语言，往往比立即纠正词语更能辨认其思路。

观察者之间的分歧也是资料。例如，一位教师认为同伴解释替代了儿童思考，另一位认为解释提供了必要支架，双方不必急于争取谁的理论更正确。可以约定让儿童完成一个没有同伴帮助的小任务，看他是否能够重建关系；若仍不能判断，就保留分歧并注明还缺哪一种作品或过程记录。这样，教研讨论从风格偏好转向可追加的证据。

对同一课堂的不同儿童，也应避免用多数人的表现遮住少数人的状态。全班能齐答并不保证每人完成连接，一名儿童出错也不证明整项设计失败。观察可以先选择具有不同起点的少量儿童，持续记录他们在相同任务中怎样使用帮助，再决定是否扩大支持范围。这种做法让多样性成为调整教学的依据，而不是课堂统一之外的麻烦。

记录结果反馈给学生时，应描述当前任务中的表现。例如，“你能用小棒完成，但还需要练习把这一步画出来”，比“你的抽象思维差”更清楚地指出可推进的方向。后一种说法把一项尚未完成的转换变成人的属性，容易使后续观察被标签牵着走。诊断语言应保留下一次改变的空间。

诊断工具应当改变什么

三组观察方向首先应帮助教师提出不同的后续任务，而不只是把原来的“不会”换成三个名称。怀疑示范代替独立对应，就补一个独立匹配任务；怀疑操作

遮住保持条件，就改变重叠或遗漏；怀疑新旧关系未接续，就返回本人旧作品。后续证据若不支持最初怀疑，应修改诊断。

观察者一致性与教学用途须分别检验。两位教师能够勾出同一信号，只说明记录较可复核，还要看该信号能否帮助选择有效支持。反过来，若每人都按教学风格作不同解释，应先调整观察单位与记录项目。三方向不能涵盖的困难继续保留，不为表格整齐强行归类。

带走的话

理解卡住时，先查任务条件与孩子已经完成的判断，再决定最需要增加哪一种帮助。

材料与判断

本章课堂依据来自作者文稿 16、21、13、23、11、20、22、24 与 00 中的叙事及教学分析，没有把不同儿童拼成一个成长个案。三组观察方向及新增变式是待检验的诊断工具，尚未报告信效度；来源未核的百分比与人格因果断言不承担本章论证。

留给下一章的问题

课堂中的某个连接暂时没有完成，与已经形成的理解后来不再稳定，是两类不同判断。几个月后孩子又用了旧方法，究竟是有根据地选择，还是新旧关系尚未建立，或者此前的成功本来就依赖提示？下一章把观察延伸到时间之中，讨论并存与回弹应当凭什么区分。

第 16 章 并存与回弹 三个月后怎样继续观察理解

课堂现场 延后测中的旧方法意味着什么

三个月后，试卷再次摆在孩子面前。有的答案使用了割补，有的仍在数格子，也有答案借助图形边或角的特征作判断。教师看到这些差别，很自然地想问：那节课留下了什么，哪些关系保持了下来，哪些地方还需要继续学习？然而，在回答以前，还必须问一句：眼前的旧方法，是否足以证明孩子回到了旧理解？

我的文稿 02《以操作性理解的策略促进学生面积概念的发展》提供了一个追踪视角。按原稿所述，研究采用单组前测与三个月延后测，对象为同校五年级两个班共 138 人，前后使用相同问卷，并选择 12 名学生课后访谈；研究者同时参与授课、资料收集与分析。这些是原研究的设计信息，不是本书新增回写任务的样本。

原稿讨论延后测中仍有学生数格子，少数学生使用不恰当的拉动图形经验。数格子在合适条件下仍是有效方法，它的出现不等于理解退回；原稿又缺少足以确认每个儿童曾独立形成新关系的即时记录，因此不能由延后策略类别直接计算回弹。

原稿数据尚有需要核对的口径：汇总表与交叉表在第二、三题的割补比例上不一致，第一题后测分类百分比合计超过 100%，第三题正确表达比例与 0、1 评分均值之间的对应也待确认。不能择取其中一组数字作为最终成效，更不能据汇总比例重建不存在的个体变化。应回到原始作品、计分规则及数据表核查。

这份材料能够支持的是研究问题与追踪必要性：一次课堂完成之后，不同方法怎样继续被使用，值得在时间中观察。本书的新问题还要求更专门的关系任务，尤其要把策略名称、选择理由和所需帮助分开。已有研究提出疑问，新任务承担检验，二者的贡献因此都能保留。

这一章要说的话 方法共处与关系变化要分开记录

孩子同时使用几种方法，是观察的起点，不是理解失败的结论。我们需要进一步看这些方法之间有没有联系，儿童是否知道各自的条件，能否基于任务作选择。旧方法被保留下来，可能体现灵活性，也可能体现彼此隔离的记忆；仅看方法名称，无法完成这个区分。

“回弹”则应作为有时间证据支持的暂定判断。在先前独立表现已经得到记录、后续任务与支持条件具有可比性时，若某种新的关系解释持续不再出现，而原先不恰当的判断再次主导，可以提出回弹的解释。即便如此，也应排查提示变化、任务难度、提取困难与再学习经历，不能把每一次退步都归于旧观念夺回位置。

本章因此不把改名、并存、回弹当作互斥而穷尽的学生分类。它们描述某个概念、某类任务与一定时间段中的关系状态，允许同一儿童在不同对象上有不同表现，也允许写下“证据不足”。分类若不能容纳不确定性，就会把教师最需要继续观察的地方错误地封闭起来。

旧说法接住了什么 多策略并存并不陌生

Siegler (2005) 在《Children's Learning》中强调儿童学习中的策略变异、选择与变化，并介绍重叠波视角：同一时期可以存在多种思考方式，各自的使用频率与选择随学习变化。这已经不是一种新阶段必然彻底清除旧阶段的简单图景。本书不能为了凸显“并存”，把已有研究改写成只承认替换。

这一视角使教师不必因旧策略出现而立即担忧，但它也要求更细的观察。儿童为什么在这个题目上选择这种方法，方法执行是否正确，能否解释另一种方法，都是不同的问题。本书采用的回看方向，关注儿童怎样用新关系解释旧方法；它与已有逆向迁移研究相邻，不能声称此前研究从未看见多策略、从未研究选择或从未关注旧理解改变。

关于保持与表现的研究同样提醒我们谨慎。Clark 与 Bjork (2014) 讨论合意困难时区分当下可提取性与较持久的学习，并指出间隔、交错与提取等安排需要考虑已有知识和适用边界；困难并非越多越好。这为本章提供一个重要限制：暂时想不起来，不能直接等于学习从未发生或已经全部消失。

这些研究不能被缩成“多做间隔练习就会理解”。保持住的可能是一条正确规则，也可能是一段没有关系说明的程序；儿童能够重新提取什么，仍需结合具体任务检查。反过来，也不能因为本书重视关系，就轻视练习与熟练度对后续使用的支持。若一种关系每次都要耗费大量注意才勉强重建，儿童在复杂任务中可能难以调用。

本书需要做的是让这些解释相互约束。策略变化告诉我们用了什么，关系任务帮助我们观察为什么这样用，时间安排让我们知道这种表现是否保持，提示记录则说明在什么帮助下出现。任何一项都不能独占结论，也没有理由把它们合成一个未经验证的“理解总分”。

并存至少有几种不同样子

第一种情形是有联系的共存。面对规则图形，孩子用割补迅速求面积；面对边界不规则而格子清楚的图形，他选择数整格并合理估计零散部分，还能说明两者都在处理同一个面积量。这里需要记录他的估测方法和精度要求，不能只因没有使用新学的割补就判定落后。方法的适当性要由任务条件判断。

第二种情形是可以执行却暂未接通。孩子分别会数格子与按步骤剪拼，却不知道为何剪拼保持面积，也说不清两种结果为什么应当一致。教师不能由此宣布他毫无理解，因为他可能已经理解部分计数关系；更准确的判断是，新旧方法之间的某项联系尚未得到证据支持。后续任务应针对这项联系，而不是把两种方法都从头重教。

第三种情形是看似换法，实际只是外形线索变化。图上有格子就数格子，没有格子就寻找熟悉的切割线，遇到陌生形状便无法判断。这里可能缺少对面积单

位、可加性或变换条件的稳定说明，也可能只是当前题目超出已有经验。教师需要让孩子解释选择依据，并提供一个变化不太大的对照任务，才能逐步定位。

这些情形并非三只互不相通的盒子。一个孩子可以在矩形上有联系地使用多种方法，在不规则图形上仍依赖表面线索；他也可能在得到一项提示后建立联系，而几天后尚不能独立使用。教学应当记录这种局部性，不把一次回答提升为对全部数学能力的判断。

尤其不能把“说得方法关系”设成唯一门槛。孩子可以用同一套小片拼出两种图形，指出哪一片去了哪里，通过行动显示面积保持；如果其语言尚不完整，可以继续提供表达支架。反过来，背诵“割补后面积不变”却允许重叠或遗漏，则说明语言不能代替条件检查。

回弹需要的时间证据

首先要有可信的先前状态。不能以教师记得“全班都懂了”为基线，而应保存本人在一定支持条件下解释或使用关系的记录。对独立形成的判断，至少应有不直接给出关键关系的任务；只保存紧随示范的作业，无法确认此前已经具备独立使用能力。

随后检查后续任务的可比性。同题重测减少部分内容差异，却可能带来记题；异题重测减少记题，却可能改变难度、语言或表示要求。可以并用少量同结构任务与新情境任务，并保留工具、同伴和教师提示的变化。支持撤除造成的表现下降，应先按支持条件解释，不直接写成关系消失。

还要排除一次性表现。疲劳、误读、计算失误或临时提取困难，均可能使一次结果下降。必要时以另一项短任务确认，记录什么帮助使关系重新出现；不需要把所有儿童置于高频测试中。后续能够恢复的关系，与在多种可比条件下持续无法使用，所支持的判断不同。

最后记录间隔中发生过的学习。另一种教材说法、家长提示、练习偏重或缺课，均可能改变后续表现。时间不是一只空容器；讨论回弹，应说明时间里什么经历可能使原有解释重新占据判断，而不把所有变化归因于遗忘。

换个地方看 搬家以后走错路

一个人搬家后，下班时不经意走向旧住处，这个例子可以帮助理解旧习惯为什么仍可能被调用。可是，他可能立即发现并纠正，也可能根本记不清新路线，两种情况不能因都走错了一个路口而混为一谈。这个类比说明相同动作可能对应不同状态，不是儿童数学回弹的心理机制证明。

若他知道新家在哪儿，疲劳时偶然转错，帮助可能是增加提醒；若他只跟着别人去过新家，从未独立走过，则需要建立路线；若道路临时封闭，旧路线可能反而是有根据的替代方案。把三种情况都叫“又回去了”，便无法选择合适支持。数学中再次使用旧法，也应先问它在当前条件下是否合理。

地图学习还有另一层启发。掌握新路线并不要求抹除旧路线，两者有联系地保留，反而使人能够应对绕行。旧法被纳入更丰富的关系，可以增加选择；只有在不适用时仍机械调用，才需要诊断。方法的年龄不能决定方法的价值，适用条件与解释能力更重要。

老师可以这样做 追踪一个关系而不是追踪一个标签

以面积学习为例，可以选择“分割重组在什么条件下保持面积”作为连续观察对象。前测让孩子判断一组图形是否等积，并记录理由；教学后使用不同外形但同样涉及完整移动的小片任务；过一段时间再安排含有重叠或遗漏的反例。这里观察的关系相对稳定，表面形式有所变化，能够比单纯统计使用哪种方法提供更丰富的信息。

每个时点先允许儿童独立选择方法，不把割补写成题目要求。若他选择数格子而且方法适当，再问这种结果能否帮助检查剪拼方案，或者请其说明两种方法

各自依据什么。这样既不奖励某个预设策略名称，也给关系说明一个出现的机会。若提示之后才接通，应据实记录为提示下表现。

接着让儿童判断一个错误方案：把原图分为两块后，一块叠在另一块上，却直接把外轮廓面积当成原面积。能够指出重叠导致部分面积在外轮廓计数中被遮住，显示他在检查保持条件；若只说“割补面积不变”，则需要回到各部分是否不重不漏。错误方案的目的是不是制造陷阱，而是暴露一句规则尚未说明的边界。

记录时把答案、依据、方法选择与提示水平分开。答案正确但依据不清，可以保留为需要进一步观察；依据合理但一次计数失误，则不宜整体判作不理解。若同一儿童在几种任务上表现不同，这种差异本身就是教学资源：它指示关系在哪些条件下可用，在哪些条件下仍需支持。

对于尚未接通的多策略，可以安排“旧法认亲”。让孩子把原来的数格子记录与后来的剪拼记录并列，找出两者都在处理的面积单位或部分总量，再说明步骤为何不相同。教师不应预先给出“数格子是割补的特例”这种不准确关系，也不应强迫两种程序逐步一一对应。共同基础与不同操作可以同时成立。

对于独立提取困难但有帮助即可恢复的孩子，可以安排少量间隔再使用，并逐步减少提示。这里的“少量”需要根据实际表现调整，不能从合意困难研究推出统一的每日题数或固定间隔。若儿童持续失败，先检查必要知识是否具备，而不是用“困难有利于学习”替无效练习辩护。

早期没有可靠独立证据时，不能称孩子“退步”，也不能据此断言理解“仍在形成”。应先描述当前独立表现和所需支持，把无法确认的时间变化记为证据不足。当前已经能够独立解释和使用关系，就如实保留这项能力证据；若当前只在提示下完成，则可说独立使用仍需支持。家长听到“又忘了”往往会要求加倍练习，孩子也可能把变化理解为自己能力下降。以实际记录为依据的描述，例如“他这次能在提示下说明关系，独立判断还需要支持”，既指出可观察的困难，也给下一步行动提供方向，而不虚构早期状态。

一个小研究怎样保留真正的变化

教研组可以围绕“分割重组在什么条件下保持面积”建立连续材料：前期独立作品、教学关键片段、即时关系任务、延后等值任务，以及下一单元中的条件检查。具体时点按教学目标与负担确定；三个月可与原研究形成对话，但不是所有研究都必须采用的唯一间隔。

工具开发时先用部分作品修订记录与判读规则，再将规则用于另留的作品。评分者尽可能不预先知道教学安排，并独立判断一部分相同材料。分歧首先用于识别遗漏证据和模糊规则，不急于合成一个理解总分。当前能够接通关系与相对个人前期记录发生变化，仍按第9章分开。

个体编号、提示水平与任务身份必须保留。同一儿童的前后资料是配对记录，班级与教师带来的共同影响也不能忽略。只有百分比，便无法追问谁在什么条件下改变；把练习作品与独立检验作品混在一起，也会把教学熟悉度误作后续使用。需要统计推断时，应按实际设计选择方法，而非事后寻找能使结果显著的算法。

文稿02的后续工作应先核清表格，再明确原材料能支持的描述。它的旧策略分类不宜事后改名为本书的回写类别；若要检验有范围回写，需要增加相应的对象、理由与条件任务。完整研究方案见附录C，本章着重守住时间变化的证据身份。

家庭与课堂怎样共享一份变化记录

教师与家长可以共享少量具体作品，而不是不断交换“懂了”“没懂”的总体评价。一份旧题、一份当前解释，再加一句提示条件，往往比长篇印象更有用。家长看到孩子使用旧方法时，可以先问为什么选它，再决定是否需要提醒另一种方法；不要把课堂的新法自动变成家庭唯一允许的做法。

儿童也应参与解释自己的变化。他可能说上次看见格子就直接数，这次发现可以移一块；也可能说今天不想剪，因为数起来已经很清楚。成人要检验这些理

由是否与任务相符，而不只奖励听起来符合教学理念的反思。反思不是背诵成长故事，它可以包含没有改变、暂时不确定和选择保留旧法。

若一次后续表现不理想，先缩小问题范围，找出仍然可以使用的部分。孩子可能还能说明面积是什么，只是在某种复杂图形上不能找到合适切割；这时重教面积定义可能没有针对性。把仍然有效的知识留在记录中，既帮助教师定位，也避免儿童将一次困难扩大为“我数学不行”。

时间区分能否增加教学信息

有联系的并存、未接通的并存与有时间依据的疑似回弹，只有在帮助教师选择不同支持时才值得保留。若不同观察者难以可靠区分，或区分后仍总使用同一种补救，应检查分类是否过宽、记录是否不足，或者这些名称是否确实没有增加所需信息。

回看设计是否改善保持，须与有合理讲授和练习的方案比较。后续成功还可能来自题目重复、提示或额外练习，不能单凭成功宣布回写机制成立；后续失败则应先定位任务及支持条件，不以“理论尚未发生”解释一切。比较结果允许我们保留有效部分，也允许缩小或放弃某项教学承诺。

带走的话

旧方法再次出现，先问它为什么被选择；补齐前后证据，才有资格讨论理解是否回弹。

材料与判断

原研究的 138 人、两个班、三个月延后测及 12 人访谈按文稿 02 转述，存在冲突的比例不用于成效或回弹率判断。文稿 01 关于学习新起点的讨论提供教学参照。多策略选择与保持问题分别参考 Siegler（2005）、Clark 与 Bjork（2014）；新增诊断任务和连续观察安排属于本书研究设计，尚无实施数据。

留给下一章的问题

前面讨论张力、显露与回写，又区分了共存和不稳定，容易让人想把它们排成一张固定流程表。但儿童的探索从不同经验出发，某个阶段还会反复返回，为什么不能把这套发生关系直接改名为三步教学法？下一章将专门说明机制描述与课堂流程之间的边界。

本章的理论对话

本章沿用底稿对文稿 02《以操作性理解的策略促进学生面积概念的发展——以图形的面积比较为例》的记述；原始问卷、分类记录与统计文件须由资料持有人复核。文稿 01《基于学习起点的有效性教学》所提供的教学起点论述，同样按照导论约定标明其材料身份，不据现有转述追加原始核查结论。

Siegler（2005）的策略变异与选择视角，帮助本章区分多种方法的共同存在和关系解释的彼此隔离；Clark 与 Bjork（2014）有关学习与表现的讨论，限制了由一时提取失败推断理解消失的做法。两类研究为本章提供解释边界，不能替代对改名、并存与回弹的连续任务记录。完整书目信息见附录 E。

第17章 这台引擎不是三步教学法

课堂现场 一份有三个环节的教案能够说明什么

把一份教案上的“复习、探究、总结”改成“相撞、显露、回写”，需要的时间很少。孩子原来做什么，换名后仍可能做什么；教师原来替孩子完成的判断，也可能完整地留在新标题下面。若本书只是为熟悉的教学安排提供一套新词，那么它对理解发生的追问，反而会成为阻挡教师继续观察的东西。

作者文稿13《基于教育理念的教学行为反思》记录了一节《长方体的表面积》课的听课思考。教师从包装礼品盒的问题出发，通过预设问题链组织展开图、各个面与长宽高关系的分析，作者关注的是学生是否有机会先尝试解决问题，而不只是沿教师拆好的问题逐一应答。这里确有一个值得检查的缺口：课堂有探究的外形，并不自动表明学生承担了探究的关键判断。

但我们也不能反过来，仅凭“预设问题链”几个字判定理解没有发生。一个明确的追问可能帮助孩子看见自己尚未注意的关系，一段有序的说明也可能为后续独立探索提供必要知识。原稿是听课者的反思，不是对每个儿童理解过程的完整测量；本书应沿着它提出的问题继续观察，而不能把一种课堂形式与一种学习结果直接画等号。

设想在同一节表面积课中，教师说“请看展开图，哪两个面相同”，孩子可能只是猜老师准备要哪个答案，也可能正凭自己的模型检验相对面关系。这两种活动在课堂表面非常接近，区别需要从孩子怎样判断、能否独立说明，以及条件改变后怎样继续处理来辨认。三个环节的名称没有提供这些证据，三段整齐的时间安排也没有。

这一章要说的话 关系可以共同检验路径必须允许生成

本编所说的动态循环，是一种追问理解变化的关系框架：原有经验面对某种差异时为何需要调整，新的看法怎样变得可识别，又怎样影响原来经验和下一次

判断。它帮助教师寻找需要的证据，不规定所有孩子必须依次出现冲突、顿悟和完整回顾。课堂能够共享数学约束与检验标准，孩子探索的具体路线却需要在其活动中生成。

因此，“三步引擎”的名称有一个必须主动解释的风险。“步”容易被听成教师发出第一、第二、第三条指令，而本书讨论的三方面关系可能在同一个动作中交织，也可能隔着几节课才显露出联系。后面的讨论将保留这组问题的诊断价值，同时撤去它对课堂先后次序的僭越。

日常学做菜可以说明这一点。一个人照食谱完成了备料、烹饪、装盘，可能做出一顿合格的饭，但是否理解火候，还需要看他面对锅具和食材变化怎样判断；另一个人在闻到气味、看到颜色变化时先调整了火力，过后才说清原先的规则为何不适用。共同标准可以是熟度、卫生与口味要求，形成判断的经历却未必遵守同一套叙事。这个例子是类比，不是课堂学习机制的实证材料。

第一层区别 教师安排的是活动儿童经历的是问题

教案首先是一项行动计划。教师必须考虑时间、材料、秩序、学生安全与课程目标，这些安排不能因强调生成而被取消。但学习者是否把安排中的任务认作自己的问题，并不由教案已经写出“问题情境”来保证；同一个任务对一个孩子可能太熟悉，对另一个孩子可能连条件都不清楚。

在表面积的教学设定中，教师给出一个长、宽、高分别为5厘米、3厘米、2厘米的长方体盒子，要求计算不考虑重叠和损耗时覆盖六个面所需的纸面积。有的孩子知道六个面都要算，却把可见的三个面面积相加便停下；有的孩子想起公式，却不知道某一乘积表示哪一个面；还有的孩子能够画展开图，却把同一个面算了两次。三个人面对同一道任务，当前需要处理的关系并不相同。

若教师把他们统一带入“观察展开图—列式—总结”的路线，仍可能帮助一部分孩子，但不能由整齐的进程推断所有人的问题都已经被处理。对第一个孩子，可以请他标记已经覆盖的面；对第二个孩子，可以让他把一个乘积与盒子上

的面对应；对第三个孩子，则需要检查展开图折回后各面的位置。帮助的方向来自孩子留下的痕迹，而不是来自他们坐在同一间教室这一事实。

这种差异并不意味着每名学生都必须拥有一份完全不同的教材。教师可以提供共同的基本材料、共同的任务目标与可供选择的工具，再根据学生表现决定是否需要一个提示、一次同伴比较或直接说明。个性化发生在问题被辨认和后续路径生成的过程，不等于教师事先把所有人的每一步都编成不同脚本。

作者文稿 21 对进位加法图形表征的讨论正提供了这样的尺度。原稿允许教师在学生未生成第二种思路时适度提示，也允许在提示后仍未生成时结束无效等待，转向图示匹配。它没有要求孩子凭空发明全部算法，而是希望读图、比较和建立联系这些关键活动由学生实际承担。这里的自主与支持并不相互排斥。

第二层区别 差异不必以挫败的方式出现

两个正确方法也可以提供值得解释的差异。 $28+4$ 的凑十与数位分解都得到 32，儿童仍可比较它们拆分了什么、在哪一步形成新的十；新的表示或更简洁的记号，也可能使已有关系需要重新组织。不必先安排一个错误，让儿童配合教师经历反转。

第 12 章已说明可承受冲突的条件，第 13 章已讨论讲授的位置。本章只保留它们共同提出的约束：不得用统一起手方式覆盖不同学习起点。对于缺少必要单位经验的儿童，增加冲突可能无助于形成；对于已有清楚问题的儿童，恰当说明则可能使后续检验继续。

第三层区别 显露需要任务证据而非课堂高潮

理解的进展可能分散在多个时点。儿童先能用颜色标记六个面，随后能够把每个面积乘积接回相应的面，后来才用公共公式压缩这项关系。每一步都应按当前任务作适度判断，不能因尚未说出公式取消已有进展，也不能因公式出现就提前宣布边界全部掌握。

因此，显露不是要求儿童表演一个顿悟瞬间，而是说明在何种条件下可以辨认哪些关系。已经正确使用公式的孩子，面对无盖容器仍可能需要重新判断覆盖对象；这项困难不会抹去此前的全部能力，却确实要求补充学习。表现与支持一起保存，才能知道下一次该撤去哪一种帮助、保留哪一种工具。

第四层区别 回写不等于统一课末反思

“学会了一个公式”与“原记录中的遗漏怎样被新关系解释”，提供不同信息。回写也可以在计算中途或后续新任务中显露，不只出现在课末总结。第 9、14 章已经给出个人基线、选择性修订和后续调用的具体要求，课堂不必再增加一句人人相同的成长感言。

应允许儿童有根据地保留旧方法。数格子、割补、口算与竖式各有适用条件，新学习可以使选择更清楚，而非迫使旧法退场。若回看尚未取得充分证据，就保留问题并调整后续材料；不能为了使流程闭合而诱导儿童承认自己原来错了、现在全懂了。

理论框架约束问题不规定脚步

按第 11 章的共同口径，S 是显露，D 是差异序列，E 是特征纠缠系统；三块地仅是 E1 三界的课堂观察入口。 $S=F(D,E)$ 、 $D=G(S,E)$ 、 $E=H(S,D)$ 帮助分别追问关系在何种条件下显露、判断依据怎样改变、活动条件怎样重新组织。这里没有通过课堂数据估计 F、G、H，也没有由三式推出一套三步教学程序。

“张力、显露、回写”是分析中可以相互关联的方面，其先后和组合须由具体活动确定。一个孩子先操作后解释，另一个先提出暂定看法再寻找材料，都可以接受同样的数学检验。理论需要指出哪些证据支持联系，哪些尚不足，不能因活动形式含有三个环节就宣布符合 SDE。

这也限定了框架的用途。若它帮助教师定位原来没有看见的判断缺口，便有诊断价值；若只是把复习、探究、总结换成新词，而关键动作仍全部由成人完

成，就没有兑现这一用途。对于某些任务，清楚说明与合理练习已经能支持独立理解，额外的相撞或回看是否值得增加，应由学习收益与负担共同决定。

老师可以这样检查教案

拿出一份现有教案，先标明三个位置：何种儿童表现会使自己决定继续或调整；目前哪一项关键判断由教师完成；后续用什么作品检查儿童能否独立使用。若缺少具体答案，先补能够留下证据的任务，再决定环节名称与顺序。

两份不同教案可以使用共同结果任务来比较。一份从实物包装开始，另一份从错误展开图开始，只要说清各自适合的起点、提供的支持和独立检验，就无需先判哪份更符合三步。共同标准使不同路径能够相互说明，也让不适合某类儿童的安排有理由被修改。

材料与判断

本章表面积反思、表征教学建议与烙饼记录分别依据作者文稿 13、21、00，未当作严格对照研究。长方体及无盖变式属于教学设定。对其他哲学与学习理论比较按第 6 章及附录 E 的资料范围处理，不以简化前人主张证明本书完整。

带走的话

共同的发生问题，不要求共同的探索脚步。让判断有依据、帮助能够调整、后续使用得到检验，才使不同路径进入同一项研究。下一编据此讨论，面对具体课堂缺口，教师从哪里开始更有帮助。

第四编 老师能做什么

第18章 起手比用力更重要：六类课的六种起手

课堂现场 同一份材料为什么会通向不同的课

教研讨中，两份教案可能使用同样的小棒、同样的算式，甚至保留同样的提问，课堂却从不同的地方开始。一份教案先让教师解释图中的每一部分，另一份先让孩子选择哪幅图与自己的算法相同；前者希望学生听懂已经组织好的关系，后者希望从学生已经做出的选择中找到下一问。差别不只在活动多少，而在教师首先把什么当作尚未解决的问题。

我的文稿21《从“附属呈现”到“核心支架”》第二部分，把这一转向写得很具体：学生操作未能生成另一种算法时，教师可以先适度提示，仍未生成便不强求继续操作，而转向教材图示的匹配与解读。这里已经包含“根据学生的实际反应换入口”的判断。下文分别交代六类课的原稿依据，再提供本书扩展的教学设定；新增问答与数字不混入原稿实录。

把这些课放在一起，教师很容易寻找一个共同模板：先创设情境，再操作，再交流，最后总结。但若孩子已经会算却读不懂图，继续创设情境可能绕开了困难；若孩子不知道为何需要平均数，立即操作求和与平分又可能把概念需要提前遮住。环节可以相同，孩子正在遇到的问题却不相同，起手便不能只由教案格式决定。

这里所谓起手，是教师首先依据什么材料作出哪一个教学判断，以及先邀请孩子承担哪一种关键活动。它不限定为上课的前五分钟，也不意味着一个入口一旦选定就不能改变。一节课可以在新的证据出现时重新起手，教师的能力就体现在能否识别这种时刻，而不是把原来的设计坚持到铃响。

这一章要说的话 先找当前缺口再选入口

六种起手不是六张可以直接套用的教案。它们提醒教师分别检查：孩子的做法卡在哪里，概念为什么在这里有用，图形动作受哪些关系约束，目标和条件怎

样限制方案，结论凭什么得到支持，以及已有知识怎样重新形成联系。这些提问可以暂时对应六类课，但每类课并没有一条天生固定的路线。

本章的主张是一个可被检验的教学判断：当教师根据学生当前表现选择入口，并根据后续证据调整安排时，教学更有机会接住学生正在经历的困难。它不保证所有任务都需要探索，也不保证起手选择比讲解质量、练习安排或课堂关系更加重要。标题所强调的是一种常见提醒：在错误的问题上继续增加教学投入，可能无法解决当前缺口。

日常生活中，修理一扇关不上的门，可以帮助说明这个意思。门轴松了、门框变形了、地上放着一块垫子，都可能表现为门关不上；如果不看具体原因，只是一遍遍加大推门的力，动作越来越努力，问题却未必减少。这是诊断入口的类比，不是支持课堂效果的研究证据，更不意味着儿童学习可以像机械维修一样被完全拆开。

算理课 先沿着孩子的做法寻找断处

文稿 21 第二部分记录了以 $28+4$ 为例的教学重构：多数学生把 4 拆成 2 和 2 以凑十，教师可以追问能否拆 28；如果仍未出现不同思路，就让学生把自己的操作与两幅图匹配。该文提供的是课例研讨与教学建议，不能据其表述推定每名学生都发生同一种变化。下面的教学设定沿用 $28+4$ ，进一步把判断断处与换路条件展开。

教学设定从 $28+4$ 开始。教师让学生独立计算并留下可以给别人看的痕迹，可以画图、拆数，也可以摆小棒；暂不规定必须使用凑十法。有的孩子写 $28+2+2$ ，有的孩子先算 $8+4$ ，再把所得结果与 20 合起来，还有的孩子从 28 开始数四次。学生的不同记录提供了入口：他们是否已经知道自己把什么合在一起，又怎样处理合成的数量？

教师如果先问“为什么要满十进一”，问题中已经放入了预期的表达。此时更有诊断价值的追问是：“你算到哪一步时，原来的写法需要改变？”对于用小

棒的孩子，可以指着十二根散棒问：“这些怎样放，别人一眼能看出与原来的两捆有什么关系？”这里需要的不是赞美某一种摆法，而是让孩子说明散棒与成捆小棒怎样表达同一个数量。

学生可能说，把十根捆起来比较整齐；也可能说，十根可以算一捆，剩两根，所以总共是三捆零两根。两种回答都可以成为继续追问的材料，前一种尚未说明为什么换了样子数量没有改变，后一种则已经提供了十个一与一个十的联系。教师可以让学生把新捆的一捆再拆开，或者请另一名学生按记录还原，检验这种表达是否能够返回原来的数量。

如果孩子已经能够解释换捆，却不能把自己的操作与竖式对应，下一步应转向表示之间的联系。教师可以提供一份尚未写完的竖式，让孩子决定从哪里记下十二个一，以及十位旁边的“1”表示一个什么。这里的“1”不能只被叫作“进来的1”，因为一个十与一个一虽然都写作1，在当前记录中承担的单位不同。

错配的起手是教师先完整演示捆、写、进位的顺序，再让学生复述每一步，最后把整齐复述当作已经独立接通关系。这样的讲解可以帮助学生认识书写约定，但它不能单独回答孩子是否知道操作与符号为什么相互对应。若课上主要困难正是这种对应，教师需要留出学生自己匹配、指出不一致并修正记录的机会，不能只增加同形竖式练习。

反过来，如果孩子连十个一可以组成一个十都尚未稳定认识，要求他同时解释小棒、数位与竖式，很可能增加负担。教师可以暂时缩小任务，先在数量较少、表示较少的材料中建立换捆关系，再回到 $28+4$ 。如果孩子已能灵活说明两种方法，则不必为了完成操作环节再次摆一遍，可以直接给出一个错位的进位记录，请他判断错在哪里。

这一入口也可以迁移到分数除法，但不能机械复制小棒任务。以 $4 \div 1/3$ 为教学设定，若情境是四张同样大的饼，每份取 $1/3$ 张，商表示可以分成多少份，那么教师先要听见孩子怎样划分一份。有的孩子知道一张有三份，却把四张仍说成三份；此时需要接通一张与四张之间的数量变化，而不是先讨论倒数规则。若孩

子已经判断有 12 份，却不能说明为什么可以写 4×3 ，则入口转为结果与表示的对应。

算理课由此获得的不是“先操作”的口令，而是一条观察原则：先看孩子实际用了什么量、什么单位与什么关系，再决定需要补充哪种材料。材料太少时，解释可能悬空；材料太多时，孩子又可能忙于操作而忘记当前问题。教师的调整应由学生表现支持，而不是由某种固定偏好决定。

概念课 先让需要代表的对象清楚起来

作者文稿 08 第一、二部分记述了由“母子争执”进入代表数问题的课例：小明做作业用了 22 分钟，妈妈拿一位用时 12 分钟的同学作比较，随后扩展到五人的 22、22、20、12、24 分钟。孩子先提出不同代表数，再借移多补少与求和平分得到 20，并辨认个体实际用时 20 与平均数 20 的身份差异。本书采纳这个从比较需要进入概念的线索，但不沿用原稿“只有平均数能公平代表”的强断言；代表方式必须根据具体问题选择。

平均数的教学设定可以从两组同学的游戏记录开始。甲组四人完成同一任务分别用 8、10、10、12 分钟，乙组两人分别用 9、9 分钟；暂且约定任务条件相同，用时少表示完成得快。若问哪组通常更快，比较总时间会受到人数不同的影响，比较最快一个人又不能说明其余成员的情况。这里不是为了制造一个必然要求平均数的谜题，而是让学生看见不同问题需要不同的代表方式。

教师首先可以问：“你想代表一个人，还是想代表这一组？”如果学生选择最短时间，教师可追问这是不是在回答“谁最快”；如果学生选择中间的数，则可请他说明为何认为这个数适合目前的问题。儿童提出的方案无需全部被引到同一条预设路线，只要能够说明所代表的对象与依据，就值得比较其作用与限制。

在本设定中，教师可以进一步提出“把每组的总用时平均分给本组人数，得到一个假想的每人用时”。甲组总用时 40 分钟，平均分给四人是 10 分钟；乙组总用时 18 分钟，平均分给两人是 9 分钟。这样的计算建立了一个共同尺度，但教

师还需要追问：甲组的 10 分钟为什么既可能是某个学生的实际用时，又可以作为一组数据的平均数？数值相同，不等于在问题中的身份相同。

学生可能说平均数就是最多人取得的那个数，这时不宜仅用定义纠正。把甲组数据换为 8、9、11、12，平均数仍为 10，却没有人实际用了 10 分钟，原先的判断便有了需要修正的地方。教师可以让学生画出每个数据与 10 的差，讨论总量为什么仍保持 40；平均数由此不只是“加起来除一下”，也成为一种把总量与个数联系起来的表示。

这一课的错配入口，是一开始就写“平均数=总数÷份数”，让学生从题目中寻找两个数字完成运算，然后把“公平”“代表性”放在总结中补说。公式有其必要位置，但若学生尚不清楚平均的是什么、个数数的是什么，算式可能把含混隐藏起来。另一种错配则是过度依赖分物品的故事，让学生把所有平均数都理解成需要实际重新分配，难以理解身高、温度等数据的平均值。

换路的信号也应清楚。如果学生已知道为什么采用平均数，却在总量单位与人数的对应上犯错，教师应转入计算意义与单位的分析；如果学生计算完全正确，却认为平均数能够描述组内每一个人，便应改变数据分布，让不同数据组拥有相同平均数。概念理解的深化，来自它能解决的问题与不能单独解决的问题都逐渐清楚，而不是不断重复同一公式。

这里可用选鞋作日常类比。一家人平均穿多少码，并不能决定给每个人买同一码的鞋；平均值可以帮助描述某种整体情况，却不能替每个个体作出具体选择。这个例子提醒学生：一个有用的代表数也有使用边界。类比只帮助说明代表与个体的区别，不能代替统计概念的数学说明。

空间课 先让画图动作接受关系检验

作者文稿 04 第一部分先提出信息不完整的旋转任务，学生指出缺少旋转中心与方向；补足绕 A 点顺时针旋转 90° 的条件后，教师让学生说明先画什么，再比较先画与旋转中心相连的边为何更方便。第二部分把混淆轴对称或错误安排对

应顶点的作品拿出来辨析，使“看起来像”受到对应关系的检查。以下教学设定把这一入口扩展为更便于观察个体动作的任务。

空间课中，学生的动作往往比一句“我懂了”更容易留下可检查的线索。教学设定是在单位方格纸上取点 O，从 O 向右 2 格、向上 1 格定点 A，向右 1 格、向上 3 格定点 B，连接三角形 OAB，要求绕 O 顺时针旋转 90° 。两条与 O 相连的边都没有沿水平或竖直方向放置，便于检查学生如何确定方向与距离。教师暂不展示完整成品，而请学生在图上标出自己准备先处理的点，并说出为什么从那里开始。备课核验用的位置是：A' 在 O 右 1 格、下 2 格，B' 在 O 右 3 格、下 1 格；这些位置留作教师检查，不预先提供给学生。

有的孩子先找离 O 最近的顶点，有的先转一条边，有的把整幅图凭印象画到另一侧。这些选择本身没有必要立刻分出高低，教师可以问：“你怎样保证这个点到了该去的位置？”如果孩子只说形状看起来转过去了，就请他比较对应点到 O 的距离；若距离保持了，再检查由 O 连向对应点的两条线段之间是否形成规定方向的 90° 。

在这个教学设定中，旋转中心、方向与角度是共同的约束，对应点到旋转中心的距离保持不变。它们不是三个供学生背诵的名词，而是用来判断每一步画法是否可接受的条件。学生即使先转了一条边，也必须使边的端点服从同一次旋转；不能为了让成品形状相似，就随意移动某个顶点。

可能出现的一种错误是孩子沿一条直线把图形翻到另一边，画出的结果更接近轴对称。教师不必先宣布他“把旋转和对称混了”，而可以让他说明每个点怎样过去，再找一个点检查转过的角是否相同。有的点似乎符合，有的点却需要不同角度，图形整体的动作便暴露出不一致。此时追问原来的轴对称经验，才有明确对象：哪些关系保留了，哪些关系被误用了？

错配的入口是先反复要求学生记住“中心、方向、角度”，再出大量标准图让他们描摹。学生可能准确说出三个词，却仍然不能把词变成画图的约束。另一

种错配是只让学生转透明纸，忽略从操作结果到纸面构造的说明，导致撤去透明纸后仍不知道如何确定对应点。

如果孩子连顺时针与逆时针都不能稳定辨别，教师可以先用一个点与一根绕中心转动的纸条缩小任务，减少整体图形带来的干扰。如果孩子能够操作却难以表述，不必把语言流畅设为继续学习的门槛，可以允许他画辅助线、做手势或分步标记。若孩子已能严密确定各点，教师应改问“旋转后哪些关系没变，哪些位置变了”，让动作经验进入更一般的关系认识。

这个入口的日常类比是搬桌子。知道“把桌子转一下”还不足以完成一项精确要求：围着哪一点转，往哪个方向，转多少，会使四条桌腿到达不同的位置。实际搬桌子可能伴随平移，数学旋转任务却固定了变换条件；把这点说明白，类比才不会反过来模糊概念。

模型与优化课 先说清什么才算完成得更好

作者文稿 00 开篇就区分了掌握交替烙法、发现计算规律与形成优化意识三种目标，认为课的重点不能停在前两者。其第三部分记录了学生通过 12 分钟与 9 分钟方案比较，解释第二轮为什么要换入第三张饼，随后由教师命名“交替烙”；不能把它写成学生自行提出了这个术语。原稿末尾更换锅容量继续提出研究方向，支持本章关于条件变化的讨论。

《烙饼中的学问》适合讨论目标先行，但“先明确目标”不等于先宣布最优答案。以下教学设定规定：三张饼，每张有两面，每面连续烙 3 分钟；锅最多同时放两张饼，同一张饼的两面不能同时烙；饼可以中途离锅等待，但一个面的 3 分钟加工不中断；放入、取出与翻面时间忽略，锅始终保持所需温度。目标是使三张饼都烙熟所需的总时间最短。

这些条件并非装饰。若翻面需要额外计时，若半熟饼不能离锅，若锅中不同位置火力不同，或者把饼拿出后必须立即食用，问题就变成另一个模型。教师需

要允许学生提出生活中的疑问，再解释本题暂时保留哪些条件；不是把生活疑问一律视为离题，而是帮助学生理解模型怎样有选择地处理现实。

学生可能先提出两张一起烙6分钟，第三张再烙6分钟，共12分钟。教师可以问：“12分钟里有没有锅位空着？空着时，是否还有某一面没有烙？”这个追问没有交出全部方案，却把优化所需的判断方向交还给学生：空位与待加工的面是否可以重新配合。孩子也可能立即提出9分钟，此时同样要问怎样安排，不能因结果较小便提前认可。

一个可以核查的安排是：从开始计时，0至3分钟烙第一张的正面和第二张的正面，3至6分钟烙第一张的反面和第三张的正面，6至9分钟烙第二张的反面和第三张的反面；在第3、6分钟的交界处立即换面或换饼。每张恰好两面，每面恰好3分钟，没有同一张两面同时进锅，也没有超过两个锅位。儿童可以用六张“饼面卡”或三张可翻面的纸片说明，不要求一开始就使用正式表格。

找到9分钟的安排，还没有回答为什么不能更少。六个面各需要3分钟，共需要18个“锅位分钟”；每分钟最多提供两个锅位，因而总时间至少为9分钟。由于刚才的安排达到了这个下限，9分钟在本设定中便是最短时间。教师要把“我找到一个更快方案”和“没有更快方案”区分开，让优化活动不止于竞赛谁先喊出小数值。

错配的起手是先教“交替烙”，再让学生按口诀排饼，最后把方案成功看成优化思想已经建立。学生可能只记住三张饼的一种排列，锅换了、饼数换了就无从判断。另一种错配则是先放任复杂的生活讨论，却始终不形成共同任务条件，导致学生的方案各自正确于不同情境，无法互相比较。

若学生对目标和条件已经清楚，却不能记录方案，教师应提供时间格或加工卡，而不是继续解释“什么叫最短”。若学生有多种可行安排，却不会判断最优，就把注意力转向所有方案都无法突破的限制。若孩子还不能理解为什么可以让半熟饼等待，则回到模型条件，并允许另设“半熟饼不得离锅”的新任务，比较条件改变后的后果。

把锅改成最多同时烙三张，三张饼便可以正面一起 3 分钟、反面一起 3 分钟，共 6 分钟完成。这不是简单把原来的“饼数 $\times$ 3”继续套用：每张饼本身至少需要两个连续 3 分钟时段，而三个锅位能够同时处理三张的同一面。本课回看旧规律时，应让孩子指出原来规律依赖什么限制，哪些限制已经改变，不能只给新口诀替换旧口诀。

生活中准备一顿饭也是类似的优化场景。切菜、煮饭、烧水有些可以同时进行，有些必须等待前一步完成；仅把每件事所需时间加起来，未必得到最短总时间。但烙饼模型比现实厨房简化得多，类比的价值在于看见资源与先后约束，不能把数学课的最优时间当作现实做饭时间的保证。

统计与跨学科项目课 先检查材料能回答什么

统计与项目课也可能以目标开始，但它最容易出现的缺口，是结论比资料走得快。作者文稿 07 第二部分记述了学生调查幼儿园大班儿童身高，发现本地样本与课上提供的另一份资料不一致，并提出样本代表性与时间变化两种解释；这提供了从资料差异进入推断条件的课例线索。原稿所引政策年份、身高资料与增长幅度未完成外部来源核查，本章不把它们当作现行事实或实证结论，改用虚构游乐场的教学设定讨论资料能回答什么。

文稿 19 第五部分还提出，校园测量项目可以由教师明确总体目标，将具体对象、工具、分工与记录方式交给学生讨论；这是一项教学建议，不是每组都有效的结果证明。它补充了本章入口选择的另一面：数据从哪里来，本身也可能是学生要作出的判断。若教师把采集路径全部预先规定，再把学生执行称为自主调查，项目的选择空间便被悄悄缩小了。

教师给出的是教学模拟数据，并明确标注其用途只是练习。第一份数据来自某一个兴趣班，第二份来自同校几个年级，第三份增加了不同学校的儿童；三份资料的样本范围不同，测量时间也不完全相同。教师首先问：“我们想谈的是这

几位儿童，还是某一个范围内的儿童？这份资料是谁没有机会出现在里面？”这个问题使数据的生成方式进入讨论，而不只是把数据当作一串等待计算的数。

学生可能建议“多收一些就准确了”，教师可以追问增加的对象从哪里来。如果一直增加同一个高年级兴趣班的成员，数量增多并不能自动补上低年级儿童的缺席。也可能有学生说不同学校之间数据不同，所以不能研究；教师则可以帮助他们区分不确定与没有价值，说明可以先限定结论范围，并把不能确定的部分写出来。

随后才进入计算与表示的选择。若问题是某条身高线以下有多少儿童，直接统计人数或比例比只求平均身高更贴近问题；平均数相同的两个样本，线下人数仍可能不同。若问题是比较整体分布，单个平均数也可能不足，需要观察数据的分散与分组情况。工具要跟着问题改变，不能因为本单元学平均数，就让所有问题都以平均数结束。

这一入口的错配，是先要求每组给出一个“合理免票线”，然后让学生搜集能够支持自己方案的资料。这样容易把资料变成论据装饰，忽略什么结果会迫使自己改变看法。另一种错配是把社会决策压成一道纯数学计算：优惠目的、经营约束与公平考虑不由一个统计量自动决定，数学能够澄清部分后果，不能独占价值判断。

换路条件也有层次。如果学生尚不能稳定测量身高，应先统一测量方法并了解测量误差；如果数据记录混乱，则需要整理工具，暂缓讨论宏大结论。如果学生已经能够计算和作图，却把样本结论推广到所有儿童，就回到样本来源与目标范围。若发现手边资料无法回答问题，应允许结论是“还需要哪类数据”，而不是要求每组必须交出一个数字方案。

在日常生活中，用一家店门口排队的人数推断全城居民都喜欢这家店，就可能混淆了可见人群与目标人群。看见很多人是线索，但为什么这些人出现在这里、没有出现的人是什么情况，也影响推断。这个类比帮助学生理解选择资料的重要性，不是关于某家店或消费者行为的事实判断。

单元回看课 先提出一个可以接受检查的联系

作者文稿 21 第三部分提出，在第二课时学习竖式时，回调第一课时的图示与口算拆分算式，追问竖式道理与哪种口算方法对应。文稿 14 第四部分则把分数除法重新联系到整数与小数除法，但其中“同乘 20 让除数变成 1”的解说须校正： $\frac{3}{4}$ 与 $\frac{2}{5}$ 同乘 20 分别得到 15 和 8，所得是 $15 \div 8$ 。本书保留跨数域联系的研究方向，同时要求共同解释接受每一步计算的检验。

单元回看课容易被做成知识目录复述：学生把公式抄在同一张纸上，再用线连起来，仿佛连线本身便意味着联系已经形成。前述文稿 21 的竖式回调口算提供了不同方向：先拿出一个能够组织旧方法的想法，再让旧方法逐一检查它。这里的骨架不是教师宣布完成的体系，而是一项允许修改的联系假设。

教学设定先给出“这些加法都涉及同单位数量的合并”这一工作性表述，同时摆出 $28+4$ 、 $280+40$ 与 $2.8+0.4$ 三道算式。第三题只用于已经学过小数意义的学生，不能把超出已有经验的内容强加给低年级。教师问：“三题都能用同一句话解释吗？每道题里相同的单位分别是什么？”孩子若只说“都是加法”，还没有说明这一联系的内容。

这是教师提供关系假设后的教学任务，不能计作孩子无提示发现了共同关系。若用于诊断，应先只呈现三题，收集独立解释，再展示工作性表述，并分别记录提示前后；此后撤去该表述，用另一组题检查能否独立调用。已有目标或暂定看法可以成为教学入口，但它由谁提供，必须与学生后来形成的判断分开记录。

$28+4$ 中，可以先合并 8 个一与 4 个一，再与 2 个十联系； $280+40$ 中，可以把 28 个十与 4 个十相加，得到 32 个十； $2.8+0.4$ 中，可以把 28 个十分之一与 4 个十分之一相加，得到 32 个十分之一。三种表达显示单位改变而数量合并的关系可以保持，同时也提醒教师：同一个数字串在不同任务中表示的量并不相同。孩子必须能把说明带回原题，而不能只背“计数单位一致”。

学生可能指出， $28+4$ 也能先加 2 再加 2，不一定先算 $8+4$ 。这个回应应当得到认真承接：共同关系不等于统一计算路线，凑十法同样需要说明分出的两个 2 分别怎样参与合并。若所谓骨架只能容纳某一种算法，它可能只是某种程序的概括，而尚不足以组织学生已有的多种方法。

回看继续向旧记录推进。教师请学生拿出自己先前的一份口算说明，在其中圈出与竖式进位对应的数量变化；若学生当时使用从 28 往后数四个数的方法，就让他比较这种记录能直接看见什么、哪些关系不易看见。旧方法不必被判为落后，它可以在某些任务中继续使用，而新看法则帮助孩子理解为什么其他表示更适合另一些任务。

错配的入口是先展示完整知识结构图，让学生填空“计数单位”“满十进一”等关键词，再宣称他们已经把单元接通。填空可以检验术语记忆，却不能充分检验孩子能否用关系解释旧题。另一种错配是在孩子连各个旧概念都尚未建立时，要求他同时把整个单元纳入大框架；联结需要可调用的内容，不能靠提高抽象程度替代必要学习。

如果学生能解释旧题却不能概括共同关系，教师可以让他比较两份具体记录，暂缓要求统一术语。如果学生会说共同关系却解释不了其中一题，就返回那一题，检查概括是否只是跟随教师。如果学生已经能够概括并解释，应增加一个边界任务，如“相同单位数量可以相加”能否不加说明地解释长度与面积相加；这让骨架接受概念边界的检验，而不是成为随处适用的口号。

整理旅行照片可以作为日常类比。按时间摆放是一种组织方式，按交通路线或同伴经历重新整理，可能让以前不相邻的照片建立联系；但新的分类若把不符合主题的照片全部删掉，便不能说明它组织了原来的全部经历。单元回看也需要给未能接通的旧知识留下位置，而不是为了结构图整齐而隐藏不一致。

旧说法接住了什么 教学步骤与诊断入口的不同工作

常见的导入、新授、练习与总结，主要帮助教师安排课堂时间及活动职责。它们能够提醒教师不能只有讲解没有练习，也能帮助学生预期课堂进程；问题不在这些安排本身，而在教师是否把时间位置误当成了理解发生的充分条件。同样的“导入”里，学生可能只是听故事，也可能已经提出决定后续探索方向的问题。

按课型准备方法也有实际用途。算理课通常需要注意数量关系与表示的联系，空间课常需要借助动作、图形与约束，统计课不能绕开资料来源；这些提醒可以减少备课遗漏。但当课型标签被当作决定入口的唯一依据，教师便可能忽略同一班中已经理解的部分与仍未接通的部分，也可能把不同学生引回同一条已经失去必要性的路线。

本章并不把既有教学理论概括为只关心固定步骤，也不声称过去没有教师按学生反应调整教学。这里新增的工作是把这种调整写得更可检查：教师先依据什么表现，怎样解释当前缺口，为什么选择这一任务，学生出现什么反应后需要换路。只有留下这些判断的证据，课后讨论才能超出“感觉这节课更好”的层面。

文稿 23 第三部分明确列出《车轮为什么是圆的》的两种路径：可以先研究圆的特征再用滚动观察解释，也可以先观察滚动中的差异再回头寻找几何原因。两种安排在文稿中都被视为可能成立，关键在于现象与原理之间的推理是否完整。这一原稿材料直接限制了“某种课只能从某一维起手”的解释，也提醒本章的六类对应只能作为可修改的示例。

六种起手同样会犯固定化的错误。若教师先决定某节课必须对应某条路径，再挑选符合路径的片段，理论就会把课堂剪裁成自己的例子。因此，使用这些入口时应保留至少一个竞争选择：如果不从这里开始，还能从哪里开始，两个选择各自要解决什么问题，需要什么前提。比较之后再决定，能够使理论承担帮助判断的工作。

老师可以这样做 把起手写成可以改变的备课判断

备课时，可以先写下学生已经能够独立完成的一项具体任务，再写下尚不能据此判断的一项关系。例如“能正确计算 $28+4$ ”是已见表现，“能解释竖式进位与自己口算的联系”则需要新证据。两句话之间的距离，比“本课要培养运算能力”更有助于选择起手，因为它说明了接下来应当让什么显露出来。

然后准备一个低提示的开场任务，以及一个可以改变材料条件的备用任务。前者用于看见学生原有判断，后者用于检验教师对困难的解释是否合理。若孩子在开场任务中已经展示了预期关系，教师便可以进入变化与边界；若孩子连任务意思都没有理解，则应先处理阅读、材料或必要经验，不能把全部沉默都解释为概念冲突。

课堂记录不必追求把每句话都抄下来，但应抓住关键的判断转折。比如学生起初以边长判断角的大小，改变边长后仍坚持原判，或者主动转向观察张口，这些记录比“学生积极参与”更具体。教师还可以记下自己提供了什么提示，避免课后把在强提示下完成的表现当作独立形成的证据。

课尾安排一次简短回看：现在怎样解释开场时的做法，哪些想法继续可用，哪些需要限制，哪些问题仍没有答案。回看不要求每个人说同一句总结，也不强迫孩子宣布原来完全错了。一个学生能够说明自己旧方法适用的范围，另一个学生能够解释为何这次更愿意换方法，都可能提供有价值的理解证据。

六种路径怎样帮助选择入口

六种排列标记观察与干预重心的转移。算理示例 $D \rightarrow E \rightarrow S$ ，从儿童已做出的操作差异开始，调整材料与经验，再检查看法怎样显露；概念示例 $E \rightarrow S \rightarrow D$ ，先明确问题场与表示需要，再把所得看法放入变化中辨认。箭头不表示前一维脱离其余两维独自制造后一维，也不是学生心理过程的逐秒记录。

空间示例 $D \rightarrow S \rightarrow E$ ，跟进作图及其差异，明确须保持的关系，再追溯旧经验的作用。优化示例 $S \rightarrow E \rightarrow D$ ，从已明确的目标或待检方案出发，核查约束，再比

较行动路线。统计示例 $E \rightarrow D \rightarrow S$ ，先审查资料来源，再组织比较，形成有范围的结论。单元回看示例 $S \rightarrow D \rightarrow E$ ，把组织旧知的暂定看法交给具体任务检验，再修订原有关系。六种排列没有穷尽活动中的往返、停顿与同时发生。

S 指显露，D 指差异序列，E 指特征纠缠系统。手边材料、已有概念与自我参与是课堂观察入口，不能替代 E 的完整结构；其三层含义见第 11 章及附录 D。一次教学之后，已有条件与当前缺口可能已经改变，问题再现便不必沿用原入口。

六路径在这里承担备课比较工具的工作。其 SDE 思想背景见附录 E；本章对六类课的安排属于具体教学推演，效用须由学生反应与实施比较检验。判定入口有用，至少要看它能否帮助教师提前说清选择依据、识别换路信号，而不能只看课后能否把任何过程重新写成某条路径。

怎样算我说错了

若不同教师依据同一份学生材料，反复给出完全不同的“当前缺口”，而经过讨论仍不能说明判断根据，六种起手就可能缺少足够清楚的使用标准。此时应先修订入口描述和观察任务，而不能把不同意见都解释为各有道理。一个不能帮助教师缩小选择范围的框架，可能只增加了语言，并没有增加判断能力。

若在明确课程内容、学生起点、教学时间与主要资源之后，依据诊断调整入口的教学并未比其他合理教学增加解释、迁移、回看或延后表现，本章的效果主张需要缩小。一次小样本比较没有显著差异，不能自动证明两种教学等效；还需检查任务是否测到相应关系、执行是否到位，以及研究能否识别具有教学意义的差别。反过来，一节展示课反应热烈也不足以证明路径选择有效。

还要防止事后包装。若不管课堂出现什么结果，教师都能在六条路径中任选一条重新解释为“本来就应如此”，而不能事先说明为什么选、什么结果会换路，这套工具就失去了检验能力。本章要求的记录，正是把起手前的判断与起手后的结果分开保存，让后来的解释能够接受前面的证据检查。

材料与判断

本章课例线索来自附录 F 所列文稿 00、04、07、08、14、19、21、23。游戏记录、优惠研究、备用问答和换路任务是本书构造的教学材料，遵守导论的证据约定。三张饼的 9 分钟安排与文稿 00 一致，本章补充模型条件和下限论证；原材料中重复标记某一饼面的表格写法不用于本章排程。六类入口的可用性与教学增量尚须试用，原有课例不代替这项检验。

可以带走的一句话是：起手的价值，在于让孩子当前尚未接通的关系进入自己的活动，并让教师知道何时需要换一种帮助。不同入口不必消除差异，却应当共同服从数学关系、证据边界和学生独立承担的要求。这样，选择路径才不会变成给教案换一套名字。

留给下一章的问题

选择了合适的起点，教师仍可能在第一个意外回答出现后迅速接管课堂：替孩子解释图，替孩子比较方案，替孩子说出新旧方法的联系。因此，起手只是开始，还不能保证后面的关键判断属于孩子。下一章将继续追问：当孩子已经走到困难面前，教师怎样接住他的尝试，同时让那段需要他亲自走过的差异仍然属于他？

第19章 让孩子自己走那段差异

课堂现场 指出错在哪里也可能没有帮助

作者文稿 04《说理辨析让空间观念的发展留痕》记录了一个值得放慢阅读的纠错过程。学生 B 画出的旋转图形有误，同伴首先指出某个点应在另一个点的上方而非斜上方，作者认为这样的提示不足以让学生 B 看清问题。随后，其他学生转向直角所在的对应顶点以及斜边、直角边的对应关系，学生 B 才修改自己的作品。

这段记录的价值不只是说明同伴可以帮助同伴。前后两次帮助都在指出差异，但第一次主要说成品的位置不对，后面的帮助让差异与图形自身的对应关系接通。孩子需要知道的不只是“你的图与标准图不同”，而是自己采用的判断为什么不能保证同一次旋转中各个点、边与角仍然对应。

我们不能把这段班级交流写成学生 B 独立发现所有关系，也不能把其他学生的两种解释拼成某一个孩子连贯发展的心理轨迹。原稿提供的是教师记录的共同辨析过程，其中不同参与者承担不同动作。它提示本章要继续追问：教师怎样提供帮助，才既能使学习继续，又不把关键判断从孩子手中全部拿走？

这一章要说的话 帮助要留下可以独立承担的动作

理解需要孩子实际建立关系，但这不要求教师退出关系的形成。教师可以提供材料、示范一种记录方式、明确约定、提出反例，也可以在学生缺乏必要信息时直接说明。需要检查的是，帮助之后还有哪项关键判断由孩子完成，以及教师怎样知道这项判断不只是顺着提示作答。

“让孩子自己走”因此不能被理解为一律少讲、一律等待、一律不给答案。一个迟迟没有理解任务要求的孩子，需要的可能正是一段清楚说明；一个已经形成解释却不敢表达的孩子，需要的可能是允许画图或私下说明。把帮助减到最少

不是目的，让帮助与当前困难相称，并给后续独立行动留下位置，才是本章的判断。

日常教人骑车时，一只扶住车座的手可以帮助初学者体验平衡，也可能使他一直不知道自己的动作怎样影响车辆。差别不只在扶得多久，还在是否有机会感受、调整并逐渐自行保持。这个类比并不证明某一种课堂干预有效，却提醒我们：支持与替代之间，需要通过接受帮助者后续能做什么来区分。

看见一段差异之前先确定孩子在比较什么

错误答案往往让教师迅速看到正确答案与学生答案的距离，却未必看到学生自身的判断依据。旋转作图中，教师知道应当保持中心距离与对应角度，孩子可能只在比较“形状是不是差不多”；若教师直接说位置画错，孩子能够改成标准样子，却仍可能沿用原来的“看起来像”判断。纠正了成品不等于改变了判断的根据。

因此，帮助通常可以先从“你刚才看的是哪一处”开始，而不是立即追问“为什么错了”。这个问题允许学生指向图中的边、某个数字或某一步动作；教师随后才有机会判断，儿童注意到的是相关关系、无关特征，还是两者混合。学生能够指明关注处，已经使下一步帮助不必靠猜测。

“你为什么这样想”并非无用，但它同时要求孩子知道自己的判断依据、组织原因并用语言表达。对尚不能完成这一表达的学生，教师可以把任务缩小为两个作品的比较，让他选择自己更赞同哪一个，再请他用操作或标记说明。降低表达门槛不等于降低数学要求，因为比较最终仍要接受相同的关系检验。

在教学设定中，两名学生都画出一个面积较原图更大的“旋转后图形”。一名学生只是数格时疏忽，另一名学生认为转过去之后可以把图拉长以便摆正；如果教师只让两人重画，便可能对第一人安排过多概念讲解，对第二人又错过了需要说明的不变量。先看他们怎样画、怎样检查，才能决定错误属于操作失误还是关系认识上的缺口。

判断也可以改变。教师起初以为学生混淆轴对称，听完其说明后发现他知道旋转方向，只是把对应顶点标错；这时需要撤回原解释，针对记录方式提供帮助。能被新证据修正的诊断，才不会把“我认为你不懂”变成学生无法摆脱的标签。

从指出不一致到共同寻找约束

发现两个答案不同，可以启动讨论，但不同本身不说明谁更合理。教师若只问“谁有不同意见”，学生可能提出更多答案，却没有共同的方法检查；若立刻投票，班级人数又可能代替数学理由。下一步需要让学生说明什么条件是各个方案都必须满足的。

旋转任务中，共同约束包括指定的中心、方向、角度及对应点到中心的距离保持。教师可以请学生任选一个对应点检验自己的作品，而不必首先展示完整正确图。若一个点已经违反条件，当前画法就有需要修改之处；若一个点符合，也不能因此宣布全部图形正确，还需检查其余对应关系。

这里的帮助把“标准答案”拆成可以操作的检验，而不是把思考拆成只能填空的小步。两者表面上都可能有问题链，区别在于学生是否需要作出实质判断。问“是不是应该保持距离”几乎已经交出判断，问“你准备凭什么检查这个点”则允许孩子选择证据，随后再检验选择是否足够。

文稿 04 中，先说“点的位置不对”未能使问题充分显露，转向直角与边的对应后才获得进一步修正。我们可以据此提出一种解释：有效帮助往往需要接近学生正在使用的关系，而不只是接近正确答案的位置。这仍是对一个课堂片段的解释，不足以证明所有旋转错误都应采用相同提示，也不能把原稿中的理解效果扩大到延后稳定使用。

孩子提出的约束也可能不充分。“形状和大小没变”能够排除拉伸，却不能单独排除平移或某些对称结果。教师可以呈现一个形状大小相同但不满足指定旋转的作品，让学生发现原来的检验还缺什么；这个反例使标准本身接受修订。儿

童在这里不只是从一个错误答案走向一个正确答案，也在学习怎样改进判断答案的办法。

让孩子出一道能分清说法的题

比较之后，教师还可以把下一道题交给孩子设计。下面是本书自构活动：纸上有两种待检验的说法，一种说“只要出现两个等号，写法就不成立”，另一种说“要逐段看等号两边是否相等，不能只数等号”。教师问：“你能用10以内的数写一题，让我们检查这两种说法吗？”允许摆数卡或口述，由成人代写并核对；不要求每个人使用同一路线。

供教师核对的一个低负担例子是 $2+1=3=1+2$ 。它含两个等号，而三个表达式的值都是3，因此能反驳第一种全称说法。孩子也可以构造别的正确连等。若他写 $2+1=3+1=4$ ，检查便发现最左表达式为3、后两项为4；这个错例不能区分两种说法，因为两者都可能判它不成立。教师可以问“这题会让两种说法给出不同判断吗”，把修改题目的工作留给孩子；若须明确示范，就如实记录，之后另给一次独立构造机会。

这项活动检查的不是题目新奇，而是例子能否承担所说的论证。一个成立的连等足以推翻“所有连等都错”，却不能证明以后写出的连等都对；每个新式子仍需逐段检查。儿童若暂时不能出题，可以先从两张题卡中选择有区分力的一张，并说明理由，不能由出题困难直接判定关系理解不足。若两种说法本来等价、尚未表达清楚，或区分它们所需知识超出儿童范围，应先澄清或换任务，不能强求反例。学生提出问题与构造反例已有教学传统，本书不据此宣称首创；这里增加的是让孩子说明自己出的题究竟检验哪一句话。

三种追问各自留下什么工作

“你看的是哪里”首先把注意对象显露出来。它适合教师尚不清楚学生依据的时刻，但不能被当作万能提示；若学生已经清楚说明所看之处，继续重复这句

话只会让他猜测老师还想听什么。教师需要接着问该特征与当前结论怎样相关，或者改变该特征而保持其他条件，检验判断是否成立。

“谁能帮他把意思说明白”用于组织共同表达，但有一个容易忽略的风险：语言流畅的孩子接管解释之后，原来的孩子被留在一旁，教师却把全班出现了一段好解释当作原来孩子已经理解。避免这种替代，需要在同伴说明后回到最初的学生，请他指出哪些是自己的意思、哪些是新获得的帮助，并独立处理一个适当变化的任务。不能要求他简单说“我同意”，就把个体证据补齐。

“和哪一个一样，哪一个不一样”可以减轻空泛解释的负担，让孩子在具体材料间比较。文稿 21 的图示匹配便是一个来源：孩子先寻找与自己操作对应的图，再研究另一幅图怎样组织数量。匹配本身只是开始，还要问相同发生在哪一层，是结果相同、步骤相同，还是用到的数量关系相同；否则学生可能仅凭图中的小棒根数一样便完成选择。

三种追问并不组成固定三步。教师可以先让学生匹配，再问他看哪一处；也可以先由同伴帮助澄清，再回到两份记录比较。每次追问应当说明自己正在获取什么新信息，不能为了显得启发式而连续抛出学生无法理解的泛问。

一个简短的教学设定可以说明这种节奏。学生把 $28+4$ 的竖式结果写成 212，教师不立即说把 12 写错位，而先请他用小棒或图说明“212”中的各部分各表示什么；当孩子指出原有 2 个十与新算出的 12 个一时，再邀请他寻找另一种仍能保持总量的记录。若他无法调用十个一换一个十，教师可以明确示范一次换捆，再请他在新的数量中独立决定怎样记录，不能把示范后的跟做当成独立发现。

错例不是课堂上的免费资源

教师常说错误是资源，但错误首先属于一个正在尝试的孩子。将作品公开讨论之前，应考虑学生是否愿意、当前班级是否能够围绕作品而非人格评价，以及是否确有必要暴露姓名。匿名重绘、由教师构造同类错误或让学生选择自己的记录展示，都可以保留数学讨论而减少不必要的羞辱。

错例还应当具有可解释性。随意编造一个荒谬答案，虽然容易让全班快速指出错误，却未必接近学生会采用的判断方式。一个有教学价值的错误，应当能够说明它为什么看似合理、违反了哪个条件，以及怎样通过有限的检查发现问题。教师若不知道错误可能从何而来，就容易把讨论变成对错误者粗心的评价。

同一时间呈现的错误不宜过多。若学生需要同时比较漏面、重复计数、单位混淆与公式误用，讨论可能失去焦点；教师可以先选择与当前主问题有关的一类，让其他问题留下后续位置。减少材料不是降低要求，而是使比较有清楚对象，避免把学习者的注意分散误认作不会思考。

文稿 04 呈现学生 A 的变形作品，再呈现学生 B 的对应关系错误，提供了逐步深化检查的材料。两件作品的教学价值不同：前者帮助观察大小、形状是否保持，后者进一步检查对应顶点与边。若把所有错例合并成“旋转画错”，便会抹去教师为何继续追加任务的理由，也难以判断学生的检验标准是否发生变化。

错误改正后，还需要保留原记录与修订记录之间的联系。让学生写一句“我改了什么，依据是什么”，或在图上用不同标记指出变化，能够使修正不只剩一份干净成品。原错误不是羞耻档案，而是观察判断变化的材料；是否保存、怎样展示，应尊重儿童并服务学习，而非用于排名。

什么时候等待什么时候讲清楚

等待可以让教师避免抢走一个即将形成的判断，但等待时间长并不自动有价值。若孩子正在比较、尝试、画图或与同伴交换证据，教师可以给这些活动空间；若孩子只是反复重复同一个无效动作，或者任务条件始终没有进入理解，继续等待可能只增加挫败。判断依据应当是活动是否产生新信息，而不是钟表上的分钟数。

教师可以先提供最小而有方向的支持：补充一个可比较对象、明确一个遗漏条件，或者示范一种记录动作。这里的“最小”不是把提示压缩成几个字，而是

不替孩子完成本来能够承担的关键判断。一句听不懂的短提示可能比一段清楚说明负担更大，教师仍需根据学生的回应调整。

当困难来自公共约定，直接说明往往适当。例如学生理解了十个一组成一个十，却不知道竖式中怎样记进位，教师可以介绍约定写法；随后再让学生解释这一写法表达什么。若教师坚持让孩子“自己发现”约定，可能把有价值的数量思考耗费在猜测书写习惯上。

当困难来自关系，直接说明也并非永远无效。教师可以解释一个范例，明确每一步依据，再请孩子在改变条件后独立判断；这种安排是否有助于理解，需要看后续表现，而不能事先按讲授与探索两类判定高低。重要的是不要把“我已经讲清楚”当作“孩子已经能够独立建立”的证据。

文稿 13 建议从实际问题出发让学生尝试，表达的是对教师过度接管的担忧，但其中关于讲授时间比例的断言没有给出可核来源。本章不采用某个百分比作为教师发言上限，因为不同内容、起点与帮助需要不同。我们更愿意记录教师说话之后，学生获得了什么可以自己做的事，或者失去了什么本应由他判断的机会。

评价怎样把判断还给关系

孩子会从教师的反馈中学习什么值得注意。如果老师主要赞赏速度、规范词语与对自己提示的迅速呼应，儿童可能逐渐把获得认可当作任务的主要标准；数学关系便容易成为猜测教师偏好的背景。这个风险不说明一句表扬必然造成某种人格，只说明评价方向会影响课堂中哪些表现更容易被继续强化。

作者文稿 24《老师请勿轻易说“我喜欢……”》提醒教师，将评价放在行为依据及其对共同活动的贡献上，而不只表达个人喜好。本书保留这一专业提醒，但不沿用其中由某句评价直接推断讨好型人格的强因果表述。课堂语言是复杂关系的一部分，不能凭一句话进行心理诊断。

在数学讨论中，“你把对应点都检查了一遍，所以这次我们不只是在猜形状”，比“我喜欢你的答案”提供了更明确的信息。它告诉学生被认可的是怎样

使用证据，而不只是最终与老师一致。同样，“你指出了—个尚未核实的条件，接下来需要看它是否影响方案”，既承认问题的价值，也保留了继续检验的责任。

对错误回答也可以如此承接。教师可以说明“你比较的是边长，这让我们知道当前依据是什么；我们再用边长变化而张口不变的两幅角检查”，而不是只说“有创意”或“再想一想”。前者让错误进入可以处理的关系，后者可能只有鼓励的语气，却没有下一步的方向。

换个地方看 编辑怎样帮助作者而不替作者写完

—位编辑发现文章中有一段解释不清，可以直接改好全部句子，也可以指出读者在哪—处失去关系，让作者重新组织自己的说明。前—种做法可能迅速改善成品，后—种更有机会让作者形成可继续使用的判断；但当问题是标点规范或格式约定，直接说明并不必然损害作者的主体性。帮助方式需要与问题类型匹配。

课堂同样如此。若当前目标只是让作业排版整齐，教师提供模板可能合适；若目标是让学生解释图与算式的联系，模板把全部关系填好便可能替代了目标活动。我们判断帮助是否过度，不能只看教师介入多少，而要看介入是否完成了原本希望学习者建立的判断。

这一类比也提醒教师区分产物改善与学习改善。错例讨论后，全班能把标准图画好，说明产物取得了进展；若希望进一步说明孩子理解变化，还需看他们独立面对新图形怎样确定对应点。两种结果可以同时发生，但不能自动互相代替。

老师可以这样做 一段可逐步撤去的支持

下面以旋转纠错为教学设定。教师先呈现—份匿名作品，请每名学生独立写下或标出自己准备检查的地方；允许用图和手势，暂不提供正确图。这样保留下来的初始记录，可以区分孩子原先关注形状、距离、方向还是对应关系，避免交流后大家都说同样的话而无法追踪改变。

接着只选择一个争议点展开。教师请提出意见的学生说明依据，再请原作品的解释者或认领同类想法的学生判断，自己是否接受这项依据。若双方仍无法比较，可以补充透明纸、三角板或标有对应点的局部图；工具的用途要说清，是帮助观察哪一个关系，而不是代替全部画法。

当班级获得一项较可靠的检验方式后，换一份形状大小保持但对应关系有误的作品。教师这次不再重复刚才的提示，观察学生是否主动调用检验；若不能，也记录需要哪一级帮助。逐步撤去支持，使课堂评价不只围绕在教师话语中完成的最后一步。

最后给出一个新的旋转要求，让学生独立作图，并把自己的初始检查方法与现在的方法进行比较。他可以说某个方法仍然有用，也可以指出原来标准不足；无需强迫所有学生表演“先错后懂”的故事。教师则将结果、依据、提示程度与尚未解决的问题分别保存，为下一课提供具体起点。

从全班的好解释返回每一个孩子

集体交流特别容易产生一种错觉：班上已经有人讲清楚，其他人听着点头，理解似乎已经在全班完成。但一项关系经由一名学生显露出来，只能直接说明这名学生在当前条件下提供了相应表现；其他人的理解仍需合适的任务观察。教师可以让学生在交流后各自留下一个小记录，既不把课堂拆成漫长考试，也不把全班共鸣当作个体证据。

这个小记录应当避开照抄刚才的说明。例如换一个对应顶点、改变旋转中心，或者给一幅局部错误图，请学生说明先检查哪里；不能只让学生填出刚才被反复强调的词。若某个学生仍然需要同伴提示，不必宣布他没有学习，而应记录已经能独立完成的部分与仍依赖支持的部分。这样，下一次帮助才可能逐渐减少，而不只是不断重复全班讲解。

在家庭辅导中也可以沿用这一尺度。家长听完孩子解释后，不急着再讲一种更漂亮的方法，可以请他选择一个数字稍有变化的题，自己判断原来的解释还能

否使用。若孩子愿意尝试，家长应允许短暂的不顺畅；若他缺少某项必要知识，则明确补充，再观察他怎样接回原问题。家庭的目标不是复制整节课堂，而是让孩子有机会把已经听到的关系变成自己的判断。

怎样算我说错了

本章认为针对学生实际判断依据提供帮助，比只要求改成标准答案更可能增加可独立使用的关系。但如果在任务条件、学习与时间与初始水平得到合理控制后，两种帮助在独立解释、条件变化与延后任务上没有可辨认的差别，就需要检验这一主张是否适用于当前内容。先检查提示执行、测量与样本是否足以检验，再决定缩小解释，不能把一次比较直接宣布为普遍定律。

如果“学生自己承担”无法由不同观察者依据记录作出较一致的判断，这个术语就需要进一步细化。可以分别记录谁提出猜想、谁选取证据、谁检查条件、谁完成修订，而不只给整节课一个自主或不自主的标签。若这些记录不能帮助教师调整下一步，本章的方法还没有达到可用程度。

也可能出现一种反例：清楚讲解后的学生更快掌握必要关系，并在独立任务中表现更稳，而低提示探索造成了多余负担。本章不能把它排除为“不够生成”，应当分析学生先前经验与任务复杂度，并据此调整帮助。尊重儿童自己的形成过程，包括承认有时一段恰当说明比漫长等待更有帮助。

材料与判断

旋转辨析、图示匹配、教师支持与评价语言分别参照附录 F 的文稿 04、21、13、24。新增错误作品、28+4 写成 212 及分阶段任务为教学设计；有关教师发言比例与人格影响的未经核实强断言不作为本章依据。儿童构题活动另受王德生《人与 AI 一起发生新数学》第 15 章增量检验问题的启发，其题目与观察办法由本书构造。问题提出与反例教学已有研究传统，这一活动的价值须由它实际区分了哪两种判断来说明。

可以带走的话是：帮助孩子继续思考，要看帮助之后哪一项判断已经能够由他承担。教师既不必用沉默证明尊重，也不能用成品正确证明理解；留下可检验的独立动作，才使支持与替代的区别有了依据。下一章将把这项要求放到特定时刻：当新方法已经出现，怎样请旧知识重新进入讨论，让孩子自己检查新旧之间究竟改变了什么？

第 20 章 设计相撞：让旧知出庭

课堂现场 第二课时为什么还要翻开第一课时的记录

作者文稿 21 在讨论进位加法图形表征之后，专门把目光移到下一课时。学习竖式时，教师可以重新调用第一课时的小棒图、口算拆分记录，追问竖式的计算道理与哪一种口算方法相联系。这个安排使旧材料不只承担导入新课的职责，也在新写法出现后获得重新解释的机会。

把旧材料放在课前，教师常用它检查学生是否准备好了某项基础；把它放在新学习之后，问题则发生变化：孩子现在怎样理解自己原来已经做过的事？原来记录中的一笔、一个拆分与一次换捆，是否获得了新的关系？同一份学习单因此可以成为不同的问题材料，关键不在它被再次使用，而在重用时提出了什么要求。

本章沿着这一原稿线索，提供四种教学设计。它们分别是旧题新读、旧法认亲、旧规则体检与单元终课回看；这些名称用于帮助教师比较任务职责，不要求一节课同时安排四种形式。各节将标明真实原稿依据与新增教学设定，避免把设计中的可能反应写成已经发生的课堂结果。

这一章要说的话 回看要让新理解接受旧任务的检验

回看不等于请学生复述新课结论，再把旧题作为结论的例子。一个有诊断价值的回看任务，需要给旧知识一个明确对象，尽量不先提示新说法，并要求学生用当前理解解释或处理旧任务。新看法若不能把旧事做通，就需要修订；旧做法若仍然有效，也应保留其适用位置。

“让旧知出庭”是一个强调关系检查的比喻，不是要判旧知识有罪。旧方法可能被扩展、限定、重新组织，也可能在当前任务中继续保持原有价值；孩子不必通过否定过去来证明进步。教师需要寻找的是解释与行动怎样改变，而不是要求所有人说“以前的方法不好，现在的方法好”。

日常重新整理家庭账本可以说明这种工作。学会分类记账以后，过去记录的每笔支出并没有消失，但原来混在一起的维修、日用品与设备购置可能被重新归类，使下一次预算更有依据。如果只是换了账本封面而没有改变任何判断，便不能说账目关系被重新理解；这个例子只是类比，不是数学学习的直接证据。

第一种相撞 旧题新读让同一个符号承担清楚的关系

作者文稿 06 以等号认识为例讨论成人容易忽略儿童的实际理解，第 2 章已经展开这一来源。本节不重复故事，而提出一个新增的回看任务：完成等号关系学习以后，教师重新给出孩子熟悉的 $3+2=5$ ，请他说明这行记录表达了什么，以及怎样让一个没有看见物品的人检查它。先不提醒“相等”“两边”或“关系”等关键词，让学生选择自己的表达方式。

一种可能反应是“3 加 2 得到 5”，它在计算语境中没有错误，却尚不足以显示孩子能否把等号两侧当作可比较的数值。教师可以继续给出 $5=3+2$ ，问它是否仍然表达同一件事，并请学生用物品或画图说明。如果孩子只因书写方向改变便否定它，我们获得的是一个具体观察点，而不是对他全部数学能力的判断。

另一种反应是“两边一样”，教师仍需要检查“一样”指什么。孩子可能指数字个数一样、写法一样，或者两堆物品的外观一样；只有在当前任务中能说明两边数值相等，才能确认这一表达承担了相应关系。可以把右边改为 $4+1$ ，或者把左边改为 $2+3$ ，让学生判断哪些变化影响相等，哪些变化只是表示形式改变。

教学中的板书可以保留三行不同作用的记录：“ $3+2=5$ 熟悉的记录”“ $5=3+2$ 改变位置后的记录”“ $3+2=4+1$ 两边都有运算的记录”。教师在每行旁边留出“我的理由”，把孩子用图、物品或数的分解给出的解释记下来，而不是一开始就在最上方写好等号定义。最后再共同检查这些说明能否统一到两边数值相等，而不以板书整齐代替关系形成。

本节回看不是把等号定义为一样重。天平可以帮助呈现等量关系，但重量只是一个模型，不能拿来替代一般数学意义；两边也不需要由相同种类或相同外观

的对象表示。若教师用了天平，应在适当位置回到数值，让孩子说明换成算式后保留的是什么关系。

这一设计的错配风险，是提问中已经透露全部答案。例如“学完等号后，你是不是发现以前的式子两边也是相等的”，能够迅速得到赞同，却很难区分独立认识与顺从提示。较好的追问应当围绕可检查的变化，不强求孩子立即使用规范词语；如果他能用两种摆法稳定显示相等，也应把这种证据记录下来。

回看之后还可以给出 $3+2=5+1$ ，让学生判断而不要求计算技巧。若他只看左边做完是 5 便认定整式正确，说明原先的操作读法仍可能主导当前判断；若他主动比较左右结果，则出现了不同证据。但一次任务不足以判定“改名完成”，还要观察类似而不完全相同的任务、提示撤除与一段时间后的使用。

第二种相撞 旧法认亲让两种方法说明共同依据

第 3 章与第 16 章已经讨论面积研究及旧方法的出现，本节不把数格子解释为退步，也不把割补解释为必然高级。旧法认亲要解决的问题是：孩子能否说明两种方法如何围绕同一个面积对象工作，以及它们各自保留了什么、改变了什么。原研究中策略比例不能直接回答这个问题，因此需要另外设计关系任务。

教学设定在边长 1 厘米的方格纸上制作两张相同纸片，顶点依次为 $A(0,0)$ 、 $B(6,0)$ 、 $C(8,4)$ 、 $D(2,4)$ ，坐标的长度单位为厘米。教师使用坐标保证材料一致，学生不必先学习坐标，只需看到底 6 厘米、高 4 厘米、上底向右偏移 2 厘米的平行四边形。孩子先在第一张纸片上采用自己熟悉的方法求面积，留下格子记录；随后在第二张上从 D 沿高剪到底边的 $E(2,0)$ ，把三角形 AED 整体向右平移 6 厘米，补到右侧，得到长 6 厘米、高 4 厘米的长方形。教师问：“这次剪拼与刚才的格子记录，在求什么相同的东西？哪些地方变了，哪些没有变？”

一种可能反应是“都得到 24”，这说明结果一致，却没有说明方法联系。教师可以继续问剪下的三角形去哪了，有没有新增或丢失一块面积，原来被斜边分

开的格子怎样在重组后得到更容易计数的排列。孩子若能追踪面积单位所覆盖的区域，并说明分割与移动没有改变总面积，便提供了两种方法接通的线索。

数格子通过单位面积的计数或估测求面积，割补通过分割重组在面积保持的条件下改变形状。两者共享面积单位、可加性与对象保持的基础，却不是同一种程序，也不能笼统说数格子是割补的特例。对于不规则边界，数格子的估测可能有用；对于能够适当分割重组的图形，割补可能使计数更直接。理解增长可以表现为更有根据地选择，而不必表现为永远不用旧法。

板书可以在同一条横向记录中留下“对象：同一块平行四边形区域”“数格子：数同样大的面积单位”“割补：移动已有部分后更方便计数”“共同检查：无重叠、无遗漏、总面积保持”。这些文字应从学生图示与说明中逐步整理，不能先变成需要填入的结论。遇到孩子说“剪完当然一样大”，教师可以给一个把三角形叠到原图内部的错误拼法，检查他能否指出重叠造成的计数问题。

条件变化使用四根长度依次为 6、4、6、4 厘米的硬杆，首尾铰接成长方形框架。固定 6 厘米的底杆，将两侧杆朝同一侧推斜，杆长保持而夹角改变；对应高从 4 厘米减小，所得平行四边形面积随之减小。这个过程没有把原纸片分割后原样搬移，不能凭周长保持便认定面积保持。还可作对照：若仅把平行四边形的上底沿水平方向平移，并保持两底之间的高不变，则面积仍保持，侧边长度却未必保持。教师要说明固定和改变了哪些量，不能把剪拼、水平剪切与铰接拉动统称为“换个样子”。

这个设计也允许学生选择继续数格子。若他指出格点清楚、单位数量不多，直接数格子更容易核查，那么使用旧法可能是一项合理决定；教师可以再问如果图放大到不能逐格数时怎么办。旧方法与新方法的关系，由适用条件与成本决定，不由一条预设的学习等级决定。

用四种变化检查修订的范围

下面把面积任务扩展为一组对照材料。它同时保留应改变、应保持、条件恢复与替代理由四种情形，使“学会检查条件”不被误读为“看到变化就改答案”。王德生《何谓大与小，宏观与微观？》有关单位的讨论，以及胡敏《比的账本》有关比较记录的讨论，为这一设计提供思想线索；尺寸、卡片次序与判读均是本书的教学构造。正式使用时，学生看到的是题卡，不应预先看到上述四种分类名称。

准备甲、乙两张区域卡。甲是4列3行的方格长方形，乙是4列2行；起初每个小格边长均为1厘米。格子铺满各自区域，无重叠、无空隙，外框也是区域边界。先不写面积公式，问：“哪张卡覆盖的地方大？你的理由要用到哪些信息？”甲面积12平方厘米，乙8平方厘米。数格子的理由在这里充分，但充分的并非孤立的12大于8，而是两种格子面积相等、各自恰好覆盖区域。儿童可以数、叠合或计算，教师封存其实际说法，不把预设理由补进儿童口中。

第一张变化卡仅把乙旋转90度，方格的实体边长不变，再改掉格子的颜色。问原来的结论与理由能否继续用。甲仍较大，原有单位计数也仍有效。此步只改变朝向和颜色；教师不能把旋转后的照片任意缩放，否则展示本身又改变了可测长度。回答“变了，所以原办法不能用”需要继续查明：学生是在防备图示不可靠，还是把任何变化都当成撤回理由的信号？可以提供实物或带尺寸的图澄清，不凭一句话定性。

第二张变化卡把乙换成仍有4列2行、但每格边长2厘米的新卡，甲保持原样。先请学生判断，再问哪一条先前的信息要重查。乙长8厘米、宽4厘米，面积32平方厘米，现为乙较大。12格与8格的数量关系没有变，但每格面积不同，旧的直接计数比较不再充分。正确修改须进入后续判断：若学生已说“两种格子不同”，最后却仍据12大于8选甲，就留下了识别条件却未更新使用的表现。教师可以邀请他把乙的一格分成与甲相同的单位格，而不必先给出“边长加倍面积四倍”。

第三张卡恢复乙每格边长1厘米，排列仍为4列2行。此时原先数格子的方法可以重新使用，甲又较大。若儿童认为“数格子已经被反例推翻，以后只能用公式”，应回到这张卡检验：公式也要用长度单位，数格子在共同面积单位下仍有依据。条件恢复使方法恢复适用，并不要求学生必须选回旧方法；他愿意叠合或计算同样可以。要检查的是他是否无理地禁止一个有效方法，而非是否服从指定路线。

还需一张防止机械改答案的卡：乙仍为4列2行，每格边长改为半厘米，甲仍不变。原来仅凭12格比8格的理由仍不充分，但“甲较大”这次可以保留。乙实际长2厘米、宽1厘米，能放进甲的4厘米 $\times$ 3厘米区域内且有剩余；也可算得乙面积2平方厘米。撤掉一条理由不等于必须推翻结论，有独立依据便应保留。这一步将“我的理由要换”与“我的答案要换”分开，避免课堂把每一次新卡都暗示成反转答案的口令。

这些卡可以按学生的问题选用，不必人人按上述次序走完。孩子若自己提出“我把乙拆成两块再摆，格子还是这么大”，教师可以让他制卡并检查是否丢失或重叠；若他提出另一种单位，就共同核算。共同要求是说明对象与目标量、指出变化、给出足以支撑判断的理由。自构材料若同时改变多项条件，可先据实记录，再讨论怎样拆开比较，不把偏离教师顺序视为失败。

每张卡分别保存对象与目标量、原理由是否仍充分、当前结论、后续实际使用以及提示位置。单位恢复后无理地禁止数格子，是过度撤回的候选表现；单位变大后仍仅比格数，是越界沿用；已指出单位不同却在下一题仍直接比格数，则可能是修改没有进入使用。这些表现允许在同一儿童身上交叉出现。另取尺寸和排列不同的题卡，保留一次无关系提示的独立判断；只有连同本人前期记录，才进一步讨论变化。卡片先后次序不作为评分依据，教师应记录次序，避免儿童仅学会“下一张一定反转”。

第三种相撞 旧规则体检让一个说法通过不同数域

作者文稿 14《聚焦素养 抓住本质 建构运算一致性认知》第四部分，把分数除法联系到整数与小数除法。这提供了重要的回看方向：学到乘倒数以后，旧除法不应只作为已经掌握而略过的内容，还可以接受同一数量关系的解释。但原稿中个别解说存在数学错误，回看不能因为目的是建立一致性便放松逐步检验。

本节教学设定给出 $12 \div 3$ 、 $1.2 \div 0.3$ 、 $3/4 \div 2/5$ 三题，请学生先用自己熟悉的方法完成，再说明是否存在能够跨越三题的共同解释。暂不提示“统一单位”或“乘倒数”，让学生从自己的记录中寻找关系。教师随后可以提出包含除法的情境：给定一段总量，按指定的每份量分组，商表示相当于多少个这样的份额；当商不是整数时，要区分标准份额数与完整份数。

$12 \div 3$ 可以解释为 12 个一中包含几个 3 个一，结果是 4。 $1.2 \div 0.3$ 可以把两量都用十分之一表达，成为 12 个十分之一中包含几个 3 个十分之一，结果仍是 4；若改用百分之一，便是 120 个百分之一与 30 个百分之一的比较。单位选择不同，但两个量的相对关系保持，这才使相应除法结果一致。

$3/4 \div 2/5$ 可以把两者都表达为二十分之一，成为 15 个二十分之一与 8 个二十分之一的比较，结果是 $15/8$ 个标准份额。这里不应说 20 是两个分数的最小公倍数，而应说 20 是分母 4 和 5 的公倍数；也不应说同乘 20 使除数变成 1，因为 $2/5 \times 20 = 8$ 。被除数与除数同时乘同一个非零数保持商，是另一种可用说明，但它必须如实记录所得量。

若从乘倒数解释，可以先将被除数与除数同时乘 $5/2$ ： $3/4 \div 2/5 = (3/4 \times 5/2) \div (2/5 \times 5/2) = (15/8) \div 1 = 15/8$ 。由此可把结果简记为 $3/4 \times 5/2$ 。教师可以追问同乘 $5/2$ 为何恰好把除数 $2/5$ 变成 1，再让学生对照同乘 20 的做法：两条路线保持同一个商，却不以同一个中间目标工作。这样，统一性不再意味着所有算法写成相同步骤，而是不同变换能够回到共同关系并各自满足条件。

板书可以分成“旧算法”“换单位的解释”“乘倒数的解释”三个区域，每题占据同一行，明确写出除数非零。教师再给 $0 \div 3$ 与 $3 \div 0$ ，请学生判断通用规则的边界：前者有意义且结果为 0，后者在本书讨论的普通数的除法中没有定义，不能把 0 的倒数补成一个数以凑齐规律。规则的完整性包括它不能使用的条件，而不只是能处理更多题。

对于已经学过分数除法的学生，还可以问 $1 \div \frac{2}{3}$ 在分饼情境中怎样解释。商 $\frac{3}{2}$ 表示一张饼相当于一份 $\frac{2}{3}$ 张标准份额的 1.5 倍；若问题要求给每人完整分到 $\frac{2}{3}$ 张，能够完整分给 1 人，余 $\frac{1}{3}$ 张，不能直接说分给 1.5 个人。数量模型与题目所问不清，形式上的一致便可能掩盖意义的不一致。

学生可能正确算完所有题，却只说“老师说除以一个数等于乘它的倒数”。这时记录的是规则使用证据，尚未充分显示旧除法怎样被新解释重新组织。教师可以允许他选择最有把握的一题画图或编情境，再比较另一题对应的量；不必在同一节课强求跨三个数域的完整概括，也不应因为暂时说不清就取消其已获得的计算技能。

旧规则体检还必须避免过度外推。“相同计数单位的个数相除”适合帮助解释这里的数量比，却不能不加区分地覆盖所有带单位除法语义。总长度除以人数求每人长度时，商有长度单位；总长度除以每份长度求份数时，商的意义不同。教师要在情境中说明量与单位，不能为了一个统一句子删掉数学关系的差别。

第四种相撞 单元终课回看让新骨架接受旧作品质询

单元学习结束时，教师往往安排综合练习，以检查各类题是否会做。综合练习有其必要作用，但它仍可能让不同知识按题型轮流出现，而没有让孩子说明这些知识为何有关。单元回看则把旧作品重新放在同一问题下，检查新的看法能否解释过去不同的学习活动。

文稿 21 提出的竖式回调口算，是一个规模较小却很具体的单元回看。教学设定可以保留三份旧记录： $28+2+2$ 的凑十记录、 $20+8+4$ 的数位分解记录、一份用

小棒圈出十根并重新捆扎的图。新学习完成后，给出 $28+4$ 的竖式，请学生选择最容易逐步对应的记录，并说明另外两份为什么同样能得到 32。

数位分解与常规竖式的逐位组织更直接对应，但这并不意味着凑十法缺少单位关系。凑十时把 4 拆成 2 和 2，第一个 2 与 28 合成 30，同样发生从零散的一向整十的数量组织；只是它的记录重点不同。教师应当把“程序对应更直接”与“数学上是否有联系”区分，避免把一条便利的教学桥梁说成其他方法不具备算理。

学生可能把竖式的进位 1 与口算中的某个数字 1 机械配对，虽然旧记录里并没有这样的书写。教师可以让他用颜色标记进位 1 所代表的数量，再回到图中寻找对应的十个一；若找不到，说明数字外形的匹配还没有成为数量关系的匹配。回看要允许这样的小范围失败，因为它让表面一致与关系一致分开。

板书可以先保留三份旧记录的原样，再在右侧写竖式，在中间逐步标明“这里的十个一在哪里”“这里的一个十怎样记下”“哪些记录没有把这一步单独写出”。最后形成的联系图不必把所有线都连上，某处尚未接通可以用问题记号保留。若教师先给完整连线，孩子只把颜色涂好，课堂便又退回成品复制。

单元回看可以进一步连接面积单位。作者文稿 15 中，公顷学习由已学面积单位向更大单位延伸；教师可以在学后重新给出“边长 100 米的正方形面积是 100 平方米”这一旧记录，让学生解释为何数量 100 在边长中与面积中承担不同关系。这个任务不是再做一次换算，而是让新单位知识回头检验对“平方”的理解。

但单元终课不能要求所有孩子同时拥有同样完整的结构。一个学生可能已接通小棒与竖式，尚未接通小数加法；另一个可能能够说出单位关系，却仍需在图中练习定位。记录可以指出各自已建立与未建立的联系，为下一单元提供起点；不能把一张统一结构图当作每个人内部知识的实况地图。

换个地方看 旧地图怎样因新道路重新有用

一条新路修通以后，原来的街道没有失去存在，但它们在出行中的作用可能改变。过去绕行的道路可能成为拥堵时的替代线路，过去看似孤立的小巷可能接入新的通路；地图更新不是把旧地图全部撕掉，而是重写不同位置之间可以怎样到达。新道路是否有用，也需要在实际路线中接受检验。

旧知回看有相似方向，但不能把地图比喻推得太远。数学概念之间的关系需要理由与条件，不能因为两段内容在脑中联想到一起就宣布接通。旧法认亲需要共同对象与保持关系，旧规则体检需要等价变换与适用范围，旧题新读需要能在变化中继续说明；类比可以帮助想象，证明仍要回到数学任务。

这也解释为什么有些回看活动令人感到新鲜，却没有留下可用变化。教师把许多旧知识串成一个精彩故事，学生能够回忆故事顺序，却不一定能在旧题中独立使用其中的联系。若希望回看超出情绪体验，就需要让学生实际作出一次选择、修订或解释，并留下他据以判断的证据。

旧说法接住了什么 温故与知新并不相互排斥

“温故而知新”提醒学习者旧经验可以成为新的理解来源，复习导入也常帮助教师确认必要基础。本书提出“知新而后故改”，不是把前者倒过来后宣布更高一层，而是把另一个观察方向补进课堂：新学习发生以后，旧知识的意义与作用是否有所变化。两个方向可以交替出现，不能用一个方向消灭另一个方向。

知识联结、迁移、概念变化等研究也早已涉及新旧知识的相互影响，第9章已经负责邻近理论的核查与边界。本章不重复声称回看是从未出现过的思想，也不把有意设计逆向迁移归为本书首创。这里承担的具体工作，是把小学数学中的四类任务写到可实施、可记录、可修订的程度，再接受课堂证据检验其增量。

还应分清当前表现与个人变化。一个孩子现在能解释新旧方法的关系，可以记录为当前关系接通；只有将它与本人此前可比的解释或行动记录对照，才能进一步判断学习发生了怎样的改变。此前的记录不必有错误，也可以原本正确而较

局部，新学习使其适用范围、检验方式或联系得到拓展。没有本人前期材料，不能用构造人物的旧错误替他补写一段变化历史。

回看并不天然比向前迁移更难或更深。一道高度提示的旧题可能只要求复述，一道精心设计的新题则可能暴露丰富的关系；相反，旧题也可以揭示学生此前形成的读法怎样变化。任务质量与证据范围需要分别考察，不能用“向后”与“向前”两个方向代替测量内容的分析。

老师可以这样做 设计时先写可能推翻自己的回答

准备回看题时，教师可以先确定一个可被指认的旧知识对象：一份学生原记录、一条曾使用的规则或一种已经熟悉的方法。然后写出自己希望观察的变化，但不把这句话直接放进题干。若题干已经告诉孩子应当怎样重新理解，得到的便主要是跟随提示的证据。

接着设计一种能够使预期解释失败的条件变化。等号关系可以用两边都有运算的式子检验；面积保持可以用重叠或遗漏的假拼法检验；除法规则可以检查除数为零与量的意义；进位联系可以换一个不需要进位的算式，问原来的说明哪部分仍然适用。变化必须与目标关系有关，不能仅增加复杂计算使学生受挫。

课堂实施时，先记录无提示表现，再记录提示后的变化。提示可以分为澄清题意、提供工具、指向某处关系与直接示范等类型，不必急着合成一个总分。一个孩子在适当工具帮助下展示的理解有其价值，但教师要知道工具承担了什么，才能判断后续是否需要逐步撤去支持。

学生回答不符合预期时，先检查题目是否把“旧”指清楚。例如“说说新旧知识的联系”范围过大，孩子不知道比较什么；“看看你上周这份数格子记录，说明剪拼图有没有改变其中测量的面积”则更具体。问题清楚并不等于答案被提示，关键在于限定对象而不替孩子建立关系。

任务结束后，允许形成不确定记录。孩子说出共同关系但不能用于变式，可以记作“关系表述出现，独立运用待检”；孩子用图作出正确判断却说不清，可

以记作“操作证据出现，语言解释待补”。这些记录的判读在第 21 章进一步处理，本章不把一次回看直接变成改名、并存或回弹的定型结论。

怎样算我说错了

本章主张回看设计能够帮助教师观察新旧知识的联系，但是否改善学习效果还需比较。如果在控制任务时间与相关练习之后，加入四类回看活动并未增加独立解释、适用条件辨认或延后使用的表现，教学效果的主张便应缩小。研究还需检查学生是否实际完成关系判断，以及对照任务是否同样提供了这些机会，不能只按教案有没有“回看”标题分组。

如果评分者不能依据具体回答区分术语复述与关系使用，题目与编码必须重做。如果孩子只有在与课堂原句高度相似的提问中表现良好，一换说法就失效，也要警惕回看本身被训练成新的题型。工具需要能够接受不同表达，且必须知道自己在何种任务上不能作出判断。

还有一种会使本书修订的结果：某些学生在新的迁移任务中稳定表现良好，却难以回忆或解释自己的旧记录。这可能与记忆、表达或任务材料有关，不应仅因回看不足就否认其理解。回看是补充证据的一条通道，不是把所有学习者送上同一座审判台。

材料与判断

四类回看任务主要由文稿 21 的竖式回调口算、文稿 14 的跨数域除法联系和文稿 15 的面积单位反思引出，相关原稿索引见附录 F。具体题卡、预期回应与板书为本书设计。数学判读以量、单位、合法变换及适用条件为准：数格子与割补不设高低等级，分数除法保留除数非零条件，并区分标准份额与完整份数。课堂是否由此获得额外诊断信息，仍需使用第 21 章与附录 C 的协议检查。

可以带走的话是：旧题再次出现时，值得检查的不是孩子能否再答对，而是他现在凭什么这样读、这样做。新的理解要能解释旧任务，也要允许旧任务暴露

新解释的不足；这种相互检查，才使回看不止于温习一遍结论。下一章将继续解决评价问题：面对这些丰富而不完全一致的表现，教师怎样记录证据，既不漏掉尚在显露的理解，也不把顺畅回答过早判作稳定形成？

第 21 章 看见理解 三种证据与回看题

课堂现场 一句表扬以后我们知道了什么

我在文稿 24《老师请勿轻易说“我喜欢……”》开头写到，自己在幼儿园和小学听课时，观察到教师常用“我喜欢你这样”评价孩子。我由此追问：评价指向的是孩子行为的价值，还是教师个人的喜好？这是原稿提供的听课观察与反思；原文进一步讨论的长期人格影响，属于我当时提出的风险判断，尚不能视为该观察已经证明的因果结果。下面以一个明确的教学设定，把这个问题移到数学理解的观察中。

设想老师请几名同学解释 $28+4$ 。一名同学说先算 $28+2$ ，再算 $30+2$ ；另一名同学写出竖式，第三名同学用小棒表示两个十和八个一，再添四个一。三人的结果都是 32，老师对第一种回答说“我喜欢你的方法”。这句话也许只是想鼓励表达，但它并没有告诉其余同学，受到肯定的是结果、效率、清楚程度，还是那个能够解释十进位的关系。

接下来，第四名同学可能改用第一种方法。他也顺利说出“先凑十”，全班出现了更多同样的回答。我们不能凭这个场面断言他的理解没有发生，却也不能把回答趋同直接当成理解加深，因为孩子可能是在选择数学方法，也可能是在选择更容易获得教师认可的说法。评价改变了表达的条件，新的表达便需要连同这个条件一起解释。

如果老师换一个问题，观察的对象就会发生变化：“你刚才摆的小棒，和这张竖式中的哪一笔有关系？请你指出来。”孩子指着进位的 1，把十根零散小棒捆成一束，放到十位所在的位置。这个动作仍不足以完成对他的全部判断，却提供了比“用了老师喜欢的方法”更具体的信息：他尝试把物的分组、数量单位和符号位置联系起来。

假如另一名同学没有开口，而是把十根小棒捆好，又把原来写在个位上的 12 擦掉，改写成 2，我们同样需要留意。沉默可能与紧张、词语不足或不愿被同伴

打断有关，也可能意味着关系尚不清楚；不能只选择其中一个解释。老师若说“先不用讲，指给我看这个1表示什么”，就给了孩子另一条呈现判断的通道。

更有辨别力的任务发生在稍后。收起小棒，换一道 $37+5$ ，请孩子独立完成，再回到原题，说明两道题中的进位为什么都记在十位。此时我们获得的已经不是一个孤立答案，而是一小段证据链：孩子做了什么、借助了什么、条件改变后还剩下什么。评价从收取结论，转向对结论能够怎样成立的追踪。

三种证据与五个观察面的关系

结果证据回答任务是否完成；过程证据回答关键判断由谁承担；条件变化后的证据回答原关系在何种范围内仍可使用。解释、迁移、反例、延时和回看，则是获取这些证据的五种观察方向。前者是判断层次，后者是任务与时点的组织方式，两者不构成十五种独立能力，也不能将重叠证据反复加分。

本章把回看落实为可记录的任务。最小记录单位是“某名儿童在某一任务、某一时点和某种支持条件下的表现”。先保存原答与动作，再判断它支持当前能力、个体变化还是后续作用；三者分别需要不同证据。下文给出判读样例，附录C提供完整执行协议。

结果证据是必要的却不是全部

数学任务有自己的要求，不能因为重视过程，就把结果是否正确变得无关紧要。如果孩子将 $28+4$ 算成 22，教师需要确认错误发生在数量分解、单位转换、书写还是计算环节；不能只因他积极操作便宣布理解已经建立。可是，32 这个正确结果也可能由不同道路得到，正确与错误都需要放回任务过程才能帮助教学。

日常做饭可以作一个类比。端上桌的饭菜是否熟、是否适合食用，是无法跳过的结果要求；但一道菜碰巧做成，并不能说明做饭的人知道火候变化之后怎样处理。教师同样不能用一份正确答案推断所有条件下的能力，也不能因一次手误

就否定此前已经有证据支持的关系理解。这个类比用于澄清判断层次，不承担学习机制的实证证明。

结果记录可以非常朴素：题目要求是什么，孩子交出了什么，是否满足要求，是否出现可定位的错误。若任务要求解释两种方法的关系，仅仅算出相同答案还没有完成全部要求；若任务只要求快速计算，也不能因为孩子没有主动解释就扣上“不理解”的判断。评价首先要忠于所问的问题，不能用一道没有机会展示解释的题目，证明孩子不能解释。

在同一张记录上，教师还应写明允许使用的材料、时间和提示。独立完成、看过同伴答案后完成、教师明确指出关系后完成，都可能具有学习价值，但它们支持的判断不同。把这些结果放在一起，却不记条件，相当于把骑自行车时有人扶着的表现，与能够独自转弯的表现视为同一件事。

过程证据要抓住谁作出了判断

“参与了活动”是一种过于粗的记录。一个孩子全程拿着小棒，却可能一直照着老师的动作摆；另一个孩子没有摆得很快，却在关键时刻指出十根小棒应该换一束。过程证据需要找到与目标关系有关的动作，确认比较、选择、解释、修正或检验究竟由谁承担，而不是只统计举手与操作次数。

以进位加法为例，教师可以关注孩子是否自己发现个位数量超过九，是否说明十个一和一个十的数量等价，是否将这一变化与竖式中的位置对应起来。并不是每节课都必须逐项观察全班所有学生，教师可以围绕当次最不确定的一点选取一个小组，保留作品和简短原话。观察对象越具体，记录越有可能改变下一步教学。

提示也应进入记录。开放追问“你是怎么想的”，与指向提示“看看这里是不是十个一”，并不具有同样的帮助强度；直接告诉孩子“这个1表示一个十”，则已经提供了需要观察的核心关系。孩子在直接提示后复述正确，说明他能够接住这条说明，却尚不能证明他会独立提出或重建这条关系。

这并不意味着教师必须为了获得干净的观察而拒绝帮助。课堂首先是学习发生的地方，诊断只服务于更合适的帮助。较好的办法是区分一小段独立尝试与随后的教学支持：先保留初次反应，再给帮助，最后记录帮助之后出现了什么改变。这样既不会为了测量而把孩子困住，也不会把教师贡献误记成学生的独立贡献。

过程证据还要警惕事后合理化。孩子看见正确答案后能够解释它，不等于此前就是按照这条解释做出的选择；教师若需要研究当时的判断，就应尽量保留初稿、擦改痕迹和简短过程记录。只在课末问“你刚才为什么这样做”，所得材料有价值，但其性质应记作回顾性解释，而不能自动当作思考过程的完整复原。

条件变化后的证据告诉我们边界在哪里

条件变化不等于随意把题目变难。若原题只需要加法，新题突然加入复杂阅读、陌生单位和多步推理，失败可能来自新增负担，不能全部归于原概念不稳。为判断某个关系能否保持，教师宜先改变一个与该关系有关的条件，并保留其余条件尽可能相近，再逐步扩大变化范围。

例如，观察等号的关系理解，可以从 $3+2=5$ 改为 $5=3+2$ ，再改为 $3+2=4+1$ 。这里改变的是表达方向和两边形式，计算负担仍较低；若直接换成长句应用题，儿童读不懂情境时，等号理解便不再是唯一解释。好的变式不是故意设置陷阱，而是让教师能说明，究竟在检验哪一项保持、哪一项变化。

生活中检验一把伞也可以帮助理解这一点。在小雨里不漏，并不能保证大风时不会翻折；但如果拿伞去承受重物，再据此宣布它不能遮雨，就是换了评价对象。数学学习的迁移同样需要边界意识，我们既要改变条件，也要说明新条件为何仍属于所研究关系的适用范围。

条件变化还有时间这一维。刚练过的题目与三个月后再次遇到的题目，对记忆、提取和熟悉度提出不同要求；延时失败不能仅被解释为关系没有建立，也不

能完全用遗忘一笔带过。教师需要把即时记录、期间学习经历、延后任务和提示情况放在一起，看哪个解释得到更多支持。

五个观察面分别回答什么

解释关注孩子能否让一个结果与理由相接。我们可以请他说明为什么进位的1记在十位，也可以允许他用小棒、图或动作说明；书面长句不是唯一合法通道。解释记录应注明是否由孩子独立组织、是否包含任务所需的关键关系，以及是否能够回应一个适当追问，而不以词汇是否像教师作为主要标准。

迁移关注同一关系在新任务中怎样被调用。若孩子能在 $28+4$ 中解释换十，又能在 $37+5$ 中独立完成同类转换，教师获得的是一定范围内的迁移证据。它的价值不会因为本书强调回看而降低；需要研究的是，迁移之外是否仍有尚未看见的关系变化。

反例关注孩子是否知道某个判断不能在哪里继续使用。面对“边越长，角越大”这样的说法，孩子若能构造边较长而张口较小的角，或者通过重合比较解释其不成立，就提供了不同于背诵定义的证据。反例任务也有自身负担，想不出一个反例可能与作图困难有关，因此可先提供两个候选图形，让孩子比较，再逐渐增加自主构造要求。

延时关注先前表现能否在之后继续出现。它不是一种特殊题型，而是对同类或可比任务安排新的观察时点；时间间隔必须记录，期间是否学习过相关内容也须记下。课后第二天和三个月后的记录都可以是延后观察，但必须分别注明间隔，不能把它们视作同一时间条件；重复原题的熟悉效应也应进入解释。

回看关注新学习之后，孩子如何重新理解一个明确的旧对象、旧方法或旧规则。它要求旧知识在题目中有可识别的位置，而不只是泛泛询问“你今天有什么收获”。如果孩子指出旧的进位动作与新的计数单位关系，并用这一关系重新完成旧题，我们获得了当前新旧联系的证据；与本人的原有记录比较后，才可进一步判断关系是否变化。若只有对新概念的解释，便不能直接记作回看已经完成。

这五个观察面并非完全彼此独立。回看题可能要求解释，也可能在延时阶段使用；迁移任务也可能包含反例。分开记录的目的，是保留问题究竟指向哪里，而不是宣称存在五种互不相交的心理能力。教师可以用一份作品支持多项判断，但必须说明每项判断对应的不同证据，不能把同一句回答重复计算成多次独立成功。

回看题怎样出得不暗示答案

设计回看题，先选定孩子确实接触过的旧知识。所谓“旧”，应尽量有作品、前测或课堂记录支持，而不是教师推定“这个年级应该早会了”。若孩子原先从未使用过某种方法，要求他说明新方法怎样改变那种旧方法，就会把回看题变成另一道新授题。

其次，给出旧任务或旧作品，而不把新解释放进题干。比如可以呈现孩子过去写的 $28+4$ 口算记录和现在的竖式，请他说哪些地方有联系，怎样证明；不宜直接问“你能发现两种方法都是把十个一换成一个十吗”。后一问可以用于教学，却已经把所要观察的关系写了出来，不能与前一种独立回看作同等编码。

再次，要求新的解释能够做事。孩子说“两个方法是一致的”，教师可以追问：“请你用图或动作指出一致在哪里，再用这个想法处理 $37+5$ 。”这里不是用更多题惩罚回答，而是避免把“有联系”这样宽泛的词当成完整证据。如果儿童能准确指出对应却暂时算错，记录应分别保留关系说明与计算错误，不必立即把整份表现清零。

最后，保留一个温和的反问空间。教师可以给出一个看似相近却有错误的解释，例如把进位的1说成“多写一个数字”，让孩子判断它能否说明数量变化。反问不能暗中把正确答案诱导出来，尤其不能在孩子不同意教师时改变语气施压；我们要看的是关系能否支持判断，不是孩子是否善于顺着成人说话。

同一道等号题怎样留下可复查的记录

以下为判读示例，人物与回答均属构造。教师先保留儿童本人对 $3+2=5$ 的旧解释，学习后再呈现旧式，请他说、画或摆出自己的理解；随后给出 $5=3+2$ 和 $3+2=4+1$ 。第一轮只澄清读题与操作约定，不提示“两边相等”。记录完成后，教师可以继续教学，但须把追加提示另记。

记录甲：儿童说“左边合起来是 5，右边也是 5”，自行交换两边物品，并正确处理两边都有运算的题。这支持当前关系理解。若其本人旧记录只允许结果写在右侧，且题目和支持可比，前后材料才进一步支持解释发生改变；若旧记录缺失，当前能力仍应认可，变化栏填写“证据不足”。

记录乙：儿童先说“等号就是两边相等”，随后拒绝 $5=3+2$ ，把它改回 $3+2=5$ 。这说明规范说法与实际使用尚未协调，不能仅据第一句话记作改名。记录应保留矛盾所在，下一步改变题面方向而保持低计算负担，检查他是否依赖书写位置。

记录丙：儿童不作长句解释，却把五个圆片分成三与二，交换位置后仍确认数量相等。行动提供了当前关系证据；脱离圆片是否仍能使用，需要另测。记录丁：教师说出“两边都是 5”后，儿童跟着改答。这是提示后表现，不能补写成最初独立形成。

四种记录都应保留相同的事实栏：题目及版本、原答案、理由或动作、提示内容与时点、改变条件后的回应。解释栏另写已得到的支持与缺少的证据。这样的分栏让第二位教师可以不同意解释，而仍能返回同一份材料。

编码针对证据而非儿童身份

“改名”指新的理解改变了本人原有解释或使用方式。判定须有可比的个人前期材料，并显示新关系能重新解释旧对象、在适当任务中被使用。旧解释可以本来正确而较局部，变化可以是适用范围、联系或检验方式的拓展；不要求儿童先犯错，也不要求固定的“以前以为、现在知道”句式。

“并存”只记录多种做法出现，还须说明它们是否接通。能够解释共同基础、比较条件并自主选择，属于有联系的多策略使用；各套程序分别会做而当前联系未显示，则保留联系待辨。不能按方法数量判定理解程度。

“回弹”需要纵向证据：先前在可比条件下有相互印证的独立稳定表现，后来又反复沿用与之冲突的旧判断。一次正确不能建立稳定基线，一次失误也不能证明回弹。提示、题面、疲劳和期间教学改变时，须先辨明这些差异；“回弹”描述的是观察到的时间变化，不能直接等同某个内部原因。

“证据不足”必须注明缺项及补证办法，例如缺本人旧解释、作品未留过程，或任务负担遮住目标关系。它不是低分，也不能取消已经显示的局部能力。同一儿童在不同概念或观察面可以得到不同记录，编码不形成固定身份，也不把这些观察记录排成单向等级。

条件变化后分别记下哪里没有接续

在上述记录之外，还可以并列观察“该改未改”“不该改却改”“知道该改但后续未更新”。它们指向一次任务中的具体表现，不是新的儿童类型，也不是互斥分类或可相加的理解总分。这三项记录与“改名、并存、回弹”的时间性证据不是一一对应；一次越界沿用可以与此前改名证据同时存在，却不足以单独确认回弹。每项都要写清改的是对象、表示、所求量还是适用条件，并标出原话、作品和提示位置。没有出现错误，不等于已经看清了条件；儿童可能碰巧得到同一个结果。

以下是待试用的教学设定。保留孩子对长4厘米、宽3厘米的长方形的面积、周长记录，再呈现长6厘米、宽2厘米的长方形。两者面积都是12平方厘米，周长却由14厘米变成16厘米。若孩子沿用原周长，可以记录“该改未改”；若他已指出本题周长应重新按6与2计算，或独立算出16，却在后续围边问题中仍调用14，可记录“后续未更新”；若只说边长变了，还要检查他是否知

道这一次影响了周长。两项可能重叠，需区分他在哪里识别了变化、在哪里仍沿用旧值。

另给同一长方形仅旋转方向的题，明确没有伸缩；若孩子据方向变化否定原面积，则记录“不该改却改”。不能暗示每题都要纠错。还可让儿童比较原来 4×3 与现在 6×2 的理由：数值相同，不表示旧尺寸仍适用于新图；改了尺寸，也不表示面积结论必定不同。原推导失去当前适用条件时，结论可能由另一有效依据保留，不应强迫儿童全盘撤回。

教师先分别保存独立判断与实际计算，再决定补哪一问。判断变化与使用变化分开，才能区分关系识别困难、后续调用困难和偶发计算失误。多条合法修改都应接受，不能按改字最少奖励。只有当前题目时，这些记录说明当前条件敏感性；要确认新学习改变了本人旧理解，仍需前期可比记录，不能由这三栏另造回弹判据。

面积方法如何避免被误判

本书多次回到数格子与割补，因为它们最容易暴露评价中的价值预设。教师见到孩子仍然数格子，可能立刻认为他没有进步；可是，在一个单位网格已经给定、数目不多的图形上，数格子本来就是合理方法。若孩子能说明格子的单位一致、覆盖不重不漏，并知道不完整格需要怎样合并或估测，旧方法并没有因为是“旧”就失去价值。

割补也不天然保证理解。孩子照着示范剪下三角形并移到另一边，却说不清移动前后为什么面积不变，可能只是学会了一个动作序列。回看题应追问两种方法怎样都与覆盖面积相关，分割和移动保留了什么，以及在当前图形中哪一种办法更方便；不能把“更快”直接等同于“更理解”。

一个可试用的任务，是给出同一个格点平行四边形，让孩子保留自己的第一次解法，再阅读另一种合法解法，并说明二者怎样在面积量上相接。若他数出单位面积，又用割补说明底与高构成的长方形具有相同面积，教师可以记录方法联

系的证据。这里联系建立在面积单位、可加性及移动不改变面积等关系上，而不是断言数格子是割补的特例。

文稿 02《以操作性理解的策略促进学生面积概念的发展》所载研究涉及五年级两个班 138 名学生的前测与三个月延后测，以及 12 名学生课后访谈，前后使用同一问卷。它关注面积概念与策略选择，并未提供全体学生即时理解已稳定形成的测量。因此，延后使用数格子既不能直接记作回弹，也不能验证本书的新编码。

现有稿件对该研究的材料说明报告了表间人数、比例与计分口径不一致的问题，详见第 24 章。原始问卷、个体配对记录及统计文件仍须由资料持有人核对。本书保留研究提出的教学问题，不使用有争议的比例作效果估计，也不从汇总表重造个人变化轨迹。

两位教师怎样独立复核

第一次试用可选择十二份匿名作品作为组织规模，不将这个数量视为可靠性的统计门槛。先遮去班级、教师评价和预期结论，两位教师依据相同题目与规则独立填写事实栏及解释栏；随后才讨论分歧。共同商定的结论与初次独立编码分别保存，不能用讨论后的整齐代替规则本身的清楚。

分歧须定位到具体判断：是否把术语复述当作关系使用，是否遗漏提示，是否把旧法出现直接称作回弹，是否忽视图示或动作。规则修订后，换用尚未讨论的新作品再编码。若仍需依赖教师对学生的总体印象才能判断，当前工具就不适合承担比较研究。

试用报告列出各类记录数、无法判断项及分歧矩阵；正式研究再按数据类型、类别分布和聚类结构选择一致性指标。十二份样例能帮助发现规则问题，不能替代样本规划或宣称完成信效度验证。无论最终采用何种指标，都保留初次分歧及裁定理由，使他人能够复查。

从一项关系开始小研究

一线教研先选一个旧对象、新关系和后续任务都清楚的内容。保存个人基线，记录教学中的关键支持，学后安排独立回看，再依课程进度观察另一任务与延后保持。附录 C 给出任务准备、提示分级、时间安排和记录模板，可先用于少量焦点学生的工具试用；其目的首先是找出题意、负担和判读问题。

测量价值与教学效果要分别研究。前者问回看记录在已有信息之外还告诉我们什么；后者问增加回看教学是否改善之后的表现。即使使用相同题材，两项研究也须分别规定比较对象与结果。所有学生接受的回看测量可能本身促学，因此教学效果只能解释共同测量之上的额外作用。

正式比较还须处理教师与班级差异、练习量、期间学习、失访和提示变化。三个月是可选择观察尺度，不是理解的定义。若只具备一个班的材料，就以可用性和局部个案解释为主要目标；不因研究规模小而取消价值，也不把它写成普遍因果结论。

老师可以这样做

下次备课时，可以先为一项具体关系留出两次观察，而不急着把五个观察面全部装进一节课。第一次保留孩子独立面对旧任务的表现，第二次在新学习之后请他重新解释同一个旧对象；在两次之间，记录教师提供过的关键帮助。这样得到的材料不多，却比一次课末笼统的“都懂了吗”更容易告诉教师下一步该做什么。

记录表可以只有任务、原始表现、支持条件、暂时判断、下一次观察五栏。原始表现尽量写儿童说过的话或做过的动作，暂时判断再使用本章概念，两者不要混写。例如，“把十根一捆起来并指向十位”是可追溯记录，“已经形成充分理解”则是需要更多证据的解释；把二者分开，后续复查才有可能修正判断。

反馈语言也可以改变。与其只说“我喜欢你的方法”，不如指出“你把竖式里的 1 和一捆十根连起来了，这让我们能看见它表示多少”，然后请另一名学生

检验这条解释是否适用于新题。这样的反馈仍然包含鼓励，但鼓励落在可讨论的数学关系上，而不是让教师喜好成为答案的隐性标准。

若孩子尚未建立联系，下一步不是要求他把标准句多说几遍。教师可以减少一次任务中的变化，提供可比较的两个作品，或者让他先用动作指出对应，再逐步撤去材料。支持的方向由当前证据决定，不能因为工具写着“回看”，就要求所有儿童沿同一条表达路线证明自己。

怎样算本章说错了

如果多次试用之后，不同评分者仍无法依据同样的材料稳定区分所列状态，首先需要修订任务与定义，而不能把分歧全部归于教师理论水平不足。若修订后仍无法形成可复查的判断，本章关于这套编码能够服务课堂观察的主张就应收缩或撤回。工具必须接受实际使用者和实际儿童反应的约束。

若回看题的表现完全由一般表达能力或题目熟悉度解释，且在适当控制后不能增加对后续表现的理解，那么它作为独立观察面的价值需要重新评估。若它能帮助教学对话，却没有额外预测优势，我们应保留前者而放弃后者，不能把“有帮助”与“优于其他证据”混为一谈。一次没有达到预期的比较也不自动推翻所有主张，还要检查样本、测量可靠性和比较条件是否足以检验问题。

另一种失败更值得警惕：使用本工具后，教师更频繁地诱导儿童说出“旧知改名”，却没有更准确地发现不同判断依据。那意味着评价语言已经替代了评价对象，工具正在制造自己希望看见的回答。对此不能增加更多同类提示，而应重新设计独立任务，允许学生提出工具尚未预设的解释。

带走的话

看见理解，就是把孩子做出的结果、承担的判断和条件变化后的表现放在一起，同时让每一项结论都保留可以回查的证据。

材料与判断

评价语言问题参照文稿 24，面积研究问题参照文稿 02 所载设计及现有稿件记录的待核事项。数学问答与编码样例为构造材料，生活类比仅用于说明判断层次。三种证据与五个观察面是本书的组织框架，尚未获得量表验证；它们需要接受评分者复核、独立任务和教学负担的检验。

留给下一章的问题

一张观察表可以让教师看见更多细节，但教师原来判断好课与好学生的标准，也会决定他愿意记录哪些细节。如果我们希望孩子的新学习能够回头改变旧知识，教研又怎样帮助教师回头改变自己对旧课堂的理解？下一章把目光从儿童作品移向教师自身，讨论一种不会被建议清单淹没的专业成长。

第 22 章 老师的理解也是这样发生的

课堂现场 数十条正确建议之后

我在文稿 16《从“被吐槽”到“共成长”》中记下一次县域集体备课。青年教师小 A 试教之后，收到经验教师、教研员与专家提出的数十条修改建议；她认真记录，随后埋头修改。第二次试教前，我在走廊里见到她抹眼泪，她说很多地方没有弄明白，又担心自己做不好。这是原稿的叙事记录，本章不为它补写未记载的对话。

原稿接着写到，小 A 按照建议加入开放探究，却不能承接学生发散的回答，只好频繁打断，课堂逐渐变成把学生拉回预设流程。建议希望增加开放，实际行动却增加了控制；方案表面的变化与教师能够承担的判断发生了分离。这个反差比“年轻教师经验不足”更值得研究，因为它同时涉及执教者与指导者对成长的理解。

如果把教研看成优质建议的输送，困境似乎容易解决：再给她更细的操作提示，再示范怎样追问，再多准备几种学生回答。然而，新增建议也可能继续增加她在课堂中必须同时兼顾的任务。她已经知道应该开放，却还不能判断何时等待、何时追问、哪些偏离值得跟进，更多“应该”未必能替她形成这些判断。

文稿 16 随后把指导的着眼点移向教师自己想尝试的变化，讨论让教师先说清目标、观察学生在哪一步受阻，并从可承担的一处开始调整。这里有一个值得辨认的变化：教研者不再只问教案还缺什么，也开始问这些安排在执教者那里怎样获得意义。老师能够照着增加一个环节，与老师知道为什么增加、什么时候取消这个环节，是不同的专业状态。

这种区别同样出现在学生身上。孩子可以照着增加一个括号，却未必知道括号怎样改变运算关系；教师可以照着增加小组合作，却未必知道合作要让哪一种不同判断相遇。我们用这个相似性帮助提出问题，但不据此宣布成人专业学习与

儿童概念学习具有完全相同的机制。教师还承担组织责任、职业评价与时间压力，这些条件不能被一个漂亮类比抹去。

这一章要说的话

教师的专业成长，需要让新的课堂证据重新解释原来的教学选择，并影响下一次行动。教研可以提供概念、材料与经验，却不能替教师完成对具体情境的判断；一次成功试教也不足以证明这种判断已经稳定。我们因此把教师的成长看作需要不断观察、修正与回看的过程，而不是把一套成熟教案搬进另一位教师的课堂。

本章关注的不是如何把教师变得更像某位名师，而是如何让教师知道自己的选择在帮助什么、遮蔽什么，怎样借助新的证据改写旧做法的意义。支持必须保留专业标准，也必须给执教者可承担的观察与尝试空间。若教研只降低要求而不追问学习结果，陪伴会失去方向；若只有要求而没有形成条件，标准便可能转化为压力传递。

从会讲教学理念到能够识别课堂事件

教师可能熟悉“以学生为中心”“发展思维”等表达，也能够教案中写下相应目标，但进入课堂后仍然不知道应该关注哪一个具体反应。这不必归结为态度不认真，可能是公共语言尚未与他能够辨认的事件相接。例如，“关注学生”只有进一步落到学生依据什么比较、哪一步由教师代做、哪一种回答尚不能解释时，才开始成为可使用的判断。

文稿 20《在自我经历中生长研究》与文稿 22 的相关修订，反复提到一种现象：教师复刻了活动形式，却没有把活动、任务与数学学习目标接通。原稿是作者对长期教研经历的归纳，不是经过统一编码后的发生率调查；我们据此讨论其提出的问题，不把“多数”“普遍”等措辞扩大为所有学校的事实。它提示的具体方向是，教师需要知道活动中哪种变化能够支持目标，而不只知道活动是否热闹。

一个日常类比是看食谱。知道菜名、备齐食材、按顺序操作，可以使初学者迈出重要一步；遇到锅具和食材状态不同，却还需要辨认颜色、质地与火候。成熟食谱能够帮助行动，但不能替行动者看见眼前发生了什么。教师使用优秀教案也是如此，照做本身并不可耻，问题在于照做之后是否逐渐形成解释与调整的能力。

因此，教研中的概念学习可以从具体事件返回公共语言。先共同看一段学生作品，再讨论“这里谁在建立联系”，比先要求每个人表态赞同某个理念更容易暴露判断差异。教师若对同一作品作出不同解释，教研才获得了一个需要继续工作的对象；如果所有人都只能重复相同口号，一致可能只是尚未进入具体问题。

谁来决定本轮只改哪一处

面对一节不够理想的课，指出十个问题通常比选出一个优先问题容易。目标不清、追问不准、材料不当、节奏松散可能同时存在，但它们之间有依赖关系：如果教师还不能辨认学生的主要困难，增加更复杂的小组活动可能只会放大混乱。选择本轮改变，需要既看学生当前的需要，也看教师能够承担哪项新判断。

这种选择不等于让教师只挑自己喜欢的建议。执教者可以提出担心，教研者可以坚持数学内容不能出错、学生必须有独立判断机会等底线，双方再用具体材料讨论可能的安排。可以暂缓复杂的展示形式，却不能把错误结论保留下来；可以只观察部分学生的推理，却不能将全班齐答当成每个人理解的证明。

在一个教学设定中，教师想把整节课改成完全开放的探究，但目前最难处理的是学生把周长与面积混淆。团队可以先约定只改一个环节：拿出周长相同而面积不同的两个图形，让学生先独立判断，教师只收集依据，不立即评价。下一次教研讨论的对象就是这些依据怎样分布、教师何时忍不住提前纠正，而不是整节课是否具有某种理想风格。

一处改变的价值在于使后果容易被辨认。若同时替换任务、材料、板书、合作方式和评价语言，课变好了也难以说明哪些安排起作用；课变差了则更容易让

教师把失败归于自己能力不足。小步并不天然有效，但它降低了解释混乱的风险，让一次试教能够为下一步提供较清楚的信息。

下水课让建议重新接触现实

文稿 15 记录了我在枝城小学执教《认识公顷和平方千米》。原稿描述了学生将边长 100 米的正方形面积算成 100 平方米，之后通过交流补出一万平方米；又描述学生围绕“平方 10 米”等自拟名称讨论，并与公共单位名称建立联系。本章使用这些原稿记载，不把课后听课者的赞赏直接转化为该方法普遍有效的研究结论。

亲自执教的價值之一，是让教研者接触建议实施时的限制。坐在教室后面，可以较从容地指出“这里应再等一等”；站在讲台上，则要同时承担时间、学生分心、材料分发与下一步安排。经历这些限制不会自动使建议正确，却能促使指导者把一个宽泛要求改成更具体的条件：等谁、等什么、等多久后需要换一种支持。

示范课也可能产生新的误读。教师看见学生为名称争论，便在自己的课上也安排命名争论，却没有提供面积单位的关系材料；结果学生争的是哪个词好听，而不是一个单位覆盖多少面积。复制示范的动作，未必复制了动作能够发挥作用的條件，因此课后的讲解应把准备、预判、临场选择和未解决之处一起呈现。

“平方 10 米”在这里尤其需要辨清。它可以作为学生暂时命名的讨论对象，所指若是边长 10 米的正方形，其面积就是 100 平方米；最终还需与公亩等公共名称及平方米计量建立清楚关系。教师若只赞美孩子创造了新名字，却不检查数量所指，便可能在鼓励创造时保留新的混淆。教研者亲自承担这种澄清，才能让示范成为可以讨论的实践，而非只供赞赏的作品。

旧课怎样被重新解释

教师的“旧知改名”不是把过去的课全部判作错误。过去讲得多，可能在当时帮助学生获得必要信息；过去强调熟练，也可能减轻了后续任务的计算负担。新的理解应使教师更精细地区分，哪些讲解提供了必要条件，哪些讲解替学生完成了本该由他们判断的关系，而不是用一套新口号把全部旧经验推翻。

可以拿一份旧教案做这样的回看：圈出教师直接给出的结论，标出学生需要独立决定的地方，再与实际作品相对照。如果某段讲解之后学生能独立解释并灵活使用，它未必需要因“讲授”二字被删除；如果某项探究只让学生按步骤完成预定动作，也不能因形式开放就被保留。改变的是评价旧课的依据，过去的活动因而获得了更准确的用途和边界。

文稿 03 中工作室初建时的一段经历，提供了一个教师组织者回看的例子。我写到，在《角的认识练习》的课例研究陷入困难时，我拿出自己准备的再教设计，却未被团队理解与接受；随后转向共同解读课标、知识核心与学生障碍。原稿将这一变化概括为从提供答案转向带领大家寻找答案，本书据此追问：团队后来能否独立做出同类判断，仍需要具体的后续记录。

这段经历的力量，不在于主人公终于学会一种永远正确的带队方式，而在于先前善意的支持也进入了反思。指导者发现自己的方案不能被使用，就要回看自己此前对“帮助”的定义；如果只是抱怨教师不愿改变，研究便停在被指导者身上。让新证据也能改写指导者的判断，是协作具有双向性的一个标志。

共情不能替代对问题的辨认

文稿 17 通过不同教师的成长故事强调机会、陪伴与等待。对一个长期没有展示机会的教师而言，被邀请承担任务可能改变他的参与条件；对一个承担过多却缺少具体支持的教师而言，再增加一次公开展示却可能适得其反。因而，温暖不应被理解为一种对所有人使用同样鼓励的话术，它需要建立在对处境的辨认之上。

教师说“我不会”，可能指不知道数学关系，也可能指知道关系但不会组织讨论，还可能指担心公开评价、缺少准备时间或没有材料。不同困难需要不同支持：共同研究内容、模拟接话、调整展示要求、提供备课时间，都可能比一句“你要自信”更具体。不能把组织条件造成的困难全部心理化，也不能把专业判断不足全部解释为缺少关爱。

日常学开车可以帮助说明这种区分。对不清楚路权的人，鼓励大胆没有帮助；对会判断但因旁人不断呵斥而紧张的人，再讲一遍路权也未必解决问题。同行支持既需要技术，也需要一个允许停下、询问和再次尝试的环境，但两者不能互相替代。

本书不据成长叙事为教师作心理诊断。抹眼泪、沉默或拒绝再次公开课，只能作为需要进一步了解的情境信号，不能据此给人贴上抗压能力差、缺少成长型思维等标签。教研者首先应问发生了什么、哪些要求可以调整，并在教师愿意的范围内讨论专业问题。

共享资源与个人探索怎样共处

文稿 18 介绍以一二三年级为试点的全域集体备课：将全市相应年级教师组成市级备课组，线上共同研讨后，各校再依据学情开展二次备课，并将实践反馈用于修改资源。原稿还描述了乡村学校同年级同学科同行不足、资源分散、骨干成果难以覆盖所有教师等问题。这些记载提供了组织实践的路径，但当前材料并不能独立证明所有学校的教学质量已因此提高。

这一安排值得保留的关系，是共同资源与现场改造之间的往返。统一提供教材分析、任务与评价建议，可以减少每位教师从头寻找材料的负担；二次备课则应允许教师依据儿童已有经验调整入口。如果二次备课只是把统一教案换上学校名称，共享便可能变成统一执行，现场差异无法反过来改变资源。

同样，反馈表不应只收集“收获很大”“建议多讲案例”。可以请教师提交一个原设计未预料的学生解释，一处临场改变及其理由，一项仍无法判断的学习

结果。主备人据此决定哪些任务需要增加条件说明，哪些样例不适用于某类起点。这样的资料回流才能使共享方案继续学习，而不是只积累越来越多版本相似的文件。

个性化也不意味着每位教师必须发明一套完全不同的教法。相同材料可以在不同班级使用，共享数学检验标准也有必要；需要保留的是问题从哪里出现、哪些支持先发生、何时转向另一条路的判断空间。探索路线若在全过程被预先锁定，教师承担的主要就是执行，而不再是对现场证据作出专业回应。

怎样避免教研变成更精致的监督

课堂录像、观察表和成长档案可以帮助反思，也可能让教师不断为展示而工作。若每次试验都被直接用于绩效排名，教师更有理由隐藏失败，学生回答也更容易被提前排练。团队需要明确哪些记录用于共同学习，哪些用于正式评价，不能以“只为帮助成长”的名义收集材料，却在事后改变用途。

这不是取消责任。教学内容是否准确、学生是否受到尊重、必要的学习机会是否得到保障，都需要组织层面的要求。区别在于，专业试验允许在底线之上暴露不确定性，教师可以报告“这个任务没有得到预想反应”，而不立即被解释为态度或能力问题。没有这样的空间，教研只能研究已经修饰过的课堂。

对于大班额、跨年级任教或缺少稳定教研时间的教师，成长任务也应控制规模。要求每周完整转录一节课，可能挤压准备与休息；保存三份有代表性的作品并写清选择理由，反而更可持续。选择少量材料时要承认其不能代表全班，但不必因此放弃开始观察。

组织者还需检查自己的工作有没有造成重复负担。同一问题若要求教师提交反思、案例、日志、总结四种文稿，文字数量可能增加，观察却未增加。可以让一份证据记录服务一次讨论、一项修改与一次回看，减少为证明自己在研究而不断制造文档的需要。

一次可以执行的教研设计

以下是一项试用设计，不是对我既有活动的复原。会前，每位参与者只带一份学生作品，说明任务与允许的帮助，不先下“懂了”或“不懂”的结论；团队先分别写下能从作品确认什么、尚不能确认什么。彼此判断不同的地方，成为本次研讨的对象。

讨论时，由执教者先提出最想弄清的一点。其他人用问题和证据帮助缩小范围，不急着轮流列建议；若有人提出教学改变，需要同时说明希望获得哪一种学生反应，以及另一种反应出现时如何解释。团队最后选一项可实施调整，明确哪些旧安排暂时保持，避免一次改动过多而无法回看。

试教以后，把同类作品与之前的材料并置。首先确认任务与支持条件有无改变，再讨论教师是否获得更清楚的学生判断依据；即便正确率没有上升，也可能发现原来误判了困难所在。这样的发现不能被包装成教学成效，却可以成为下一轮更合适的起点。

最后留一个“教师回看”的问题：这次证据改变了你对原教案哪一处的理解？回答不能只写“要关注学生”，而应指明过去为什么选择那个安排，现在知道它在哪些条件下有用、哪里需要修改。若暂时没有改变，也应如实记录，可能是原判断仍有支持，也可能是本轮观察尚不足以区分解释。

失败与反复怎样进入成长记录

专业成长并不沿着一次成功持续上升。教师在一个熟悉单元能够等待学生解释，换到陌生内容时又可能急于讲解；在有同行支持的公开课上敢于试验，回到繁忙常态课堂却可能恢复旧安排。这些变化需要具体说明条件，而不能笼统归为“理念没有内化”。

记录反复，可以帮助区分需要增加哪种支持。若教师知道要观察什么但缺少时间，组织安排可能比再次培训更重要；若他能复述方法却不能辨认学生回答，

仍需要共同分析材料。把所有反复都解释为意志薄弱，会让教研错过能够改变的条件。

教师也有权暂时保留一个与指导者不同的判断。只要数学与学生权益的底线得到保障，可以约定用后续材料比较，而不要求当场语言一致。和谐的教研并不是大家都认同同一句结论，而是分歧能够进入证据与行动，双方知道接下来怎样继续判断。

在回看中，也应保留教师没有接受某条建议的理由。拒绝可能来自误解，也可能因为建议与学生起点、课时限制或当前学习目标不相适应；教研者不能把不同意自动归为抗拒成长。双方可以把理由转化为下一次观察问题，检验哪些限制能够调整、哪些判断仍有依据。这样，教师既对自己的选择负责，也不必以服从所有建议来证明专业态度。

一次教研结束后，组织者同样可以保存自己的原判断与修改记录。哪些建议被现场证据推翻，哪一次等待比提前纠正更有用，哪一种示范让教师误以为必须照搬，都值得进入组织者的成长档案。共同成长因此不仅是所有人一起进步的愿望，也包括指导者允许别人帮助自己重新认识指导。

怎样算本章说错了

本章主张，从教师可承担的具体问题出发，并保留回看证据，有助于形成可使用的专业判断。这一主张若要获得比较性支持，需要与其他支持方式在相近条件下比较，不能只依赖一位教师的感人叙事。若教师表达的满意增加，却不能独立识别学生困难、调整任务或说明选择理由，不能宣布专业理解已经增长。

若共同分析旧课只让教师学会套用新术语，而行动没有可辨认变化，本章所设计的回看环节应修改。若小步试验长期使团队回避重要问题，或者共享资源被片面强调个性化所削弱，也要重新平衡支持方式。能否承担不是降低标准的永久理由，而是确定下一步条件的依据。

带走的话

教研的成果，应包括教师能够重新解释并调整自己的旧课，而不仅是一份被多人修改过的新教案。

材料与判断

教研叙事主要参照文稿 16、15、03 及 05，全域备课参照 18，成长支持与实践反思参照 17、20、22，具体索引见附录 F。这些材料作为我及合作者的经验记述使用；新增研讨程序、周长面积任务和生活类比属于本书设计。公开课表现、教师满意与学生学习改善分别评价，现有叙事不独自承担其间的因果解释，也不用于教师心理诊断。

留给下一章的问题

当教研资料、学生作品与教学建议可以由机器迅速整理时，教师获得支持的速度可能提高，但判断被代做的风险也会随之出现。下一章讨论 AI 进入课堂之后，怎样分清谁生成了产物、谁承担了理解，以及什么证据能够让我们辨认两者的区别。

第 23 章 AI 进课堂以后 孩子老师与机器

课堂现场 漂亮解答是谁的理解

文稿 19 讨论跨学科入项课的优化，文稿 20 与 22 提醒教师警惕活动形式替代思考。这些原稿并未提供本章所需的 AI 课堂实验，因此下面四种场景均为教学设定，用于分析可能的使用方式，不表示这些场景已经实测，更不能据此推算发生率。我们从不从产品宣传判断学习效果，而从儿童在任务中承担的活动开始。

设想学生面对一道面积比较题，先把题目交给 AI，屏幕很快给出图形、公式和分步说明。他把解答抄进学习单，课堂展示时也能顺着文字读下来，成品比此前的作业整洁得多。老师收起屏幕，请他在原图中指出哪一块移动到了哪里，他却无法说明。我们此时能够确认产物完成，却还不能确认其中的关系已由孩子建立。

这个差别不是 AI 出现后才有。过去，教师板书、家长讲解与参考答案也可能完成学生尚未完成的推理；AI 使这类产物更容易随时获得，更需要评价区分帮助的来源。孩子接触优秀解释当然可能从中学习，但“看过解释”与“能够独立重建解释”之间仍然需要证据。

另一个学生使用 AI 时先交出自己的图，请机器指出可能存在的错误。机器声称某次割补改变了面积，孩子却回到各部分对应关系，说明没有重叠、没有遗漏，并要求机器重新检查。这里的学习机会来自孩子提出、检验和修正判断的活动，而不是屏幕上是否出现了一段流畅回答。即便 AI 随后认错，也只能作为对话中的一个反应，数学结论仍须由图形与推理支持。

因此，本章不试图裁定机器是否已经具有理解，也不预言它永远不能理解。课堂中首先要回答的是一个更具体的问题：这个用法让孩子获得了哪一种原先不能独立完成的判断，又有哪些关键判断始终由外部代为完成？不同用法可以产生不同答案，不能仅凭“使用 AI”三个字概括教学价值。

这一章要说的话

AI 在课堂中的作用应按学习者获得的证据判断，而不按产物的精美程度判断。它可以帮助准备变式、生成待检验解释、降低某些表达障碍，但这些帮助是否促进理解，需要根据学习目标，从解释、迁移、反例、延时和回看等观察面收集适当证据，并记录帮助条件；不要求每次活动同时满足全部观察面，也不以回看作为所有学习的必要条件。教师需要设计支持逐步撤去后的任务，也要承认某些合理工具本就可以长期保留。

本章把四种失败作为诊断问题：产物替代形成、依赖固定组合、伪碰撞，以及把流畅当成理解。四者可能交叉发生，不能当成对所有 AI 使用的互斥分类。它们的共同用途是提醒教师：技术提供了什么，与孩子形成了什么，应分别留下记录。

第一种失败 产物替代形成

在第一个教学设定中，孩子用 AI 生成了分数除法的解释：“ $4 \div 1/3$ 表示 4 里有多少个 $1/3$ 。”随后工具画出四张饼，每张分为三份，给出 12 份。孩子可以把这段话提交为作业，却未必理解所数的单位是三分之一张，也未必能区分 12 份与 12 张；答案中的数量关系需要回到他的行动中检验。

教师可以先保留工具输出，再给一张空白图，请孩子自己表示同一个任务，并标出“一份”是什么。若孩子能画出十二个三分之一张，又能说明它们合起来仍是四张，就出现了工具文本之外的关系证据。若只是照着画出十二个不等大的图形，则需要继续辨别他是否理解单位相同，而不能因为图像数量对了就结束。尺寸不同也可能只是示意画法，应先请他说明每块所表示的量，不能单凭画得不等大判定单位不一致。

这里不宜把复制一概视为无价值。临摹图形、阅读示范与模仿语言都可能是学习的起点，问题在于是否把起点直接认作终点。教师可以允许孩子先借用表

达，再设计一个需要重组的任务，例如改变每份大小，要求他重新确定单位与份数；只改数字但保留同一文本模板，有时仍不足以显示关系重建。

日常使用导航可以作类比。跟着语音到达目的地，说明导航与行走者共同完成了任务，却不一定说明行走者已经认识路线；但多次使用导航也可能帮助他认识街道，关键在于他是否开始辨认方向、地标与替代道路。课堂同样不必羞辱借助工具的人，而应分清任务完成与能力形成的证据。

产物替代形成还可能发生在教师一侧。AI生成一份写满学生主体、核心问题与评价标准的教案，教师未核数学条件便直接使用，随后把完成教案当成完成备课。教研者可以要求教师解释其中一项任务为什么适合本班、学生可能怎样误解、哪一种反应会促使他改题。若这些问题无法回答，教案仍是一份待学习的材料。

第二种失败 依赖固定组合

第二个教学设定中，孩子在固定工具、固定提示和固定图示一起出现时，能够顺利解决问题；换成纸笔或换一种界面，就不知道从哪里开始。我们不能立即把这种变化解释为孩子完全没有学习，因为新界面本身也可能增加操作负担。需要区分依赖的是表达通道、任务记忆，还是关键数学判断始终寄存在外部。

例如，工具每次自动把一个整体等分，并高亮一个单位，孩子只需数高亮区域。撤去自动分割后，他无法说明为什么必须等分，这提示等分的判断可能尚未进入他的活动。教师可保留熟悉图形，只撤去高亮；再保留高亮但改变整体，观察哪一步开始困难。逐项改变支持，比一下子拿走全部材料更能找到依赖的对象。

长期使用工具并不天然意味着失败。尺子、数轴和文字记录本来就是数学活动的一部分，儿童不必为了证明理解而把所有外部支持都丢掉。教师需要问工具承担的是繁琐计算、记录和呈现，还是本次学习目标所要求的关系判断；只有后者被持续代替，才构成本章关注的形成问题。

一个会使用厨房秤的人，不需要证明自己徒手就能称出精确质量。他需要知道称量对象、单位、清零与读数意味着什么；如果离开某款会自动选择单位的电子秤便把克与千克混淆，问题就在单位理解，而不是工具使用本身。这个类比提醒我们，把“独立”理解为独自不用任何工具，可能会误伤合理的数学实践。

因此，工具撤离任务应围绕目标设计。研究面积守恒时，可以保留剪纸和网格，撤去自动拼合动画，让孩子自己决定怎样移动；研究口算熟练度时，计算器承担的功能则需要另行规定。公平的评价不是给所有学习内容设同一个无工具标准，而是清楚说明哪一项判断必须由学习者承担。

第三种失败 看似发生了碰撞

第三个教学设定把 AI 安排成一个“爱犯错的同学”。它先说长方形周长相等，面积就相等；学生齐声说错，老师展示早已准备好的反例，接着进入公式练习。课堂看似出现争论，但如果删去 AI 的那句话，学生仍然只是听老师给出反例，那么机器的参与可能没有改变他们承担的思考。

这并不意味着任何可由教师替代的工具都没有价值。AI 可能节省备课时间、丰富错误表达或让某些学生愿意提问，这些都是可以另外观察的用途。所谓伪碰撞，具体指教师把一次装饰性错误展示解释成孩子经历了认知修正，却没有保留儿童原判断、比较过程和修正依据的证据。

较有信息量的设计可以先让学生独立判断，再展示两种不同解释，要求每个人说明哪一种更能解释给定图形。若学生原本就知道两种解释的差别，这个任务可能主要用于练习表达；若有人原来坚持周长相同面积相同，之后用反例修改判断，才出现需要进一步追踪的变化。没有原始判断，不能凭课堂热烈程度补出一场内心冲突。

错误还必须具有数学上的可辨认结构。把一个明显荒唐的答案交给儿童嘲笑，可能只训练他们猜测教师意图；选择“周长相同所以面积相同”这样的解

释，则可以追问它为何有吸引力、在哪些图形上碰巧成立、什么条件使它失效。教师应让孩子检验关系，而不是把 AI 当作一个供集体战胜的笨角色。

同样，不需要为了符合本书的发生语言而强迫每节课出现戏剧性反转。孩子可能通过比较逐渐发现限制，可能先提出新问题，也可能在一次直接说明后重新组织旧经验。评价应追踪具体变化，不能把“必须撞一下”变成另一种预设表演。

第四种失败 把流畅当成理解

第四个教学设定中，AI 连续写出几段有关平均数的解释：平均数代表整体、能够移多补少、受极端值影响。文字之间衔接顺畅，教师便认为材料足够准确，学生读完也觉得自己懂了。可是，当问到一组数据中的某个实际值恰好等于平均数，两者是否具有相同身份时，师生可能都需要重新辨认。

流畅的语言降低阅读阻力，却不能代替对象与关系的核查。平均数可以在特定意义上概括数据，但“代表”不等于每个个体都具有那个数值，也不意味着任何场景都适合用平均数作决策。教师使用 AI 材料时，应先核对数学定义、条件、例子的对应与结论范围，再判断语言是否适合儿童。

这种误认也可能发生在学生的表达上。孩子学会生成一段规范答案，教师听到“总量不变”“单位相同”等词就迅速肯定，但追问具体哪个量、哪个单位时，答案便失去支撑。第 21 章要求原始表现与解释分开记录，在 AI 环境中尤其重要，因为现成的规范表达更容易获得。

类比一份写得漂亮的维修说明，文字通顺不代表它适用于眼前这台机器。读者需要确认型号、故障条件与操作后果，而不能以说明语气肯定就跳过核查。数学解释也是如此：一个故事中的分数若整体改变，后面的同一分数可能不再表示相同数量；术语没有变，不意味着关系仍然成立。

教师不必要求儿童承担所有材料审核责任。成人应先完成基本正确性与年龄适切性检查，学生再在被明确设定的争议范围内判断。若教师明知生成内容可能

错误却不审查，任由儿童自行分辨，技术就把本应由教师承担的准备工作的推给了学习者。

三种错误解法怎样成为一节有内容的课

下面是一项可试用的教学设计。教师选定“周长相等是否意味着面积相等”，事先准备两个网格长方形：边长分别为1厘米和5厘米、2厘米和4厘米，周长都为12厘米，面积分别为5平方厘米与8平方厘米。计算经过人工核对，材料不依赖AI临场生成的准确性。

第一种候选解释声称周长相同所以面积相同；第二种只数边界上的格段，却把得到的数写成平方厘米；第三种分别计数覆盖的单位正方形，指出面积不同。候选解释可以由教师写，也可以借助AI起草后核对；其教学价值来自错误结构清楚，而非来自来源的技术身份。

先请学生单独选择并写下依据，允许画图 and 标记。讨论时不公布谁对，让持不同观点的学生指出自己所数的对象；教师追问“你数的是一段长度，还是一块面积”，把争议拉回单位与对象。随后请学生修改自己的原稿，保留改动痕迹，并说明哪一条证据使他改变或保留判断。

课末回到曾经做过的一道长方形题，请孩子解释原来的周长算法与面积算法分别在数什么。这里才出现回看机会：新比较是否使原有公式获得更清楚的对象身份。若学生只在新题中选对第三种解释，却不能回看旧式，教师应分别记录两项表现，把旧式联系记为当前尚未显示，并继续区分任务负担与关系困难，不能由一次未显示直接断言联系不存在。

最后换一个不带网格的长方形，保留边长数据，检验孩子能否借助想象或补画单位说明关系。工具可以继续用于展示，但不能自动替孩子画出所需的全部关系；否则教师看到的仍可能是共同产物，而非孩子能够独立承担的判断。这样的设计同时承认支持的价值，并使支持撤去后留下什么成为可观察问题。

答案已经正确 孩子怎样接过下一步

下面是一项自构的烙饼教学设定，不是原稿中的 AI 课堂实录。三张饼，每张两面，每面连续烙 3 分钟；锅里最多同时放两张，同一张不能同时烙两面，翻面、换饼不计时间。教师先核准 AI 展示的正确方案：0—3 分钟烙甲正、乙正；3—6 分钟烙甲反、丙正；6—9 分钟烙乙反、丙反。六个面共需 18 面·分钟，两个位置同时工作，至少要 9 分钟；方案恰好达到下界。孩子可以保留屏幕、饼片和时间表，不必靠背下日程证明理解。

教师随后只改变一个条件：锅能同时放三张了。此时不急着请 AI 重算，先请孩子指出原方案还能不能用，哪句话需要重新检查。原来的 9 分钟日程依然可行，原来每面 3 分钟、总工作量 18 面·分钟也仍然成立；失去支持的是“至少 9 分钟”的容量依据，不能据此继续断言 9 分钟最优。把条件改掉不等于所有旧话都错了，也不等于结论必然反转：还要找新依据。在这里，三个正面同时烙 3 分钟、三个反面再烙 3 分钟，提供了 6 分钟的可行日程； $18 \div 3 = 6$ 又给出下界，两者共同支持新的最优判断。

这时可让 AI 根据孩子的批注改写时间表，孩子检查六个面是否各完成一次、每轮是否超过容量，再决定接受哪部分。教师记录的是谁发现条件改变，谁提供新日程，谁核验最优性。若新方案由 AI 先给出，孩子随后检查准确，可以记录本次核验表现，却不能把日程的提出也记在孩子名下。若孩子只把最后答案改成 6，却保留原来的三轮日程并称其“6 分钟方案”，修改还没有进入后续使用；若他把每面时间也改成 2 分钟，则改动了题目没有改变的条件。这些表现可以同时出现，应分别查明，不能给孩子贴一种固定标签。

下一问由孩子选择，教师提供可进入的空间，不规定必须继续缩短时间。孩子可以问：“现在最快，可我不想同时看管三张，怎么办？”这提出了另一个约束。若进一步约定，每张正在烙的饼都计入同时看管数量，并把这个数量限制为两张，仍在此限制下求最短时间，原来的 9 分钟方案又成为可行且最短的方案；不是先前的 6 分钟计算错了，而是允许的安排改变了。孩子也可以另问：“只把

甲乙丙重新编号，时间会变吗？”此时物理对象和容量没有改变，重新命名不要重算最优时间。提出问题之后，仍须说明自己改变了什么，不能只因问题出自孩子就宣布发生了创造。

假如 AI 建议“把每面改成 2 分钟，答案就更快”，孩子可以拒绝，因为他此刻要研究的是锅容量。也可以接受它作为另一个问题，但须把新问题与当前问题分开。拒绝本身不加分，接受也不扣分，依据是否清楚、后续安排是否符合所选条件才是观察对象。教师可以问“你接下来想先查什么”，却不必要求每个孩子依次说出保留、撤回、更新三个词。有人先摆出新日程，有人先算下界，有人先检查旧表是否还能用，都可能提供有价值的证据。

自主性在这个任务中表现为孩子逐步承担条件与结论的判断，而不是把工具撤光。需要朗读、绘图或记录支持的孩子可以继续使用；若 AI 承担了某个关键判断，就标明该判断是在帮助后完成。会核查这个例子，只能支持这里的当前表现。要讨论他本人怎样变化，还需对照先前同类任务中的原话或行动；先前判断原本正确而现在能够处理更多条件，也是一种可能的进展，不必先制造错误再让他改口。

让学生向 AI 解释旧知识的新位置

另一项教学设定是让学生教 AI 理解一个旧题，但“教机器”只是组织方式，不能自动证明孩子学会了。学生可以先写下自己对 $28+4$ 的解释，再交给工具，请其指出不清楚的部分。教师事先要求：工具只提出一项澄清问题，不直接重写整段答案，学生保留修改前后版本。

如果工具问“竖式里的 1 表示一个一吗”，学生需要回到自己的图与计数单位说明；如果工具直接生成一篇更优美的解说，学生只需点击接受，就又回到产物替代形成。教师应观察孩子怎样回应疑问，哪些修改由自己作出，哪些由工具直接提供。最后仍需一个离开对话记录的短任务，检验他能否再次说明同一关系。

机器的反馈也可能不合适。它可能追问超出年级的概念，或把儿童尚不规范但数学意义正确的语言判错；教师需要保留纠正工具的权利，并让孩子知道公共术语与个人表达可以在关系上相通。不能因为机器给出较低评价，就否定一个能够用图说明的合理解释。

在这一设计中，AI 最适合被看作一个需要审查的回应来源。它可以使学生遭遇追问，也可以让学生学习核查回应是否听懂了自己；但“机器说我讲对了”不能成为数学正确性的最终依据。最终要回到数量、图形、条件和可检验的推理。

教师怎样记录人机协作中的贡献

第 21 章的记录框架可以直接用于这一情境。保留学生初次反应、工具给出的内容、教师介入的位置和最后独立任务，便能看见一段学习活动中的贡献分布。没有必要保存所有冗长对话，优先保存导致解释改变的关键片段，同时避免把与研究无关的学生个人信息输入外部服务。

记录中可以分别标出提出问题、选择表示、检验关系、修改解释、生成文字等动作由谁承担。若孩子始终只负责复制与确认，成品再完整也不能说明本次目标关系由他建立；若工具负责排版与朗读，孩子承担比较和反驳，则工具可能降低了无关负担。具体贡献比笼统的“AI 使用时长”更接近教学问题。

对有表达困难的孩子，语音转写或图像整理可能使已有想法更容易被看见。教师应核对转写是否忠实，避免工具自动补全推理后把新增内容记在孩子名下。支持可表达性与代替形成，是需要细查的边界；不能为了避免依赖而拒绝一切辅助，也不能因辅助改善了输出就宣布理解增长。

班级实施还要考虑可获得性。若一些孩子只能在学校使用工具，另一些孩子可以随时获得家庭支持，作业产物差异可能混入资源差异。评价学习目标时，应尽量提供共同的任务条件，并把工具使用机会单独说明；不宜把购买服务或熟练操作界面的优势直接转化为数学理解评分。

技术选择服从问题而不是反过来

教师决定使用 AI 之前，可以先写一句不含技术名称的学习目标，例如“学生能解释面积单位怎样支持两种面积比较方法”。随后判断工具能否提供原先难以获得的材料、回应或表达支持，以及教师如何核查这些支持。若没有清楚用途，暂时不用也是一个有根据的教学决定。

如果一块纸板与两张学生作品已经足以使差异显露，AI 未必需要进入学生面前；它仍可在备课阶段帮助教师提出候选反例，再由教师筛选。若课堂需要即时比较多种学生表述，工具可能承担整理，但教师要检查归类是否抹去重要差别。技术的进入位置可以不同，不必每节课都安排人机对话才能称为应用。

评价技术效果时，也应区分效率与学习。节省备课时间、使展示更清晰、增加学生参与，都值得记录，但不能自动推出概念关系更稳定。反过来，一种工具如果学习收益有限却显著减轻教师重复劳动，也可能有合理价值，只需准确说明它改善的是哪一件事。

把人机贡献放回理解发生的过程

SDE 语言在这里要求分别追踪显露 S、差异序列 D 与特征纠缠系统 E。屏幕上出现一个成品，不自动表示儿童形成了其中的关系；一次差异被提出，也要继续问由谁检验、何时进入后续使用。材料、既有概念、自我参与及信息表达的条件都影响观察，不能固定分派为“机器给环境、学生做差异、教师负责显露”。

第 18 章的六路径帮助比较入口，不作为 AI 提示词的统一流程。一个儿童可以从自己的错误图开始，另一个从实际任务或现成公式开始；共同的是对数学依据负责。工具可以长期承担朗读、记录或呈现，但本次学习目标所指的关键判断须明确归属。

有范围的回写为人机协作增加了一项检查：条件改变后，儿童能否辨认仍有效的部分、修订失去支持的部分，并在下一项活动中实际采用修订。它的独立信息价值是待检验主张，须与当前答对、解释和常规迁移等证据比较。若工具负责

了这一关键判断，记录应承认其贡献，再安排适当的独立任务；不能因活动形式完整便宣布循环已经闭合。

怎样算本章说错了

本章提出的四种失败是分析框架，还不是经过抽样验证的分类体系。若实际课堂的重要问题无法被它们描述，应增加或改变分类，而不是把所有困难强行归入已有名称。若教师能够通过更简单的记录获得同样判断，也应减少记录负担，不为保留框架而要求完整保存所有对话。

若某种 AI 支持在适当比较中持续改善独立任务、延后表现与回看证据，本章不能因为工具参与较多就否定其价值。相反，若产物更美但独立表现没有相应变化，就应把结论限定在产物层面。当前章节没有提供这样的比较数据，因此不报告 AI 提升或降低数学理解的效应量。

本章还提出一个更具体的待验预测：在初始答对、解释和常规迁移表现相近时，能够区分条件变动所影响与不影响部分的儿童，在未练过的任务中会更少漏改，也更少乱改，并能较早选中需要检查的地方。检验前应保存这些预测指标，固定未用于调整规则的结果题，同时放入实质变条件与只换编号的题，分别记录首次判断和提示后表现。若新增记录不能提供原有指标之外的信息，便应收缩这一主张；若孩子逢变必改，或只会复述教师的三句话，说明可能练出了迎合，不能解释为判断自主性增强。

带走的话

评价人机协作的学习价值，要看帮助之后孩子能承担什么判断，而不只看人和机器共同交出了什么作品。

材料与判断

文稿 19、20、22 提供任务与活动形式的实践背景，未提供 AI 课堂实验。四类情境、错误解法、学生教 AI 及烙饼条件变动均为本书设计。有关条件判断与

贡献分配的思想线索另参照王德生《AI 对科研的冲击为何首先表现在数学上？》第 12、13、15 章及《教育的产品是结晶》第 19—21 章。它们不作为本章效果已经验证的证明。实施者应按实际服务、学校安排和学生情况选择工具；本章未预设特定产品具备某项实时能力。

留给下一章的问题

走到这里，本书已经提出许多看课堂的新问题，也给出若干可试用工具。它们有些源于真实经验，有些属于解释，有些仍是设计建议；下一章必须把这些不同资格重新分开，明确哪些证据能够支持本书，哪些发现会迫使我们改写它。

第五编 还没回答的问题

第 24 章 本书可能错在哪里

课堂现场 当支持理论的表格出现分歧

教学理论常从令人信服的瞬间出发：儿童指出一个新关系，老师重新解释一段旧经验，原来分散的方法接通了。研究还须面对另一种材料：原始记录是否完整，统计表能否互相核对，竞争解释是否同样能够说明变化。理论的可靠性取决于这些较少戏剧性的检查。

文稿 02 所载面积研究，是本书追问延后变化的重要背景。现有稿件记录其涉及五年级两个班 138 名学生、同一问卷前测与三个月延后测、12 名学生课后访谈；同时报告第二题的汇总 45% 与交叉表 45 人及 32.6% 不一致，第一题所列 88.4%、7.2%、7.4% 合计 103%。这些记录要求资料持有人回到原表及原始问卷核准分母、类别与版本，不能在原始资料缺失时猜测修数。

即使数字全部核准，该研究也没有直接测量本书的全部构念：缺少全体学生即时独立稳定理解的基线，且未采用本书回看任务检验新旧联系。三个月后有人使用数格子，因而不等于本书测得了回弹。原经验仍能提出有价值的问题，只是不能替后来产生的概念提供其未曾收集的证据。

把主张分成三个可分别承担的层次

第一层是教学与描述价值：回看能否帮助学生和教师把一项新旧关系说清、做清，并形成更合适的下一问。详细作品和可追溯个案能够提供初步支持，不必等到大型实验结束才开始研究。

第二层是诊断或预测增量：在已经知道起点、当前解释和常规迁移表现以后，条件依赖与后续使用记录是否还增加有用信息。这需要独立结果和公平比较；多个动人案例不能替代比较，也不能把任务名称不同当成测到了不同能力。

第三层是教学的因果作用：安排明确的依赖核查，是否使儿童之后更能有根据地保留与修订。它须同练习时间、教师反馈、表达负担及原有水平等竞争解释

区分。当前关系接通、本人发生变化与变化促成进步，分别属于不同的判断，不能写成一句话。

本书不把回看设为所有理解的必要充分条件。首次概念学习、行动先于语言的理解，以及合理保留外部工具的活动，都需要适合其对象的证据。这里集中检验的是第9章及第14章提出的有范围的回写：修订具有选择性，结论和支持理由分别判断，修订是否进入后续使用。接受这些区分，使主张更精确，并不预先保证它们具有独立优势。

练得更多是否已经解释了结果

一个加入回看环节的班级，可能比常规班级多接触了旧题、多说了理由，也多得到教师反馈。若之后表现更好，回看所涉及的关系重组、额外提取与更多学习时间便混在一起。本书不能把全部增益都归到自己最重视的机制上，应先承认教学安排中的共同变化。

较有区分力的比较，可以让两组在相近时间内接触相同核心内容，一组安排明确的旧知回看，另一组安排质量相当的解释或迁移任务。这样的设计也不容易，因为不同任务难度、兴趣与反馈机会未必完全相同；研究应如实报告实施差异，而不是因计划表时间相等就宣布实际条件完全等同。

练习量还包括课堂之外的学习。学生可能在家庭辅导、作业或补习中再次接触相同题型，延后表现便不只反映一节课的影响。研究者可以记录有关经历，至少在解释时承认无法完全控制的部分；不能在没有记录的情况下假定所有儿童经历相同。

如果控制合理的练习与熟悉度指标后，回看不再提供额外解释，本书应把它定位为组织练习和反思的一种方式，而不是独立机制的证据。这样的收缩不会使工具必然无用，却会改变它应被如何宣传、比较和研究。教学价值与理论独立性需要分别回答。

会说得清楚是否就是回看表现更好

回看题通常要求解释新旧知识关系，表达能力因此容易成为混杂因素。一个数学关系已经形成但语言组织较慢的孩子，可能在口头任务中表现较弱；另一个擅长模仿教师措辞的孩子，则可能得到较高评价。若评分只看完整句子，测到的可能部分是表达熟练，而不是本书想研究的关系变化。

解决办法不能只是把所有任务变成画图。图形表达同样有工具熟练与空间组织负担，操作也可能受到动作速度和材料经验影响。较稳妥的办法是提供可比较的多种通道，记录儿童选择的方式，并检查不同通道是否支持相近的关系判断；必要时用更短的追问确认，而不要求每个孩子展示同一种漂亮表达。

评分也应区分关系证据与修辞。孩子说“两个都是十个一变成一个十”，若不能指出具体对应，只能获得有限支持；孩子不使用这个句式，却能在两份作品上准确连出对应并完成变式，则应保留行动证据。若规则无法做到这一点，“旧知改名”便可能退化成教师新教的一套口令。

本书还需允许某些关系不能在短时间任务里完全显露。一次观察没有得到证据，不能直接推断关系不存在；但也不能因此把所有失败都解释成“有理解，只是没显露”。研究需要事先说明可以增加哪些合理通道、何时仍记为证据不足，防止解释在任何结果之后都能够自我保护。

教师效应与新方法效应怎样分开

实施新方法的教师往往投入更多准备，也更愿意观察学生反应。若对照班只是常规推进，差异可能来自教师期待、反馈密度、材料质量和课堂气氛，而不只来自回看环节。把新方法交给最熟悉理论的教师，把常规教学交给另一位教师，尤其难以区分方法与人。

研究可以通过多位教师、多所学校和较清楚的实施记录减少这种局限，但不能仅因样本来自多校就宣布所有问题已经解决。教师怎样理解任务、实际执行了哪些步骤、学生获得多少反馈，都需要观察。某个班未达到预期，可能是理论不

适合，也可能是设计没有被执行；两种解释必须通过事先规定的实施证据区分，而不能事后只选择保护理论的一种。

同一教师教不同班级也有利弊。他可能使教学风格较接近，却可能把回看思路自然带入对照班，使两组实际差异缩小；不同单元轮换也会受到内容难度和顺序影响。研究方案应把这些问题写在设计阶段，保留执行中的偏差，而不是等结果出来之后才决定什么算有效实施。

对一线教研而言，未必每次都能做到严格比较。可以先把目标限定为工具可用性：教师能否理解任务，学生是否能够作答，评分规则是否清楚，记录负担是否可承担。这样的研究范围较小，却能为后续比较提供基础，不需要用宏大因果结论证明自身值得做。

三个观察方面会不会被误写成整齐的分类

改名、并存、回弹具有叙事力量，也容易诱使研究者把复杂材料压入三格。儿童的表现可能在不同任务中交错变化，某种方法有联系地保留，另一种关系暂时未显示；一次测量很难描述其全部状态。因此，编码对象应是特定任务与时点的证据，不是给儿童确定一个固定身份。

如果评分者需要不断猜测孩子心里有什么，或者必须参考教师对他的总体印象才能分类，编码就不够公开。规则应尽量依靠可追溯作品、原话、动作及提示记录，并保留证据不足与边界情况。无法分类的材料不是需要藏起来的噪声，它们可能指出理论遗漏了重要状态。

这三个观察方面不构成单向等级。能够灵活选择多种方法的并存，可能比只会一种新方法却不会变通更有价值；回到旧法也可能是面对新条件的合理选择。研究若事先把旧方法记为低级，把新方法记为高级，就会把想要证明的进步写进评分规则，之后再用得分上升证明理论。

本书应预先说明哪些表现支持有联系的并存，哪些表现提示尚未接通，哪些证据才足以谈纵向回弹。若不同状态在后续任务中的表现没有可复现的差异，可

能需要合并、重新定义或放弃某些分类。但不能立即退回“会或不会”就认为问题已经解决，二分法也需要说明它测量的对象与局限。

让最接近的解释面对同一任务

第6章与第9章已经说明，返回旧知并不是本书独有的研究方向。Hohensee（2016）将学生在新学习中注意到什么与旧推理怎样变化联系起来；Martin与Towers（2016）讨论有意促成折返及对既有经验的增厚；Marton与Pang（2013）研究差异如何在保持相同的背景中被经验。它们限制了三种过强判断：不能说既有研究只看最终答案、不会有意安排返回，或只组织材料而不关心学习者实际经历。

以第20章的单位格任务比较：逆向迁移可以追问新学习怎样影响旧的计数推理；适应性专长可以追问儿童是否随约束变化调整办法；变异理论可以分析哪些维度改变、哪些保持，以便使关键关系被辨识。Hatano与Inagaki（1984）已经把理解同恰当调整技能相联系。因此，仅仅把这些问题放在小学课堂，尚不足以证明产生独立机制。

有范围的回写把比较进一步落实到同一份记录：旧理由是否失效，结论能否据另一有效理由保留，需要修改的部分是否进入下一次使用。AGM理论的收缩与修订、Doyle（1979）的依赖维护都已有思想前史；它们提供逻辑比较对象，不能据此推断儿童脑内运行同一个程序。尤其不能以“改得最少”为最高标准，修订首先须满足数学条件。

候选增量因而很窄：把有个人基线的条件依赖记录，与改变、保持、恢复及替代依据任务组合以后，是否比已有任务更准确地辨认后续困难。Hohensee等（2026，2024年在线）也已比较不同教学取向的逆向迁移，促进逆向迁移本身不能再作为首创。若同一结果可被已有概念和更简单的任务充分解释，本书应保留组织工具的价值，不以这组结果主张独立机制优势；机制是否成立仍需相应过程与干预证据。

原始资料怎样接受复核

面积研究的核对须由能够取得原始材料的研究者完成。先以匿名学生编号关联两次问卷，再检查各题评分、策略编码、缺测与分母。 $45 \div 138$ 约为 32.6%，只说明该组数值的算术关系，并不能独自判定 45% 是录入错误；还须知道两表是否采用相同样本和分类。百分比超过 100% 若来自多重编码，应明确说明；若类别本应互斥，则必须纠正。

现有稿件还提示某些表将前后各 138 条记录合计为 276 条。分析个人变化须保留配对结构，不能把同一学生两次记录当成彼此独立的人，也不能凭两组边际比例倒造转移表。准确表达比例与计分均值是否一致，同样要先核变量定义；在这些信息缺失时，不重新估计本书的效果量。

软件输出“.000”不表示概率严格为零，正式报告应采用与精度相符的记法，并先确认方法适合研究设计。数字复核后的表格、数据字典和修订理由应能够相互对应。若原始材料无法恢复，就将该研究限定为背景性材料，保留可核实的设计描述，不再让争议数字承担效果或机制结论。

怎样把候选贡献放进公平比较

附录 C 先提供一线教研可执行的诊断协议。小规模试用检查儿童能否理解题意、是否出现新的负担，以及两位教师能否根据同一材料判读。完成这些工作以后，再依据研究问题规划班级、教师、内容与样本，不能把可用性试用直接扩大解释为效果研究。

第一项比较检查选择性。两组都接受等时、同内容且有正常支持的新旧联系教学；实验差别限定为是否增加明确的依赖核查。结果题同时包含关键条件改变与仅表面改变，分别报告该改未改和不该改却改。若减少漏改却增加误改，可能只是训练出了修改倾向，不能称为选择性改善。

第二项比较检查理由与结论的区分。成对任务分别撤去题目唯一提供的依据，或撤去一项而保留另一有效依据；同时加入依据完整的任务。儿童自己提出

有效替代理由时，应允许保留结论，不能因题目被设计成“需要撤回”便拒绝合法回答。尚无支持时可以悬置判断，支持仍在时不应全盘否定。

第三项比较检查信息增量。先封存儿童对受影响步骤的定位记录，再以不同具体题、不同表示的后续任务检验其独立判断和实际更新。结果内容所需的先备知识仍应具备。控制原有水平、当前解释与常规迁移以后，定位记录若不能提供额外信息，就不主张独立预测优势。合理的检查路线可以不止一条，评分不能奖励教师指定的顺序。

三项比较均以尚未参与修题和调规则的材料复核。预测指标必须先于结果；下一单元起点测若早于三个月测量，不能用后者声称前瞻预测前者。教学比较中，各组共同接受的测量、提示及练习须记录，估计的是共同测量条件之上的额外教学作用。分配与分析还应考虑学生属于班级、同一学生完成多题的结构。

什么结果会改变本书的判断

正式研究前，应约定值得重视的收益幅度、可接受的保持损失以及估计精度，并据此规划样本。如果证据足以排除预定收益，或不该修改的有效判断被破坏而抵消了收益，就收缩优势主张；区间仍宽时则保留未决，不能把不显著直接写成等效。

若工具能够帮助教师提出更具体的问题，却没有额外预测信息，就保留教学对话价值，不再声称独立预测优势。这里收缩的是该项新增信息主张，不能单凭预测无增量认定过程机制不存在。若某些内容有效、其他内容无效，就描述内容与起点条件。若改名主要由提示复述构成，或编码持续依赖评分者偏好，则修订任务和构念，必要时放弃名称。

理论还要接受代价的检验。回看若增加负担、诱使学生逢变必改，或让本来能合理使用方法的儿童因反复解释而混乱，应减少任务、调整支持或停止该用法。实施证据可以帮助区分方案未落实与方案本身无效，但必须事先规定，不得在不利结果出现以后才选择保护理论的说法。

老师可以这样做

一线教师可以先从一项最可能推翻自己的观察开始。若认为儿童已经把等号理解为关系，就给出一个低计算负担、表达方向不同的等式；若认为某次回看有帮助，就安排一个不含原提示的后续任务。不要只收集能够展示设计成功的回答，也要保留最难解释的一份作品。

教研时可以请一位同伴专门提出竞争解释，另一位同伴检查材料是否足以区分。把“也许只是练得更多”写进讨论，并不等于否定教师努力；它帮助团队知道下一轮要保持什么、改变什么。研究的锋利，不只在于能提出新观点，也在于能让自己的观点面临有力量的反问。

带走的话

一本研究理解的书，应把能够支持自己的材料与可能迫使自己改写的材料放在同一张桌上。

材料与判断

本章关于面积研究的疑点来自现有稿件对文稿 02 的材料说明，原始问卷与统计文件尚未在本书中形成可公开复核的数据链。多校比较和三项检验均为拟议方案。理论比较依据 Hohensee（2016）、Martin 与 Towers（2016）、Marton 与 Pang（2013）、Hatano 与 Inagaki（1984）、Doyle（1979）及 Hohensee 等（2026），完整书目信息与使用范围见附录 E。对既有研究的承接不能替代本书任务的实际检验。

留给下一章的问题

当本书承认这些边界，向初中、其他学科与不同儿童延伸时，便不能只携带一个通用口号。下一章要问，哪些关系值得带过去，哪些任务必须重新设计，又有哪些差异会使我们需要另一种解释。

第 25 章 理解之后 留给初中别的学科与每个孩子

课堂现场 一条线索能走多远

文稿 23《课程内容结构化》讨论单元内容之间的联系，也指出活动顺序与知识关系可能脱节。文稿 14 围绕运算一致性追问不同数域中的运算联系，文稿 19 则把视野伸向跨学科入项任务。这些材料使本书不能停在一节课的成功上：一项新理解进入更长的学习过程后，还会怎样变化？

但延伸不是把小学的例子换成初中的符号，也不是把数学中的回看要求直接复制到所有学科。本章以下有关方程、函数、阅读与科学的任务均为解释性教学设计，不代表已在原稿中实施。我们保留“新学习怎样改变旧理解”这条提问线索，同时检查每个领域对对象、证据和正确性的不同要求。

设想一个孩子在小学能够解释 $3+2=5$ ，进入方程学习后却把等号看成把答案推到右边的箭头。教师可以回到那个熟悉的等式，问“如果不知道其中一个数，哪些关系仍然需要保持”。这不是简单复习算术，而是让旧式在新任务中获得一个位置：它成为关于未知数条件的一种具体情形。

再往后，孩子接触函数，同一字母的取值不再总是一个待求的固定数，而可能在规定范围内变化。此时若继续把所有字母都叫“要算出来的数”，过去帮助过他的解释便需要再次调整。旧知改名并非一次完成的仪式，而是对知识用途和边界持续分化的观察方向。

这一章要说的话

本书可以向外带走的是一种有边界的研究习惯：识别已有经验，观察新关系怎样形成，检验它是否改变了旧知识的使用。不能直接带走的是对所有学习者、所有学科都有效的固定流程。每一次延伸都需要重新说明任务对象、判断标准、支持条件以及可能失败的地方。

同样，个性化不能仅仅是把同一条路线分成快慢两档。儿童可能在单位、表示、语言、注意对象或参与条件上遇到不同困难，下一步任务应由这些差异生成。共同的数学标准帮助我们检验判断，个人的探索路径则需要保留从自身问题与经验出发的空间。

等号进入方程以后

小学等式 $3+2=5$ 中，两边表示相同数值。到了 $x+2=5$ ，教师可以问哪个数放进 x 的位置能够使两边仍然相等；答案是 3，但学习的内容不只是找到 3，还包括理解未知数受到什么关系约束。若孩子只记住“移过去变号”，他可能拥有可执行步骤，却不能解释这些步骤为什么保留原来的解。

一个回看任务可以同时呈现 $3+2=5$ 与 $x+2=5$ ，让学生指出什么相同、什么不同，再检验 $x=3$ 与 $x=4$ 是否满足条件。这样旧算式成为代入检验的具体材料，新方程也帮助孩子重新看待熟题中的关系。这里并不需要把所有小学计算都提前代数化，而是寻找适合当前学习阶段的联系。

进一步求解时，两边同时减去 2，使 $x+2=5$ 转成 $x=3$ ，其依据是等量减去同量仍相等。教师需要区分等式成立、变形合法与解集保持等说法的范围，而不是把“关系不变”当作不必说明的口号。某些变形可能增加额外解或受到条件限制，后续学习必须逐步引入这些边界。

例如，在实数范围考虑 $x^2=4$ ，满足条件的数有 2 和 -2；若学生只写 $x=2$ ，便遗漏了一个解。这个例子不是要求小学儿童立即掌握，而是说明过去“算出一个答案”的期待进入新领域后可能需要调整。延伸的价值，在于发现旧经验在哪些地方继续有效，哪些地方必须加条件。

方程学习中的回看，也不应只要求儿童解释老师给出的合法变形。可以提供一项错误变形，要求他通过代入或反例检查是否保持原解；这样既承认规则学习，也要求规则接受具体关系的检验。学生若会用新术语却不能发现明显不等价的变化，旧知与新知的联系仍需进一步观察。

方程与函数不能被一句话并成同一件事

从 $x+2=5$ 走向 $y=x+2$ ，关系的角色发生了变化。前者在给定条件下求满足等式的 x ，后者可以用于描述每个允许输入 x 对应的输出 y ；当再规定 $y=5$ 时，又可以回到求相应输入的问题。两者联系紧密，却不应因此抹去变量范围、对应关系与求解任务的差别。

一个教学设定是把若干输入输出列成表：输入 1、2、3 时，输出分别为 3、4、5。学生先说明每一组如何满足 $y=x+2$ ，再问若输出固定为 5，哪些输入符合条件。这样的回看让方程成为函数关系中的一个受限问题，而不是宣布函数只是“更高级的方程”。

旧的加法经验也会被重新理解。孩子过去把“加 2”看成完成一次计算的动作，现在可以把它看成对不同输入采用同一规则；再比较 $y=2x$ ，就需要区分加性变化与倍数关系。新学习并没有取消原来的计算，它使计算进入了更宽的关系结构。

这种延伸的证据仍要具体。学生能够背出函数定义，不足以证明他会区分输入输出；能画出图像，也不自动说明他能从图中读取关系。我们需要相互连接的任务，检查表、式、图与情境之间的转换，并允许在不同表示中出现不同熟练程度。

本书不能凭小学回看题的可用性，宣称它已经解决初中函数学习。年龄、符号复杂度与课程条件都改变了任务，邻近的逆向迁移研究也已有自己的成果与问题。后续工作应从具体研究与课堂材料出发比较，而不是把本书名称覆盖到已有领域上。

学习困难不是只有一条慢车道

当三个孩子都不会做一道分数题，困难可能完全不同。一个不清楚把哪个整体看作 1，另一个知道整体却不能把图与符号对应；第三个可能计算熟练，但读

不懂问题中的数量关系。若只按同一题型多练或少练来区分，他们获得的帮助就可能与实际障碍错位。

一个教学设定可以用几道负担较低的小任务辨别。先请孩子指出图中的整体，再让他把整体四等分并标出其中一份，随后把这一动作与 $\frac{1}{4}$ 联系起来；如果前两步稳定而符号对应困难，下一步就不必继续增加等分操作。任务的顺序可以调整，观察到的差异决定新的问题，而不是所有孩子都必须从头走完一套检查。

困难也可能来自表达条件。孩子能通过摆放完成比较，却不能用规定句式回答；或者在个别交流中能够解释，在全班面前不愿发言。教师应改变呈现通道和参与安排来继续观察，不能仅凭公开回答较少便认定数学理解较弱，也不能因一次个别表现较好就忽略其常态学习困难。

反过来，承认差异不能成为无期限降低要求的理由。若儿童长期在多个任务中不能辨认基本数量关系，需要更系统地分析教学机会、练习与支持，必要时与家庭及学校相关专业人员合作。本文不根据几道题给儿童作医学或心理诊断，也不把所有困难归于某一种认知标签。

生活中两个人都迟到，一个因为不认识路线，一个因为交通工具临时故障。给前者增加出门时间可能暂时缓解，却没有帮助他认识路；给后者重复讲地图也可能没有用。这个类比说明，表面相同的结果需要不同的解释，个性化首先发生在对困难的辨认，而不是发生在任务封面印上姓名。

个人版学习任务怎样生成

个人版任务的起点，可以是一份具体作品、一段解释或一次失败。教师先保留儿童的判断，而不急着把它归入预设错因；随后提出一个能够区分两种可能解释的小问题。例如，孩子把边长变长看作角变大，可以固定张口只延长边，也可以固定边长改变张口，看他实际依据哪一项变化。

若儿童在第一种变化中仍坚持角变大，任务可以转向重合比较；若他已经知道张口不变，却画图时表现错误，支持方向可能是作图动作。两名学生面对同一原题，因证据不同而进入不同下一步，这才使任务路径随学习发生。统一的是角的大小与边长无关这一数学关系的检验，而不是统一每个人必须经过哪一种活动。

教师还需让儿童参与选择。可以提供两种合法表示，请他选一种更能说明自己的想法，并解释为什么；也可以让他提出一个最想检验的变化。选择不是装饰，如果无论孩子选什么最后都被带回同一串预设问答，个性化仍然只是表面形式。

个人版不意味着完全孤立的学习。儿童可以在同伴作品中发现自己没有注意的依据，也可以共享材料与公共解释；个体差异进入共同讨论，反而可能产生更丰富的比较。关键是团队不能要求每个人在同一时刻说出同一句结论，教师需要记录谁已建立联系、谁仍需另一种支持。

使用数字工具生成任务时，也应保留这项判断。根据正确率自动增加难度，主要调整的是数量与复杂度；若要帮助关系形成，还需知道错误指向何种对象和条件。工具可以提出候选任务，教师与儿童通过实际反应决定下一步，不能把自动推荐路径当成对个体理解的完整认识。

走向语文时哪些东西需要改变

阅读学习也可能出现新经验改变旧理解的情形。读完故事结尾，读者回看前面的一个动作，发现它原先被理解为冷漠，现在可能与隐瞒、保护或误会有关。这个类比与数学的回看有相通方向，但文学解释的证据方式不同，不能要求所有合理阅读收敛到唯一的数值答案。

一个教学设定是先保留学生对人物某个行为的解释，读到后文后请他重读原段，说明哪些词句使解释发生变化，哪些疑问仍未解决。新的理解需要文本依据，也允许多种解释在证据范围内并存；教师不能只因为某种解读更符合自己的

道德期待就判为更深。回看在这里关心证据如何重组，而不是套用数学中的互斥编码。

若后文没有足够信息，保留原判断或承认不确定也可以是合理结果。不能为了制造“旧知改名”而要求学生每次阅读结尾都推翻前面观点；有时新信息只是加强原来的解释。发生不必表现为戏剧性反转，稳定地保留一个经过新证据检验的判断也有价值。

因此，向语文迁移时，应先由学科教师重新定义理解的表现、证据的充分程度与评价方式。数学的反例、语文的文本细节和历史的史料互证不是同一种操作，不能用一个发生词汇消除它们的差异。本书提供的是可供讨论的问题，不是跨学科通用评分表。

走向科学时要让经验接受实验约束

科学学习中，儿童可能根据生活经验认为重物一定落得更快。新的观察可以使他回看原来的经验，区分物体形状、空气影响与比较条件；但要讨论具体物理结论，必须明确模型与实验限制。不能只安排一次演示，让儿童说出教师期待的结论，就认为旧经验已经被科学解释取代。

较适合本书方向的任务，是让学生先写明原来判断来自哪些情境，再设计尽量只改变一个关键条件的比较，并在结果出现后说明原经验仍适用于什么、不能说明什么。此处是研究思路的类比，不是本书已完成的科学教学试验。学科知识需要由相应教材、实验与可靠资料支持，不能从 SDE 关系语言直接推出自然规律。

实验失败也可能改写对实验本身的理解。结果不稳定，可能是条件控制不足、测量误差或模型不适用，而不是学生“没有观察到真理”。教师若只接受预期结果，就会使回看成为解释失败的借口；应允许学生检查装置、提出替代解释，并决定需要哪一次新的观察。

与数学相比，实验数据具有测量条件与误差，证据并不总以演绎必然性成立。跨学科迁移因此需要保留不同知识的生成与检验方式。一个共同提问可以连接学科，但只有尊重各自的证据标准，连接才不会变成模糊混同。

保留必要熟练度的位置

强调理解生成，容易让人误以为重复练习不再重要。实际上，某些基本计算与表示操作足够熟练，可以使儿童把注意力用于更复杂的关系；如果每一步都耗费大量精力，新问题就可能被操作负担淹没。我们反对的是用重复正确代替全部理解证据，而不是否定熟练本身。

回看任务与练习可以相互支持。例如，孩子解释了进位的单位关系之后，需要在适量变式中熟练执行；练习出现错误时，又可以回到单位关系定位原因。并非每道题都要写长篇算理，也并非解释一次以后就再也不用练习，教学需要依据错误性质与使用要求调整。

一个可行的安排，是把少量有代表性的关系任务与必要的熟练任务分开说明目的。前者用于暴露判断依据，后者用于提高准确与流畅；二者结果分别记录。若孩子理解较清楚但计算缓慢，支持不应只增加更多解释；若计算很快却不能判断规则条件，也不应只奖励速度。

这种分工也帮助家庭减少过度干预。家长可以请孩子选一道最能说明想法的题讲清，而不是每做一道都追问全部来龙去脉；对已经稳定的基本技能，允许孩子熟练完成。对学习的尊重包括给解释留空间，也包括不把每一次正常练习都变成成人主持的深度访谈。

一本书怎样为不同孩子留下入口

本书案例涉及等号、进位、面积、角、平均数与分数除法，但读者不必按章节顺序把所有方法施加给同一个儿童。应先辨认眼前任务与孩子已有经验之间的

关系，再选择合适的材料。一个只需要澄清单位的孩子，不必被带进完整的理论讨论；一个已经能够解释单位的孩子，则可以尝试条件变化或自主提出问题。

教师和家长还应记录孩子能够独立做什么，而不只记录错在哪里。旧知识是后续形成的资源，观察若只搜集缺陷，就会把儿童写成一张等待填补的清单。能用熟悉材料解释、愿意提出反例、在失败后改变表示，都是能够帮助选择下一步的具体证据。

开放也要有边界。让儿童自行探索，不意味着成人不提供必要信息、不纠正数学错误或不保护学习秩序；提供支持则不意味着预先接管全部判断。可以共享目标、材料与检验标准，再在过程里根据儿童反应调整帮助，这种调节本身就是教师需要持续发展的专业能力。

老师可以这样做

当准备把本书方法用于一个新领域时，先写清三件事：旧知识具体是什么，新学习可能改变哪一种关系，用什么表现能看见这种改变。然后再写一个可能不发生改变的合理情形，防止任务只允许一种结局。若无法说清旧对象，所谓回看可能只是泛泛复习；若无法说明检验证据，就还不适合据此评价儿童。

在个体支持中，可以先设计一个最小的辨别任务，再依据回答选择下一步，而不是预先打印完整路线。每隔一段时间回到旧作品，看看新任务是否改变了当时的解释与行动；若没有，也先检查任务和支持是否合适。探索的价值不在于不断增加活动，而在于每一步更清楚地回应已经出现的差异。

怎样算本章说错了

若同样的回看提问移到新学科后持续遮蔽其证据特点，说明本书的迁移语言需要缩小适用范围。若所谓个人版任务只增加教师工作量，却不能更准确地辨认困难或改善支持，也需要重新设计。个性化不因名字而成立，必须在任务怎样随具体学习证据改变中得到说明。

若一些儿童更适合先获得清楚讲解再展开回看，本书应承认这条路径；若某些内容缺少可辨认旧知识，不能强行为它制造一个。统一的理论视角不能要求每个学习故事具有相同起点、节奏和结局，否则它会重演自己所批评的固定路线。

带走的话

可以共享检验理解的认真，不能预先统一每个孩子让理解发生的道路。

材料与判断

本章延伸问题参照文稿 14、19、23。初中代数、函数、语文与科学任务均为解释性设计，其有效性须由相应学科和具体学习者的材料检验。数学例子在所述实数范围与数量条件下成立；跨学科延伸保留各自的证据标准，不把统一提问变成通用评分表。

留给结语的问题

当我们不再要求每个孩子走同一条路，教师仍然需要一种共同的责任：认真看见他们已经形成什么，尚在尝试什么，又怎样在帮助之后继续行动。结语回到最初的教师成长经历，讨论这份责任如何使课堂、教研与本书本身持续获得新的理解。

结语 一棵树摇动另一棵树之后

一节课结束后，教室恢复安静，黑板会被擦去，材料会被收回。留在孩子身上的，不应只是一份完成的练习，也可能是他以后遇到问题时会先注意什么、怎样选择方法，以及怎样重新理解以前会做的事。这样的变化不总在铃声响起时完整显露，教师需要给它继续被看见的机会。

本书从我执教《数字编码》的经历出发。文稿 05 写到，我在一次市级研究课的准备中受到提醒，重新思考编码的数学本质，以任务驱动重设计课堂；孩子的参与和发现又改变了我对教学研究的感受。我们没有把这段经历写成一次顿悟解决所有问题的故事，因为我后来的材料还记录着磨课的困难、团队的分歧和指导方式的调整。

文稿 03 中，工作室初建时的课例研究曾经陷入停滞。我准备的再教设计没有自然成为团队能够使用的方案，我于是回到课标、知识核心与学生障碍，与教师共同寻找问题。这段不顺利的经历，与《数字编码》的成功同样重要：它让帮助他人的方式也进入反思，而不只是让被帮助者接受更多要求。

教师的成长因此不是不断拥有更多标准答案。它也包括发现自己原来称作“支持”的事情，有时会使别人更难行动；原来称作“高效”的环节，有时会遮住孩子尚未走通的关系；原来认为无须等待的一句解释，后来可能成为新问题的起点。新的理解在这里回到旧经验，使经验不再只是可重复的熟练动作。

我们用“旧知改名”描述这种值得观察的方向，却不要求每一段学习都呈现同一种故事。儿童可能通过比较、练习、直接说明、好奇或意外发现形成关系；他可以先说清楚，也可以先在动作中做出，随后逐渐获得公共语言。需要认真追问的是，这些变化在什么条件下成立，能够支持怎样的后续行动，而不是它们是否符合书中预设的叙事节奏。

一本书很容易让读者带走几个醒目的词。本书更希望读者带走一份愿意继续看证据的耐心：孩子说“我懂了”，先问懂的是哪一层关系；孩子沉默，先给一

种不同的表达机会；孩子使用旧方法，先看他怎样选择，而不是立即宣布退步。这样的耐心并不降低数学要求，它让要求落在可以辨认和帮助的地方。

会算与理解也不必被安排成彼此敌对的两端。熟练计算可以帮助儿童承担复杂任务，关系解释可以使熟练不至于只依赖表面线索；必要的练习与适当的回看可以相互支持。我们不需要把每一道题都变成长篇哲学讨论，也不应因为时间紧就永远跳过孩子为什么这样做。

对教师而言，一项可以开始的小改变，是保留孩子的一份旧作品。新知识出现之后，再把它拿出来，让孩子用现在的想法读一读、改一改或继续做一件事；不要先告诉他应该改变哪里，也不要因为他没有改变就认定活动失败。记录他能够确认什么、仍不能说明什么，再决定下一步需要的材料与帮助。

这份记录可能很短。一句原话、一处擦改、一张指向明确的图，就可能比一页写满赞美的评语更有信息；但它也可能不足以支持结论，需要等待下一次任务。承认不足并非评价失职，恰恰是在防止教师把自己的期待写进孩子的作品。

对家长而言，回看不需要成为新的家庭考核。孩子做错一道题，可以先请他说明原来把什么当作1、依据什么选择方法，再用一个小变化帮助他辨认；孩子已经能够独立使用某项关系，也应允许他熟练完成，不必每次都接受成人的层层盘问。家庭支持的价值之一，是让儿童愿意把尚未形成的想法拿出来，而不是只交出经过修饰的正确回答。

对教研团队而言，共同标准与不同道路可以同时存在。数学是否准确、解释是否有依据、材料是否忠实，这些需要共同守住；从哪个问题开始、借助哪种表示、需要多少支持，则应根据教师和儿童的实际情况调整。若每个人都被要求用相同台词证明自己已经改变，教研会重新制造本书试图辨认的表述与形成之间的裂缝。

我的文稿中出现“一棵树摇动另一棵树”的教育意象。本书借用的是原稿中的这份表达与期待，不在未核实原始文献的情况下把流传语句归属确定给某位思

想家。比名言的光环更值得追问的是：被摇动之后，个体怎样在自己的条件中生长，又怎样在日后的行动里回应曾经得到的帮助。

树不会因为被另一棵树摇动，就长出与对方完全相同的枝条。它有自己的土壤、光照与已有形态，回应会在这些条件中展开；这只是一个帮助思考的比喻，不能代替儿童学习的证据。教育的责任也正因这种差异而具体：给予支持，同时持续观察支持怎样被接住，必要时改变给予的方式。

本书的真实材料让我们看见了这样的具体性。角的比较中，儿童注意的可能是边长、弧线或张口；面积比较中，相同答案可以来自数格子、合法割补或不成立的形变推断；平均数中，相同数值可以代表一个人的实际量，也可以代表一组数据的概括。若只收取最后的数字，这些差异便会消失，教师也失去继续帮助的入口。

这些材料同样要求本书承认自己的局限。原始课例不是自动成立的因果证明，研究表格也需要逐项核查；一种解释能够串起多个故事，不等于已经优于所有竞争解释。我们在面积研究中发现的表间差异，应当成为继续核对原始记录的起点，而不是被悄悄修平，也不是否定全部教学实践的理由。

有些问题仍留在书后：回看是否提供其他诊断任务之外的信息，三个观察方面的证据能否被不同教师一致辨认，某些支持是否只适用于特定内容或儿童，以及怎样在常态课堂中承担这些观察。附录提供的是开始工作的工具，不是已经完成验证的量表。它们若进入课堂后引出新的回答，就应允许这些回答改变工具本身。

因而，本书并不把自己的结尾写成理论完成的时刻。它更像把一组问题交到读者手中：你能否在自己的课堂里找到支持，也找到反例；能否指出某个概念过宽，某道题暗示过多，某一处解释忽略了已有研究；能否用新材料使我们对原来的说法作出更准确的判断。书的成长也应接受它要求教学接受的约束。

如果将来研究表明，回看主要是一种有用的对话方式，而不是更强的理解预测指标，我们就应修改相关主张。若某些儿童通过另一条路线获得稳定理解，我

们不应因为故事不同而排除他们。若新的证据使“旧知改名”需要更换名字，本书也应允许自己的核心词进入回看。

这不是削弱探索的雄心，而是给雄心一条能够继续工作的路。一个不能被反问的观点，很快只能靠重复维持；一个能够指出条件、保留缺口、接受修订的观点，才有机会进入不同人的实践。知识生产与教学在这里相遇：新的表达必须回到行动与证据，才能获得超出语言本身的意义。

我们最后仍回到那张旧作业。孩子也许指着原来的算法，说出一条以前没有注意的关系；也许保留原方法，却能更清楚说明为什么此时适合；也许暂时说不出，但用一个动作让教师知道下一步从哪里开始。每一种反应都值得具体对待，不能因它不够精彩而略过。

在这些时刻，教师既没有替孩子走完道路，也没有把他独自留在困难里。教师提供材料、追问、示范与检验，孩子则在自己的经验中承担比较、解释和调整；二者的关系会随学习改变，而不是被一张流程表固定。课堂的生命来自这样的持续回应。

一棵树摇动另一棵树之后，我们可以继续看它怎样长，而不急着规定每一片叶子的方向。一项新知识进入儿童的经验之后，我们也可以继续问：它使过去的什么获得了新的位置，又使未来的什么成为可能？本书停在这里，把下一次观察与下一次修订交还给课堂。

带着更精确的问题回到课堂

新的学习怎样改写旧知，可以继续追问为：改写怎样找到恰当范围。观察材料须同时容纳应当改变、应当保持、条件恢复和独立理由仍在的情境。儿童可以改变答案，也可以保留结论而更新理由，或构造能够区分两种说法的例子。共同证据标准不要求共同的说话程序。

本书提供了这些任务的理论论证、数学判准和试用协议，尚未提供新增儿童实测结果。下一步是保留本人基线，让实际回应修正材料，再以冻结的任务和独

立结果检验候选增量。已有任务若足以解释结果，就承认工具的整合价值；出现可靠增量时，再明确它成立的条件。让观点能够这样继续改变，正是一本讨论理解发生的书应当承担的责任。

附录 A 二十道回看题与参考判读

题库覆盖等号、进位加法、平均数、分数除法、角、面积、旋转、烙饼、公顷和密铺十个主题，每个主题两题，均为待试用的教学设计。先按儿童先备经验选择主题，不要求依次完成全部题。图形材料须按标示条件制作，显示比例或颜色改变时重新核对，以免无意改变所测关系。

全题库采用同一证据约定：先保留独立回应，再提供并记录帮助；不要求固定术语或单一解法；当前能力与本人变化分开；没有可比个人基线不确认改名，没有先前稳定表现不判回弹。构造人物的旧记录只是待评材料，不能代替儿童的过去。“证据不足”注明缺项，仍保留已显示的局部能力。执行时点、提示级别和复核方法统一见附录 C，以下不逐题重复完整流程。

等号与进位加法

以下四题从书写位置、单位组织与图式联系切入。儿童可以说、画或操作，教师记录他依据什么判断，以及改变条件以后该依据是否仍可使用。

等号题一 重新检查旧记录

题干：小宁在旧练习本上写了“ $3+2=5+1=6$ ”，旁边标注“先把 3 和 2 合起来，再加 1”。你认为这份记录能让别人准确知道他的意思吗？请保留你认为可以保留的地方，修改需要修改的地方，并说明理由。小宁为构造人物，不对应原稿学生。

无提示任务：教师只解释“可以画、说或写”，不先问“两边是否相等”，也不直接提醒等号的定义。保留孩子先前的等号题作品，完成本题后再让他回看其中一道，说明现在怎样检查；没有旧作品时，本题只能提供当前表现，不能证明发生了变化。

参考解释：先算 $3+2$ ，再加 1 的过程可以成立，但原记录的第一处等号两边分别是 5 与 6，不能写成相等。可改为 $3+2=5$ 、 $5+1=6$ 两行，或改为 $3+2+1=6$ ；

不要求唯一格式，但每个等号都应成立。只把最后结果改对而不解释连接关系，证据仍有限。

条件变化：给出“ $3+2=4+1=5$ ”，请判断是否需要修改。该记录各部分都表示5，可以成立；若学生把所有连等都删除，可能只记住了新的形式规则。再将 $3+2=5$ 写成 $5=3+2$ ，检查位置变化是否影响判断。

判读：用相等关系修改小宁的写法并通过变化题，支持当前纠错与关系理解；只有与儿童本人先前的解释比较，且显示可验证的改变，才进一步记录其改名线索；若原型题能改而新形式仍靠位置猜，记录局部关系与形式依赖并存，不能在无前期材料时称其为旧习惯回归，也不能概括为全局不懂。若只有口头定义、无法处理任务，或阅读负担明显，则记证据不足。只有存在早先独立稳定记录、当前在可比条件下反复不再成立，才讨论回弹可能。

等号题二 两种写法同一关系

题干：你以前完成过 $3+2=(\quad)$ 。现在请完成 $5=3+(\quad)$ 与 $3+2=(\quad)+1$ ，再回看原来的题，说明三道题怎样检查。允许用物品、图或数说明，不要求使用规定词语。

无提示任务：先逐题作答，教师不提示减法，也不说“左右一样”。学生解释困难时可以提供空白纸或同样大小的小物品，但不替他分组；记录提供材料前后的差别。

参考解释：三道题依次填5、2、4，均须使等号两边表示相同数量。儿童可以分别计算并比较，也可以用数量配对解释；如果只说看到空格便做减法，应继续检查他能否理解两边表达式。

条件变化：出示 $(\quad)+2=(\quad)+4$ ，限定两框填非负整数，写出两组不同答案并解释，例如5与3、8与6。无需穷尽答案；左框应比右框大2。也可接受0出现在右框时左框为2。

判读：能解释原题并适应两框题，支持当前关系理解；若先前只留答案而无解释，不确认改名。与本人前期解释比较显示依据改变或拓展，才可记录改名线索；能做熟悉反向题但拒绝两边都有运算，记录形式依赖及关系证据局限。一次算错不直接判回弹，尤其须区分计算与等号判断；没有前后材料，记个体变化证据不足；提示已给出关键关系，记独立表现证据不足，提示后的当前表现另行保留。

进位加法题一 口算与竖式中的一个十

题干：若你实际的旧记录为 $28+2=30$ 、 $30+2=32$ ，请保留它；若不是，教师取你实际的 $28+4$ 记录，把这份给定口算作为另一种方法比较。现在竖式把个位 8 与 4 相加，个位写 2，并向十位进 1。请说明两份记录怎样得到同一个结果，竖式的进位 1 在小棒或图里表示什么，并回看原来的口算记录，补充你认为需要说明的地方。

无提示任务：先不给“十个一换一个十”的提示。可让学生自由选小棒、画图或说明；若材料按十根预捆，要记录这个条件，因为它已提供单位结构。

参考解释：进位 1 表示一个十，由个位合并所得的 12 个一中换出的十个一组成；余下 2 个一。原口算先把 4 拆成 2 和 2，补到 30 再加 2，操作顺序与竖式不同，但都保持原来的 32 个一。不能把进位 1 说成凭空增加的一根，也不要求两条路线完全同一动作。

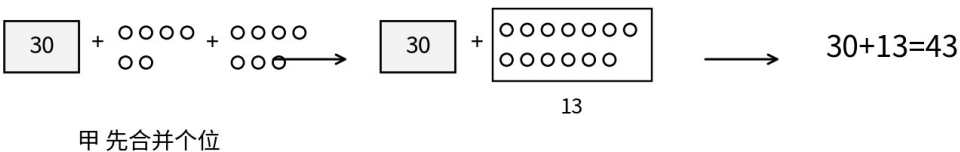
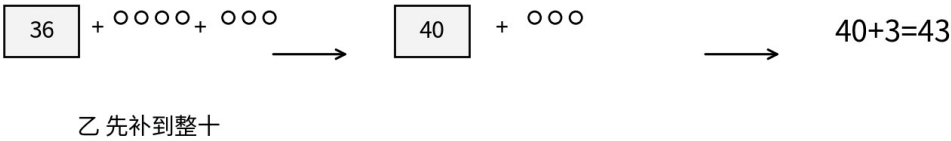
条件变化：换成 $28+2$ 与 $28+1$ ，询问何时需要进位及为什么；结果为 30 与 29，前者需要组成一个十，后者个位尚不足十。要求理由，不以是否会写竖式为唯一证据。

判读：能用单位关系说明给定口算并通过变化题，支持当前关系联系；若本人实际旧记录及解释显示这种联系此前不同或较窄，才可记录改名线索。只有给定口算，没有本人前期材料，不确认变化；两法都会做却不能建立关系，暂记并

存的可能，需增加证据。若只是口误但动作对应准确，不宜判不懂；无前期稳定记录不判回弹。

进位加法题二 图里发生了什么

题干：图 A-1 给出 $36+7$ 的两条路线。图甲先合并 6 与 7 得到 13，再与 30 合并；图乙先把 7 分成 4 与 3，用 $36+4$ 得到 40，再加 3。请判断两图能否表示同一道题，选择一图写出过程，再回看你原来的 $36+7$ 记录，指出相同与不同。图中标数的框表示相应数量，不表示单独一件物品。



方框表示框内标出的数量；每个小圆表示一个一。

图 A-1 同一道进位加法的两条路径

无提示任务：先不指定哪幅是凑十法，不暗示某法更高级；允许学生指出两幅都不像自己的方法，并另画一图。记录他是只核对结果，还是追踪中间对应。

参考解释：两图都得 43，第一条是 $30+(6+7)$ ，第二条是 $(36+4)+3$ ；两图保持的数量相同，拆分对象与中间步骤不同。能讲清共同数量关系且辨明差异，比只说“答案一样”提供更多证据。

条件变化：将图乙剩余部分误画成 2，请学生检查，并说明是否能只把最终 43 改成 42 解决问题。应指出 7 被拆成 4 和 2 漏掉 1，须恢复数量对应，不能靠修改结果掩盖前提错误。

判读：能够比较两图并检查漏画，支持当前表征联系；若本人实际旧记录及解释在新比较后得到可验证拓展，可作改名线索。没有实际旧记录时，仅作当前联系诊断；两幅原图会认、变化后仍只看最终数字，记录联系未稳。因图示约定不明而受阻，或教师已逐步指明错处，保留独立表现证据不足；没有旧记录只使变化证据不足，不抹去已取得的当前能力证据；回弹必须另有可比时间记录。

平均数与分数除法

以下四题分别检查代表数的身份、平均数的信息边界、商的份额意义及等价变换的理由。按题库共同协议保存独立表现与提示后表现；计算、语言负担和关系判断分开记录。

平均数题一 两个 20

题干：五名同学同一次活动用时分别为 22、22、20、12、24 分钟。先求平均用时，再解释某位同学的 20 分钟与平均数 20 分钟各自怎样得到。无提示任务：只请学生在纸上写出两者的来路，不先给“个体”“整体”“虚拟”等词；可画图或口述，由教师如实记录。

参考解释：总用时 100 分钟，五人的平均用时 20 分钟；某人的 20 来自该人记录，平均 20 来自整组数据的计算，两者数值相等而身份不同。条件变化：把 24 改成 29，其他记录保持，询问原个人 20 和全组平均数分别怎样变化；个人 20 不变，全组平均变 21。不得把平均数称为一定不在原数据中的数。

判读：若学生解释两个 20 的来路，并在变化中保持区分，记录当前关系证据；若与其本人前期作品相比显示解释或使用改变，再记“改名变化”证据；若会算两个平均数，却仍把平均数当作每个人实际用时，可记未接通的“并存”线索，但需追问确认。只有先前独立区分、延后在可比任务中又混淆，才可登记“回弹待复核”；只写出 20、未作解释时记证据不足，不能直接归类。

平均数题二 旧公式能保留什么

题干：甲组记录为 10、20、30，乙组为 15、20、25。请学生分别计算平均数，并回答“平均数相同，是否表示两组每个数都相同”。无提示任务：让学生用自己选择的表示说明，不预告“分布”这一概念，也不暗示哪组更好。

参考解释：两组总数都是 60，个数均为 3，平均数都是 20；平均数保留总量与个数形成的关系，但没有完整保存各个数据。条件变化：把甲组改成 20、20、20，平均数仍为 20；这也检验“平均数必须严格在最大最小之间”的旧说法，正确范围允许全部相等时与端点重合。

判读：若学生回看“总数÷个数”，解释公式为何不能恢复每个人数据，并正确处理全相等情形，可记有当前关系解释证据；只有与本人前期记录相比发生了可辨认的拓展或修订，才确认变化。若会计算却坚持同平均必同个体，记录两套说法尚未协调；若仅因教师提醒才改口，应分开登记提示前后。无过往记录不得判回弹，学生未理解“每个数都相同”问法时先改述题意，原回答暂记证据不足。

分数除法题一 一个半是人还是份

题干：有 1 张饼，每个标准份为 $\frac{2}{3}$ 张。问相当于多少个标准份；再问最多能让多少人每人得到一个完整标准份。无提示任务：学生自行画图或计算，分别写两问答案，并说明剩余部分，不先讲“份额”和“人数”的区别。

参考解释： $1 \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$ ，表示一个半标准份；最多完整分给 1 人，余 $\frac{1}{3}$ 张，这个余量是标准份的一半。条件变化：改为 2 张饼，标准份仍为 $\frac{2}{3}$ 张，两问都得到 3；让学生说明为何这次数值相同，不能因此否定上一题两问的差别。

判读：若学生用份额解释商，并处理 2 张的变化，可记当前条件辨析与关系证据；若本人先前确有“1.5 人”或其他需拓展的解释记录，此后独立修订，才进一步记个体变化。若会乘倒数却无法判断商的单位，记录算法与情境解释并存

而未接通的线索。回弹需前后证据；若孩子只因不熟悉题目用词而停顿，允许将标准份画出，但记录这一支持，未展开关系前不作强分类。

分数除法题二 20 到底改变了什么

题干：一份旧解答写“ $3/4 \div 2/5 = 15 \div 8$ ，因为被除数、除数同时乘 20，除数变成 1”。请学生判断算式和理由分别是否成立，再用图或单位解释。无提示任务：不提前圈出错误句，让孩子独立标记他认可和需要修改的部分。

参考解释：算式成立，理由中“变成 1”错误， $2/5 \times 20 = 8$ ；20 是分母 4、5 的公倍数。可把两量写成 15 个 $1/20$ 与 8 个 $1/20$ ，商为 $15/8$ ；如果要想除数变为 1，应将两者同时乘 $5/2$ 。条件变化：回看 $60 \div 20$ 与 $0.6 \div 0.2$ ，分别以十和十分之一为单位说明为何可转成 $6 \div 2$ 。

判读：若能纠正题设旧理由，并把共同单位关系用于旧题，可记当前关系证据；题设不等于该学生自己的旧理解，须另有本人前期记录和后续修订，才能确认改名变化；若只记住“同时乘”却无法说明乘数和单位，保留未接通线索；若只发现 8 不是 1 而不能继续解释，也应认可局部纠错，不夸大为完整理解。延后再次使用错误理由且有此前稳定记录，可登记回弹待复核，否则记录证据不足或当前错误，并安排更小的单位比较任务。

四题共同的记录与复核

第一次使用时，教师先记录学生独立完成的部分，再决定是否提供材料。记录至少包括原答案、关键理由、是否自行修正、获得何种提示、条件变化后的表现；不会画图与关系理解暂不能显露应分开记。若教师已经给出标准解释，随后让学生复述，所得证据只能说明他当场能够复述，不能作为独立改名的直接证据。

延后复核不必原样重复数字，否则熟悉度可能掩盖关系变化。平均数题可以保持同样的数据个数与运算难度而换数，分数除法题可以保持同单位比较的结构

而换成易表示的分数；同时保留一题旧记录回看，以便观察新旧解释的关系。改变后须再次检查难度，不能把更复杂的计算失败直接记作回弹。

两名教师可以分别阅读匿名作品，再比较分类理由。若一人看见改名，另一人只看见标准术语复述，应回到学生的条件变化表现与提示记录，而不是投票决定。持续出现分歧时，应修改题目与编码说明；不能为保持三类整齐，强行把证据不足的回答塞进其中一类。

角与面积

以下四题检查图中可见线长与角大小、周长与面积、分割重组与铰接形变的区别。材料准确制作后再使用；操作失误与关系判断分别记录，依共同协议判断当前能力及个人变化。

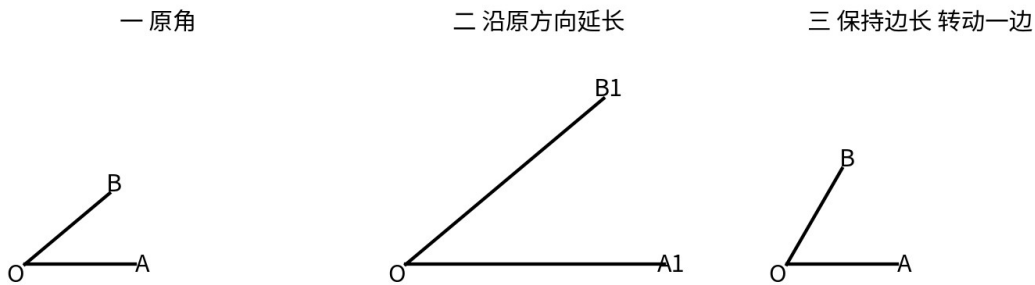
角题一 延长以后还是原来的角吗

题干与准备：用量角器在纸上画 $\angle AOB=40^\circ$ ，OA、OB的可见部分各长3厘米。沿原方向分别延长至 A_1 、 B_1 ，使 OA_1 、 OB_1 各长7厘米；顶点与两条边方向不变。儿童不需要事先学过度数， 40° 仅供教师准确制图。

无提示任务：比较延长前后的角大小，说明你根据什么判断；回看自己以前比较角的方法，指出哪些方法在这里仍有用。不要先说“边长不影响角”，也不要两个角画成不同张口。

参考解释：两条射线方向没有改变，张口不变，因此角相等；图上画出的边更长，不改变角的大小。可以用透明纸描下原角，再使顶点与一边重合，并使两个角的内部位于共同边同一侧，必要时旋转或翻转透明片验证（这里比较非钝角），也可以指出延长后的线仍在同一方向上。

变条件：图A-2对照沿原方向延长与转动一条边两种改变。教师制作时，原角取 40° ，延长只将可见边从3厘米延至7厘米；转动任务保持可见边3厘米，将张口改为 60° 。这些度数用于核准材料，不要求尚未学习度数的儿童读取。请说明两种改变有什么不同。



三图使用相同的长度比例。请比较延长与转动前后的张口，并说明判断依据。

图 A-2 沿原方向延长与转动一条边

判读：能以方向或张口解释原题并区分转动与延长，支持当前能够辨别这些条件；若本人前期记录显示依据不同，且新解释能做通旧任务，才进一步登记改名线索。能分别说出两条规则但无法用于具体图形，记录关系尚未接通；保留多种有效比较法不算消极并存。只有先前已独立稳定判断而后再按线长判大，才记疑似回弹，并复查表示条件；不会使用透明纸但口头判断合理，属于需要补充证据，不直接判未形成。

角题二 短边的角可以更大吗

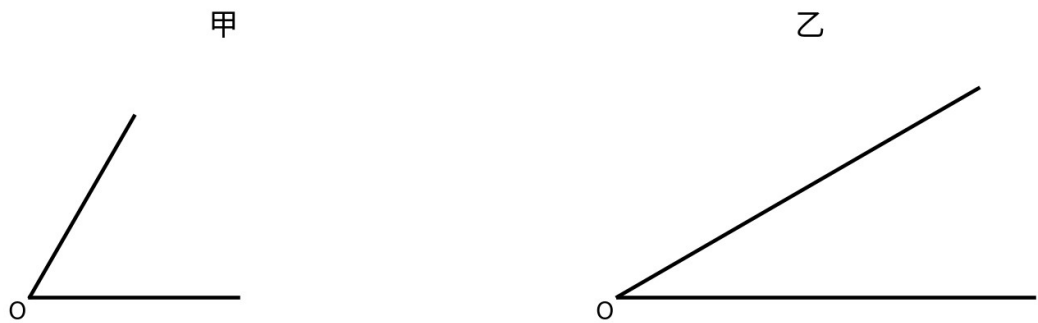
题干与准备：甲角为 60° ，两条可见边各长 4 厘米；乙角为 30° ，两条可见边各长 8 厘米。分别用硬纸制成角片，角片上只标顶点与两条边，不画弧线。

无提示任务：选出较大的角，用一种别人可以检查的办法说明。再检查某份作品中的“边画得长，角就大”这句话，说明它在本题为什么可靠或不可靠。

参考解释：甲角较大；叠合时使两个顶点及一条边重合，把两角内部置于共同边同一侧，必要时翻转或旋转角片，再比较另一条边的方向。这里限于非优角的比较。单看边画出的长度不能决定角的大小，图中线段长短与张口需要分开。

变条件：把图 A-3 中的甲角片整体转向，乙不动，再比较；另可只将乙的可见边缩短至 2 厘米，保持方向不变，检查儿童判断所依据的关系。教师制作参数

仍按本题给出的 60° 、 30° 及边长，学生依据所选工具检验，不以读出角度数值代替比较。



两图使用相同长度比例；只标顶点与边，不画弧线。请用可核对的办法比较。

图 A-3 可见边长不同的两个角

判读：能辨析作品理由并在整体旋转后独立验证，支持当前依据正确；结合本人先前的不同依据及重做旧任务的表现，才支持改名变化。会背张口规则却操作依据仍是边长，记录语言与动作并存且未协调。若仅一次叠合失败，先检查对齐能力；若有前测记录表明同样任务曾独立完成，后又持续按边长判断，记疑似回弹。没有过程说明且只能选对一次，证据不足。

面积题一 同样长的围绳围出同样大的地方吗

题干与准备：在边长 1 厘米的方格纸上画甲长方形，长 4 厘米、宽 2 厘米；画乙正方形，边长 3 厘米。准备两根各长 12 厘米的细绳供围边比较，绳子不计粗细。

无提示任务：比较两图周长与面积，说明依据；检查某份作品中“围一圈一样长，所以里面一样大”的想法，说明应保留什么、改动什么。先不提示数格子或公式，让儿童选择工具。

参考解释：周长都为 12 厘米，面积分别为 8 平方厘米与 9 平方厘米。围边计数的是长度单位，覆盖计数的是面积单位；同周长不能决定同面积。数单位方格与使用乘法均可，只要能解释每排和排数。

变条件：图 A-4 并列本题的三个候选图形。把甲改成长 5 厘米、宽 1 厘米，周长仍为 12 厘米，面积为 5 平方厘米；请儿童判断原来的“同周长”信息能说明什么、不能说明什么。图版供观察与计量，不提前标出面积结论。

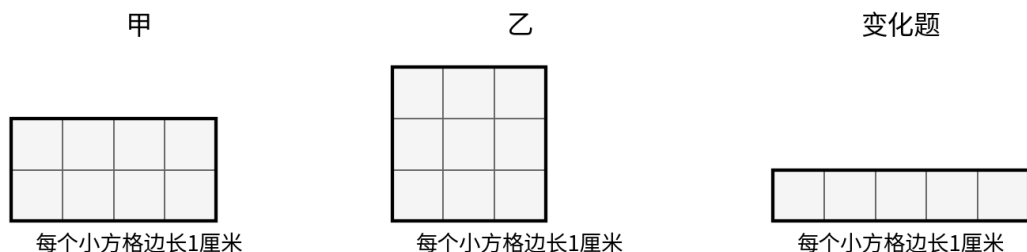


图 A-4 三个长方形的边界与内部

判读：能够说明周长的合法意义并用覆盖关系判断面积，支持当前关系区分；若本人旧记录显示原来混淆而现在能够重新解释并做通，才进一步记改名线索。分别算对周长面积却仍坚持二者总同步，记录两种说法尚未协调。选择数格子不算回弹；只有已建立单位区分的可比记录，后来又以周长代替面积，才记疑似回弹。算术错误而单位选择清楚，应另记计算困难，不直接判概念回弹。

面积题二 剪开重排与拉动相同吗

题干与准备：画长 4 厘米、宽 3 厘米的纸质长方形，沿长的中点剪开，得到两个 2 厘米×3 厘米长方形。把两片沿 2 厘米边拼接，组成 2 厘米×6 厘米长方形，无重叠、无空隙、无遗漏。另用两根 4 厘米与两根 3 厘米的杆铰接成可拉动的平行四边形框，仅作对照，不把框内部当作可拉伸纸片。

无提示任务：纸片剪拼前后面积是否相同，为什么；杆框由直角拉斜后，边长不变能否保证面积不变。请检查某份作品中“只要形状动了，面积还一样”的说法，区分两种变化。

参考解释：纸片剪拼前后都为 12 平方厘米，因为全部部分保留且无重叠；周长由 14 厘米变为 16 厘米。以 4 厘米边为底，从直角框架拉成非退化的非直角平行四边形后，对应高小于 3 厘米，面积小于 12 平方厘米；面积不能由边长不变保证。若儿童未学平行四边形面积公式，可以在方格纸上比较框内覆盖，不要求超前公式。

变条件：把两片重叠一部分再摆放，问可见覆盖面积是否仍 12 平方厘米。原纸片总面积与重叠后并集覆盖面积要分开，不能说纸张本身消失了。

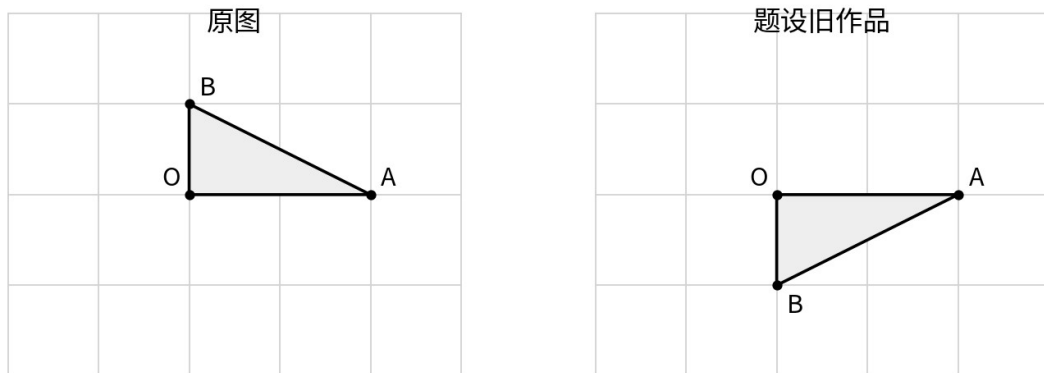
判读：能指出无重叠、无遗漏等条件并区分剪拼与铰接，支持当前能够检验保持条件；与本人可比旧记录合看、确认关系解释确有变化后，才进一步记改名线索。记住两种答案但把保持条件混用，记录关系未协调。没有先前稳定记录，不判回弹；只凭外形猜对、无法检查条件，暂记证据不足。儿童回到数格子验证是有效策略，不能因此扣分。

旋转与烙饼

以下四题检查变换条件、资源限制和最优性理由。保留儿童自己选择的表示和合法路线，分别记录计算、条件识别与依据；教师提供工具时，注明工具已经承担了哪些信息。

旋转一 同样大小为什么仍不对

题干：图 A-5 左侧为原三角形 OAB，A 在 O 右 2 格，B 在 O 上 1 格。右侧旧作品保持 O 不动，把 A 留在右 2 格、B 放到 O 下 1 格，并称这是绕 O 顺时针旋转 90° 。请重新检查旧作品，画出你认为正确的位置，并说明旧作品做了什么、哪里不符合要求。



任务要求绕O顺时针旋转 90° 。右图保留题设旧作品，供独立判断；每格长度相同。

图 A-5 旋转任务的原图与待检查作品

无提示要求：不先说旧作品属于轴对称，不替学生圈中心或画旋转箭头。学生可以自己转动剪片，但须在纸上标明对应点，避免只凭整体看起来相似判断。

参考解释：正确的 A' 在 O 下方 2 格， B' 在 O 右方 1 格，O 不动。旧作品相当于关于通过 O、A 的水平直线作轴对称，长度与形状虽保持，却不符合每个点绕 O 同向转 90° 的要求。不能只用图形大小相同证明旋转正确。

变条件：改为绕 O 逆时针 90° ， A' 在上方 2 格， B' 在左方 1 格。判读：能将旧作品重新解释为另一种变换并据三要素修正，支持当前重解旧作品的关系能力；若与本人前期独立记录比较显示解释或使用改变，才进一步登记改名证据；能分别画两种变换却无法比较，暂记联系未明的并存；后来再混淆且有早期可比记录，才考虑回弹；仅指出不对而无法展示依据，记证据不足。

旋转二 中心换了旧画法还能照搬吗

题干：仍用上一题三角形，但这次绕 A 逆时针 90° 。一份旧解答仍把 O 作为不动点，得到 A 在 O 上方 2 格、B 在 O 左方 1 格。请说明这份旧解答解决了哪个问题，再画出本题的结果。可以把原图各点先涂成不同颜色，以追踪对应关系。

无提示要求：教师不先指出哪个点应不动，不把“中心换了”作为追问答案。若学生请求说明文字含义，可解释顺逆时针约定，但应记录帮助。

参考解释：旧解答正确处理了绕 O 的逆时针 90° ，却没有处理绕 A。以原 O 为参照，A 保持在右 2 格；O' 在右 2 格、下 2 格；B' 在右 1 格、下 2 格。连接后，原 O 处的直角对应到 O'，不能把直角随意放到旋转中心 A。

变条件：若绕 A 旋转 180° ，O' 在原 O 右 4 格，B' 在右 4 格、下 1 格。判读：能说明旧法适用条件并根据新中心重建，支持当前关系理解；结合本人前期独立记录确认改变后，才登记改名证据；仅记住不同题的落点而不能检查对应，属于联系待明的并存；有前后证据才判回弹；画图误差与关系错误分开，必要时用剪片确认，仍无法辨认则记证据不足。

烙饼—三张的办法怎样解释旧方案

题干：锅最多同时放 2 张饼，每面都需连续烙 3 分钟，两面都要烙，不可同时烙同一张饼的两面，换饼和翻面用时忽略。旧方案先把 A、B 两张的两面烙完，再烙 C，用 12 分钟。请检查有没有更快的合法方案，列出每个 3 分钟内锅里烙的面，并说明旧方案的时间花在哪里。

无提示要求：不提供“交替烙”一词或 9 分钟答案，不预先替学生标出空位。所有饼正反面分别记账，不能只写每轮放哪张。

参考解释：三轮可排 A 正+B 正、A 反+C 正、B 反+C 反，共 9 分钟。六个面需要 18 个“锅位分钟”，两个锅位至少 9 分钟，且此排程达到下界。旧方案后两轮各空一个锅位；改善来自在中途换入 C，而不是少烙一个面。

变条件：只有 1 张时仍需 6 分钟，不能套“张数 $\times$ 3”；其两面不能同时烙。4 张则两两成组，12 分钟。判读：能用容量与同饼限制重解旧方案并处理 1 张边界，支持当前条件理解；若与本人前期独立记录比较显示变化，才进一步支持改名；会两种口诀却不能说明条件，暂记并存；有早期独立证据后持续退回违规排程，才考虑回弹；只答 9 无排程或下界，记证据不足。

烙饼二 锅变大后公式要重新检查

题干：把锅改为最多同时放3张，其余条件不变，仍按每轮3分钟安排。要烙4张饼。旧笔记写“总时间=张数 $\times$ 3分钟”，因此得到12分钟。请重新检查旧笔记，给出可执行方案，并解释为什么你的时间不能再少一个完整轮次。

无提示要求：不提示先烙几张，也不直接提供“总面数除以容量”。允许用双面圆片，但安排必须能够逐轮核对，每一面恰好烙一次。

参考解释：三轮可排A正+B正+C正、A反+B反+D正、C反+D反，共9分钟。8个面在两个轮次最多完成6个，所以至少3轮；上述安排可实现。旧公式在两锅位的适用条件被改变，不能原封不动移到三锅位。

变条件：3张只需两轮，共6分钟；1张也需6分钟，受同一张两面顺序约束。可再请学生解释为什么“ $8 \div 3 \times 3 = 8$ 分钟”不是本题合法排程：轮次为完整3分钟且每面必须完成规定时间。判读：主动区分总工作量下界与实际排程限制，支持当前关系理解；有本人前期独立记录显示解释改变，才登记改名证据；分别记住两口锅答案却不能关联条件，暂记并存；仅在可比前后证据下讨论回弹；若计数正确但排程遗漏一面，记录局部错误并再观察，不直接归类整个儿童。

使用与记录说明

同一题可以在学后和延后观察中使用等结构变式，但不能只比较总对错。旋转题分别记录中心、方向、角度、对应点与解释；烙饼题分别记录合法性、面数完整性、时间下界与边界判断。若提供了操作模型或补充提示，应与无提示表现分开保存，避免把帮助撤除后的差异直接叫回弹。

参考解释不是要求孩子逐字复述的答案。儿童使用不同但合法的排程，或用剪片准确说明旋转关系，应按所表达的数学内容判断。教师先保存原作品，再讨论修改，才能让下一次回看有可比较的依据。

公顷与密铺

材料准备与观察重点

公顷题检查数与单位如何共同表示面积，密铺题检查局部条件与可持续构造。前者不只测进率记忆，后者不只测有限拼图是否漂亮；均依题库共同协议区分个人变化与当前表现。

公顷回看题一 100 米为什么不对应 100 平方米

题干：小林以前在纸上写过“边长 100 米的正方形面积是 100 平方米”。现在学过公顷，请你判断这句话，画图或写话说明理由，再用你的办法求边长 200 米的正方形面积。图不要求按实际比例画，不提供“ 100×100 ”或“1 公顷”的提示。

施测时先让学生独立记录，不问“是不是要平方”，也不先给进率表。如果学生看不懂题意，可以澄清讨论的是正方形内部的面积而非边界长度，并记下这项澄清；不要把澄清后的表现写成完全无提示表现。允许用单位方格、分行排列或计算说明。

参考解释：边长 100 米的正方形，可按边长 1 米的正方形面积单位理解为每行 100 个、共 100 行，总计 10000 平方米，即 1 公顷。边长 200 米对应每行 200 个、共 200 行，面积 40000 平方米，即 4 公顷。边长翻倍时，两条互相垂直方向的单位数量都翻倍，不是面积只翻倍。

变条件：给一个长 200 米、宽 50 米的长方形，问面积是否也是 1 公顷，并请学生说明为什么它不必是正方形。参考为 $200 \times 50 = 10000$ 平方米；公顷是面积大小的单位，不要求被测图形呈正方形。学生可分割重组为相应面积的图形，但不能只凭看起来差不多判断。

判读：若学生能重新解释旧记录把边长单位数量误当面积单位数量，并独立完成两项变化，可记为当前新旧关系接通的证据；结合本人前期记录才进一步判断改名。若会背 1 公顷=10000 平方米，却不能解释 100 米与面积的关系，或新旧

说法在不同任务中互不联系，可记为“并存待辨”；不能因沉默直接判并存。只有已有同类独立理解的前期记录、后来在可比条件下重新沿用旧误解，才可能支持“回弹”，并需排查阅读或记忆负担；其余记“证据不足”。

公顷回看题二 换单位以后地有没有变大

题干：同一块地，记录甲写“30000 平方米”，记录乙写“3 公顷”。有人认为甲写的数大，所以甲说的地更大。请判断，并用图或数量关系解释；再说明把乙改写成“0.03 平方千米”是否仍然是同一面积。本题用于已经学过相关换算的学生。

无提示施测不出示进率表，先请学生解释三个记录中的数与单位各起什么作用。若忘记某个进率，可以先记录原表现，再提供“1 平方千米=100 公顷”继续观察关系推理；提供进率后答对不能当作自主记忆的证据。重点在同一量如何随单位大小改变计数，而非单独测背诵。

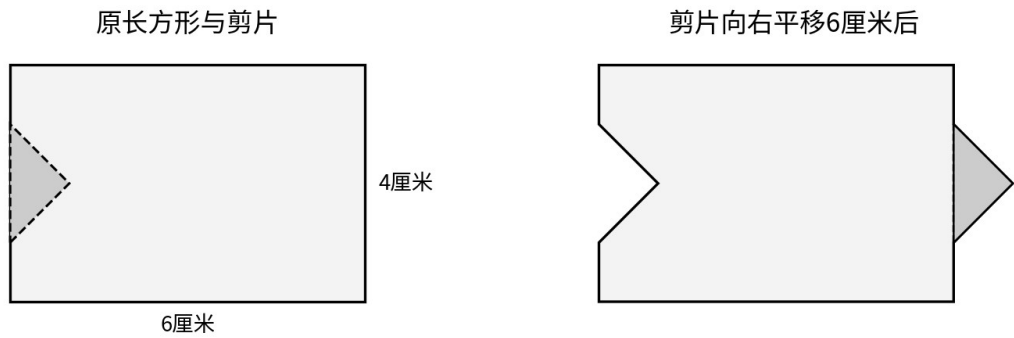
参考解释：面积单位越大，表示同一面积所需的单位个数越少。30000 个平方米与 3 个公顷覆盖的总面积相同，3 公顷又是 0.03 平方千米；数的大小不能脱离单位直接比较。可以画一块区域分为三个 1 公顷部分，再把其中一部分解释为 10000 个平方米。

变条件：让学生比较 3 公顷与 3000 平方米，判断这次是否仍相等。参考为 3 公顷=30000 平方米，比 3000 平方米大；“换了单位所以一定相同”同样是错误。判读时，能把旧的只比数字改为同时检查数与单位，并完成变式，支持当前关系接通，结合本人前期记录才进一步判断改名；只会各做换算却仍无条件按数字大小判断，可记并存待辨。回弹需前期可比证据；忘记换算数值、表达不充分或只完成一题均允许记证据不足。

密铺回看题一 剪走一块再补在哪里

题干：图 A-6 给出一张 6 厘米×4 厘米长方形纸片和剪移后的单片。左边中间 2 厘米作底，向纸内伸入 1 厘米剪下一块三角形，保持方向向右平移 6 厘米，

接在右侧对应位置。请检验新纸片能否水平每次平移 6 厘米、竖直每次平移 4 厘米密铺，并指出原长方形铺法提供的帮助。教师核准坐标可取原矩形 $(0,0)$ 、 $(6,0)$ 、 $(6,4)$ 、 $(0,4)$ ，剪片 $(0,1)$ 、 $(1,2)$ 、 $(0,3)$ ，移后 $(6,1)$ 、 $(7,2)$ 、 $(6,3)$ 。学生不必读取坐标，也不预先观看完整铺法。



阴影剪片保持方向与大小。图版只提供纸片形状，完整密铺结果由儿童构造。

图 A-6 长方形纸片与剪移后的单片

无提示阶段提供按上述尺寸制作的同样纸片，但不预先展示完整密铺结果；允许学生试拼。参考解释是：同一行中，左侧缺口与相邻纸片右侧移入的部分形状、大小、方向对应，整体沿水平方向保持原来的拼接关系；上下边未改动，原来的纵向平移关系也保留。须说明剪移及重复采用的是同一形状和同一平移，不能只说面积不变，所以必能密铺。

变条件：把剪下的片在接到右边前旋转一个角度，问能否仍由原来理由保证平移密铺。参考为不能直接保证，需要重新检验边界匹配；这不等于所有旋转后的形状都不能密铺。能回看长方形的对应边关系，并用它检验新旧造型，支持当前关系接通，结合本人前期记录才进一步判断改名；只记“剪下来贴过去”而不管对应，可记并存待辨。回弹须有先前独立边界解释的证据，无足够铺法检查则记证据不足。

密铺回看题二 一个点拼满以后还缺什么

题干：一位同学把几个纸片围在同一个点旁，算出这些角的度数和为 360° ，便说这种纸片一定能铺满整个平面。请检查他的结论：现有信息能说明什么，还需要检查什么？不要求寻找复杂反例，可以用画图或说明指出下一步应做的检查。

教师不先说“ 360° 不是充分条件”，也不以学生是否使用“必要条件”一词评分。参考解释：对于围绕一个内部拼接点的无空隙无重叠拼接，角度和为 360° 是局部检查；它不能单独保证边长和边界都能匹配，更不能保证同一安排能继续延伸覆盖平面。需要检查相邻边、其他顶点、重复延伸时是否发生空隙或重叠，并给出可持续的构造说明。

变条件：改给完全相同的正方形，要求说明怎样沿两条互相垂直方向反复平移，获得可继续延伸的铺法。参考不仅是四个直角等于 360° ，还包括相邻边等长、平移后的行列边界吻合。能把旧的角度和检查重新放到局部条件的位置，并补充整体延伸证据，支持当前关系接通，结合本人前期记录才进一步判断改名；只会背两个结论却不能说明其关系，可记并存待辨。无前期稳定理解记录不判回弹；只提供有限拼图也不能自动证明铺满平面，证据不足应明确记录。

附录 B 三种卡住方式的课堂观察表

本表用于记录课堂中可观察的行为，不用于给教师或学生贴标签。“冲突被抹平、一样东西独大、会了就完”是初步诊断方向，而不是已经验证的量表维度。观察者应先记录发生了什么，再提出解释；一次安静、一次讲解或一次没有展开的争论，都不能独立证明课堂已经卡住。

先写记录再作判断

每张观察表记录课程内容、具体任务、时间区间、观察对象与材料版本。以学生匿名编号替代姓名，把教师提供的提示与学生随后独立完成的动作分开写；若关键作品只拍到结果而没有过程，就如实注明。不要把“学生不认真”“老师包办”当作行为记录，因为这些已经是解释，需要进一步证据。

初步诊断方向	可观察信号	需要排除的另一种解释	可以继续观察的任务
冲突被抹平	学生提出不同判断后，教师立即给答案，未让其说明依据	时间有限，教师计划在后续课时处理	下一次让学生重新判断原来的两种说法，并记录是否需要同样提示
冲突被抹平	教师完成了全部图与式的对应，学生只有齐答或抄写	本次为示范，随后另有独立重建	收起范例，请学生解释同关系不同表面形式的任务
冲突被抹平	每个学生的讨论结果都由固定的一个同伴代说	分工表达，不一定表示其余人未思考	分别请组员用动作或图说明一个关键关系
一样东西独大	答案变化时仍只强调口诀，未检查量与单位	学生处于必要的程序练习阶段	请学生说明一个单位改变后的对应，观察程序是否仍可解释
一样东西独大	操作十分热闹，但无人说明什么保持不变	理解尚在动作中，尚未口语显露	改变操作顺序，让学生判断结果是否保持，并允许画图回应
一样东西独大	情境细节持续增加，数学条件却无人确定	现实建模本身需要澄清情境	请学生区分影响结论的条件与本次可以暂忽略的细节

初步诊断方向	可观察信号	需要排除的另一种解释	可以继续观察的任务
会了就完	新旧方法均被教过，但没有记录两者关系的任务	两者关系已经在其他课时充分处理	回看旧作品，请学生选择一个关系并以旧任务说明
会了就完	课尾正确率很高，但所有题都紧贴示范	本节目的就是初次获得方法	在适当间隔后换表面形式与提示水平，观察保持情况
会了就完	下一课时调用了旧知识名称，却未辨别其适用条件	教师已通过课前诊断确认条件	提出一个边界任务，看学生是否能主动限定规则

记录样例与解释边界

以下为教学设定。观察记录可以写：“第 18 分钟，学生 S07 说第二幅图也对；教师追问理由，S07 将 4 分为 2 和 2；教师随后圈出十根小棒，并说这就是进位；独立练习未再要求 S07 解释圈线。”这段记录允许我们提出“进位关系是否由学生完成仍待观察”，却不允许直接写“S07 完全没有理解”。

下一步可以请 S07 用自己选择的方法说明 $37+5$ ，再指出其中哪一步能够在竖式中找到对应。若学生能主动完成，原来的怀疑应当收缩；若他只有在教师圈出十根后才能继续，则应把帮助条件一起记下。诊断工具的价值在于使后续观察更有方向，不在于让最初印象显得更有术语。

两位观察者如何协作

两位观察者先独立记录同一片段，再比对事实层面是否一致：出现了哪一句话，学生做了哪一步，提示发生在答案之前还是之后。事实记录一致后，再比较解释；若对“是否被代走”仍有分歧，优先补看学生的独立任务，而不是通过投票把分歧抹去。研究使用时需预先约定观察单位与编码规则，并报告分歧和修订过程。

没有摄像条件时，可以只选择一个小组或两名学生持续观察，缩小结论范围。记录结束后写明这份表支持了什么、不能支持什么，以及下一次最值得看的

一个动作。不要把多个勾选加成课堂质量总分；本表尚未建立这种分数解释的依据。

条件修订的补充记录栏

以下记录栏供相关任务选用，不增加必做流程，不汇总为理解分数。原独立表现、提示后表现与本人前后资料继续分开。

记录项	保留的原始证据	判断边界
对象与条件	题目及版本；所求量、表示、允许操作实际改变什么	边长改变不自动说明某一个量必定改变
支持理由	每个结论靠什么理由；是否出现儿童自生的其他有效依据	一条理由失效不等于结论必假
保留与修订	需改项目漏改、不需改项目误改，分别记数量与分母	不互斥分类，不把修改越多当越好
后续使用	已识别的修订是否进入下一次选择、计算或说明	说出需改不等于已更新使用；不口述也可能已有行动证据
支持与时间	原答、提示级别及原话、个人基线、后续日期	提示后不倒记独立；当前表现不代替个体变化

附录 C 课堂诊断与验证协议

本协议供教研组试用，尚未形成效果结果或标准化量表。它把第 21 章的证据规则落实为可以准备、执行和复核的一轮工作。使用者先选择诊断目的：了解当前困难、追踪个人变化，或检验教学作用；三项目的可以接续，但证据不能互相替代。

准备一个内容和一组焦点学生

首轮可选择等号、进位加法或面积中的一个关系，并持续观察四至六名焦点学生。这是便于两位教师承担的组织额度，不是代表全班或检出效果的样本门槛。选择时说明依据，保留不同起点及暂难判断的作品，不只挑选最能展示成功的儿童。其余学生仍接受正常教学。

准备个人资料袋，统一写匿名编号、任务版本和日期。袋中至少包括两份低负担的个人基线作品、教学中关键提示记录、学后任务和预定的后续任务。基线不仅收答案，还须保留理由、图示或动作；若已有旧作业只有答案，不能据此补出旧的判断依据。先备知识不足的学生可以获得必要帮助，并将其材料用于当前学习支持，暂不承担无法成立的变化推断。

以面积为例，基线可请儿童比较同单位的两张方格卡，另问一次方向改变是否影响覆盖面积。学习过程中再安排单位改变与方法联系。学后题换用新的尺寸和排列，不把形成阶段反复讲过的卡片直接当成独立验证。附录 A 提供题型，正式任务还应按本班先备经验试读和核算。

按真实课程安排观察时点

五类观察的职责如下。它们是资料结构，不是一条必须照搬的日历；下一单元起点可能早于长期延后测。

观察时点	要保存的材料	允许的判断	时间与反馈记录
新学习之前	本人两份可比旧任务及理由	确认起点；不据一次答错固定分类	日期、原提示、已有相关教学
教学过程中	导致判断改变的作品或短片段	识别谁提出、核验和修订关系	提示原话、发生顺序、工具贡献
学后独立任务	未先提示关系的回看与变化题	判断当前联系；结合基线讨论变化	先封存原答，再给必要帮助
后续内容起点	尚未据其结果调过规则的新题	检验此前记录能否预测后续表现	按课程进度；核先备知识
预定延后观察	相同关系、负担近似的不同题	观察保持与条件变化	事先约定窗口，可选约三个月；记录期间学习和失访

延后间隔可以按教学问题确定，但不能在看到结果后挑选有利时点。若采用短期与三个月两个时点，分别报告，不合并为同一种延后条件。任何较早的测量都可能提供练习或引发思考，应记录其反馈、题量和时间。

先独立作答再分级提供提示

提示级别只描述帮助内容，不组成从差到好的儿童等级。L0 是在预先约定的共同题设与材料条件下，不另行提示目标关系的独立回应，仍可按协议提供朗读、清晰显示和必要的操作通道；L1 澄清题意或图示约定；L2 指出值得检查的位置，或在预定材料之外额外提供指向目标关系的工具或标记；L3 直接说明目标关系或示范关键步骤。共同题设原本包含方格纸，不因方格纸可提供信息就自动记为 L2。每次记下实际帮助的原话和时点，若一句提示兼有两种作用，按内容说明，不凭编号替代分析。

先保存 L0 原答，再决定是否继续提示；儿童需要帮助时及时提供，不为取得数据而延误教学。提示后完成说明这项支持下出现了什么表现，不能倒记为 L0。若朗读或工具本身透露了关键关系，应按实际信息重新归类。既不要把所有

辅助都当作代答，也不要将工具已经完成的分组、标记和对应写成儿童独立判断。

四类变化卡检查什么

一组任务应同时容纳实质改变、应当保持、条件恢复与替代依据，题卡上不写这四个名称。以甲卡3列3行、乙卡4列2行且每格边长1厘米为形成后的新题设定，甲、乙面积分别为9与8平方厘米。教师先封存儿童采用的依据，再按需要展示以下变化；题卡顺序应记录，重复试用时避免固定形成“下一题总会反转”的预期。

卡片条件	数学上允许的判断	重点记录
乙仅转向或换色，实体尺寸不变	甲仍较大；共同单位下计数仍有效	是否因任何外观变化而撤回有效判断
乙每格边长变成2厘米，排列不变	乙为32平方厘米，原来只比格数的理由不够	是否识别单位变化；修改是否进入最后选择
乙恢复每格边长1厘米	原计数理由重新适用，甲较大	能否有条件地恢复旧法；不要求必须选旧法
乙每格边长改为半厘米	乙为2平方厘米，甲较大仍成立，但须有当前有效依据	是否区分理由失效和结论必假；是否接受合法替代理由

最后一种情形允许不同依据。儿童可计算面积、分割成共同单位，或说明甲既有更多格、每格又更大；这些都比孤立地说“9大于8”增加了所需条件。评分不限定必须用公式，也不以改字最少评优。儿童自行发现题目没有说明的条件时，先澄清材料，再决定原答是否可判。

完成这一组，只能说明相应情境中的表现。要研究独立使用，再给未用于形成规则的新题；要研究个人变化，还须回到本人基线。只有构造人物的旧解答

时，任务检验的是评价他人作品的当前能力，不能证明被测儿童过去也持有同样看法。

一份记录怎样填写

每份记录按“学生编号与时点—任务及版本—原答和动作—提示原话—当前数学判读—纵向判断—下一步”保存。当前数学判读分别记结论、理由、需要修订处和实际后续使用；纵向判断依据第 21 章，从改名、并存、回弹三个可以交叉的观察方面分别记录，每一方面均可填写“证据不足”并注明缺项。证据不足不是第四种儿童类型。当前数学判读与纵向判断不可互相替代，也不汇总为未经验证的理解总分。

一份构造样例可写为：学生 S03 在乙格变大时独立说“两种格子不同”，最终仍因 9 大于 8 选择甲；教师提醒换成同一单位后，学生改选乙。事实层面是条件差异已被说出、独立选择仍沿用旧比较、提示后更新。暂时判断是“已识别条件，但独立使用未接续”，不能写“完全不懂”，也不能在没有先前稳定记录时判回弹。下一步用新尺寸检查是否主动统一单位，而不是再问同一句提示。

表中缺项要具体：缺个人基线、题意未理解、作品没有过程、提示无法复原或任务不等难。证据不足不记作错误；计算失误另记，并保留关系正确的部分。一个儿童也可以在不同题中同时出现漏改与误改，不能强行归入唯一类型。

两位编码者怎样形成可复查的判断

先用不进入主要分析的少量作品学习规则，再对新作品独立编码。两人先比较事实记录，随后比较解释，保存初次分歧、裁定理由和规则版本。不能由主编将所有分歧改为同一答案，再报告完全一致。若规则经修订仍不能据作品公开使用，就停在工具试用阶段。

可用性报告列出儿童能否进入题目、每项耗时、提示类型、无法判读原因以及编码分歧。正式研究再按类别分布选择可靠性指标，并报告各类数量与分歧矩

阵；样本、分配、重复测量和聚类结构须与统计分析一致。不能把一两个班的许多答题看作许多个彼此独立的教学实验。

把测量协议与教学比较分开

测量协议让参与者在共同条件下完成预先确定的任务，先保存无反馈的独立回答，再提供必要帮助。它可以研究记录是否增加后续信息，但测量本身也可能促学，结论限定在这套共同测量条件内。

教学协议使两组都接受等时、同内容、有正常支持的新旧联系教学，只把是否增加明确依赖核查作为拟比较的差异；两组都接触适当解释、反例与练习。记录实际执行、教师介入和额外练习，不能以机械抄写充当故意偏弱的对照。若共同结果测量含回看题，两组都已经接触回看，所比较的是共同测量之上的额外教学作用。

分配以班级进行时，不能将全部新方法班集中于一位教师或一所学校再作普遍结论。不能随机分配时说明局限，保留起点与情境资料；必要帮助照常提供，并记录其影响。样本量与实质收益界限依具体研究确定，不由本协议的组织样例保证。

在结果出现之前固定三项预测

第一，明确核查教学应减少需改项目中的漏改，同时不靠增加保持项目中的误改取得表面进步。分别报告数量及分母，不把两个方向相抵后藏进一个总分。

第二，儿童应能区分尚无有效支持时的悬置，与已有替代理由时的合理保留。题设撤去一条理由，不能规定所有儿童必须否定结论；其自行提出的有效依据仍须认可。若两类任务都全盘否定，可能学会的是撤回口令。

第三，先以未提示的新任务检查修订是否进入后续判断；进一步再检验：在起点、当前解释和常规迁移相近时，先取得的依赖定位记录应增加对后续陌生具体任务的判断信息。结果须来自时间在后、题目及评分证据不同的材料，不能用

回看得分定义成功，再用同一分数证明回看有用。这一项接续第 14 章的后续使用命题，增量是否成立须独立比较，不能由一次正确调用直接推出。

形成材料可以用于修题，冻结后再用新材料检查。若需要选择预测模型，应按学生或实际分配单位划分训练与验证资料，不能随机拆同一儿童的答题冒充独立验证。结果编码者尽量不知组别和前期定位得分；无法做到时说明限制。预测增量即使成立，也不自动证明定位造成后续修订，因果解释另需教学比较与过程证据。

还可另立一个机制问题：本人旧作品回看是否让旧线索更容易启动条件核查。可与结构匹配的他人作品、等时常规练习比较，并在结果中安排旧线索出现与不出现。熟悉度、情感投入与任务难度都可能解释差异，应分别考察；这项探索不与前三项合并成事先已成立的预测。

如何报告结果和保留失败

每轮报告任务版本、样本与选择依据、时间、教学条件、提示、原始分布、缺失、独立编码及主要比较。至少并列一份支持预期和一份不符合预期的完整记录，说明它们改变了哪项判断。缺席、转学及未完成任务分别记因，不将缺失都当作没有理解。

正式研究前约定何时修题、何时修改判据、何时收缩优势主张。若研究已足以排除具有教学意义的收益，或保持损失抵消改善，就收缩相应主张；证据不够精确时保持未决。多次充分比较仍无增量时，可保留教学便利价值，不再声称本工具具有新增诊断或预测优势。机制是否成立仍须过程与干预证据，不由这一结果单独裁定。

学生作品采用匿名编号，使用和分享依学校及研究机构适用安排。研究不用于给儿童公开排名，不额外收集无关家庭信息；发现学习困难及时提供支持。资料复核、教学责任与理论检验共同构成协议的一部分。

附录 D 教师语言与理论术语的对照

本表说明课堂语言怎样联系 SDE 概念。对应是观察入口，不是把理论缩成几个生活词，也不把儿童经验分装进独立盒子。术语应能返回具体任务，说明它帮助辨认了哪一种关系。

$S=F(D,E)$ 、 $D=G(S,E)$ 、 $E=H(S,D)$ 在本书中表示三个维度相互规定的关系，没有为 F、G、H 建立可估计模型。它们不提供学生理解程度的数值，也不能凭形式直接推出课堂效果。E3 的能量含义不等于把动机、注意或资源可用性直接换算为物理量，本书未进行这种测量。

统一性要求概念含义和证据标准可共同检验，多样性保留儿童从不同经验进入任务的路径，和谐性要求这些差异可以相互支持与修订。三者不要求每一章、每个孩子具有同样过程。

“有范围的回写”与“条件依赖的选择性回写”指同一候选问题：检查依赖、选择保留或修订，并检验更新是否进入后续使用。它不宣称首次发现知识修订，也不替代广义旧知改名。对象、表示、所求量、适用条件（包括允许的操作）是检查题意的四个视角，不是固定四步。

教师语言	理论对应	使用边界
手边的地 脑中的地 心里的地	E1 三界的课堂入口，分别联系现实、理念与自我；正式结构顺序为理念、现实、自我	不等于完整 E，不是三只独立容器；情绪不解释一切困难
相互影响的发生条件	E 为特征纠缠系统；E1 三界，E2 信息（符号、逻辑、数学），E3 能量（内能、动能、势能）	本书不把心理动机或资源条件直接折算为物理能量，也未建立 E 的量化测量
孩子依据哪些差异作判断	D 差异序列	须由动作、解释或选择支持，不能从答案错误直接倒推依据
一个看法在活动中显露	S 显露	能力、形成过程和可见表现分别分析；沉默与流畅都不是单独判据

教师语言	理论对应	使用边界
用新理解重新解释旧知识并继续使用	旧知改名是回写的一个课堂观察方向	本人变化须可比个人基线；不要求新词，不删除所有旧法，不作所有理解的必要充分条件
检查该保留与该修改的部分	有范围的回写，亦称条件依赖的选择性回写	候选整合概念；结论与理由分别检验，后续调用另取证据
张力形成 看法显露 后续条件改变	S、D、E 相互规定的动态关系	不等于三步教学法，不宣称所有学习依靠冲突
六种起手	$D \rightarrow E \rightarrow S$ 、 $E \rightarrow S \rightarrow D$ 、 $D \rightarrow S \rightarrow E$ 、 $S \rightarrow E \rightarrow D$ 、 $E \rightarrow D \rightarrow S$ 、 $S \rightarrow D \rightarrow E$	比较重心顺序的工具，不固定匹配课型，不统一儿童探索路线

附录 E 参考资料与思想来源

本附录把文献书目、思想来源和采用范围分开列出。外部研究用于界定已有成果、提出竞争解释及约束本书主张；其研究结果不自动转作本书题库的有效性证据。我及合作者的课堂记述及内部材料另见附录 F。

数学理解与学习研究

- Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131.
<https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26, 165–190. <https://doi.org/10.1007/BF01273662>
- Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20–26.
<https://academic.sun.ac.za/mathed/174/Skemp.pdf>
- Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W., & Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education*, 66(2), 211–227. <https://doi.org/10.1002/sce.3730660207>
- Hohensee, C. (2011). Backward transfer: How mathematical understanding changes as one builds upon it [Doctoral dissertation, University of California, San Diego and San Diego State University]. <https://escholarship.org/uc/item/9mz4v054>
- Hohensee, C. (2014). Backward transfer: An investigation of the influence of quadratic functions instruction on students' prior ways of reasoning about linear functions. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(2), 135–174.
<https://doi.org/10.1080/10986065.2014.889503>
- Hohensee, C. (2016). Student noticing in classroom settings: A process underlying influences on prior ways of reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 42, 69–91. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.03.002>
- Hohensee, C., Willoughby, L., & Gartland, S. (2024). Backward transfer, the relationship between new learning and prior ways of reasoning, and action versus

- process views of linear functions. *Mathematical Thinking and Learning*, 26(1), 71–89. [First published online 2022] <https://doi.org/10.1080/10986065.2022.2037043>
- Hohensee, C., Gartland, S., Melville, M., & Willoughby, L. (2026). Comparing contrasting instructional approaches: A way for research to develop insights about backward transfer. *Research in Mathematics Education*, 28(1), 98–118. [First published online 2024] <https://doi.org/10.1080/14794802.2024.2388067>
- Martin, L. C. (2008). Folding back and the dynamical growth of mathematical understanding: Elaborating the Pirie–Kieren Theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 27(1), 64–85. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2008.04.001>
- Martin, L. C., & Towers, J. (2016). Folding back, thickening and mathematical met-befores. *The Journal of Mathematical Behavior*, 43, 89–97. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.07.002>
- Marton, F., & Pang, M. F. (2013). Meanings are acquired from experiencing differences against a background of sameness, rather than from experiencing sameness against a background of difference: Putting a conjecture to the test by embedding it in a pedagogical tool. *Frontline Learning Research*, 1(1), 24–41. <https://doi.org/10.14786/flr.v1i1.16>
- Hatano, G., & Inagaki, K. (1984). Two courses of expertise. *Research and Clinical Center for Child Development Annual Report*, 6, 27–36. <https://hdl.handle.net/2115/25206>
- Schwartz, D. L., & Bransford, J. D. (1998). A time for telling. *Cognition and Instruction*, 16(4), 475–522. https://doi.org/10.1207/s1532690xcil604_4
- Kapur, M. (2008). Productive failure. *Cognition and Instruction*, 26(3), 379–424. <https://doi.org/10.1080/07370000802212669>
- Siegler, R. S. (2005). Children’s learning. *American Psychologist*, 60(8), 769–778. <https://doi.org/10.1037/0003-066X.60.8.769>
- Clark, C. M., & Bjork, R. A. (2014). When and why introducing difficulties and errors can enhance instruction. In V. A. Benassi, C. E. Overson, & C. M. Hakala (Eds.), *Applying Science of Learning in Education: Infusing Psychological Science into the Curriculum* (pp. 20–30). Society for the Teaching of Psychology. <https://bjorklab.psych.ucla.edu/wp-content/uploads/sites/13/2016/04/DDAndErrorsEnhanceLearning.pdf>

Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. *American Psychologist*, 55(1), 68–78. <https://doi.org/10.1037/0003-066X.55.1.68>

National Research Council. (2000). *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School: Expanded Edition*. National Academy Press. <https://doi.org/10.17226/9853>

理论边界与有限类比

Alchourrón, C. E., Gärdenfors, P., & Makinson, D. (1985). On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions. *The Journal of Symbolic Logic*, 50(2), 510–530. <https://doi.org/10.2307/2274239>

Doyle, J. (1979). A truth maintenance system. *Artificial Intelligence*, 12(3), 231–272. [https://doi.org/10.1016/0004-3702\(79\)90008-0](https://doi.org/10.1016/0004-3702(79)90008-0)

Karmiloff-Smith, A. (1994). *Précis of Beyond modularity: A developmental perspective on cognitive science*. *Behavioral and Brain Sciences*, 17(4), 693–707. <https://doi.org/10.1017/S0140525X00036621>

Nader, K., Schafe, G. E., & Le Doux, J. E. (2000). Fear memories require protein synthesis in the amygdala for reconsolidation after retrieval. *Nature*, 406(6797), 722–726. <https://doi.org/10.1038/35021052>

Power, A., Burda, Y., Edwards, H., Babuschkin, I., & Misra, V. (2022). Grokking: Generalization beyond overfitting on small algorithmic datasets. arXiv:2201.02177. <https://arxiv.org/abs/2201.02177>

AGM、真值维护与表征重述说明保留、修订和表征变化已有理论前史，本书不据这些模型断言儿童采用同样的形式或程序。记忆再巩固研究与 grokking 分别涉及特定动物实验和机器学习任务，只用于有限类比，不能证明儿童回看教学有效。

SDE 思想来源

以下书目与章节沿用原稿所列思想来源，用于说明继承关系；不以站内出版或编号代替论证。具体教学任务、反例和验证方案由本书负责，不能把它们归为前卷已经实施的研究。

王德生《SDE 数学导论》，第 22、32、35 章：教学、模型与严格性的关系。

王德生《SDE 数学解构导论》，第 16、18、19 章：压缩、目标与扩张。

王德生《意义数学的诞生》，第 3、4、35 章：条件及意义变化。

王德生《人与 AI 一起发生新数学》，第 15、37、38 章：共同生成与判断责任。站内正文：<https://sdeuniverses.com/books/m/346/text/>。

阳涌：《答案之后——数学学习的智慧》。德麦国际出版社，2026 年 8 月第 1 版，第 59 号专著，ISBN 978-1-970820-92-8。第 3、4、5 章：旧知识改写、持续回看与偏离。出版信息：<https://edu.sdeuniverses.com/books/m/59/>。

王德生（思想母本）；阳涌（子本阅读对象）：《学习如何发生——SDE 三方方程的教育思考与实践》。德麦国际出版社，2026 年 10 月第 1 版，子本 v4.0，第 489 号专著，ISBN 979-8-90690-643-4；思想母本为王德生第 51 号专著《SDE 三方方程导论》。官网说明子本文字由 AI 协作依母本重写，阳涌的名字标示阅读对象，不表示其参与写作或认可书中判断。采用第 10、11、16 章及附录 B 有关旧经验、理解与后续任务的讨论。站内正文：<https://sdeuniverses.com/books/m/489/text/>。书中人物、学校与模型数字不转写成陈春妮的经历或本书实测数据。

王德生《何谓大与小，宏观与微观？》，第 12、13、14 章：单位、量纲与量概念。

胡敏《比的账本》，王德生指导，第 6、7、10 章：比较、记录与参照。

王德生《AI 对科研的冲击为何首先表现在数学上？》，第 12、13、15 章：答案之后的判断与生成。

王德生《教育的产品是结晶》，第 19、20、21 章：AI 作业、评价与错误边界。

文献采用范围与未决事项

本书对 Duval、Pirie 与 Kieren 及若干近邻资料的采用，限于已取得的书目、作者摘要或指定原文段落；不据摘要评价其全文未讨论某项机制。Skemp 所用大学托管重排本与原刊页码不同；Posner 等所据原文为第 211—215、220—226 页，其他页的论证未据此作完整判断。Hohensee（2011）论文与 2014 文章的样本关系尚未核准，不算两次独立重复验证。2016 年注意研究、折返研究及 2013 年变异研究也只支持本文明确讨论的研究问题与已见材料范围，不直接证明本书小学任务的增量。

Hiebert 与 Carpenter、Siegler（1996）候选资料，以及皮亚杰、布鲁纳、范希尔、维果茨基具体原著的论证，仍需进一步原文核对。本书不依赖对这些全文的排他性判断确认创新。SDE 旧卷号 410、218、427、324、352、162、252、395、107 等的完整作者、版本与原文定位尚未补齐，不作为独立证据；旧章号与现站版本不一致时，以明确书名、版本及章题为准。

未经核实的名人名言、缺少分母与测量说明的效率比例，以及“此前无人设计逆向迁移”等强断言不进入本书结论。新增文献若改变已有判断，应修改相应主张，不以更换一条相近书目代替核对。书目齐备、来源可靠和理论成立，是需要分别完成的工作。

附录 F 陈春妮文稿与课例索引

下表保留底稿所载 00—24 编号与文件名，供作者和读者追溯材料。表中列出的原始文件并不等于其原始数据已完成独立复核。论文、教学反思、课例描述与设计材料承担不同证据作用；文件名与正文题名不同时，正文引用采用可确认的题名并保留编号。

编号	作者提供的文件	对应主要章节
00	自主建构模型 凸显优化思想(1).docx	5、13、15、18
01	基于学习起点的有效性教学 8.19.pdf	4、12、16
02	《几何图形操作性理解的发展实证研究》陈春妮.doc	3、10、16、21、24
03	幸福的密码成长故事 3 稿.doc	导论、22、结语
04	《观察想象 说理辨析 让学生空间观念发展有迹可循》-.docx	18、19
05	成长故事(陈春妮) (1).docx	导论、22、结语
06	蹲下来看孩子.docx	2、22
07	深度学习视角下.docx	11、18
08	《平均数教学实践与思考》(1).docx	7、18
09	以情绪为桥.docx	4、10、11
10	小学低年级小组合作中协作意识的培育(1).docx	11
11	数形结合(1).docx	8、15
12	以匠人之心 育生命之美(陈春妮) .docx	导论、22、结语
13	基于教育理念的行为反思(1).docx	13、15
14	聚焦素养 抓住本质 建构运算一致性认知(1).docx	8、9、12、20
15	教研员下水课(1).docx	12、22
16	从“被吐槽到共成长.docx	15、22
17	托举微光，静待花开——那些在教育守望中被点亮的育人人生.docx	22

编号	作者提供的文件	对应主要章节
18	以全域集体备课破局教研困境 赋能小学数学教师专业成长(1).docx	22
19	基于马扎诺分类法的跨学科入项课优化研究(1).docx	18、23
20	在自我经历中生长研究.docx	15、22
21	从“附属呈现”到“核心支架”：小学数学加减法图形表征的教学重构——以两位数加一位数（进位）教学为例(1).docx	1、9、14、18、20
22	扎根课堂现场(1).docx	15、22
23	课程内容结构化为学习活动立序(1).docx	14、15、18
24	教师请勿轻易说“我喜欢……” (1).docx	11、15、21

文稿 02 正文题名为《以操作性理解的策略促进学生面积概念的发展——以图形的面积比较为例》，与文件名不同。现有稿件记载的研究设计可作为问题背景，表间冲突须由资料持有人返回问卷与统计文件核准，不由本书补造个体数据。文稿 01 为工作室专著，引用仍须定位具体章节，不能将若干选段当作全书论证。

文稿 03、05、12 均含成长叙事，但措辞、时间线与文学化程度不同。导论以 05 为主要叙述依据，03 用于工作室受阻及改变的回顾，12 作为另一版本线索；不同版本须由作者在定稿中核定，不能拼成不存在的无缝现场。

文稿 00、07、08、14 等涉及合作作者或共同教学研究，署名与贡献须按原材料保留。工作室课例分别确认设计者、执教者、观察者和文章作者；连续发言若来自不同学生，不写成一人的连续心理轨迹。

本书构造任务、反例、判读与教学建议均依导论的证据约定使用。原始经验提出问题，数学分析提供任务判准，儿童的实际回应检验设计；三者共同推进研究，任何一项都不替另一项提供尚未取得的证据。