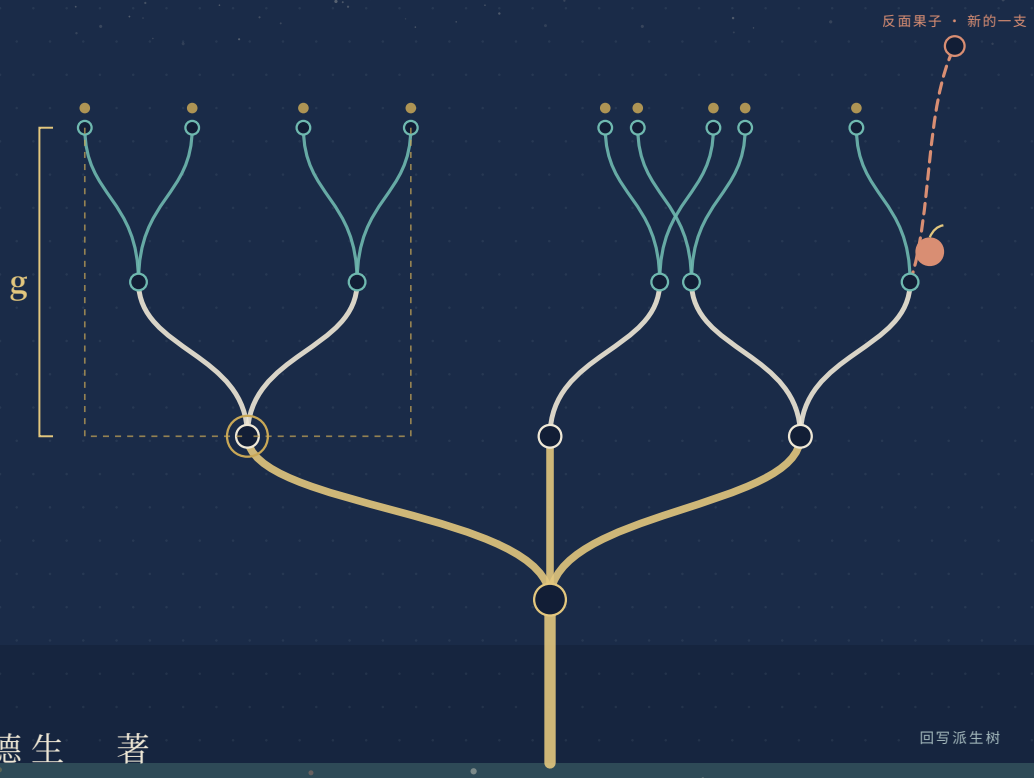
SDE UNIVERSES
德麦国际专著 · 第 552 号

AI 撞果子 · 人织谱

# 陶哲轩如何才能与大模型公司和解与合作呢?

从统一性数学到同一性谱系数学




王德生 著

德麦国际出版社
Demai International Press

德麦国际专著 · 第 552 号

# 陶哲轩如何才能与大模型公司和解与合作呢?

## 从统一性数学到同一性谱系数学

王德生　著

德麦国际出版社
Demai International Press · Singapore

# 出　版　信　息


| | |
|---|---|
| 书名 | 《陶哲轩如何才能与大模型公司和解与合作呢？》 |
| 副题 | 从统一性数学到同一性谱系数学 |
| 英文书名 | How Can Terence Tao Reconcile and Cooperate with the Large-Model Companies? From Unified Mathematics to Identity-Genealogy Mathematics |
| 著者 | 王德生 |
| 出版 | 德麦国际出版社（Demai International Press）· 新加坡 |
| 编号 | 德麦国际专著第 552 号 |
| ISBN | 979-8-90690-554-3 |
| 定价 | US$22.00 |
| 开本 | 170 mm × 240 mm |
| 字数 | 约 19.3 万字（前言、十四章、结语与附录正文 192,728 个汉字） |
| 版次 | 2026 年 11 月第 1 版 |


成书说明：本书是研究性专著初稿。核心问题、SDE 框架与全书母题由王德生提出；正文由 AI（Claude）协作撰写，经分章质检与统稿。同一底座的多位执笔者与审稿者不能互作独立证据；本书没有经过独立学术评审，也没有用户试验。

书中陪读的人物与日常场景是构想；第 9–12 章的测量是研究设计，没有实测数据；正文中标〔待核〕的条目，附录四列有总表。全书结构：前言；上编、中编、下编、终编，共十四章；结语；附录一至四；版本说明。


版权所有　侵权必究

和解不是谈判，是赛道变多。

—本书结语

# 作者介绍

王德生（Desheng Wang），博士，SIO 本体论与 SDE 发生学（显露·差异序列·特征纠缠）创立者，德麦国际（Demai International）创始人、董事长，主持 SDE Universes 平台与德麦国际专著出版体系。

计算数学出身：湘潭大学数学系本科、硕士，中国科学院数学研究所博士，中国科学院计算数学研究所博士后；曾任英国威尔士大学斯旺西分校高级研究员、新加坡南洋理工大学数学系助理教授（博导）与资深研究科学家，在计算数学与图形学国际期刊发表论文四十余篇。2015 年起回国推广三视角方法论，在各地高校讲学数百场；2024 年提出 SIO 本体论与意义三律，后凝练为 SDE 发生学。

本书的核心问题与母题——只要数学停在统一性上，数学家与大模型公司就无法真正和解，这是数学研究的内卷；数学是 E2 之场，同一性谱系源于场结构的谱系化；AI 撞果子，人织谱——由王德生提出；正文由 AI（Claude）协作撰写，经分章质检与统稿。

# 成书说明

这是一本研究性专著的初稿，请按它实际做到的范围来读。

谁写的。本书的母题由王德生在 2026 年 11 月 1 日的一次对话中提出：陶哲轩与大模型公司之所以谈不拢，是因为双方挤在统一性数学的同一条赛道上；出路是数学从一种场结构走向场结构的同一性谱系，AI 撞出反面果子，人把果子织成谱系的新分叉。核心问题与 SDE 框架由他给定，书中凡标明是他说的话，意思未改。正文由 AI（Claude）协作撰写：按统一任务书由 10 位 AI 写手分章执笔，再经独立质检逐章核对口径、人物、引文与文风，最后统稿合成。写作与审读用的是同一个底座，执笔者与审稿者之间不能互相当作独立证据；本书没有经过独立学术评审，也没有用户试验。

哪些是构想。书中陪读的人物——罗奶奶、曾晓岚和她的家人、在城郊种菜的欧阳伯、做形式化的林知远等——与他们的日常场景，都是为说明机制而设的构想，只在日常的事里出场，不替任何真实的人说话。红烧肉、骑车、吃药、种地这些例子用来演示计数和预测，不是证据。

哪些是研究设计。第 5 章给出回写派生树上共同祖先深度 g 的定义与细数法；第 9–12 章在形式库、学骑车、细胞、土壤上先测 g、再测 d 的方案，都是研究设计，截至成书没有任何一个实测数字。承重预测与结语里的几条证伪条件，是押注，不是已得的结果。

哪些待核。关于陶哲轩、菲尔兹奖得主宣言与 2026 年 AI 数学事件的说法，来自已核对的报道与讲座，以转述为主；近邻学说只转述核心主张，不引原话。凡出处、年份或原句尚未逐条核对原文的，正文中原位标〔待核〕，附录四“引文核验总表”按章列出，并在末尾写明“本书最弱处”。

正文字数。前言、十四章、结语与附录的正文实计 192,728 个汉字；章题、节题、表格不计入。

# 前言

一张短视频截图引出的问题

> **这一章的问题**
>
> 一张截图把陶哲轩说成了"反对 AI 的人"。核对原话以后，我们发现真正的问题不在人和机器之间，而在数学家和大模型公司为什么谈不拢——这本书就从这里出发。

## ◆ 一张截图

先讲一个构想的场景。本书里会反复出现几位陪读的人物，他们都是构想的人物，住在湖南娄底，过着普通的日子。头一位是曾晓岚，四十三岁，在娄底一所初中教数学。她的母亲罗秀英奶奶七十一岁，退休前是纺织厂的女工；她的女儿谭一禾十六岁，刚上高一。

十月底的一个晚上，曾晓岚批完作业，打开家长群，看见有人转来一张短视频截图。截图上是一位戴眼镜、笑得有点腼腆的数学家，旁边配着几行加粗的大字，说这位数学家警告：人工智能正在让下一代得"大脑肥胖症"，孩子们出现了思考上的"进食障碍"，"优渥长大的孩子已有苗头"。

群里一下子热闹起来。有家长说："连陶哲轩都这么说了，学习机得收起来。"有家长说："我早就讲过，什么都让机器算，脑子要废的。"也有人发了一个叹气的表情，说孩子作业不让用软件查，一晚上做不完，又该怎么办。

曾晓岚知道陶哲轩。数学老师里没有几个不知道他的：华裔数学家，菲尔兹奖得主，小时候就是有名的神童。她也知道，这几年他在网上写了不少用 AI 做数学的文章，是数学家里最早、最认真地拿大模型干活的人之一。一个天天和 AI 一起做数学的人，忽然警告 AI 会把孩子的脑子吃胖？她有点不信，想去找一找原话。

她的表弟林知远在外地读完博士，正在做一种叫 Lean 的形式化工作——把数学证明一步一步写成计算机能检查的样子。她把截图发给表弟，问："这话是真的吗？"

## ◆ 核对原话

核对的结果，是这本书的第一课。

陶哲轩确实讲过和"吃"有关的话，但讲的是另一回事。二〇二六年六月，他在欧洲数学会的一次讲座里，七月又在一次书面访谈里，用过一个"认知饮食"的类比。大意是这样：人类吃饭这件事，曾经长期处在稀缺之中，后来食物变得充裕，人们反而遇到了肥胖和体能退化的问题；思考这件事也一样，过去获得知识要经过许多"摩擦"，现在认知的东西变得充裕了。所以，他认为，教下一代保持一种有意识的"认知饮食"，会成为教育的一项重大的新使命。

他还做过一个区分。有一种摩擦是"人为摩擦"，比如繁琐的计算，这类活儿可以交给工具，前提是人还能抽查；另一种是"自然摩擦"，是真正的概念难点，把它抹平了，学习者本该得到的收获也就被一起夺走了。

至于截图上那三句——"大脑肥胖症""进食障碍""优渥长大的孩子已有苗头"——在能找到的原始讲座和访谈里，都没有见到这样的原话。它们是中文编辑在转述时做的概括。

一个是类比，一个是诊断；一个说的是"教育多了一项新使命"，一个说的是"孩子已经病了"。中间差了多少？差了一整条思路。原话里有一个"过程"：从食物的历史讲到认知的历史，从稀缺讲到充裕，再分出哪种摩擦可以交出去、哪种不能交，最后落到教育要做什么。截图把这条过程剪掉，只留下最吓人的那个结论，还给结论换上了病名。

这一点要先说清楚：本书不给任何孩子下诊断，也不把"大脑肥胖"当作一个病来讨论。我们关心的是另一件事——这张截图本身，恰好是一颗"只有结果、没有过程"的果子。

## ◆ 果子与过程

"果子"这个词，本书会用很多次，先用一件课堂上的小事把它讲明白。这也是一个构想的场景。

曾晓岚的班上，每学期总有那么一两回，有学生交上来的作业只写了答案。答案是对的，一个字不差，可是题目底下光秃秃的，没有一步过程。她不急着打叉，而是把学生叫到讲台边，问："你是怎么想到的？"

有的学生说得出来：先试了一个数，不对，换了个思路，才对上。这样的答案，虽然没写过程，过程是在的，只是藏在他脑子里。有的学生支支吾吾，最后承认是抄的，或者是拿手机拍题查来的。答案一样对，交上来的却是两样东西。前一种，答案连着一条走过来的路：哪一步卡住，哪一步换了方向，下一回遇到类似的题，他从哪里起步。后一种，答案是一个孤零零的结果，它不连着任何一条路，交上来以后，学生下一回还是不会。

本书说的"果子"，就是后一种：一个结论被交了出来，可它是怎样一步步长出来的，没有跟着交出来。果子本身不一定是错的。抄来的答案也可能是对的。问题在于，它不能回头改变下一次的起点。曾晓岚判作业时最怕的，不是答案错，而是答案对、人却没有往前走一步。

那张截图也是这样一颗果子。"大脑肥胖症"这几个字可能抓住了某种担心，可它把陶哲轩的那条思路——从吃讲到想，从稀缺讲到充裕，从哪种摩擦能交出去讲到哪种不能——整个剪掉了。家长们拿到的，是一个可以直接转发、可以直接拿来管孩子的结论，却拿不到可以拿来想事情的过程。所以群里争到最后，问出来的还是那一句：到底哪些该交、哪些该留？

而这件事放到数学界，就不只是家长群里的一场争论了。第 1 章会讲到，大模型公司一次放出几百道题的证明，数学家们读得吃力，有的看不懂，有的已经因为错误撤回。陶哲轩生气，不是因为机器算出了东西，而是因为一大堆"答案"同时砸下来，没人知道它们是怎么来的、该往哪里接。这和讲台边那个只交答案的学生，是同一类事，只是规模大了几万倍。

### ◆ 截图为什么好传

为什么这张截图传得这么快？因为它讲了一个大家早就想听的故事：最聪明的数学家站出来反对 AI 了。

这个故事，在二〇二六年秋天被讲了不止一次。九月十一日，二十五位菲尔兹奖得主联名发表了一份宣言，题目大意是"AI 在数学中的严重错位"，签名的人里有

陶哲轩、Scholze、Deligne、Kontsevich、Viazovska、Maynard、邓煜等。据《Quanta》报道，几天之内又有七千四百多位研究者加签。很多中文转述把它说成"数学家集体抵制 AI"。十月初，OpenAI 一次性放出了七百二十二道题的 AI 证明，陶哲轩先称这类结果为"有毒废料"，这句话又被许多人当成"他终于翻脸了"的证据。

可是只要把原文读一遍，就会发现这个故事对不上。宣言承认大模型的数学能力已经大幅提升；它反对的是 AI 公司把"解题"当成比赛的基准，并认为这件事有害于数学和数学共同体；它没有呼吁禁止 AI，也没有提出什么具体的管控办法。陶哲轩本人呢？他在二〇二三年就预言过，到二〇二六年，AI 会成为数学研究里可信的合著者；到了二〇二六年初，他认为这个预言几乎如期实现了。说"有毒废料"之后不久，他又改口说，也许是"处理过的废料"。

这些事实，第 1 章会一条一条摊开讲。这里只先说作者的一个看法：宣言被误读成了"抗 AI"，其实它抗的是"果子"——只交结果、不交过程的那种东西。而那张短视频截图，用的正是同一种做法：把一段有来有去的话，剪成一个只有结论的标签。

### ◆ 真正的问题

误读拆掉以后，剩下的问题反而更清楚，也更难。

陶哲轩不反对 AI，大模型公司也不反对数学。双方都说自己想推动数学。那为什么一边在签名、在说"废料"，一边在一万个智能体日夜不停地攻千禧年难题？为什么陶哲轩自己会说，这些公司像掉进了囚徒困境——谁都不想跑这么快，可谁都觉得停不下来？

本书的书名，就是这个问题：陶哲轩如何才能与大模型公司和解与合作呢？

常见的回答有两种。一种是"定规矩"：公司发布结果前先和数学家打招呼，署名写清楚，不许一下子放出几百道题。另一种是"分工"：常规的推导交给 AI，开创新方向的工作留给人。这两种回答都有道理，本书都会认真讲。但作者认为，它们都没有碰到根上。

为什么这么说？拿罗奶奶住的老小区打个比方。小区里车多位少，每天晚上为抢车位吵架。物业定了规矩：划线停车，不许占两个位，外来车限时。规矩是好规

矩，吵架少了一些。可是只要车还是那么多、位还是那么几个，下班就得早回来抢，规矩管住了抢的样子，管不住"大家都在抢同一排车位"这件事。"AI 做常规、人做典范"的分工也有类似的问题：人退到"开创新方向"那一头，可如果新方向最后还是要被收回到同一张清单、同一个标准里去评，人和机器早晚又会在那一头挤到一起。

根在哪里？作者的看法是：只要数学还停在"统一性"上——整个数学界只有一个评判标准、一套公认的地基、一张大家都在抢的难题清单——大模型公司和数学界就永远无法真正和解。这是数学研究的内卷问题。规矩可以让抢得斯文一点，分工可以让抢的东西换一换，却改变不了大家挤在同一条跑道上抢同一颗果子这件事。

那么出路在哪里？这需要换一个眼光看"数学是什么"。

我们平常把数学当成一种站在万事万物外面的语言：世界是世界，数学是用来描述世界的工具，工具本身不变。本书用作者提出的 SDE 发生学（S 显露、D 差异序列、E 特征纠缠，第 4 章细讲），换一个说法：数学本身就是一种"场"——是事物的各种特征缠在一起时，它们之间怎样连接、按什么先后、搭成什么样的结构。这种场不是只有一种。它会在一代代的使用和修改里，像土壤一样一层层堆积，分出远近不同的支系，就像一家人传了几代的那道家常菜，同村的做法相近，同省的相似，全国同名却差别很大。本书把这种"有远有近、有程度的相同"，叫作"同一性谱系"。它不是几套数学并排摆着、各自内部统一的"多元"，而是同一性本身有了程度；这个程度属于数学之场自己，由场结构沿一代代回写走过的历史生成，在把一条规律搬过去之前就可以先量。

作者认为，只有当数学从"一种场结构"走向"场结构的同一性谱系"，陶哲轩和大模型公司才能从抢同一颗果子，转到真正分工：AI 在一种结构里千倍地推导，撞出那些"反面的果子"——规律在某处被推出了它原本所属的那一支；人把这些果子接住，织成谱系的新分叉，再交给 AI 在每一支里继续推。和解不是一场谈判，而是跑道从一条变成了许多条。

### ◆ 本书的路线

全书分四部分。

上编讲冲突的真相和已有的共识。第 1 章把宣言、七百二十二道题和陶哲轩这几年的轨迹核对清楚，看误读从哪里来；第 2 章讲内卷：一把尺子、不可再生的问题、囚徒困境，以及为什么规则修补像一纸"减负令"，治不了根；第 3 章讲"AI 做常规、人做典范"这个共识，它早就有人说过，本书只看它停在哪里。

中编是全书的理论部分。第 4 章用触觉、听觉、视觉三大感觉讲清楚 SDE 的基本眼光，再讲数学之场的三种形态：统一性、多元化的统一性、同一性的不同程度；第 5 章讲程度从哪里来——回写怎样像落叶和果子一样堆成土壤，并给出本书的承重预测；第 6 章和几组最近的邻居学说正面交手；第 7 章讲"反面果子"；第 8 章讲"复合主体"：说"AI，去解决哥德巴赫猜想吧"的那一刻，AI 身后其实站满了人。

下编是实测设计与案例。第 9 章先在数学内部设计一个测量；第 10 到第 12 章分别看学习、细胞、土壤的数学；第 13 章是写给陶哲轩的技术篇，讲形式系统怎样从"对或错"的检查走向"谱系"的检查。

终编第 14 章画出和解与合作的路线图：陶哲轩可以做什么，大模型公司可以做什么，优先权怎样改算，下一代的"织谱者"怎样培养。

### ◆ 这本书不站哪一边

写这样一本书，很容易被读成站队：要么替数学家出气，要么替公司说话。本书两边都不站，理由很简单——在作者看来，双方吵的不是对错，而是被同一条跑道夹住了。

先替数学家说一句公道话。他们担心的事是真的。陶哲轩说过，未解决的问题像一种不可再生的资源，一个问题被一口气证掉，后来的人就失去了在它身上练手、在它周围开出新路的机会。七百二十二道题一次放出来，有些年轻人正在做的课题被直接抹掉了。这不是怕机器，而是心疼一片地被一夜之间收割干净。

再替公司说一句公道话。它们也没有存心作恶。它们手里的机器确实越来越会做数学，最有说服力的证明，就是去攻人人都知道的名题。别人在攻，自己不攻，就会被认为落后。陶哲轩自己也看得明白：这是一个谁都停不下来的局。

两边都没说错，可两边加起来，局面却越来越坏。这种时候，与其问"谁该让一步"，不如问"是什么让双方只能抢同一样东西"。本书的回答是：数学被当成了只有

一种结构的东西，于是有价值的问题只有一张清单，有价值的成果只有一种算法——谁先证出来，算谁的。

本书也不是一本数学教科书。书里会谈到朗兰兹纲领、拓扑斯、形式化证明库这些名词，但只讲它们在争论里站在什么位置，不讲技术细节。一个读过中学数学、愿意多想一步的读者，可以读完全书。真正需要的，只是愿意换一个眼光：不把数学当成一块已经刻好的石碑，而是当成一片还在一层层堆积的土。

### ◆ 读这本书的几点说明

第一，书中所有关于陶哲轩和其他人的说法，都来自已经核对过的报道和讲座，转述为主，直接引语很短。核不到的地方，书里会标"待核"，不凭印象补。

第二，书中的测量——比如两种数学结构的"亲缘深度"怎么算、规律迁移成功了多少——一律是研究设计，不是已经得到的结果。本书不编数据。

第三，书里的日常例子大多是构想的场景，陪读的几位人物也是构想的。曾晓岚和她的家人、在城郊种菜的欧阳伯、做形式化的林知远，都只在日常的事里出场，不替任何真实的人说话。

第四，书里谈到教育、谈到孩子，不下诊断；谈到公司和数学共同体，不替任何机构定政策。

最后回到那张截图。曾晓岚后来在家长群里发了一段话，说原话不是这个意思，陶哲轩讲的是"有些摩擦能交给机器，有些摩擦要留给孩子自己"。群里安静了一会儿，有人回了一句："那到底哪些该交、哪些该留？"

这个问题，放到数学家和大模型公司身上，就是本书要回答的问题。

**带 走 的 话**

- **那张截图里的三个病名不是陶哲轩的原话；他讲的是"认知饮食"的类比，和两种摩擦的区分。**
- **截图、宣言的误读、一次放出的几百道题证明，是同一类东西：只交结果、不交过程的果子。**
- **陶哲轩不反对 AI，大模型公司也不反对数学；双方谈不拢，是因为挤在同一条统一性的跑道上。**
- **本书的出路：数学从一种场结构走向场结构的同一性谱系，AI 撞果子，人织谱。**

**小　账**

**本章切开的差异：**原话与截图之间，"有过程的类比"与"没过程的诊断"。

**本章的场谱系读数：**家长群和数学界默认的都是一种场结构、一条跑道；回写尚未发生——截图被转发，却没有回头改变任何人下一次的起点。

# 目 录


作者介绍 iv

成书说明 v

前言　一张短视频截图引出的问题 vi

**上编　冲突的真相与已有的共识** **1**

第 1 章　一份被误读的宣言 2

第 2 章　内卷：统一性赛道上为什么无法和解 11

第 3 章　"AI 做常规、人做典范"：共识与停点 24

**中编　数学是 E2 之场：同一性谱系源于场结构的谱系化** **35**

第 4 章　三种同一性：数学之场的三种形态 36

第 5 章　程度从哪里来：特征纠缠的场结构的谱系化 54

第 6 章　与近邻正面交手 78

第 7 章　反面果子：规律被推出场谱系之处 106

第 8 章　复合主体织谱：回写是谁写的 128

**下编　实测、案例与形式系统的谱系** **153**

第 9 章　先在数学内部测一测 154

第 10 章　学习的数学 172

第 11 章　细胞的数学 191

第 12 章　土壤的数学 210

第 13 章　形式系统的谱系：写给陶哲轩的技术篇 228

**终编　和解与合作的路线图** **247**

第 14 章　和解与合作的路线图 248

结语　和解不是谈判，是赛道变多 265

附录 272

附录一　2026 年 AI 数学事件时间线与出处 273

附录二　九格表 277

附录三　近邻文献 280

附录四　引文核验总表 285

版本说明　本版字数、版本与交付 288



上　编

# 冲突的真相与已有的共识

## 编　序

这一编先把冲突看清。第 1 章核对菲尔兹奖得主的联名宣言、七百二十二道题与陶哲轩这几年的轨迹：他们反对的不是 AI，而是只交结果、不交过程的果子。第 2 章讲内卷：只要数学停在一把尺子的统一性赛道上，双方就无法和解。第 3 章看“AI 做常规、人做典范”这句早有的共识，说清它对在哪里、停在哪里。

01

第 1 章

# 一份被误读的宣言

> **这一章的问题**
>
> 二〇二六年秋天，菲尔兹奖得主们的联名宣言和陶哲轩那句"有毒废料"，被许多人读成了"数学家反 AI"。他们到底在反对什么?

## ◆ 1.1　宣言说了什么、没说什么

先从一张小区里的告示说起。这是一个构想的场景。

罗秀英奶奶住的那栋老楼，去年装了电梯。电梯装好以后，楼里二十几户人家联名贴了一张告示在一楼大厅，大意是：电梯是好东西，大家都方便了；可最近有人用电梯一趟一趟地运装修垃圾，把轿厢刮花了，把按钮弄坏了，还挤得老人半天等不到一趟；请物业把电梯的用途管起来。

告示贴出去第二天，楼下小卖部的老板跟人说："三楼那几家老人联名反对装电梯了。"这话一传十，十传百，到了周末，连隔壁小区都知道"那栋楼的老人不让用电梯"。

告示上一个字也没有反对电梯。它承认电梯好，它反对的是电梯被拿来干一件不合适的事，而且干得太猛，挤掉了本来该有的用法。可是告示一离开大厅，进了别人的嘴，就只剩下一个最省事的结论："老人反对电梯"。

二〇二六年九月十一日，二十五位菲尔兹奖得主联名发表的那份宣言，遭遇的是差不多的事。

宣言的英文题目，意思是"AI 在数学中的严重错位"，发布在一个叫 mathandai.org 的网站上，也存了一份可以引用的永久编号。签名的人里有陶哲

轩、Scholze、Deligne、Kontsevich、Viazovska、Maynard、邓煜等。据《Quanta》报道，发布后几天之内，又有七千四百多位研究者加签。

宣言说了什么？把它的意思一条一条摆出来，大致是这样几层。

第一层，它承认大语言模型的数学能力已经大幅提升。这一句放在前面，不是客套，而是整份宣言的出发点：如果机器不行，就不会有后面那些担心。

第二层，它认为 AI 公司把"解题"当作衡量自己模型的基准，这件事有害于数学，也有害于数学共同体。

第三层，它解释了为什么有害：在数学里，解题只是一种工具，是用来理解概念的代理；把代理当成目的去冲刺，就把数学做歪了。

第四层，它指出，仓促地对外宣布"AI 解决了某某问题"，已经带来了署名不清、甚至剽窃的问题。

第五层，它说，没有数学家去照料，AI 构想出来的想法不会真正活起来。

宣言没说什么，也一样要紧。它没有呼吁禁止 AI，没有要求哪家公司停止研发，也没有提出任何具体的管控机制。它像楼里那张告示：承认东西是好东西，反对的是用法错了位。

说一份文件"没说什么"，看上去是在挑它的毛病，其实是在找误读钻进来的口子。一份文件只讲了担心、没讲办法，读的人就会自己替它补上一个办法。补得最快的，往往是最粗的那一个："既然担心，那就是反对；既然反对，那就是要禁。"楼里的告示没写"请物业怎样管"，小卖部老板就替它补了一个"不让用"。宣言没写"数学共同体希望 AI 公司怎样做"，转述的人就替它补了一个"抵制"。空白本身不是错，可空白会被最省事的故事填满。

宣言的题目里那个词——"错位"——其实已经把话说透了。错位不是"有毒"，不是"有害的技术"，而是"放错了地方"。一样好东西放错了地方，危害可能比一样坏东西还大，因为大家不会提防它。电梯运垃圾，并不是电梯坏，而是一个本来为人上下楼而有的东西，被挪去完成另一件事，还把原来的事挤掉了。

那么在数学里，被挤掉的"原来的事"是什么？宣言的回答是：理解。数学家做一道题，从来不只是为了那一个"是"或"否"。他们在做的过程里认识一个概念的脾气，

摸清它在哪里结实、在哪里会裂，一道题证出来，往往顺手带出了一串新的问题。这个过程，就是本书前言里说的"过程"。AI 公司把解题当基准，拿去比赛、拿去发布，交出来的是一个个结论，却没有把过程跟着交出来。

作者认为，宣言常被误读为"抗 AI"，可它抗的其实是"果子"——只交结果、不交过程的那种东西。这个区别，决定了后面整本书往哪里走。如果数学家反的是 AI，那么出路只有两条：要么数学家认输，要么公司收手。如果数学家反的是果子，那么出路就多了一条：让果子接上过程，让机器交出来的东西能被接住、能长下去。

可是宣言自己并没有走到这一步。它把问题说出来了，却没有说怎么办。没有机制，就只能靠呼吁；只靠呼吁，就像那张告示——大家看了点头，第二天装修队照样推着垃圾进电梯。为什么呼吁不管用，第 2 章会细讲。这里先看，宣言发出去一个月后，真正砸下来的是什么。

## ◆ 1.2　七百二十二道题与"有毒废料"

还是先讲一个构想的场景。

欧阳伯六十六岁，是罗奶奶的邻居，在城郊种着两块菜地。一块种了十几年，土是他一锹一锹养出来的；另一块是前年才开的荒，他正一垄一垄地试，看哪种菜合适。

有一天早上，他到地头一看，田埂边整整齐齐码着几百袋肥料。原来是一家农资公司搞推广，一夜之间往附近几十户的地头都送了货，袋子上印着"增产"的字样。

欧阳伯拆开几袋看了看。有几袋是好东西，正是他想买还没舍得买的；有一两袋，里面的配方他从没见过，闻着就不一样，说不定真能派上新用场；有好几袋，袋上的字他看不懂，也不知道该怎么用；还有一两袋，没过几天公司就打电话来，说配错了，别用。更叫他心里不是滋味的是，他在那块新开的荒地上偷偷试的一个法子，公司的说明书上已经印着了——他试了两年的东西，人家一夜之间就"送"来了答案。

他坐在田埂上，跟罗奶奶说了一句气话："这哪是送肥，是往我地里倒垃圾。"过了几天，气消了，他又说："也不全是垃圾，就是没人跟我商量，倒下来也不告诉我哪袋该用在哪块地。"

二〇二六年十月初，数学界经历了几乎一模一样的一个早上。

OpenAI 一次性释出了七百二十二道题的 AI 证明，其中包括三百五十多项发现。陶哲轩读了其中大约十篇。按报道里他自己的说法：有的是在延伸已有的工作；有一两篇有真正新的想法；许多篇难以理解；还有一两篇，已经因为错误被撤回了。

他的批评不在"机器能不能证"，而在"怎么放出来"：这样大的一批结果，事先没有和数学家协调。一些年轻人正在做的课题，被这一批证明一下子抹掉了。

他先是称这类结果为"有毒废料"。后来，他改口说，"也许是处理过的废料"。这两句话见于《纽约时报》十月十六日对他的专访——那篇专访的标题里用了"战时状态"这个说法——以及《观察家报》十月二十三日的报道。

在同一批报道里，陶哲轩还转述了这场赛跑是怎样加速的。起因之一是一则传言：Anthropic 接近解决一个千禧年难题。随后，OpenAI 把这件事列为最高优先级，投入数千万美元，调动大约一万个智能体去攻 Navier–Stokes 方程。得到的那份证明大约一百六十五页，跑了八十八个小时，带有 Lean 证书——也就是说，机器已经逐步检查过它在形式上没有错——可他说，没有哪位专家真正理解整个论证。一边是七百二十二道题一夜落地，一边是一份机器查过、却没人读通的长证明，这两件事后面几章还会反复回到，但都以这里的转述为准。

这一改口，很像欧阳伯那两句气话。第一句是被一车东西砸到门口时的直觉；第二句是坐下来翻了翻以后的公道话：东西里有好的，有新的，有看不懂的，有错的，可它们堆在一起，没有分拣，没有标签，没有人告诉你哪一袋该接在哪一块地的哪一段经验后面。

把陶哲轩的评价拆开看，七百二十二道题里有四种东西。延伸已有工作的，像是"同一块地里多收了一茬"——它接得上，因为前面已经有人走过那条路，新证明只是往前多走了几步。有真正新想法的，像是那袋配方从没见过的肥料——它可能开出一条新路，可新在哪里、能用在哪里，得有人花工夫去辨认。难以理解的，是袋上的字看不懂——不一定错，可是没有过程，就没人能接着它往下走。已撤回的，是配错了的那袋——它的存在提醒人们，一次放得太多，检查跟不上。

第三种最值得多想一下。一个证明"难以理解"，并不等于它错了；也许它在形式上完全对，甚至能通过机器的检查。可数学共同体收一条定理，不只是收一个"真"字，而是要把它接进自己的理解里：它为什么成立？它和哪些已知的东西是亲戚？它推翻了谁的猜想，又暗示了哪个新问题？一条接不进去的定理，就像一袋没人会用的肥料，放在田埂上，日晒雨淋，慢慢就成了垃圾。陶哲轩说"废料"，说到底说的是这个"接不进去"。

还有年轻人的课题被抹掉这件事。欧阳伯在荒地上试了两年的法子，被说明书一夜印出来，他损失的不只是"第一个想到"的名分，更是那两年试错本身的意义——那两年里他一点点摸清了那块地的脾气，这些东西不会写在说明书上。一个博士生花两年做一个问题，丢了这个问题，丢的也不只是一篇论文。

宣言在九月说的"错位"，到了十月就有了具体的样子。可问题依然没有回答：既然东西里有好的，怎样才能让好的接上去，而不是和废料堆成一堆？要回答这个问题，得先看看陶哲轩这个人这几年是怎么一路走过来的——他并不是站在 AI 门外的人。

## ◆ 1.3　陶哲轩的轨迹

罗秀英奶奶家厨房里，有一口电压力锅，是她七年前自己去商场挑的。

那时候家里人都劝她，说老人家用不惯这些带按钮的东西。她不听，说炖肉太费煤气，守在灶边一守两个钟头，腰受不了。锅买回来，头几个月她天天研究：哪道菜按哪个键，排骨要多少分钟，牛腩先在铁锅里煸香、再倒进压力锅压，最后还要回铁锅收汁。她摸出了一套自己的用法，逢人就推荐。

这两年，她却常在饭桌上发牢骚。不是骂压力锅，而是骂超市里那些"预制菜"：一袋红烧牛腩，撕开倒进锅里，按一个键就好了，什么煸炒、什么火候，全都不用管。她说："锅是好锅，可菜不能这么做。外孙女吃了这个，长大连肉要先焯水都不知道。"

罗奶奶是最早用压力锅的人，也是最早挑剔预制菜的人。这不矛盾。正因为她自己用工具用得深，她才分得清：工具帮她省掉的是哪一段，哪一段是省不得的。

陶哲轩这几年的轨迹，和这口压力锅有点像。

他不是 AI 的门外汉。二〇二三年，他就预言，到二〇二六年，那一级别的 AI 会成为数学研究中可信的合著者。到二〇二六年初，他认为这个预言几乎如期实现了。说这种话的人，不可能是一个"抵制 AI"的人。

他也不只是嘴上说。二〇二六年七月，雅可比猜想被一个 AI 构造的反例推翻了。陶哲轩用了两天时间，和聊天机器人一起消化这个结果：他亲自推代数，借助工具一步一步核对，再去查文献。这种做法本身就很说明问题：他没有把机器的结论原样接过来，也没有因为它来自机器就不理它，而是坐下来，把这颗果子重新走一遍过程，直到它能接进自己的理解里。

他还参与和推动过一类更大规模的人机合作。比如"方程理论项目"，用自动定理证明器去处理四千六百多条等式律之间大约两千二百万对"谁蕴含谁"的关系。这种活儿，人手是做不完的，交给机器正合适；人负责的是把问题设好、把结果读懂。

他的思考也一直在往前走。二〇二六年十月九日，他在美国数学研究所做了一场公共讲座，题目叫"数学 2.0"。他在讲座里说：解题只是更有价值的目标的代理，在证明变得充裕的时代，这个代理已经错位了；数学要一边拓展前沿，一边让解题不再处在中心。他建议多做一些别的事，比如开放式的阐释问题、"消融研究"——把一个证明里的某个条件拿掉，看还剩下什么——以及探索一条定理周围的"邻域"。他说，今后真正的瓶颈是想象力。他也讲过人和机器分工、讲过"工业化数学"，同时又提醒人们警惕"AI 单一栽培"——所有人都用同一种机器、走同一条路，就像一片地只种一种庄稼。

再加上前言提到的"认知饮食"和"两种摩擦"，他这几年的轨迹就清楚了：他是用 AI 用得最深的数学家之一；正因为用得深，他才最早看出哪些摩擦可以交出去，哪些不能；他反对的不是工具，而是把工具当成交果子的机器、把解题当成唯一的赛跑。

下面用罗奶奶的厨房打一个比方，帮读者体会"数学 2.0"里的几个说法。先说明：这是本书的比方，不是陶哲轩的原意，他本人没有拿厨房讲过这些。过去，一个厨子的本事，要看他能不能把一道名菜做出来；现在，压力锅、预制菜、外卖平台把"做出来"这件事变得太容易，再拿它来比本事就不对了。真正该比的，是另一些东西：这道菜为什么要先煸香？不煸会怎样？把八角拿掉，还剩下几分味道？这道

菜旁边，还能长出哪些菜？——拿掉一个条件看还剩什么，大致相当于"消融研究"；看一道菜旁边能长出哪些菜，大致相当于"探索邻域"。照本书的理解，陶哲轩是想让数学家不再把"做出名菜"当成唯一的比赛，去多做这些更费琢磨的事。

把这条轨迹放回十月的那句"有毒废料"，那句话就不再像是"翻脸"。它更像罗奶奶在饭桌上骂预制菜：一个最懂这口锅的人，看见别人拿这口锅只做一件事——撕袋、倒进去、按键、上桌——忍不住发火。

但是，这条轨迹也有它停下的地方。陶哲轩主张的分工、他提出的消融研究和定理邻域，都是在一个很大的前提下展开的：数学终究是一座统一的大厦，人和机器分工，是为了把这座大厦盖得更好。他消化雅可比反例，最后的目标也是把它收进原有的理解里。这个前提，作者认为恰恰是双方无法和解的根。第 3 章会细讲这个停点；这里只记下一句：最懂锅的人，也还没有问过"菜谱是不是只能有一本"。

## ◆ 1.4　误读为何流行

谭一禾上高一以后，曾晓岚家里吵过一次架。这是一个构想的场景。

起因是一禾的期中成绩掉了一截。罗奶奶在饭桌上叹了口气，说："这孩子是被手机毁了。"曾晓岚当时也有点火，顺着说了一句："以后手机放客厅。"一禾摔了筷子回房间。

后来曾晓岚一个人在厨房洗碗，越想越觉得这话不对。一禾这学期用手机干了些什么？查单词，看函数图像的动画，跟同学讨论题——有一回她还亲眼看见女儿拿手机把一道题的图像拖来拖去，自己看懂了。当然也刷视频，也追剧，有时候刷到很晚。成绩掉了，可能是刷得太晚，可能是函数这一章本来就难，可能是换了新老师、还没适应，也可能几样缠在一起。"被手机毁了"这句话，把这一切都抹平了，只留下一个罪人。

为什么这句话这么好说？

因为它省事。它把一件复杂的、正在发生的事，换成了一个现成的、一句话就能说完的判断。说出这句话的人，不用去追问孩子到底用手机做了什么，不用去分哪一种用法帮了忙、哪一种用法添了乱，也不用去想自己在这件事里占了什么位

置。一句话下去，问题有了答案，责任有了去处，大家心里都踏实了——只是孩子的成绩不会因此好一分。

"数学家反 AI"这个说法流行，道理是一样的。

它省掉了宣言里那五层意思，省掉了陶哲轩这几年一路用 AI 的轨迹，省掉了"错位"和"有害"之间的区别，也省掉了"有毒废料"后面那句改口。剩下的，是一个谁都能听懂、谁都能拿来站队的故事：一边是聪明的人类，一边是来势汹汹的机器。喜欢 AI 的人拿它嘲笑数学家守旧，害怕 AI 的人拿它给自己壮胆。至于数学家到底在担心什么，反而没人问了。

这里还有一层更深的原因。"被手机毁了"和"数学家反 AI"这两句话，背后藏着同一个看法：工具是一样独立的东西，它要么好、要么坏；人是另一样独立的东西，要么被它帮、要么被它害。可是在曾晓岚家里，手机不是一样独立的东西。一禾用手机看函数图像的那一刻，手机里有老师留的题、有同学做的动画、有她自己卡住的地方；一禾刷到深夜的那一刻，手机里有推送的算法、有她白天考砸以后的那点烦躁、有家里没人管的那个房间。说"手机"，其实说的是一禾和手机、和同学、和这个家一起缠出来的一件事。同一部手机，在不同的晚上，是两样东西。

数学里的 AI 也是这样。陶哲轩用聊天机器人消化雅可比反例的那两天，机器身后有他的代数功底、有文献、有核对的工具；OpenAI 一次放出七百二十二道题的那个早上，机器身后有公司的发布计划、有排行榜、有和别家公司的比赛。说"AI"，其实说的是人和机器一起做成的一件事。第 8 章会专门讲这一点：没有独立的 AI，就连简单地说一句"AI，去解决哥德巴赫猜想吧"，这句话里也站满了人。

所以"数学家反 AI"这个误读，错的不只是一个事实，更是一个眼光。它把一件人和机器缠在一起、正在一层层发生的事，写成了两个现成的东西在打架。在这个眼光里，和解只能是"谁让一步"：要么数学家接受机器，要么公司约束机器。

如果换一个眼光呢？如果数学家反的不是 AI，而是果子；如果"AI"其实是人和机器的复合；那么问题就变成了：这个复合主体，为什么只会交果子？是什么让双方都挤到了"交果子、抢果子"这一条路上？

曾晓岚那天晚上洗完碗，敲开女儿的门，没有提手机，只问了一句："函数这一章，哪里最卡？"一禾愣了一下，从书包里掏出卷子。母女俩趴在桌上看了半个钟

头，发现她卡的地方是图像平移——左加右减，她一直记反了。第二天，手机还在一禾房间里，她拿它把几个函数的图像拖来拖去，拖了一晚上，左右终于不再反了。那句"被手机毁了"没再有人提起。

这件小事里，没有人赢、也没有人认输，变的是母女俩看问题的方式：从"谁的错"变成了"卡在哪一步"。宣言之争也需要这样的一次转身。下一章就从"卡在哪一步"问起：为什么在数学界和大模型公司之间，大家都在一条跑道上越跑越快、越跑越累，谁也停不下来。

**带 走 的 话**

- **菲尔兹奖得主的宣言承认 AI 能力大增，反对的是把解题当基准的"错位"；它没有呼吁禁止，也没有提出机制。**
- **七百二十二道题里有延伸、有新意、有看不懂、有已撤回；"有毒废料"后来被陶哲轩改口为"也许是处理过的废料"，他的怒气针对的是没有协调、接不进去。**
- **陶哲轩是用 AI 用得最深的数学家之一，他反对的不是工具，而是只交结果不交过程的果子。**
- **"数学家反 AI"这种误读流行，是因为它把人和机器缠在一起的事，写成了两样现成东西的打架。**

**小　账**

**本章切开的差异：**反 AI 与反果子——反对工具，和反对"只交结果、不交过程"。

**本章的场谱系读数：**宣言、722 道题、陶哲轩的分工设想，都默认数学只有一种场结构，一切新结果都要收进同一座大厦；回写只在陶哲轩个人消化雅可比反例时零星出现，还没有进入共同体的做法。

◆

02

第 2 章

# 内卷：统一性赛道上为什么无法和解

**这一章的问题**

陶哲轩不反对 AI，大模型公司也不反对数学，为什么双方越走越僵？作者的回答是：只要数学停在统一性上，这就是一场内卷，而内卷里没有和解。

## ◆ 2.1　一把尺子

谭一禾所在的高一年级，每个月有一次月考。这是一个构想的场景，但每个读过中学的人都熟悉。

月考成绩出来那天，班级群里会发一张表：总分、名次、比上次进退了几名。一禾的同桌数学特别好，能把一道几何题想出三种做法，还会自己出题考别人；可她的英语拖后腿，总分排在中游。后排一个男生，什么题都做得不快不慢，从不出错，总分常年在前五。还有一个女生，喜欢画画，课本空白处全是她画的函数图像，画得比课本插图还漂亮——这在那张表上找不到任何一格。

那张表是一把尺子。它很公平：同一张卷子，同一套评分标准，谁也不能多拿一分。它也很省事：几十个孩子，几十种长法，最后都被量成一个数，一排就清清楚楚。可是正因为只有一把尺子，一件事情跟着发生了：所有人都朝着尺子的刻度用力。同桌开始少想第二种、第三种做法，因为考试只要一种；画画的女生开始收起图像，把时间省下来刷题。全班越来越像，分数越来越挤，谁要往前挪一名，就得付出比上个月更多的力气。这种越来越费劲、越来越像、却谁也没有真正往前走的局面，大家给它起了个名字：内卷。

再往外看一圈，就是人们常说的"千军万马过独木桥"：一把尺子量到底，桥只有一座，过桥的人越来越多，每个人能挪动的余地就越来越小。本书不评高考制度的

得失，那不是本书能管、也不该管的事；这里借用的只是它的形状——一把尺子，一座桥。

数学界今天的形状，和这把尺子很像。

数学一直以统一为荣。它有一套公认的地基——绝大多数数学家默认的那一套公理系统，本书后面简称为 ZFC；它有一张宏伟的蓝图——比如试图把数论、几何、表示论连成一体的朗兰兹纲领。在这样的数学里，一条定理要么在那套地基上成立，要么不成立；一个问题有没有价值，大体上看它在这张蓝图里的位置有多关键；一份成果算不算数，看的是谁第一个证出来。这就是一把尺子：同一个地基，同一张蓝图，同一张难题清单，同一种"第一"的算法。

本书把这种数学叫作"统一性数学"。用第 4 章会细讲的说法，它预设数学这片"场"——事物的各种特征缠在一起时，它们之间怎样连接、按什么先后、搭成什么结构——只有一种结构，并把这一种结构推向对一切对象都成立。在这种数学里，两个结果之间的"相同"只有一种读法：要么在同一个体系里相等，要么不等；同一性永远是一。

这里要先替统一性数学说足公道话，因为它是本书最强的对手，也是数学史上最了不起的成就之一。

一把尺子最大的好处，是让远隔千里的人能互相听懂。一个在巴黎研究几何的人，和一个在东京研究数论的人，因为站在同一个地基上，就能拿对方的工具来用；一条在代数里证出来的结论，可以原封不动地搬到拓扑里去。朗兰兹纲领之所以让人着迷，正是因为它许诺：表面上毫不相干的几片领域，底下是同一种结构。统一性让数学成了人类知识里最可靠、最能积累的一块：一条定理一旦证出，一千年后照样成立，不用重新验证。月考那把尺子也有同样的好处：它让一个县城的孩子和一个省城的孩子，可以在同一张卷子上比一比，谁也不能靠关系多拿一分。本书不否认这一切。

本书只指出这把尺子的一个代价：在它底下，"相同"只有两种读法。两条结论要么是同一回事，要么不是；两个领域要么能被统一到同一个结构里，要么暂时还没被统一。没有"有点像""像到某种程度"这样的读法。同桌那三种几何做法，在卷子上和一种做法得一样的分；画画女生那些函数图像，在尺子上是零。不是尺子不公平，而是尺子本来就只读得出一种东西。

而且这把尺子量的不只是"对不对"，还有"谁先"。数学共同体有一个很老的规矩：一条定理归第一个证出它的人。这个规矩本身很合理，它保护了真正花了力气的人。可它在一把尺子底下，把整个学科变成了一场赛跑：同一张清单上的题目，同一条终点线，第一个撞线的人拿走全部。第二个证出来的人，哪怕方法更漂亮、理解更深，在名分上也只是"另一个证明"。

一把尺子量了几百年，并没有出大问题。因为过桥的人一直不算多：真正能在前沿做研究的数学家，全世界也就那么些人，每人一辈子能啃下的难题屈指可数，难题清单上的题目又一直有新的冒出来。桥虽窄，大家还走得开。

问题出在大模型来了。

作者认为，数学的基础公理系统——也就是一门学问的"典范"——一旦给定，剩下在这套体系里的推导，交给 AI 去做，效率会是一般科学家的上千倍。这是一个关于趋势的判断，第 3 章会结合测评数据细讲它今天走到了哪一步。这里只看它对那把尺子意味着什么：过桥的不再是几千个人，而是几千个人加上一万个日夜不停的智能体。尺子没变，桥没变，挤上桥的力量却多了不知多少倍。

在一把尺子底下，增加的力量只有一个去处：挤。月考的尺子不变，全班多上两小时自习，总分平均涨几分，名次却还是那么排——第一名还是只有一个，增加的力气被尺子吸掉了。数学的尺子不变，AI 带来千倍的推导力，难题清单上的题目被一道道抢走，"第一个证出来"的名分被一个个拿走，可数学的理解并不因此按比例长高。陶哲轩读那七百二十二道题时的吃力，就是这种挤的读数：证明越来越多，能接进理解里的却没有多出那么多。

有人会反问：定理多了，难道不是好事？数学家不是一直嫌证明太少、太慢吗？

这个反问值得认真回答。定理多了，当然有好处——就像月考题做多了，熟练度总会涨一点。可是在一把尺子底下，多出来的定理有一个去处的问题。它们都要往同一座大厦里放，都要在同一张清单上划掉一道题，都要和别人抢同一个"第一"。大厦的地基不变，蓝图不变，多出来的砖只能往已有的墙上砌，砌得越快，越多砖找不到该放的地方，就堆在了院子里。陶哲轩说的"废料"，本书前一章说的"接不进去"，就是这些院子里的砖。它们不一定是坏砖，只是在一张蓝图里没有它们的位置。

所以，作者的看法是：只要停在统一性数学上，大模型公司和数学界永远无法和解，这是数学研究的内卷问题。不是谁的品德出了毛病，而是一把尺子底下，双方要的是同一样东西。

作者还有一个更尖锐的看法：在典范给定之后，数学家如果继续留在那套体系里做推导，和机器比谁推得多、推得快，本身就是在内卷——那条跑道上，人注定跑不过机器。数学家必须从里面走出来，去做另一件事：让新的数学典范发生。新典范是什么，不是一把更大的尺子，而是本书要讲的同一性谱系数学。这是全书的方向，第 3 章会先看看已有的共识走到了哪里，第 4 章起再正面讲。

## ◆ 2.2　不可再生的问题

一把尺子挤人，还只是一半。另一半是：尺子量的那些东西，是会用完的。

先讲一个构想的场景。

欧阳伯年轻时在洞庭湖边打过几年鱼。他常讲起一个湖汊：那里水草好，鱼多，附近几个村子的人都去。起初大家用小网，一网下去捞几条，湖汊里的鱼还能一年年长回来。后来有人用了密网，一网捞干净大鱼小鱼；再后来有人用了电，一片水里什么都不剩。头两年，大家捞得都比从前多；到第三年，湖汊里连小鱼都少了。欧阳伯说："鱼不是没有了，是还没长回来就被捞走了。"

陶哲轩说过一个相近的意思：未解决的数学问题，像一种不可再生的资源。

这话初听有点怪。数学问题怎么会用完？可是想一想就明白。一个好问题，不只是一道等人去做的题，它也是一片让人练手的水域。一个年轻数学家碰上一个好问题，往往要在它周围转上几年：先试一种方法，不行；换一种，碰到一个意外的反例；为了绕过反例，学了一门新工具；工具学会了，又发现它能用在别处。问题最后可能被他证出来，也可能没有，可在它周围转的那几年，他的本事是在这片水里长出来的。一个问题被一夜之间证掉，这片水就干了。下一个年轻人再来，面对的是一条已经写好的结论，他可以去读它，却不能再在它周围长自己的本事。七百二十二道题里有一些年轻人的课题被抹掉，丢的就是这样的一片水。

这和前言里讲过的"两种摩擦"接得上。陶哲轩把繁琐的计算叫作"人为摩擦"，可以交给工具，只要人还能抽查；把真正的概念难点叫作"自然摩擦"，抹平了它，学习

的人本该得到的收获也就没了。一个好问题周围的那几年摸索，正是最典型的自然摩擦。机器把问题一夜证掉，省掉的不只是计算，也把那片自然摩擦一起抹平了。对已经功成名就的数学家，这也许只是少了一个题目；对一个刚入行的年轻人，这可能是少了一整段长本事的路。

打个家常的比方。罗奶奶教外孙女一禾包饺子，从来不让她一上来就包，而是先让她揉面。面揉得太稀，粘手；太干，擀不开；揉到第三回，一禾自己摸出了"差不多"的那个手感。要是罗奶奶嫌慢，直接从超市买来现成的饺子皮，一禾今天就能包出一盘饺子，可她永远不知道面团在手里从粘到不粘是怎么一回事。饺子皮是好东西，罗奶奶自己也常买；她只是知道，给一个正在学的人，有些摩擦要留着。

数学共同体里，那些尚未解决的问题，在很大程度上就是留给下一代揉的面。

二〇二六年九月，陶哲轩在 Mastodon 上还用过一个"海边缺淡水"的比喻。按本书的理解，这个比喻的意思大致可以这样体会：住在海边的人，四周全是水，却可能渴死，因为海水不能喝。AI 带来的证明就像海水，多得望不到边；可数学家真正能"喝"下去的——能读懂、能接进自己的理解、能拿来长出新问题的——并没有多出多少。这是本书的理解，不是陶哲轩的原话。

一个好问题又是怎样长出来的？还是回到欧阳伯的地里看。

他那块前年开的荒地，头一年种辣椒，长得稀稀拉拉。他没有骂地，而是蹲下来看：靠水沟那一头长得好，靠路那一头长不起来。第二年，他在靠路那头试种红薯，红薯倒长得旺。到了第三年，他心里冒出一个问题：同一块地，怎么两头差这么多？是土的问题，还是水的问题，还是那头被人踩实了？这个问题不是他坐在家里想出来的，也不是农技站发给他的。它是在一次失败（辣椒稀）、一次意外（红薯旺）之后，从两样结果的差别里冒出来的。没有那两季的试，就不会有这个问题。

数学里的好问题也常常这样冒出来：一种方法在这里行、在那里不行；一个本该成立的猜想，在某个角落出了个反例；为了弄明白"为什么偏偏在这里不行"，一个新问题就长出来了。换句话说，新问题多半是从"意外的结果"里长出来的，而且要有人在旁边守着、琢磨，它才长得出来。

把湖汊和海水放在一起看，就能看出"不可再生"从哪里来。

在统一性数学里，问题的价值是从那张难题清单、那张蓝图上来的。清单是共同体一代代定下来的，蓝图也只有一张。一道题证掉，就从清单上划去；新的题目要出现，得靠人在长时间的摸索里，从旧题的缝隙里看出来。这个"看出来"的速度，是人的速度——一个人要在一片水里泡上几年，才看得出哪里还有鱼。而捞的速度，已经是机器的速度。捞得比长得快，湖汊就会干。

注意，这并不是说数学本身有一个总量，迟早会被做完。作者恰恰不这么看。问题之所以"不可再生"，是因为在一把尺子底下，新问题只能从同一张蓝图里长出来，它的生长被那张蓝图卡住了。如果数学不只有一张蓝图——如果每一次撞出的意外结果，都能在旧结构旁边另开一支新的结构，各支之间有远有近、有亲有疏——那么每捞走一条鱼，都可能在旁边开出一片新的水域。土壤就是这样肥起来的：落叶和果子掉下来，一层层堆积，堆成了更多树能扎根的地。第 5 章会细讲这个"回写"怎样把落叶和果子堆成土；第 7 章会讲，AI 撞出的那些"反面的果子"——让某条规律在某处站不住的结果——恰恰可能是新水域的入口。

可是在今天的格局里，这些反面的果子没有被这样用。它们要么被当成一条新定理收进清单，要么被当成反例记一笔，然后清单上又少了一道题。湖汊照旧在干。

拿二〇二六年两件事对照一下，就看得出差别。

一件是 OpenAI 那份 Navier–Stokes 爆破证明。Navier–Stokes 方程描写水、空气这类流体怎样流动，它的解会不会在有限时间里"爆掉"，是千禧年难题之一（这份证明是怎样被一万个智能体抢出来的，第 1 章已经讲过）。陶哲轩说过，此前数学界的共识是，Navier–Stokes 方程的正则性——也就是解永远光滑、不会爆掉——大概会失败。一份证明它会爆的论证，正落在共识猜的方向上：大家原来就猜它会爆，现在有人交出了一份说"会爆"的证明。用本书第 7 章的说法，这是一颗"同向的果子"。它很重要，也很难，可它不逼着谁收窄什么，就算最终被共同体接受，原来的理解也不用改，清单上划去一道题，湖汊里少了一条大鱼。

九月还有一件相近的事，只能算旁例：Alpöge 和 Buckmaster 宣布，带光滑外力项的三维不可压 Euler 方程可以在有限时间里爆掉，论证经过了 Lean 形式化。这里要说清楚：Euler 方程和 Navier–Stokes 方程不是同一个方程，前者不带黏性那

一项。本书把它也算作同向，依据只是"流体方程会爆破"这一预期，这是本书的判断，不是陶哲轩的话。

另一件是七月，雅可比猜想被一个 AI 构造的反例推翻了。这是另一回事。一个许多人相信成立的猜想，在一个具体的例子上站不住了。它逼着共同体回头去问：这条规律原来默认的适用范围，是不是画得太宽了？它在哪一类对象上还成立，在哪一类上不成立？这一类结果，第 7 章称为"反面的果子"。它不只是划掉一道题，它本可以在旧结构旁边开出一片新的水域。

可是在一把尺子底下，两颗果子的命运差不多：都被当成"一道题有了答案"，记进清单。反面果子本该带来的新水域，没有被当成新水域来经营。

这也是为什么本书说"不可再生"是统一性的读数，而不是数学本身的命运。湖汊会干，是因为大家只认那一片湖汊；如果把每一次意外的渔获都当成一条新水路的线索，湖会越捞越大。

这就引出下一个问题：既然大家都看得见湖汊在干，为什么还停不下来？

## ◆ 2.3　囚徒困境与抢先

每年春节前，曾晓岚都要替母亲抢一张回乡下老家的火车票。这是一个构想的场景，每个在外过年的人都经历过。

头几年，她守着放票时间，到点刷新，大多能抢到。后来同事告诉她，有一种"加速包"，花点钱能排得靠前。她犹豫了一年，没买，结果没抢到，只好托人买高价票。第二年她买了加速包，抢到了。第三年，她发现身边人人都买了加速包，加速的效果没了，于是有人买更贵的"极速包"。几年下来，票还是那么多张，每个人花在抢票上的钱和工夫却越来越多。她跟罗奶奶抱怨："谁都知道买这个没意思，可你不买，就只能站着回去。"

这就是人们常说的囚徒困境：每个人单独看，多花一点力气抢，都是划算的；所有人都这么做，结果却是谁也没多抢到，大家一起更累。

陶哲轩在十月下旬的一次访谈里，用的正是这个词。他说 AI 公司陷入了囚徒困境——大意是，没人想跑这么快，但每个人都觉得别无选择（据《新科学家》十月二十八日的报道，按自动字幕转述）。

这场赛跑是怎么加速的，第 1 章已经照他的转述讲过：一则传言，OpenAI 列为最高优先级，约一万个智能体攻 Navier–Stokes——也就是上一节说的那颗同向果子的来处。

一则传言，几千万美元，一万个智能体，一份机器检查过、却没有专家真正理解整个论证的证明。这和抢火车票是同一个形状：一个人听说别人买了加速包，自己就非买不可；买的人越多，加速包越不管用，就得买更贵的；最后票数没变，所有人的力气都花在了抢上。

为什么停不下来？用本书的眼光，可以把这场赛跑拆开看一看。

一边是每家公司已经亮出来的东西：模型解出了哪些题、在哪些测评上领先。这是各家的"样子"，是它们在外人眼里显露出来的本事。另一边是这些公司和数学共同体缠在一起的那一套东西：共同体只认一把尺子，名题的分量最重，"第一个证出来"才算数；投资人、媒体、用户也都跟着这把尺子来认谁强谁弱。两边一顶：你亮出来的本事，在这把尺子底下永远不够——别人一旦先证出一道名题，你昨天的领先就清零了。这一顶，推动的是第三样东西：赛跑的节奏，也就是一家接一家、一轮接一轮的出手次序。传言一出，节奏就快一拍；一万个智能体一上，节奏又快一拍。

更要紧的是，每快一拍，都被写回了下一轮的起点。这一轮有人一次放出七百二十二道题，下一轮别人放出的就不能少；这一轮有人投了几千万，下一轮这就成了入场的门槛。可是写回去的只是"更快"，尺子本身一点没变：名题还是那几道，"第一"还是只有一个，共同体消化证明的速度也还是人的速度。

在 SDE 的说法里，两样东西相顶，推动第三样变形，变形的结果再回写进下一轮，这本来是一切新东西发生的路子（第 4、5 章细讲）。可是在这里，变形的只是节奏，回写的只是"再快一点"，那把尺子——双方缠在一起的那一套认法——从来没被推动过。这就像烧水时水一沸就把火撤掉，下一回再烧，再撤，水永远在同一个温度上下打转。抢票也是这样：加速包一年比一年贵，春运的票数却从来不因此多出一张。抢先越快，越像原地打转。

那份一百六十五页、没有专家真正理解整个论证的证明，值得单独多看一眼，因为它把这场赛跑的代价摆得最清楚。

抢火车票，抢到手的至少是一张能坐的票。可是一万个智能体抢下来的这份证明，抢到手的是什么？它有 Lean 证书，说明每一步在形式上都被检查过，不太可能有低级错误。从"对不对"这把尺子看，它几乎无可挑剔。可是从数学共同体真正在意的那件事看——这条结论为什么成立，它和已知的东西是什么亲缘，它让哪些旧想法失效、又打开了哪些新问题——它几乎什么也没交出来。没有专家读懂整个论证，就意味着没有人能从它出发继续往下走。

这是赛跑逻辑走到头的样子：尺子只读"第一个"和"对不对"，于是最快的办法就是把"对"本身交给机器去堆，把"懂"留给以后。可在数学里，"懂"恰恰是下一轮的起点。一个没人懂的结论，就像一张抢到手却不知道开往哪里的车票。

赛跑还有一个不容易看见的代价，陶哲轩也提醒过：所谓"AI 单一栽培"。各家公司都在抢同一批名题，用的也是越来越相似的模型、越来越相似的做法，最后整个领域可能只剩下一种做数学的路子。一片地只种一种庄稼，丰年收得多，一场病虫害就可能全军覆没。抢票抢到最后，所有人都装同一个软件、在同一秒刷新；抢题抢到最后，所有机器都朝同一个方向推。赛跑越激烈，路子越单一。

也许有人会说：既然谁都不想跑这么快，几家公司坐下来签个约，一起慢下来，不就行了？

回到抢票。假如曾晓岚和她的同事们约好，今年大家都不买加速包，凭运气抢。这个约定能守住吗？难。只要有一个人偷偷买了，他就多一分把握；其余人一旦听说，第二年就都买了。约定越是让大家慢下来，偷偷快一步的好处就越大。囚徒困境之所以难解，就在这里：在同一个局里，"大家一起慢"不是一个稳得住的状态，谁守约谁吃亏。

几家公司签约慢下来，也会碰到同样的事。何况这个局里不只有几家大公司，还有新冒出来的团队、想一战成名的研究组，以及根本没上谈判桌的人。只要终点线上的奖品只有一个——"第一个证出某某名题"——就总有人愿意冒险快一步。陶哲轩说"每个人都觉得别无选择"，说的正是这一点：不是谁不讲道理，而是在这个局里，讲道理的人吃亏。

所以，要走出囚徒困境，光靠"大家约好慢一点"是不够的。要么改变奖品，让抢先拿不到全部；要么改变跑道，让大家不必挤向同一个终点。第 14 章会讲到，把优先权改成按谱系计——谁织出了一支新谱系、这支谱系养活了多少后来的研究，就

记谁的功——是走出这个困境的一条路。这里先只记下：困境的出口，不在"跑慢一点"，而在"不只一条路"。

这里要说清一点：本书不认为哪家公司在作恶，也不认为陶哲轩只是在抱怨。囚徒困境之所以是困境，就在于每个参加的人都没有做错什么，错的是那个局的形状。那个局的形状是一把尺子、一张清单、一种"第一"。只要这个形状不变，再善良的公司也得跑，再清醒的数学家也只能在路边喊。

那么，能不能改改规矩，让大家别这么跑?

## ◆ 2.4　规则修补等于减负令

这一节的主讲例子，换到学校里。这也是一个构想的场景。

谭一禾上初中时，学校发过一份"减负"通知：每天书面作业总量不超过多少时间，周末不许统一补课，考试成绩不公开排名。通知贴在校门口，家长们都说好。

第一个月，作业确实少了，一禾晚上九点就能睡。第二个月，曾晓岚在家长群里发现，有家长开始私下给孩子报周末的辅导班；第三个月，成绩虽然不公开排名，家长们互相打听，排名还是在群里流传。一禾的作业少了，她同桌晚上却在上网课；她九点睡了，她同桌十一点还在刷题。到了期末，曾晓岚也坐不住了，替一禾报了一个班。

这份通知管错了吗？没有。它管住了学校里能看见的那一截：作业的量、补课的时间、排名的公开。可是它管不住学校外面那一整套东西：期末还是那一张卷子，升学还是那一把尺子，名额还是那么几个。尺子不变，孩子们之间那股往前挤的劲就不会消失，它只会从学校里看得见的地方，挪到学校外面看不见的地方。这里说的不是哪一份具体文件的得失，本书也不评任何具体的教育政策；这里借用的，只是一种常见的形状：规则管住了跑的样子，管不住跑道只有一条。

数学界和大模型公司之间，今天能想到的办法，大多是这一类规则修补。

比如，要求公司在发布 AI 数学成果之前，先和相关领域的数学家协调——陶哲轩对七百二十二道题的批评，首先就是没有协调。比如，把署名和贡献写清楚，免得出现宣言里担心的署名不清、剽窃。比如，约定不要一次性放出几百道题，给共

同体留出消化的时间。比如，在测评里少用名题，多用全新的问题——First Proof 那样的测评已经在这么做了（第 3 章会讲到）。

不妨一条一条推演，看它们在一把尺子底下会遇到什么。下面只是推演，不是对任何公司的指控。

先说协调。规定发布前要和相关数学家打招呼，第一步一定是好的：年轻人的课题能提前被保护，专家能提前读一读。可是协调的期限多长？一周还是半年？期限短了，形同虚设；期限长了，公司担心别家抢先——赛跑没有停，协调就变成了起跑前那一小段等待，枪一响，照样冲。

再说署名。写清楚谁做了什么，当然比一笔糊涂账好。可是在一份由一万个智能体、几十个工程师、几位顾问数学家合起来做出的证明里，"谁做了什么"本身就很难写清楚。第 8 章会讲，这里站着的是一个人和机器缠在一起的复合主体，它不能被简单拆成"人的部分"和"机器的部分"。署名规则写得越细，越会发现那把只认"第一个、某某人"的尺子，根本量不了这样的东西。

再说限量。不许一次放出几百道题，可以分批放。分批放，共同体每一批读得轻松一些，可总量不变，清单上被划掉的题一道也不会少，湖汊照样在干。

最后说测评换题。用全新的问题来测，不拿名题当靶子，确实能少抹掉一些人的课题。可是全新的问题也要有人出，出题的还是共同体，评的还是"解出了没有"。尺子只是从"名题"挪到了"新题"，赛跑换了一个场地，照样在跑。

这几条推演有一个共同的地方：每一条规则都想管住赛跑的某一截——起跑的时间、撞线后的名分、每次带走的数量、跑的场地——却都默认跑道只有一条，终点只有一个。规则越修越细，就越像那份减负通知后面的一连串补充说明：不许补课，就有"兴趣班"；不许公开排名，就有"私下打听"。

这些规则都有道理，每一条都值得做。它们能让抢得斯文一些，让年轻人的课题少被抹掉一些，让共同体喘口气。可它们和那份减负通知一样，管住的是跑的样子，碰不到跑道本身。

只要数学还是一把尺子——名题的分量最重，"第一"才算数，所有成果最后都要收进同一个地基、同一张蓝图——公司就有动力绕过规则：协调可以做得很快，署名可以写得很漂亮，几百道题可以分成几十批放。数学家这边也一样，规则只能让

他们少受点冲击，却不能告诉他们，在机器千倍推导的时代，自己该去做什么。宣言之所以只能呼吁、不提机制，作者认为也是这个原因：在一把尺子底下，想不出一种机制能让双方不抢同一样东西。

把这一章的几样东西放在一起，可以看出一条前后相接的链子。一把尺子让所有力量挤向同一处；挤得越凶，统一蓝图里的问题被捞得越快，长得越慢；问题越少，抢先越值钱，囚徒困境越紧；困境越紧，就越有人呼吁定规矩；规矩只能管住跑的样子，于是挤从明处挪到暗处，尺子原封不动，下一轮又从"一把尺子"开始。链子的每一环都是真的，可它首尾一接，就成了一个圈。这就是内卷的样子：每个人都在用力，所有的力加起来，只让圈转得更快。

要打破这个圈，必须在圈上找一个能被真正推动、并且推动以后会留下来的地方。作者认为，那个地方就是尺子本身——也就是数学被当成"只有一种结构"的那个默认。

也许有人会问：陶哲轩在"数学 2.0"讲座里主张让解题去中心化、多做消融研究和定理邻域，这不也是在改尺子吗?

这是一个公道的问题，也是本书最近的一位邻居。陶哲轩确实不只是在修规则，他是在想让数学家换一种活法：不再只盯着名题，而去读懂证明、拆解证明、看一条定理周围还有什么。这比任何协调、署名的规定都走得更远。可是这条路还有一个地方没有动：消融研究拆的，是同一座大厦里的一根柱子；定理邻域探的，是同一张蓝图上一个点的周围。数学依然被看作只有一种结构，人和机器换了干法，干的仍是同一片地。第 3 章会把这个停点细细讲开；这里只说一句：换干法和换跑道，是两回事。前者让内卷松一口气，后者才让它有可能解开。

这并不是说规则没用。减负通知至少让一禾睡了几个月的好觉；协调规则至少能让一些年轻人保住课题。作者想说的是：规则只能缓和，不能终结。终结内卷，要动的是尺子本身——不是把一把尺子换成另一把更好的尺子，也不是把一把尺子复制成几把互不相干的尺子，而是让"相同"本身有程度：两样东西可以很像、有点像、不太像，像的程度由它们一代代传下来的那些连接、次序、结构决定。这就是本书说的"同一性谱系"，第 4、5 章会正面讲它是什么。

这里先把本书的判断说成一句能被推翻的话：如果有一天，仅凭协调、署名、限量这一类规则协议，就让大模型公司和数学家长期停止抢题、稳定合作，而数学仍然只有一种场结构、一把尺子——那么本书的这个判断就错了。

作者不认为这会发生。理由就在这一章：一把尺子把所有力量挤向同一处；名题像湖汊里的鱼，在统一的蓝图里长得比捞得慢；每家公司都困在一个谁都停不下来的局里；规则修补，只能把挤的地方从明处挪到暗处。

那么，有没有人已经想到了另一条路？有的。"让 AI 去做常规的推导，让人去开创新的方向"，这个说法在数学界和科学哲学里早就有人讲过，陶哲轩本人也讲过。下一章就来看这个共识：它说对了什么，又停在了哪里。

**带 走 的 话**

- **统一性数学是一把尺子：同一个地基、同一张蓝图、同一张难题清单、同一种"第一"；AI 带来的千倍推导力，在一把尺子底下只能变成挤。**
- **未解问题像湖汊里的鱼，在统一的蓝图里长得比捞得慢；不可再生，是因为新问题被那张蓝图卡住了。**
- **AI 公司的囚徒困境不在品德，而在局的形状：每快一拍都回写进下一轮的起点，尺子却从没被推动过。**
- **协调、署名、限量这些规则值得做，但它们像减负通知，只能缓和，不能终结；终结要靠"相同"本身有了程度。**

**小　账**

**本章切开的差异：**赛跑变快与赛道变多——在同一把尺子上越跑越快，和尺子本身变成一个有远近的谱系。

**本章的场谱系读数：**数学至今只有一种场结构（一把尺子）；回写只落在赛跑的节奏上（越来越快），没有落到场结构本身，所以是原地打转，而不是谱系的分叉。

◆

03

第 3 章

# "AI 做常规、人做典范"：共识与停点

**这一章的问题**

数学界和 AI 界其实早有一句共识——"机器做常规的活，人去开新路"。这句话对在哪里？它又停在哪里，才让陶哲轩和大模型公司至今还在抢同一颗果子？

## ◆ 3.1　典范给定以后，AI 是千倍的织机

这是一个构想的场景。罗秀英奶奶今年七十一岁，是本书的陪读人物之一（构想人物），在娄底的纺织厂干了大半辈子。她年轻时，车间里还有不少要靠手的活：接线头、看布面、挑出织错的那一梭。后来厂里换了新机器。花样一旦定下来——几根经线一组，纬线从哪里穿过去，几梭成一个循环——机器就能日夜不停地织下去，一天织出的布，顶得上一个老师傅织好多天。

罗奶奶常说一句话：机器织得快，可花样不是机器定的。

这句话里有两件事。第一件，花样一定，剩下的就是照着花样一梭一梭往下走。这一段，机器比人快得多，也稳得多；它不累，不走神，织到半夜和织到清早一个样。第二件，花样本身——哪根线和哪根线连在一起，先穿哪一根、后穿哪一根，几梭成一个循环——不是在织的时候长出来的，是在织之前就被定下了。机器的快，是"在一种定好的花样里快"。花样一换，机器得停下来，等人重新穿线、重新调。

把这台织机换成今天的大模型，把花样换成数学的基础公理和一套公认的推法，事情就很像了。

数学里的"花样"是什么？是一套公理，加上一套大家认可的推理规则。公理说清楚从哪里出发，规则说清楚哪一步算合法的一步。花样定下来以后，一个证明就是

从出发点开始，一步一步合法地走到要证的那句话。走的路可能很长，可能要绕很多弯，可每一步对不对，是可以一格一格查的。今天的形式化工具（比如 Lean 这一类证明检查器）做的就是这件事：你把每一步写下来，它一格一格查，查到底，给你一张"每一步都合法"的证书。

花样清楚、每一步可查，机器就有了用武之地。它可以同时试很多条路，试错了就退回来，再试别的路；它不怕路长，也不怕弯多。作者认为，数学的基础公理系统一旦给定，剩下的推导交给 AI，效率可以是一般科学家的上千倍；数学家如果还守在这一段里和机器比快，那就是内卷。这是作者的判断，说的是趋势。我们先看看手里有哪些已核的事实，能把这个判断撑到哪一步。

2026 年 5 月有一次叫 First Proof 的测评：十道全新的、研究级别的问题，事先没有公开过。结果十道里有七道，被至少一支 AI 团队解到了可以发表的水准；每道题花掉的算力成本，在十美元到一千美元之间。这件事说明：只要题目落在一套公认的数学框架之内，只要问题问得清楚，机器已经能用很低的成本，走完过去要一位研究者花大力气才能走完的路。

再想想第 1 章讲过的那份 Navier–Stokes 证明：一万个智能体、带着 Lean 证书，可据陶哲轩说没有专家真正理解整个论证。这件事把"织机"的两面都照出来了。一面是快，这是任何一个研究组都做不到的速度。另一面是"在花样里快"：证书说的是每一步都合法，也就是每一梭都照着花样织了；可这块布织出了什么新图案、为什么是这个图案，机器不负责说清楚，人一时也看不懂。

但同一年，陶哲轩还给过另一组估计：在埃尔德什问题这一类上，AI 的成功率大约是百分之五到六；大约百分之九十五的重要问题，还在 AI 的能力之外。

这两组数字放在一起，并不打架。First Proof 的十道题，是有人专门挑出来、问得很清楚的题；Navier–Stokes 那一仗，是砸下巨资、对准一个早有成熟工具的方向。埃尔德什问题里，却有很多是连"该拿哪一套工具下手"都还没定的题。前者像花样已经画好的布，后者像连织法都还没选的布。机器在前者里快得惊人，在后者里还常常停在门口。

第 1 章讲过的 722 道题，也指向同一个方向。一次放出来的量，抵得上许多数学家一辈子的论文；可陶哲轩读过的那十来篇好坏参差，这本身就说明，机器是在一种给定的花样里批量地织，织出来的是什么，还要人一块一块去看。

所以"千倍"这两个字，要读成一个方向，而不是一张现状报表。今天能看到的是：在花样清楚的地方，机器已经快到让人不安；花样越清楚，机器越快；而"清楚的花样"正在一块一块变多。陶哲轩在 2023 年预言过，到 2026 年，这一级别的 AI 会成为数学研究中可信的合著者；到 2026 年初，他认为这件事几乎如期实现了。趋势是有的，而且比很多人预想的还快。

这个判断也说得出自己什么时候会落空。假如过几年，花样清楚的题越来越多，机器在这些题上却不再变快、成本也降不下来，甚至还要靠数学家一步一步手把手带着走，那么"典范给定后千倍"就只是一时的热闹，作者的这个判断就要收回。今天看到的情形，是相反的方向。

罗奶奶车间里也有过同样的情形。新机器刚来那几年，厂里试过一种没织过的厚布，机器一开就断线。不是机器不行，是那种布该怎样穿线、先压哪根，还没人定下来。老师傅们围着机器琢磨了好几天，一次次改穿法，一次次开机试，断了再改，终于定下一种穿法。穿法一定，机器又是一夜织出一大卷。快的那一段，永远在"穿法定下以后"；定穿法那一段，机器只能陪着断线。

这里要说清楚，免得读者误会。作者说"效率上千倍"，不是说数学家没用了，也不是说剩下的百分之九十五很快都会被机器吃掉。作者说的是另一件事：在一套给定的公理和推法里，人和机器比快，人注定要输，而且输得越来越多。罗奶奶车间里那些手快的老师傅，不是因为手慢了才离开织机，而是因为"织得快"这件事，已经不再是人该比的东西。

那么人该去哪里？罗奶奶那句话已经给了一半答案：花样不是机器定的。人去定花样。

这句话，数学界和 AI 界其实早就说过很多遍了。下一节我们就来看看，这个共识是怎么来的，它有多结实。

## ◆ 3.2　共识早已在那里

谭一禾今年十六岁，读高一（构想人物，曾晓岚老师的女儿）。我们来设想她班上的一条规矩：数学课允许用计算器，但先要在草稿纸上把式子列出来，再按计算器。

一禾一开始觉得这规矩多余——反正最后都要按，干嘛先列？她妈妈曾晓岚是初中数学老师，给她讲过一个道理：计算器替你算的，是那一串乘乘除除；可这道题该乘还是该除，先算哪一步，计算器不知道。你要是连这个也交出去了，你学的就不是数学，是按键。

一禾不太服气，回了一句：那以后机器连"该乘还是该除"也会了呢？

曾老师想了想，说：那你就得去想更前面的事——这道题为什么值得算。

这一来一回，说的其实是一个很老的共识：繁琐的、重复的、规则清楚的那一段交给工具；想清楚这道题是什么、该怎么下手、值不值得做，那一段留给人。工具往前进一步，人就往前退一步，退到工具还够不着的地方。

陶哲轩自己把这件事分得很细。他区分过两种"摩擦"：一种是人为的摩擦，比如繁琐的计算，可以交给工具，前提是人还能抽查它对不对；另一种是自然的摩擦，是真正的概念难点，把它抹平了，学的人就失去了本该有的收获。一禾的计算器替她去掉的，是第一种摩擦；妈妈要她先列式子，是要她守住第二种。

他还打过一个比方，叫"认知饮食"：食物从稀缺变成充裕以后，人反倒容易发胖、体能退化；认知也一样，从处处有摩擦变成处处充裕，人就需要有意识地"节食"，教下一代保持这种有意识的认知饮食，会成为教育的一项重大新使命。这个比方说的是同一条线的另一头：工具把摩擦拿走了，人得自己知道哪些摩擦该留着。

把这件事放到整个数学的尺度上看，就是那句共识："AI 做常规，人做典范。"

"常规"和"典范"这一对词，来自科学史家库恩。库恩的大意是：一门科学的大多数日子，是在一套公认的框架里解谜——框架规定了什么是好问题、什么算好的解法，研究者照着框架一道一道去解，这叫常规科学；隔很长一段时间，框架本身被撼动、被换掉，这叫典范转移（他的原词通常译作"范式"）〔待核：库恩原书具体表

述〕。拿罗奶奶的织机打比方：常规科学是照着定好的花样织布，典范转移是换一种花样，甚至换一种织法。

AI 进入数学以后，很多人自然地把库恩这一对词搬了过来：常规的解谜交给机器，人去做典范。这个说法有好几路来源，彼此独立，却说到了一起。

第一路是陶哲轩本人。他在 2026 年 10 月的一次公共讲座里，讲了他称为"数学 2.0"的设想：解题只是一个更有价值的目标的代理；在证明变得充裕的时代，这个代理已经错位了；数学要拓展前沿，同时让"解题"不再站在中心。他建议去做一些过去不太被当成正事的工作：开放的阐释问题；消融研究，也就是把一个证明里的某个条件拿掉，看它还撑不撑得住；探索一条定理周围的"邻域"，看它往旁边挪一点还成不成立。他说，今后的瓶颈是想象力。他也提出过人机分工，提过"工业化数学"，同时警惕"AI 单一栽培"——所有人都用同一种机器、在同一个方向上种同一种庄稼，一旦这种庄稼出了毛病，就是一大片。

第二路是数学家内部更早的反省。高尔斯讲过数学里的"两种文化"：一种人以解题为乐，一种人以搭理论为乐，两者都是数学，但长久以来，后一种的价值常被前一种的光芒盖住〔待核：高尔斯原文的具体表述〕。瑟斯顿写过一篇很有名的文章，大意是数学的进步不在于多证出几条定理，而在于人对数学的理解往前走了多少〔待核〕。格罗滕迪克的做法常被人用"上涨的海"来形容：不是拿锤子硬砸一颗坚果，而是把水位一点点抬高，等坚果自己泡软、裂开〔待核：此比喻的出处与原意〕。这几位都没有谈过今天的大模型，但他们在说同一件事：数学里最要紧的，不是"解出这道题"，而是"看懂这片地"。

第三路来自专门讨论 AI 与数学的作者。2025 年前后，已经有人写文章主张把常规的证明工作交给机器，人去做概念层面的工作〔待核：Wolf/Loukides 2025 的具体论点〕。数学家孔托罗维奇在 2025 年的长文《将来的数学》（The Shape of Math To Come）里设想，数学家今后会直接在形式系统里工作，让 AI 帮着把形式库长得足够快；这里头也含着一种分工：机器扩库，人定方向。

就连 2026 年 9 月那份二十五位菲尔兹奖得主联署的宣言，骨子里也站在这个共识上。宣言承认大模型的数学能力已经大幅提升，它反对的不是 AI，而是 AI 公司把"解题"当基准；宣言说，解题只是理解概念的工具和代理；没有数学家去照料，

AI 构想出来的想法不会真正活起来。这一句"照料"，正是"人做典范"的另一种说法：机器可以织布，花样要人来养。

这个共识不只停在嘴上，它已经在做事了。看两件已核的事。

第一件是方程理论项目。这个项目由陶哲轩发起，用自动定理证明器，去处理 4694 条等式律之间大约 2200 万对蕴含关系（据项目报告）——也就是一对一对地查：这条规律成立的地方，那条规律是不是也一定成立。2200 万对，靠人一条条去查，几辈子也查不完；交给机器，就成了可以做完的事。人在这里做什么？人定下要查什么，定下"蕴含"怎么算，最后看这一大张表里露出了什么样子。这是共识最干净的一次落地：常规的、可以一格一格查的，交给机器；问什么、怎么看，留给人。

第二件是雅可比猜想。2026 年 7 月，这个猜想被 AI 构造出来的一个反例推翻了。陶哲轩花了两天，和聊天机器人一起去消化这个反例：他亲自推代数，用工具一步一步核对，自己去查文献。机器撞出了反例，人去弄懂它为什么成立、它碰掉了什么。这也是共识的样子：机器负责撞，人负责懂。

把这两件事和一禾的计算器摆在一起看，会发现它们是一个模子：机器那一边做得越多，人这一边就越要清楚自己守的是什么。一禾在学函数，她可以用软件一下子画出一条抛物线，可曾老师还是要她先在纸上描几个点——不是因为描点比软件准，而是描的时候，她才看得见这条线是怎样从几个点里一点点显出形状来的。工具替她省掉的，是一笔一笔的描；她自己得留着的，是"这条线为什么弯成这样"。

这几路说法有一个共同的长处，所以它们才这么容易被接受：它让两边都有台阶下。对 AI 公司，它承认机器的快是真的，是好事；对数学家，它保住了人的位置，而且是更高的位置。一禾听妈妈那么一说，也就不再嘀咕了——计算器归计算器，想题归自己，谁也不碍着谁。

我们还要把这个共识放在它最强的样子上看一眼，不能只挑它的软处。它最强的地方在于：它不是一条死规定，而是一条会跟着工具一起往前挪的线。计算器会了加减乘除，线就挪到"该乘还是该除"；软件会画抛物线，线就挪到"这条线为什么弯成这样"；机器会证一条定理，线就挪到"这条定理值不值得证、证了以后能接上什么"。一禾那句不服气的话——"以后机器连这个也会了呢"——共识是有回答的：那

就再往前挪。它不怕机器进步，因为它本来就是按"机器进一步、人退一步到更前面"设计的。宣言说的"照料"，陶哲轩说的"想象力是瓶颈"，都是在给这条线标出下一个落脚处。

这个设计在过去几十年里也确实管用。数学里早就有用计算机做大规模检验、做大型穷举的做法；每多一样工具，数学家就把手里的活往"更像理解"的那一头挪一点。共识只是把这条走了很久的老路，原样搬到了大模型身上。

所以，这个共识不是哪一个人的灵机一动。它有库恩的骨架，有几代数学家的自省，有陶哲轩一系列的具体提议，还有宣言的公开表态。它很结实。

不过，先留意一个小地方。这条线往前挪的时候，总是朝一个方向挪：从"算"挪到"列式"，从"列式"挪到"为什么值得算"，从"证一条定理"挪到"这条定理接上什么"——每一步都是在同一门数学里往更深、更前的地方退。一禾的函数课也是这样：她今天学一次函数，明年学二次函数，后年学三角函数，一层比一层深，可它们都被放在同一本教材、同一套记号、同一种"函数"的说法里。线挪来挪去，挪的是"在这一套里站多深"，没有人问过：会不会有另一种挪法——不是往深处退，而是往旁边看，看这一套和别的几套之间是什么关系？

这个问题，共识里没有位置。不是它答错了，是它没问。

本书不靠这个共识立论。原因不是它错了，而是它对，却在一个地方停下了。一禾的计算器规矩说清了"哪一段交给机器"，曾老师那句"去想这道题为什么值得算"也指了一个方向；可两句话都没说清：人留下来的那一段，究竟要做出什么样的东西。下一节，我们就去找这个停点。

## ◆ 3.3　共识停在哪里

再回到罗奶奶的车间。我们来设想一个场景：新机器进厂那年，厂长开大会，说今后织布交给机器，老师傅们去做花样设计。大家都觉得在理。

可是做着做着，问题出来了。

一位老师傅设计了一种新花样：在原来平纹的布上，每隔几梭加一道细细的条子。机器照样能织，织出来也好看。厂长很满意，第二年又让她设计了一种格子，

第三年又一种。她的花样一年比一年漂亮，可隔壁厂也买了同样的机器，也请了会画花样的人，大家比的是谁先拿出下一款。

另一位老师傅琢磨的却是别的东西。她注意到，同一种棉纱，用平纹织出来挺括，用斜纹织出来柔软，用缎纹织出来有光；线还是那几根线，只是哪根经线压在哪根纬线上、先压后压、几根一个循环，换了一种连法，布就成了另一种布。她想做的不是在平纹上再加一道条子，而是弄清楚：这几种织法之间，哪两种更亲、哪两种更远；在一种织法上摸出来的门道——比如怎样织才不起毛——搬到另一种织法上，能搬过去多少。她还留意到，有些织法是从另一种织法一点点改过来的，改的那几代人的手法还留在里面。这一点和门道好不好搬有什么关系，她一时说不清，只是记在了本子上。

第一位老师傅做的"花样"，是在一种连法之内做新东西。第二位老师傅做的"花样"，是在问连法本身：线和线怎样连，按什么先后，构成什么样子，以及这些连法彼此之间亲疏几何。

两个人和机器的关系，也就很不一样了。第一位老师傅和机器在同一条路上：机器越会自己出花样，她越被挤。第二位老师傅和机器却不在一条路上：她要机器帮她做的，恰恰是机器最拿手的事——把一种织法从头织到尾，织出一大卷样布；再换一种织法，再织一大卷；然后她拿着这些样布去比，去摸，去看哪两种的门道搬得过去、搬过去多少。机器织得越快，她手上能比的样布越多，她的活越好做。机器的快，对第一位是威胁，对第二位是帮手。

厂长那句"人去做花样设计"，对两个人都适用。可这句话没有告诉大家，人该做哪一种花样。

"AI 做常规、人做典范"这个共识，停的就是这个地方。

我们把共识里默认的那一层翻出来看。共识说"人做典范"，默认的典范是什么样子？从库恩那里来的典范观，大致是这样：一种典范被另一种典范替换；新典范一旦站住，又是一整套统一的框架，大家在新框架里继续解谜。典范之间是"换"的关系——旧的退场，新的登台。这就好比厂里从平纹全面改成斜纹，换完了，全厂又只有一种织法。

数学在这件事上走得比任何学科都远。一套公理定下来，哪些概念连在一起，什么推出什么，按什么次序推，全由这一套定好。数学越成熟，越追求把更多的东西收进同一套框架里——这本身就是数学的骄傲。陶哲轩这样一流的数学家，心里的"新典范"，多半也是"一个更大、更统一的框架"。他的数学 2.0 讲了很多好东西：消融研究、定理邻域、开放的阐释问题，都是在把目光从"一颗果子"移向"果子周围那片地"。可它要的仍然是"拓展前沿"，前沿后面站着的，仍然是同一门统一的数学。

这里藏着一个更深的默认：数学被当成一种描述世界的语言，它站在对象外面，自己是不变的。物理学家用它描述粒子，生物学家用它描述细胞，教育学家用它描述学习；对象千变万化，数学这门语言本身只有一套语法。在这个默认里，人做典范，就是用这门语言说出更深的话；AI 做常规，就是用这门语言说出更多的话。两者都在同一门语言里。

本书的看法不同。第 4 章会细讲：数学不是站在对象外面的语言，数学本身就是特征纠缠之场的连接、次序与结构（SDE 把它放在信息这一层，记作 E2）。一旦这样看，第二位老师傅的问题就浮出来了：场的连法，可以不止一种；几种连法之间，有亲有疏；亲疏不是谁拍板定的，而是一代代织下来、改下来、留下来的。

把这一层翻出来以后，共识的停点可以说得很具体。它有两处没回答。

第一处：人做的"典范"，是哪一种典范？是在一种场结构里换一个更大的统一框架，还是去做场结构本身的谱系——弄清几种场结构之间同一到什么程度？共识没有把这两种分开。没分开，人就很自然地把"做典范"理解成前一种，因为前一种是数学几千年来最熟的路。

第二处，也是更要紧的一处：只要人做的典范还是前一种，人和 AI 就还在同一条赛道上。AI 在一种场结构里千倍地推，人也在一种场结构里找更大的统一；两边要的都是"在这一套里最先拿出某样东西"。这正是第 2 章说的内卷——一把尺子，不可再生的问题，谁也不敢慢下来的囚徒困境。作者认为，只要停在统一性数学，大模型公司和数学界就永远无法真正和解；共识说"分工"，可分来分去，分的是同一颗果子。

第 1 章讲过的那 722 道题，正好把这一点照得很清楚。陶哲轩批评的几件事里，有一件是：事先没有和数学家协调，抹掉了一些年轻人的课题。这件事在"AI 做常规、人做典范"的共识里是解释不了的——按共识，机器做的是常规，年轻人做的若是典范，怎么会被抹掉？可事实是，年轻人手里的课题，和机器一夜之间吐出来的东西，是同一种东西：都是在一种场结构里待证的一条命题。分工的话说得再漂亮，只要两边落在同一种场结构里，机器就会从"常规"一路推进到人以为属于自己的地方。这就像第一位老师傅：她做的是花样设计，可隔壁厂的机器也能自动出花样了，她的"典范"和机器的"常规"其实是一条赛道上的前后两段。

回到一禾的课桌上，也能看见这两处停点。外婆罗奶奶家的柜子里，还收着曾老师少年时的数学作业本，用的是另一套教材，同一个"函数"，讲法、记号、先学什么后学什么，都和一禾现在的不一样。一禾翻着看，有的题她一眼就懂，有的题怎么看都别扭。哪些一眼懂、哪些别扭，看上去和题难题易关系不大。她翻到后面才发现，两套教材里，有的地方是从同一个老讲法一路改下来的，有的地方早就分了岔——这和她懂不懂有没有关系、有多大关系，她说不清，第 5 章会回来细问。共识只会对一禾说：先自己想，再用计算器。它不会告诉她：两套讲法之间同一到什么程度，门道能从这一套搬到那一套多少。而这恰恰是她真正卡住的地方。

第一组邻居在这里的样子，可以收成一段话：库恩看见了典范会换，却没有分开"换一种统一"与"长出一个谱系"；几代数学家看见了理解比解题要紧，却默认理解的终点仍是统一；陶哲轩看见了解题已经错位，看见了单一栽培的危险，也提出了消融研究和定理邻域，却没有把"栽培什么"落到场结构的谱系上；菲尔兹宣言看见了没有照料的想法活不起来，却没有说照料要照料成什么。它们都对，都停在同一处。

还要替它们说一句公道话。这个停点，不是这些人想得不够深，而是数学自己长成了这个样子。数学是人类把"统一"做得最彻底的一门学问——一套公理管住一切对象，这是它几千年来最大的成就。正因为它在统一这条路上走得最远，回头看见"场结构可以有谱系"，也就最难。

还可以说得再往下一层。为什么这个停点到今天才露出来？因为过去它不碍事。人做常规也做典范的时候，常规做得慢，典范也换得慢，一种场结构够大家用

好几代人；共识里那一点没分清的地方，被慢掩住了。现在 AI 在一种场结构里千倍地推，推出来的东西一大片一大片地落下来，有的落在人以为是自己的田里，有的落在谁也没准备好的地方——第 1 章那句"有毒废料"和后来的改口，说的就是这种情形。一边是机器成批撞出来的果子，一边是共同体仍然只会按一种场结构去消化的老路，两头顶在一起，这股劲正在越积越大。共识要么继续把这股劲当毛病——立规矩、签宣言、请公司慢一点；要么让它推动一样更深的东西变形：数学之场本身，从一种结构，变成结构的谱系。

本书选后一条。可是，"一种场结构"和"场结构的谱系"到底有什么不同？谱系的"程度"是什么意思，从哪里来？要回答，就得先把 SDE 讲清楚，再把数学放进去看。这是第 4 章的事。

**带 走 的 话**

- **典范一旦给定，在这一套公理和推法里，AI 越来越快；"千倍"是方向，不是现状——First Proof 十题解七，而陶哲轩估计重要问题约九成五仍在 AI 之外。**
- **"AI 做常规、人做典范"不是新话：库恩的骨架、几代数学家的自省、陶哲轩的数学 2.0、菲尔兹宣言的"照料"，都站在它上面，它很结实。**
- **共识停在两处：它把数学当成站在对象外面、自己不变的语言；它没分开人该做的是"一个更大的统一"，还是"场结构的谱系"。**
- **只要人做的典范仍是"更大的统一"，人和 AI 就还在同一条赛道上，分工分来分去，分的是同一颗果子。**

**小 账**

**本章切开的差异：**在一种场结构之内做新东西，与去做场结构本身的谱系——这是两种不同的"人做典范"。

**本章的场谱系读数：**本章涉及的数学仍是一种场结构（典范之间只"换"不"谱"）；回写落在共识之内——AI 的千倍推导回写进的是同一个框架，还没有回写成分叉。

◆



中　编

# 数学是 E2 之场：同一性谱系源于场结构的谱系化

## 编　序

这一编是全书的理论部分。第 4 章从触觉、听觉、视觉讲 SDE 的眼光，再分出数学之场的三种同一：统一性、多元化的统一性、有程度的同一性。第 5 章说程度来自回写，定义回写派生树上的共同祖先深度 g，立下承重预测。第 6 章与近邻学说正面交手，第 7 章分辨同向果子与反面果子，第 8 章讲回写由人与 AI 缠成的复合主体来写。

04

第 4 章

# 三种同一性：数学之场的三种形态

**这一章的问题**

上一章说，共识把数学当成站在对象外面、自己不变的语言。如果数学不是那样的语言，它是什么？两样数学的东西"同一"，又有几种不同的同一法?

## ◆ 4.1　从三种感觉说起：SDE 是什么，数学在哪里

要说数学是什么，得先绕一段路，把本书用的那双眼睛交给读者。这双眼睛叫 SDE。三个字母，讲起来容易讲成三块木头。最好的办法，是从人人都有的三种感觉说起：摸、听、看。

先说一句要紧的话：不是"摸是一个字母、听是一个字母、看是一个字母"。每一种感觉里，三个字母都全。

### — 摸：罗奶奶的指尖找线疙瘩

这是一个构想的场景。罗秀英奶奶在纺织厂干了一辈子，到现在买一块布，还是不先看，先摸。她把布角捏在拇指和食指之间，轻轻一搓，手指往前一推。

指尖先碰到的是滑——这是一个差别。往前推半寸，滑里有一点涩——又一个差别。再推，涩的地方鼓起来一个小疙瘩，硬一点，比别处厚一点——再一个差别。手指不动，什么差别也没有；手指一动，差别一个接一个排成一串，走成一条路（SDE 把这叫"差异序列"，记作 D）。

随着这一串差别，布的样子一层层显出来：先是"一块软布"，再是"一块有点涩的布"，再是"这块布纱不匀，有疙瘩"，最后是"这布洗两水就要起球"。这不是摸之前就以"会起球的布"的样子摆在那里、等她去认的；它是随着手指走过的每一段，一层层显出来的（SDE 叫"显露"，记作 S）。她要是只推了半寸就停下，看到的就

是"有点涩的布"——那不是错了，是还没显到那一层。显露是一路显下去的，所以叫"显露谱系"：差异序列一启动，显露就跟着发生；差异序列往前走一步，显露就再深一层。

再看她的手和这块布。指尖的温度焐着布，布的涩挂着她指纹；她搓的力道里，有几十年在车间里看布面养出来的那份手劲；她摸的路线——先搓、再推、再折过来反摸一下——缠着她当年挑错梭的那些习惯。换一个从没进过纺织厂的人来摸，同一块布，搓的方式不同，推的方向不同，那个疙瘩多半摸不出来，"会起球"也就显不出来。手、布、手劲、几十年的习惯，缠在一起，拆不开（SDE 叫"特征纠缠"，记作 E）。这不是"她受了工厂的影响"——要是把那几十年从她手上拿掉，摸布的就不是这一个罗奶奶了。

摸这件事最容易让人觉出纠缠：手和布是贴着的，你没办法假装自己站在布外面。

### 一 听：欧阳伯拍西瓜

再说听。欧阳伯是罗奶奶的邻居（构想人物），在城郊种两块菜地，夏天也种几垄西瓜。他摘瓜不看个头，先拍。手掌在瓜上一拍，耳朵凑过去。

"嘭"——声音出来，有高有低，有闷有脆，有长有短；拍第二下，换个地方，声音又差一点；拍第三下，再差一点。声音本身就是一串差别排成的。

随着这一串，瓜熟不熟一层层显出来：第一下，"不是生瓜"；第二下，"熟了"；第三下，声音有点空，"熟过头了，瓤可能起沙了"。三下拍完，这只瓜的样子在他耳朵里显到了底。

欧阳伯的耳朵和这只瓜缠着。那一声"闷"算熟还是算生，是他几十个夏天、几百只瓜，一只只拍、一只只切开、一只只吃出来的；他种的是哪个品种、今年雨水多不多，也都缠在他听的那一下里。一个城里人站在瓜地边拍同一只瓜，耳朵里也有"嘭"的一声，可熟不熟显不出来。同一声响，到了欧阳伯耳朵里，和到了城里人耳朵里，显出来的不是一个东西。

### — 看：曾老师认字迹

再说看。曾晓岚是娄底一所初中的数学老师（构想人物）。期中考试收上来一份卷子，没写名字。她翻开第一页，看了几行，说：这是二班那个坐窗边的男孩的。

她是怎么认出来的？第一眼，只看见一页挤挤挨挨的字，比别的卷子密一点；再看，等号总是拖得很长，像一道横杠划过去；再看，每一步推完都不换行，箭头一个接一个往右挤；再看，数字"7"中间带一道横。一个个差别排起来，"这是谁"一层层显出来：先是"一个写得急的学生"，再是"一个习惯不换行的学生"，最后是"他"。

她这一眼里缠着的东西更多：她教了这个班一年半，批过他几十份作业；她记得他第一次被要求"一步一行"时那副不情愿的样子；她知道他讲题的时候也是这样一口气说到底。换一位从没教过这个班的老师，看见的只是"一份没写名字的卷子"。

### — 三件事其实是一件事

三个场景里，SDE 三个字母都在，而且都在同一个动作里：罗奶奶手指往前一推，同时是一个差别、一层显露、一回纠缠；欧阳伯拍一下，曾老师看一行，也是这样。为了说得清楚，我们把它切成 S、D、E 三块来讲——这只是在想法里做的一刀假想的切割，就像画桌子要画正视图、侧视图、俯视图，三张图分开画，桌子并没有被拆成三块。真实的那一下摸、那一声听、那一眼看，三样从来没分开过。

三种感觉各有侧重。看，靠的是光；听，靠的是音；摸，靠的是贴着的那一口气。光让人觉得自己站得远远的、在外面看；摸却让人没处躲，最容易觉出自己和东西缠在一起。所以过去的很多学问，是照着"看"的样子长起来的：站在外面，对着一个东西，量它、画它、写下它的样子。数学尤其如此。

### — 数学在哪里

现在可以回到数学了。

再看一遍三个场景，每个场景里都有一层东西，不是布、不是瓜、不是字，也不是手、耳、眼，而是：哪几个差别被连在一起，按什么先后，搭成什么样子。

罗奶奶那里，是"涩"和"疙瘩"连在一起、再和"会起球"连在一起；她的手法有先后——先搓、再推、再反摸，次序一换，疙瘩就摸不准；几个连接和先后搭在一起，成了一套她自己摸布的"门道"。欧阳伯那里，是"闷"和"熟"连在一起、"空"和"过头"连在一起，拍的先后——先拍瓜腰、再拍瓜头——也有讲究，搭成一套听瓜的门道。曾老师那里，是"长等号""不换行""带横的 7"连在一起，按她看的先后，搭成一套认人的门道。

这里的"次序"不是随口说的，可以试一试。罗奶奶要是先反摸、再推、最后才搓，那个疙瘩多半会被她反摸时压平，等搓的时候已经摸不出来了——换了次序，结果就变了，这是真次序。欧阳伯先拍瓜头再拍瓜腰，瓜头声音本来就闷一点，他会先入为主，后面那一下就听偏——也是真次序。可曾老师先看等号还是先看"7"，结果大概一样，这一处次序就不要紧。哪里的先后动不得、哪里的先后无所谓，本身就是这套门道的一部分。连接、次序、结构，三样缺一样，门道就不成门道：只有连接没有次序，像一堆散着的线头；只有次序没有结构，像一串记不住的口令。

这一层"连接、次序、结构"，就是本书说的数学。

作者认为：数学是特征纠缠这一维里信息那一层的"场"——特征纠缠之间的连接、次序、结构。在 SDE 的九宫格里，纠缠这一维分三层：三界（理念、现实、自我）、信息、能量；信息那一层又有三种样子：符号、逻辑、数学（这一层记作 E2）。数学在 E2 里，说的就是纠缠着的那些特征之间，怎样连、怎样排先后、搭成什么样子。

这个说法和平常的说法差在哪里？平常的说法是：世界上有布、有瓜、有字，数学是一门站在它们外面的语言，可以拿来描述它们；数学自己不变，变的是被描述的东西。本书的说法是：数学不在外面。罗奶奶摸布的门道里那一套连接和先后，就长在她的手和布缠在一起的那个场里；它是这个场本身的连法、排法、搭法。换一个场——换成欧阳伯的瓜地——连法、排法、搭法就是另一套。

有人会说：这不就是"经验"吗？罗奶奶有摸布的经验，欧阳伯有拍瓜的经验，曾老师有认字的经验，叫什么数学？

差别在两处。第一处，"经验"这个词，习惯上被放在人的脑子里，好像是她身上带着的一样东西，走到哪里带到哪里。可罗奶奶摸布的那套连法，离开了布是空的：没有布上那个疙瘩，"涩连着疙瘩、疙瘩连着起球"这一串就无处落脚。它不在她

身上，也不在布身上，在手和布缠在一起的那一片里。第二处，"经验"讲的是"她会"，不讲"怎么连"。而我们要看的，恰恰是那一层"怎么连、怎么排、怎么搭"。这一层是可以抽出来、写下来、拿去和别的门道比的：罗奶奶的摸法里，"先搓后推"这个次序要紧；欧阳伯的拍法里，"先瓜腰后瓜头"这个次序要紧；两套门道各有一个"次序决定结果"的地方。两样完全不同的东西，在"怎么连、怎么排"上可以比——这正是数学一向在做的事。数学最拿手的，就是把各种东西里的连接、次序和结构抽出来，看它们像不像、同不同。

所以本书说"数学是 E2 之场"，不是把数学降成了经验，而是把数学放回它本来所在的地方：它是纠缠着的特征之间的连法本身。数学家写在纸上的公理和定理，是这片场被抽出来、被写定的那一层；它仍然是从场里来的，也仍然缠着场。

还有一件事值得一提。三个场景里，三套门道都是一层层显出来的，也是一层层长出来的。罗奶奶刚进厂的时候，摸布只摸得出"软"和"硬"；摸了几年，才摸得出"涩"；再几年，才摸得出"涩里有个疙瘩，这布要起球"。她手上那套连法，本身也有一条显露谱系：从粗到细，从两个差别连在一起，到五六个差别搭成一套。数学之场不是一张一次画好的图，它也是随着差异序列一层层显露、一层层搭起来的。这一点到 4.4 会变得要紧。

"场"这个字要说一句。场不是一块空地，东西摆在上面；场是那些缠在一起的特征之间"连成一片"的样子，像一屋子人的气氛，不在哪个人身上，又在每个人身上。数学之场，就是这片连成一片的连接、次序与结构。

再往下看一步。罗奶奶当年车间里，还有一位一起进厂的老姐妹，也是摸布的好手。两人的摸法很像：都先搓、再推，都认"涩里带疙瘩就要起球"。这不奇怪，她们是同一个老师傅带出来的，在同一排机器前站了几十年，互相纠正过无数回。可罗奶奶的摸法和欧阳伯的拍法，就几乎找不到共同的连法了——一个是指尖贴着布，一个是手掌拍、耳朵听；一个认的是"涩"和"疙瘩"，一个认的是"闷"和"空"。只在很粗的一层上还像：都是"先试一下，再换个地方试一下，几下合起来下判断"。

三套门道之间，有的很近，有的很远，有的只在最粗的一层上沾边。而且近的那两套，近得有来历：同一个师傅、同一排机器、几十年的互相纠正。

这样看，问题就来了：既然每个场都有自己的连法、排法、搭法，那么罗奶奶的门道和欧阳伯的门道是不是"同一种数学"？两套门道"同一"到什么程度？两样数学的东西"相同"，有几种相同法？

下面三节，讲三种回答。

## ◆ 4.2　第一种同一：统一性——一口中央厨房的锅

这是一个构想的场景。娄底城里新开了一家连锁快餐店，招牌菜是红烧肉。店员告诉谭一禾：我们全国几百家店，红烧肉都是一个味，肉是中央厨房切好、配好料包送来的，每家店照着同一张操作卡：几克肉、几克料、几度的火、几分钟。你在娄底吃，和在别的城市吃，一模一样。

一禾吃了一口，确实，和她在别的城市吃过的一模一样。

这就是第一种同一：**统一性**。它的样子是：只有一套标准，一切都按这一套来；两份红烧肉"是不是同一道菜"，只看是不是照这一套做的——是，就完全相同；不是，就不算这道菜。同一性只有一个值：满分。

数学是人类把这种同一做得最彻底的地方。

先说数学的地基。今天大多数数学家默认的地基，是一套叫 ZFC 的集合论公理。它的雄心很像那家中央厨房：数学里的一切对象——数、函数、空间、形状——原则上都可以写成集合；一切推理，都可以写成从这几条公理出发的一步一步。两样东西是不是相等，有一条统一的标准：作为集合，元素完全相同，就相等；否则就不相等〔待核：ZFC 外延公理的具体表述〕。在这块地基上，"相等"只有两个答案：等，或不等。

再说数学的高楼。数学里有一个被很多人称为"大统一"的计划，叫朗兰兹纲领。粗略地说，它想在数论和表示论这几片原本看起来各不相干的地方之间，找出一套深层的对应，让它们成为同一座建筑的不同侧面〔待核：朗兰兹纲领的通俗表述〕。我们不必懂它的细节，只要看见它的方向：把看似不同的东西，收进同一个更大的框架。

从地基到高楼，数学的骄傲是一以贯之的：一套公理，一种连法，一种推的次序，管住一切对象。用上一节的话说，统一性数学预设：数学之场只有一种结构

——一套公理定下一种连接、一种次序、一种搭法——并且要让它对一切对象成立。在 SDE 看来，数学因此是"把纠缠的统一推到最大"的一门学问。

"对一切对象成立"这几个字，要多看一眼。快餐店的操作卡，管的是自家几百家店；数学的那一套连法，雄心要大得多：它要管数，也要管行星的轨道、细胞的分裂、股价的涨落、孩子学说话——凡是能被写成数学对象的，都在它管下。物理学家、生物学家、经济学家拿来用的，是同一套加法、同一种函数、同一种"相等"。场里的连法本来是在一个个对象上长出来的，统一性却把它推成了一切对象共用的那一套。这是它最大的力量，也是第 3 章说的那个默认的来处：数学看上去站在一切对象外面，正因为它被推到了一切对象上。

这条路的成就，再怎么说也不为过。正因为只有一种连法，一条定理一旦在这块地基上证出来，就在所有地方都成立，不用一处一处去重验；正因为相等只有"等"与"不等"，证明才能一格一格地查，查到底，查出一张证书来。上一章说的 AI 千倍推导，正是站在这块地基上：花样只有一种，机器才能一梭一梭不出错地织下去。没有统一性，就没有今天的形式化，也就没有 AI 在数学里的快。

可是回到快餐店。一禾吃完，给外婆打电话，说今天吃了红烧肉。罗奶奶问：什么味？一禾说：就那个味，哪里都一样。罗奶奶说：那不是红烧肉，那是料包。

这句话不是在挑快餐店的毛病。它点出了统一性看不见的一样东西：在统一性里，"这一份"和"那一份"的不同，要么不存在（都照操作卡做的），要么不算数（没照做的就不是这道菜）。罗奶奶家的红烧肉和同村老邻居家的红烧肉，差一点；和长沙一家老馆子的红烧肉，差更多；和上海本帮的红烧肉，差得更远——这些"差一点""差更多""差得远"，统一性没有地方放。它只有一个格子：是这道菜，或不是。

数学里也一样。在统一性的地基上，两个数学结构之间的关系，问的是：能不能一个映到另一个上去？能，就有关系；不能，就没有。这当然很有用，可它问不出"这两个结构，同一到什么程度"——因为同一性在这里，要么是满分，要么就不讲。

统一性还有一个很实在的好处：它让检查变得简单。快餐店的总部派人下去巡店，手里拿的就是那张操作卡：肉切得对不对，料下得够不够，火开了几分钟，一项一项对。对得上，就合格；对不上，就不合格。不用去问这家店的厨子是哪里人、手上有什么老习惯，也不用问这一锅和上一锅有什么来历——问了反而乱。数

学里的证明检查也是这个样子：每一步，拿规则对一下，合法就过，不合法就不过。Lean 这类工具能一格一格查到底，靠的正是"只有一张操作卡"。

可这份简单也有代价。巡店的人碰到一锅"不一样"的红烧肉，只能有一个结论：不合格。这锅肉也许是厨子发现本地的肉更肥、少放了一点油，做得反而更好吃；可在操作卡面前，它就是错。统一性里，"不一样"只有一个名字：错误，或者例外。数学里也是这样：一个结果和人们默认的不一样，在统一性里只有两条出路——要么是证错了，要么是原来那条规律还少一个前提，补上它，一切照旧。至于"不一样"会不会是另一支连法冒了头，统一性没有这个格子。这一点，第 7 章讲"反面果子"时会再回来。

也正因为同一性恒为满分，规律的身份很简单：一条定理被证出来了，它就普遍为真。它在哪里成立？在一切满足前提的地方。它会不会在某处"成立得少一点"？不会，没有这种说法。

还要补一句：统一性不是傻，它很清楚世界上有各种不同的东西。它对付不同的办法是：把不同写成前提。这道定理只对满足条件 A 的对象成立，那道只对满足条件 B 的成立——不同被收进了一条条前提里，前提之内仍是满分。就像中央厨房也有几种套餐，可每一种都有自己的操作卡，操作卡之内一模一样。

数学史上，非欧几何就是这样被收拾的：几何当年确实分过岔，后来人们用一个更大的框架，把平面、球面等几种几何都装进去，分岔就成了同一个框架里一个参数的不同取值。这段历史第 7 章再细讲；这里只看统一性的脾性：它不让分岔留在那里，总要找一个更大的屋顶，把分出去的几支收回同一个屋檐下。收回来以后，几支"同一到什么程度"这个问题就消失了，它们当年怎样分出去、各自养出了什么门道，大屋顶下不再记账。

所以，统一性的同一，是一种"全有或全无"的同一。它让数学走得最远，也让数学看不见一类东西：两个场结构之间，那种"有点像，又不全像；像的部分是一代代传下来的"的同一。

下一节要讲的第二种同一，看起来正是为了补这个缺口而来的。

## ◆ 4.3 第二种同一：多元化的统一性——八大菜系各有一本谱

一禾外婆那句"那不是红烧肉，那是料包"，有人听了会说：对呀，红烧肉本来就不止一种。湘菜有湘菜的做法，本帮菜有本帮菜的做法，各地各有各的标准，不该拿一张操作卡管全国。

这是一个构想的场景。曾老师学校的食堂搞"美食周"，每天做一个菜系。厨师长拿出几本菜谱：湘菜一本，粤菜一本，本帮菜一本……每本菜谱里，红烧肉都有自己的做法。湘菜那本里的红烧肉，就按湘菜那本的规矩做；本帮那本里的，就按本帮那本的规矩做。做湘菜那天，谁要是往锅里多放了糖，厨师长就说：今天是湘菜，按湘菜的谱来。

这就是第二种同一：**多元化的统一性**。它承认不止一种标准，这比统一性开阔。可是看仔细：每一本菜谱之内，同一性仍然是满分——照这本谱做的，就是这本谱的红烧肉；菜谱和菜谱之间，厨师长不讲它们谁和谁亲、谁和谁远，只讲"今天按哪一本"。几本谱并排放着，各自内部统一。

数学和逻辑里，这条路走得相当远，而且走出了真本事，要公道地讲。

第一条路，是集合论里的"多元宇宙"观。有学者主张：集合论不止一个"真正的"宇宙，而是有许多同样合法的宇宙，有的宇宙里某个命题成立，有的宇宙里不成立，各有各的道理〔待核：汉金斯多元宇宙观的具体表述〕。这就像承认湘菜和本帮菜都是正宗，没有哪本谱是唯一的正宗。

第二条路，是"逻辑多元主义"：不止一种逻辑是正确的。经典逻辑认"非真即假"；直觉主义逻辑不默认这一条，要你把东西构造出来才算数；还有别的逻辑，各有各的推理规矩，在各自的用场上都站得住〔待核：逻辑多元主义的代表表述〕。

这两条路，用食堂的话说，就是不再只认一本菜谱，连"什么算做成了"的规矩也可以不止一种：有的菜谱认"端上桌就算"，有的菜谱要求"每一步都得在灶边做给人看过才算"。两种规矩各有道理，各自内部一以贯之。

第三条路走得最深，叫拓扑斯。拓扑斯可以粗略地理解成"一种可以在里面做数学的宇宙"，每个拓扑斯都有自己内部的逻辑。要紧的是：在很多拓扑斯里，真值不只有"真"和"假"两个。拓扑斯里有一个专门管"真值"的对象（记作 Ω），它可以有许

多值——一个命题可以"在这一片上真、在那一片上不真"，真成了有层次、有部分的东西。这不是比喻，是严格的数学。

顺着拓扑斯再往前，有一种叫 Ω-集的东西。在普通集合里，两个元素要么相等，要么不等；在 Ω-集里，"x 等于 y"本身取一个 Ω 里的值——两个东西可以"在某种程度上相等"。相等，有了程度。

还有一条路来自计算机科学，叫量化等式逻辑。普通的等式逻辑只讲 x = y；量化等式逻辑讲的是"x 和 y 相差不超过 ε"——两个东西在一个度量下"差多少"，可以直接写进推理规则里去推〔待核：Mardare–Panangaden–Plotkin 量化等式逻辑的具体形式〕。这样，相等也有了程度：差 0.1 和差 0.5 是不一样的"相等"。

所以要如实说：**多元化的统一性，并不是只有 0 和 1。**拓扑斯里真值可以是多值的；Ω-集和量化等式逻辑里，相等可以有程度。谁要是把它们写成"只有是与不是"，就是在打一个稻草人。

那么本书为什么还要把它们和第三种同一分开？

因为要看清：这些程度是从哪里来的。

回到食堂。我们来设想厨师长更讲究一点：他不满足于"按哪本谱"，还给每道菜打了一个"像正宗多少"的分。怎么打？他事先定了一张评分表：甜度占几分、酱色占几分、肥瘦比占几分、软烂度占几分，每一项都有尺子。一份红烧肉端上来，按表一量，八十五分像湘菜，四十分像本帮。程度是有了，而且量得很细。

可是这张评分表是怎么来的？是厨师长事先定的，一张表管所有的菜。甜度为什么占这么多分、软烂度为什么占那么少，表里不问；这份湘菜红烧肉的做法是从哪一家传下来的、和那份本帮红烧肉在历史上有没有分过家、什么时候分的家，表里也不问。程度是表给的，不是菜的来历给的。

拓扑斯和 Ω-集的程度，也是这个样子。真值的层次，由那个事先选定的真值对象 Ω 一次性安排好：Ω 长什么样，程度就有哪些档、档和档怎么比。量化等式逻辑里"差多少"，由事先给定的那个度量来量：度量怎么定，远近就怎么算。程度是有的，而且严格；可这份程度，是由一个统一给定的真值对象或度量从上往下安排的。它在"选定这一个 Ω、这一个度量"之后，又是一套完整的统一：Ω 之内，规矩只有一套；度量之内，尺子只有一把。

这就是"多元化的统一性"这个名字的意思：系统内尺子统一，系统之间没有亲缘尺子。多元，是几套并排；统一，是每套之内一以贯之，连"程度"也由这一套事先给定的真值对象或度量统一安排。几个系统之间呢？系统 A 里的真值档位，和系统 B 里的真值档位，谁和谁亲？多元宇宙里，这个宇宙和那个宇宙在"来历"上隔了几代？这类问题，在这条路上要么不问，要么再找一个更高的框架、再给一个统一的度量来比——又回到了统一性的做法。

规律的身份在这里也换了：不再是"普遍为真"，而是"在系统 X 中为真"，或者"在系统 X 中真到某一档"。这一步很重要，它让数学承认了"在哪里成立"是个问题。可"系统 X 和系统 Y 隔多远"这件事，仍然交给了一把从外面拿来的尺子。

替这条路说一句最强的话：真值对象和度量也不是凭空选的。数学家选哪一个拓扑斯、用哪一种度量，往往是看手上的问题需要——研究连续变化，就选一个能表达"在这一小片上成立"的拓扑斯；研究程序行为相近不相近，就选一个能表达"差多少"的度量。这份挑选里，当然有数学家的经验，也有这门学问的来历。

这话不错。可要看清它落在哪里：来历落在"挑选"这一步，挑完了，程度就全由挑中的那一个真值对象、那一个度量来安排；程度本身并不记着任何来历。两个对象在这个度量下"差 0.1"，这个 0.1 不会因为它们一个是从另一个一路改出来的、另一个是凑巧长成这样的而有所不同。来历在门外，程度在门里，门里只有一把尺子。本书要找的程度，是来历就写在程度本身里面的那一种。

有人会问：程度就是程度，由谁安排有什么要紧？

要紧。回到红烧肉。按评分表，两份红烧肉可能分数一样——都是"像湘菜八十分"。可一份是从娄底一个老家传了三代的做法，另一份是一个厨子照着网上的视频、凑巧做到了这个分数。分数一样，它们像湘菜的"那个像"，是一回事吗？要是在这两份红烧肉上各加一个新改法——比如都换成另一种酱油——哪一份的改法更容易被那一锅老湘菜接得住？本书的看法是：传了三代的那一份更接得住，因为它和那一锅老湘菜共享的不是一个分数，而是一段一代代传下来的连法和先后。评分表看不见这一层，因为评分表只量"现在像不像"，不量"是怎么像起来的"。

这一点留到 4.5 和第 5 章去证。在这里只先把界线划清楚：多元化的统一性有程度，程度由统一给定的真值对象或度量安排；第三种同一的程度，要从别处来。

## ◆ 4.4　第三种同一：同一性的不同程度——红烧肉与方言

### — 一锅红烧肉怎样传下来

这是一个构想的场景。罗奶奶的红烧肉，做了五十年。她说是跟她妈妈学的。

学的时候没有菜谱。母亲的做法很简单：五花肉切成方块，下锅翻炒，加酱油和水，盖上锅盖小火慢炖。母亲从不说"几克、几分钟"，只说"看颜色""闻到那个香了再翻"。

罗奶奶起初照着做，肉总是偏腻。她那时在纺织厂上三班倒，下了班累，吃不下太腻的，就在下锅前先把肉焯一遍水、撇掉浮沫。腻是去了，可焯过水的肉不容易上色，端上桌白白的。她又改了一回：先把冰糖炒成枣红的糖色，再把肉倒进去，"哗"一声，翻匀了再炖。

我们来看这里头哪些东西被连在一起。"焯水"和"去腻"连在一起；"糖色"和"上色"连在一起；糖的颜色和下肉的时机也连在一起——枣红就下，黄了不下，黑了就苦。哪些先、哪些后：先焯后炒，先炒糖色后下肉，次序一换，味就不对。这些连接、这些先后搭在一起，成了一锅"罗家红烧肉"的样子。

这一套连接、次序、结构，正是上一节说的数学之场——纠缠在这一锅肉、这一口锅、这双手、这家人口味里的那一层"怎么连、怎么排、怎么搭"。

它是怎样传下来的？不是一次抄过去的。偏腻，逼出了焯水；色浅，又逼出了炒糖色。每一回，都是做出来的结果回头改了下一回的起点，而且改了以后留了下来——这在 SDE 里叫"回写"。罗奶奶做了五十年，可真正改了做法、留下来的，就这么几回；锅里那一套连法、排法、搭法，就是这几回回写沉淀成的"罗家的味"。

曾晓岚现在也做。一禾小时候不爱吃甜，她把冰糖减了一半；家里用电磁炉，火力不稳，她把大火收汁改成开盖小火慢慢收。可那一套"先焯后炒、先炒糖色后下肉"的连法和先后，她一样不差。罗奶奶吃她做的，说：是我们家的，就是淡了点。

"是我们家的，就是淡了点"——这一句话里，有统一性说不出的东西：同一，但不是满分；不同，但不是另一道菜。这一家的代际怎么一代代数，第 5 章还要拿它细算。

### — 同村、同省、全国

把眼光放远一点。

罗奶奶老家同村有一户老邻居，也做红烧肉。两家在一个村里住了几十年，你家借我家的锅，我家尝你家的菜，谁家孩子在谁家吃饭也是常事；当年罗奶奶改出焯水和炒糖色，这户邻居尝过以后也跟着改了。两家的做法八九不离十：也是先焯后炒，也是先炒糖色后下肉，只是邻居家多放一个八角。同村的两锅，共享的连法和先后最多，因为它们沿着同一段来历一路走过来，到很晚才分岔。

再远一点，长沙的一家老馆子也做"毛氏红烧肉"一类的湘式红烧肉，也是糖色、也是辣，可不焯水、先煸肉出油，下料的次序不同，用的辣也不同。和罗家比，像，又差了一截。两锅共享的那一段来历，要往前追得更远才碰得上。

再远，上海的本帮红烧肉，浓油赤酱，甜，不放辣。名字一样都叫红烧肉，连法和先后差得很大。它和罗家的那一锅，要追到很早、很粗的那一层——"用糖和酱给肉上色、慢炖"——才算同一个祖宗。

同村相近，同省相似，全国同名而差别很大。这就是第三种同一：**同一性的不同程度**。

### — 它和前两种差在哪里

先和统一性比。统一性只有满分：照操作卡做的就是，不照做的就不是。而在这里，老邻居的锅和罗奶奶的锅不是"同一道菜"那样的满分，也不是"另一道菜"那样的零分，它们是"很同一"；长沙那锅是"有些同一"；上海那锅是"只在很粗的一层上同一"。同一性有了程度。

再和多元化的统一性比——这一层更要紧。多元化的统一性也有程度，可它的程度是从一张事先定好的评分表来的。这里的程度从哪里来？不是谁定了一张表，而是从来历里来：两锅红烧肉的那一套连法和先后，是沿着同一段回写的历史一路传下来的，传到哪里才分了岔，分岔之后又各自改了多少代。分岔得越晚、共享的那一段越长，同一的程度就越高。

这里有一个细处，要特别分清。会不会有这种情形：上海某家馆子的红烧肉，凑巧也放了一点辣，凑巧也先熬糖色再下肉，照评分表一量，和罗家的"现在长得很像"？完全可能。可它和罗家的那一锅，并没有共享那一段来历——它的辣是厨子自

己某年加的，它的糖色是从本帮的路子里来的。现在长得像，叫"结构相似"；一路传下来的像，叫"历史亲缘"。前者是评分表能量的，后者是评分表量不到的。

本书的看法是：真正决定"一家的门道能不能搬到另一家去"的，不只是结构像不像，还有历史亲不亲。曾晓岚摸出过一个小窍门：收汁前沿锅边淋一小勺醋，肉更不腻。拿去教那户老邻居，多半一试就成，因为两家锅里"焯水去腻"那一套连法本来就是一路传下来的，新窍门有地方接；教给那家"凑巧很像"的上海馆子，可能怎么试都不对味，因为它锅里的那一套连法，是从另一条路上走到"像"的，新改法接不上。

这正是本书的承重命题在厨房里的样子：在结构相似度相同的条件下，回写历史不同的两支场结构，门道在其间能搬过去的程度不同。程度属于这片数学之场本身，由回写的历史生成，而且在搬之前就可以先量——量两锅之间沿来历共享了多少连接、次序和结构。怎样量，第 5 章会给出定义。

## 一 娄底话与长沙话

再换一个不用开火的例子：说话。

罗奶奶说娄底话，一禾平时说普通话，可在外婆面前也能说几句娄底话。娄底话和长沙话都属于湘语〔待核：二者在湘语内部的分片归属〕。一个娄底人到长沙，说慢一点，长沙人大体听得懂；反过来也一样。可再往外走，到了说吴语的地方，就不太听得懂了；到了说粤语的地方，更难。

我们看说话里的那一层"连接、次序、结构"：哪些音连在一起成一个词，词按什么先后排成一句，句子搭成什么样子。娄底话和长沙话共享的那一层多，因为它们是从一段共同的来历里一路分出来的，分得不算太早；它们和吴语、粤语共享的那一层少，因为要往前追到更早才碰得上头。

这里也有统一性看不见、多元化的统一性量不准的东西。统一性只认"标准话"：说得标准就是，说得不标准就不是。多元化的统一性会说：湘语一套、吴语一套、粤语一套，各有各的标准，彼此并列；就算要比远近，也是拿一张事先定好的语音对照表一项项去量。可一个娄底人去学长沙话快、去学苏州话慢，快和慢的理由，不在对照表上，而在两种话之间那一段一路传下来、一路改过来的来历——语言学家画方言的谱系树，画的正是这一段来历〔待核：汉语方言谱系研究的具体做法〕。

还可以看得更细一点。一禾的普通话和她外婆的娄底话，同一个家里，可隔着一代人的学校、电视、手机。她在外婆面前说娄底话，说着说着就夹进普通话的词，外婆听得懂，可会笑她"洋气"。两代人说话的那一层连法，在一家人的饭桌上一天天回写着：外婆学会了几个一禾的新词，一禾学会了外婆的几句老话。同一性的程度，就在这一来一回里一天天变着。这也是它和评分表的分别：评分表是定好的，来历是活的，一直在写。

### — 数学之场为什么也会这样

红烧肉和方言说的都是日常的事。可本书要说的是数学：数学之场本身，也可以这样成谱系。

回到 4.1。数学是特征纠缠之间的连接、次序、结构。纠缠这一维有一个脾性：它最容易被回写、最容易沉淀、最不容易抹掉。一锅红烧肉做坏了，那一锅倒掉就是了；可这一回做坏的教训，写进了下一回的手法里，一代代沉下去，就成了罗家的味。（地里的土也是落叶和果子一层层回写堆成的，这个例子留给第 5 章细讲。）在 SDE 看来，正因为纠缠最容易堆积，它也最容易长出分类和组合——最容易谱系化。

数学之场既然是纠缠里的一层，它的连法、排法、搭法也会在回写中按谱系沉淀：这一支数学在这个对象上一代代改下来，那一支在那个对象上一代代改下来；两支共享的那一段来历越长，同一的程度越高。作者认为，同一性谱系就源于这片场结构本身的谱系化。

它不是多元化的统一性——不是几本菜谱并排放着、各自满分。它是同一性的不同程度——像一家人的红烧肉，同村相近、同省相似、全国同名而差别很大，远近由一路走来的来历写成。

数学至今几乎还没有往这条路上走。它把自己的场预设成只有一种结构，连多元的那几条路，也是把一种复制成几种，再用一把统一给定的尺子去量程度。为什么至今没走、什么会推着它走，是后面几章的事。这一节只要读者带走一句：同一性可以不是一个开关，也可以不是一张评分表上的分数，而是一段来历的长短。

## ◆ 4.5　三种同一性，三种预测

三种同一性，不只是三种说法。它们对同一件事做出不同的预测，所以可以拿事实来分高下。

还是从厨房说起，仍是构想的场景。拿曾晓岚那个窍门来说——收汁前沿锅边淋一小勺醋，肉更不腻。她想知道，这个窍门教给别人，谁家用得上。

三种同一性会给出三种预判。

**统一性的预判**：红烧肉就是红烧肉。只要是这道菜，窍门要么管用、要么不管用，到哪家都一样。它预测：窍门在罗家管用，到同村老邻居家、到长沙馆子、到上海馆子都同样管用；要是哪家不管用，那一家做的就"不算真正的红烧肉"，或者是少了某个前提，补上前提就好。

**多元化的统一性的预判**：红烧肉分几个菜系，窍门在湘菜那一本谱里管用，在本帮那一本谱里管不管用，另说。若要讲程度，就拿那张评分表：哪家的红烧肉"现在"和罗家的越像，窍门搬过去越管用。它预测：窍门搬过去的程度，跟着评分表上的"像不像"走。

**同一性的不同程度的预判**：窍门搬过去的程度，跟着来历走。和罗家共享来历越长的那一锅，越接得住；"现在"再像，来历不亲，也不一定接得住。它预测：在评分表上"一样像"的两家里，那家和罗家一路传下来的，比那家凑巧变像的，更用得上这个窍门。

三种预判，第一种和第二种在大多数时候都说得过去，它们只在一处分开得最清楚：**两家"现在一样像"，可来历不同**。统一性看不见这两家的分别；多元化的统一性按评分表打出一样的分，预测窍门搬得一样好；只有第三种预测它们会不一样。

这一处，就是本书押上的地方。

把它说回数学，就是本书的承重命题：在静态结构相同的条件下——也就是用现有的各种办法去比两个数学结构"像不像"，比出来一样像——回写历史不同的两支场结构，一条规律从一支搬到另一支，能成立的程度不同。程度属于数学之场本身，由回写的历史生成，而且在搬之前就可以先量。

这里有三个量，后面几章要反复用，这里先打个招呼。一个是"现在像不像"，本书记作 g_结构，用现有的结构比较办法去量；一个是"来历亲不亲"，记作 g，量的是两支场结构沿着回写的历史共享了多少连接、次序和结构；一个是"规律搬过去成立多少"，记作 d，要另外去测，不能拿它来倒推 g。g 怎样严格地定义，第 5 章讲；在数学内部怎样去测，第 9 章给研究设计。

为了看得清楚，把三种同一性并排放一下。这是本章唯一的一张表。

| | 统一性 | 多元化的统一性 | 同一性的不同程度 |
|---|---|---|---|
| 数学之场的样子 | 只有一种结构：一套公理定一种连法与次序 | 几种结构并排，各自内部统一 | 场结构在回写中沉淀成谱系，有亲有疏 |
| 同一性 | 恒为满分 | 系统内尺子统一，系统之间没有亲缘尺子；拓扑斯、Ω-集、量化等式逻辑里真值与相等可有程度 | 有程度：共享的来历越长，越同一 |
| 程度从哪里来 | 不讲程度 | 由事先统一给定的真值对象或度量安排 | 由场的回写历史生成，搬之前就可以先量 |
| 规律的身份 | 普遍为真 | 在系统 X 中为真，或真到某一档 | 在某一支场谱系里成立，越出谱系，成立的程度下降 |
| 厨房里的样子 | 中央厨房的料包 | 几本菜谱并排，外加一张评分表 | 一家人的红烧肉，同村近、同省似、全国同名差得远 |
| 对"现在一样像、来历不同"的预测 | 看不见分别 | 搬得一样好 | 来历亲的那一支搬得更好 |

最后一行，是三种同一性分高下的地方。

本书也要说清楚，自己在什么情况下就错了。粗一点说：如果在控制了"现在像不像"之后，规律搬过去的程度，和来历亲不亲毫无关系——来历亲的、来历疏的，搬得一样好——那么第三种同一性就只是一个好听的说法，本书的承重命题就错了。厨房里也一样：要是曾晓岚那勺醋，教给一路传下来的老邻居和教给凑巧变像的那家馆子，效果完全一样，那一锅红烧肉的"来历"就没有本书说的那份分量。

还有一个更大的局面，也能推翻本书：如果只靠立规矩、签协议，大模型公司和数学界就能长期合作、不再抢题，而数学仍然只有一种场结构——那么本书说"和解要等数学走向场谱系"，也就错了。

这两条，后面几章都会回来。下一章要接着问：程度既然由来历生成，那"来历"到底怎样一层层堆起来？连接、次序、结构，在回写里是怎样沉淀成谱系的？

**带 走 的 话**

- **摸、听、看，每一种感觉里都有完整的差异序列、一层层的显露、拆不开的纠缠；分成三块讲，只是想法里的一刀假想切割。**
- **数学不是站在对象外面的语言，而是纠缠着的特征之间怎样连、怎样排先后、搭成什么样子——作者称之为 E2 之场。**
- **统一性的同一只有满分；多元化的统一性系统内尺子统一、系统之间没有亲缘尺子，它的程度由一个事先给定的真值对象或度量安排；同一性谱系的程度，由场的回写历史生成。**
- **三者在"现在一样像、来历不同"这一处做出不同预测；如果来历亲疏对搬得动多少毫无影响，本书就错了。**

**小　账**

**本章切开的差异：**同一性的三种样子——恒为满分、由统一的尺子安排的程度、由回写历史生成的程度。

**本章的场谱系读数：**统一性与多元化的统一性里，数学之场仍是一种结构（或一种结构的几份并排）；同一性谱系里，场结构成谱系，回写落在一代代改下来的连法与先后上——红烧肉落在锅边，方言落在饭桌上，数学则至今还没让回写落成分叉。

◆

05

第 5 章

# 程度从哪里来：特征纠缠的场结构的谱系化

> **这一章的问题**
>
> 上一章说，同一性可以有"程度"——一家人的红烧肉和同村的红烧肉近，和全国同名的红烧肉远。可这个"程度"到底从哪里来？能不能在还没看结果之前，就把它数出来？

## ◆ 5.1　场的三件事：连接、次序、结构

早上七点，曾晓岚给女儿谭一禾编辫子。（曾晓岚、谭一禾都是本书的构想人物，见前言。）

一禾的头发分成三股：左、中、右。曾晓岚的手先把左股搭过中股，左股就到了中间；再把右股搭过新的中股，右股又到了中间；然后又是左边，又是右边。三股头发轮流往中间走，一节一节，辫子就从后脑勺往下长出来。

这件天天做的小事，里面有三样东西。

第一样是**哪股和哪股碰在一起**。左股搭过中股的那一下，两股头发在那个点上贴住了、压住了。辫子之所以不散，靠的就是这一个个贴住的地方。我们把它叫作**连接**。

第二样是**谁先谁后**。先搭左、再搭右，和先搭右、再搭左，编出来的辫子纹路是反着的。要是一会儿先左一会儿先右，乱着来，辫子编到一半就松了，一节拧着一节。这不是先洗葱还是先洗姜那种无所谓的先后，换了次序，结果真的不同。我们把它叫作**次序**。

第三样是**这些连接、这些先后合起来，成了个什么样子**。一样是三股，可以编成普通的麻花辫，也可以编成从头顶一路往下、边编边加头发的"蜈蚣辫"。两种辫子

用的头发一样多，每一下的手法也差不多，可整体的样子完全两回事。我们把它叫作**结构**。

连接、次序、结构，这就是本书说的"场"的三件事。

为什么叫"场"？因为这三件事不是装在哪一股头发里面的。你单拿出左边那股，看不出它在辫子里是什么位置；单拿出右边那股，也看不出它压着谁、被谁压着。连接、次序、结构，只在三股头发缠在一起的那一片里才有。它弥漫在整根辫子里，像屋里的气氛那样，不在某一个点上，又处处都在。

还要往下说一层。辫子不是编之前就"有"一个结构摆在那里，等手去照着做。曾晓岚的手一动，第一下交叉出来，辫子的头就显出来了；第二下交叉，第一节就显出来了；手一直走，辫子一节一节地往下显。你中途叫停，看见的是半根辫子——那不是一根"不完整的辫子"，而是这一路显露到这一刻的样子。而手的每一个动作，都和一禾头发的粗细、早上有点乱的发尾、曾晓岚赶着七点半出门的那份急缠在一起。换一个人来编，同样是三股、同样是先左后右，编出来的松紧和纹路也不一样。手在走一个个差别，辫子在一层层显出来，手、头发、时间、心思缠成一团——这是同一件事，不是三件事。

现在把这根辫子放到数学上来。

本书的母题说：数学是信息维度（SDE 叫 E2）的场——特征纠缠之间的连接、次序与结构。作者认为，数学就是这个场本身，而不是站在场外面描述它的一套工具。这句话乍一听很抽象，拿辫子一对，就落地了。

数学里的"连接"，是哪些东西被绑在一起讲。比如"加法"和"交换"被绑在一起，就有了"先加谁后加谁结果一样"这件事；"距离"和"三角形两边之和大于第三边"被绑在一起，就有了一大片关于"远近"的推理。绑什么、不绑什么，一开始并不是天定的，是一代代数学家在用的过程里绑起来的。

数学里的"次序"，是谁先立、谁后推。先立了"集合"，再在集合上立"运算"，再在运算上立"规律"——这是一种次序。也可以反过来，先从一堆运算之间的关系出发，再回头问"它们作用在什么上面"——这又是一种次序。两种次序推出来的东西，有时候一样，有时候不一样，就像辫子先左先右编出的纹路是反的。

数学里的"结构"，是这些连接和次序合起来成了个什么样子。同样是"有加法、有乘法"，合起来可以是我们从小学的那种数，也可以是一种"乘法不能随便交换"的怪东西。两样东西用的零件差不多，整体的样子却天差地别。

这三件事，和辫子一样，不在任何一个单独的数学对象里面。单看一个数"5"，你说不出它在一个结构里压着谁、被谁压着；单看一条定理，你也说不出它是先立的还是后推的。连接、次序、结构，是在一大片对象缠在一起的地方才显出来的。这就是"场"。

拿家里墙上的钟试一试，就知道这不是绕口令。

一禾问外婆，灶上那锅老鸭汤什么时候好。罗奶奶说："五点下锅，炖九个钟头。"一禾算了算：五加九，是十四。可钟面上没有十四，只有两点。在课本里，五加九等于十四；在钟面上，五加九等于二。

是"五"变了吗？没有。是"加"变了吗？也不算——都是往前数九格。变的是这一片数缠在一起的方式：课本里的数排成一条无穷长的线，一直往前，没有回头路；钟面上的数围成一个圈，走到十二就接回一。同一个"五"，放进线里，它的邻居是四和六，往前走永远走不回来；放进圈里，它的邻居也是四和六，可走七步就又碰到了它自己。"五"是什么，一大半是由它所在的这一片怎么连、怎么排、成了什么样子决定的。

这就是说"数学是场"的意思：不是先有一个个对象，再用数学去描述它们；而是对象在什么样的连接、次序、结构里，它就显出什么样子。数学写下的，正是这一片缠法本身。

为什么偏偏说是"信息"这一维的场？再看一眼曾晓岚的手。她教一禾自己编时，嘴里念的是一句口诀："左压中，右压中。"这句口诀是一串符号；"先左后右、不能乱"是一条先后的道理，也就是逻辑；"三股、每股一样粗、编到第几节加一缕头发"是数量，也就是数学。三样东西缠在一起，一禾才学得会：光会念口诀不懂先后，编出来是乱的；懂了先后不管粗细，编出来一边粗一边细。符号、逻辑、数学，SDE 叫信息的三种样子（E2 信息三模态）。数学是其中最"硬"的那一种：它把连接、次序、结构收得最紧，紧到可以离开这一根辫子、离开曾晓岚的手，写在纸上传给不认识的人。可收得再紧，它说的还是那一片怎样缠——这就是"数学是信息维度的场"的意思。

还要提醒一句。辫子的连接、次序、结构，我们分开讲是为了说清楚，就像给一张桌子画正视图、侧视图、俯视图——三张图分开画，桌子并没有被拆成三块。曾晓岚手上那一下交叉，同时是一个连接（两股贴住）、一步次序（这一下在上一下之后）、结构的又一节（辫子又长了一截）。数学的场也是这样：一个概念被立起来，同时就是一组新的连接、一个新的先后、结构上新长出的一节。三件事不是三样东西，是同一次缠的三个看法。

那怎么知道哪里有一个"连接"、哪里有一个真要紧的"次序"？辫子给了一个很实在的认法：拆一下试试。曾晓岚编到一半，一禾说头皮紧，她把最上面那一下交叉松开——下面几节立刻跟着松了。这说明那一下是真连着的，下面的都压在它上面。她又试着把一节里"先左后右"改成"先右后左"，纹路就拧了——这说明那个先后是真要紧的。而发尾那几根散头发，抽出来也不碍事，那就不算连接。

这个认法有一个好处：它只看辫子自己——松开这一处，别处跟不跟着变；换一下先后，样子变不变。它不需要先知道"这根辫子明天能不能编出一个新花样"。这一点到 5.3 会变得很要紧：我们数亲缘时，认连接、认次序，只能用这种"看场自己"的办法，不能拿待会儿要检验的东西去认。

数学里也有类似的认法。一个概念里，拿掉某一条要求，后面一大串推理跟着塌，那条要求就是一处真连接；把两个定义的先后对调，后面推出来的东西变了，那就是一个真次序。这些都只看推理本身怎么连、怎么排，不必先知道某条新规律搬不搬得过来。

讲到这里，有人会说：这不就是数学家说的"结构"吗？上个世纪就有一大派人主张，数学研究的就是结构。

这话有一半对。数学里确实早就有很成熟的办法，来刻画两个结构"像不像"：两套理论之间能不能对上号，能对上多少，对上的那部分保不保留原来的推理。本书第 6 章会和这些办法一个一个正面交手。这里先说一句最要紧的区别：那些办法看的是**两根辫子现在的样子**——拿两根编好的辫子并排放着，数它们纹路对得上多少。它们不问这两根辫子**是怎样一代代编出来的**。

而本章要说的"程度"，恰恰藏在后面这件事里。

一禾的辫子是外婆罗秀英教给曾晓岚、曾晓岚又天天编在一禾头上的。邻居家的女孩也编三股辫，可那是她妈妈从网上视频里学的。两根辫子今天放在一起，纹路几乎一样。可要是哪天曾晓岚想出一个新花样——比如在第三节反搭一下，编出一个小结——这个花样搬到外婆的手里，外婆一看就会；搬到邻居妈妈的手里，却可能怎么也编不顺。为什么？两根辫子"现在的样子"明明差不多。

这就是本章要回答的问题：两个场，静态的样子一样，为什么一个规律搬过去成，搬到另一个就不成？程度从哪里来？

答案的方向是：**程度不只在场"现在的样子"里，还在场"是怎样一层层长成这样"的历史里**。下一节我们就来看，这个历史是怎样一层层堆起来的。

## ◆ 5.2 回写：落叶与果子怎样堆成土壤

曾晓岚教书的那所初中，教学楼和食堂之间隔着一块草坪。草坪的设计图上，路是绕着草坪走的，规规矩矩一个直角。

可学生赶着去打饭，谁也不走直角。头一个学期，草坪上斜着出现了几道浅浅的印子。第二个学期，几道印子里有一道被踩得最多，草秃了，露出黄土。到了第二年，那道黄土就成了一条真正的路：没人再踩旁边的草，大家都顺着这条土路走。学校后来干脆在土路上铺了一排石板。

这条路是怎么来的？不是设计出来的，是走出来的。可"走出来"三个字说得太快，里面其实有一个来回。

第一个来回：学生走（一个个脚步，一次次抄近道），草坪上显出了印子。第二个来回：印子显出来以后，后面的人看见印子，就顺着印子走——印子反过来改了后来人走路的方向。第三个来回：大家都顺着走，印子越踩越深，变成了路；路一成形，草就再也长不回去，连学校都只好顺着它铺石板。

每一次走出来的结果，都回头改写了下一次走的起点。SDE 管这叫**回写**。

这条路为什么会被走出来，也可以说得更细一点。一边是设计图上那个规规矩矩的直角——草坪"该有的样子"；一边是学生赶着打饭、一步一步抄近道的那串脚步。两样东西顶着：图上的样子装不下脚下的走法。顶得久了，被推着变形的，是第三样东西——人和这块草坪缠在一起的那一片：哪里踩得动、哪里绕开、先走哪

段后走哪段。这一片一变，又回过头改了另外两样：草坪的样子变了（多了一条土路），后来人的脚步也变了（都顺着土路走）。学校铺石板，不过是把这次回写正式记了一笔。

要是学校当初的办法是在草坪四周拉上栏杆、立块"禁止踩踏"的牌子呢？顶撞被压住了，学生只好绕着走，心里不痛快，可草坪什么也没留下；栏杆哪天一撤，第一天又会有人斜着踩过去。这就是轮回：矛盾一次次冒头，一次次被压回去，起点一直没变。回写和轮回的分别，不在顶撞有多大，而在顶撞有没有被给一个出口、出口里走出来的东西有没有留下来。

回写的要紧之处，不在于"走了很多次"，而在于**结果留下来了，并且改了起点**。要是每天晚上有人把草坪重新铺平，学生走一万次，草坪上也只有一天的浅印子，第二天早上又从头开始。那叫轮回，不叫回写。

那么，回写最容易落在哪里？

这条路给了一个很直白的答案。学生的步子，走完就没了；他们那天赶着打饭的那股急，吃完饭也就散了。真正留下来的，是**草坪本身被改了**：哪里秃、哪里有草，哪里硬、哪里软，哪一块和食堂门口连着、哪一块被人绕开了。人和草坪之间那一大片缠法——谁跟谁连着、先走哪段后走哪段、整体成了个什么走法——被一层一层压进了地里。

作者认为，这正是纠缠（E）的特点：在显露、差异序列、纠缠三者之中，纠缠最容易被回写、最容易沉淀、最不容易抹去。作者打过一个比方：土壤是树的落叶、果子一层层回写堆成的；土壤、树、果子三样东西里，土壤最复杂。一块土通常只长一种树，回写进去的那部分，就带着同一个来历。

落叶落下，果子烂掉，树上看不见了，可土里留着。下一季的树根扎下去，碰到的已经不是去年的土。土又改了树，树又落叶给土。一来一回，土越堆越厚，越堆越有"脾气"——这块地种什么好、那块地种什么不好，说不出一条整齐的道理，却实实在在在那里。

现在回到数学的场。

数学的连接、次序、结构，也是这样一层层回写出来的。

一个概念最初往往是为了解一道具体的题，被临时绑在一起的。解完了，这个绑法留了下来，后面的人就顺着它想问题。顺着想多了，有人发现这个绑法在别处也能用，就把它从原来那道题里抽出来，单独立成一个概念。立起来以后，再往下的推理就都从它出发了——就像学生不再踩草，都顺着土路走。有时候顺着走，走到某处碰了壁：一个反例冒出来，说这个绑法在这里不成立。共同体不得不回头改：要么把概念收窄，要么把它分成两支，各走各的。这一改，又压进了场里。具体到哪一个数学概念是这样一步步派生出来的，第 9 章另作研究设计，这里不举未经核对的史例。

不妨再回到草坪，看看回写有几种样子。

第一种是**加深**：原来那条斜路，越走越实，边上的草越退越远。路还是那一条，只是更稳了。

第二种是**分叉**：第三年，学校在教学楼侧面开了一个小门，去小卖部的学生从小门出来，斜着插到原来那条路上。草坪上于是从主路中段长出一条支路。支路的后半截和主路是同一条，前半截是新踩的。

第三种是**合流**：两条从不同楼门出来的小路，走着走着在草坪中间汇成一条，一起通到食堂。

三种样子都会留下痕迹，可痕迹不一样深。加深只是把已有的路压得更实；合流是两条路并成一条，并起来以后，往往分不清哪一段原来属于哪一条；只有分叉，会在地上清清楚楚留下一个岔口——岔口以前是一条路，岔口以后是两条。站在岔口上回头看，你能指着说：从这里往回，我们走的是同一段。

这三种样子，数学里也都有。一个概念被反复使用、越用越稳，是加深；一个概念碰了壁，被逼着分成两支、各管一片，是分叉；两条原本各走各的思路，在某个问题上碰到一起、合成一个新概念，是合流。本章后面数 g，主要盯住的是分叉：分叉之前两支共走的那一段，就是它们的共同来历。

还要说一句为什么回写会带来"同一性"。一块土通常只长一种树——不是因为土里写着"只许长这种树"，而是因为这块土是那一种树的落叶一年年回写堆起来的：它的松紧、酸碱、里面住着的小虫，都带着同一个来历。从同一段回写里长出来的东西，天然带着相同的连接、相同的先后、相同的走法。主路和小卖部支路共有的那

后半截，就是它们"同一"的地方；共有的越长，同一的程度越高。同一性在这里不是一个"是或不是"的标签，而是一段共走过的路有多长。

这也就回答了为什么说纠缠最容易被回写。走路的人（差异序列）会走掉，路的样子（显露）可以被重新铺过；可人和草坪缠成的那一片——哪里被踩实、哪里留了缝——一旦压进地里，就很难抹平。即使把路铺成石板，石板下面那一层被踩实的土，下一场大雨后还会让石板往那个方向沉。

回写要留下来，得有地方压。草坪的回写压在土里；红烧肉的回写压在一家人的手上、锅上、舌头上，压在罗奶奶那句"焯了水才不腻"的口头话上；数学的回写压在哪里？压在教科书先讲什么后讲什么里，压在一个记号被大家默认怎么写里，压在一个定义为什么要多加那一句限制里，今天也越来越多地压在形式化的数学库里——哪个定义从哪个定义引出来，哪条引理引用了哪条引理，一笔一笔都记着。压的地方越牢，回写越不容易丢，场的历史也越数得清。

还有一件事要先交代：回写是谁写的？草坪上的路，是一届届学生的脚写的，也是学校后来那排石板写的；数学之场的回写，过去是一代代数学家写的，今天越来越多是人和 AI 一起写的。陶哲轩用两天和聊天机器人一起消化雅可比反例，消化完留下来的理解，就是一次回写；写下它的，不是单独的人，也不是单独的机器，而是一个人带着工具、带着文献、带着同行的复合主体。本书把这种一起干活的整体叫作复合主体，第 8 章专门讲它怎样成为回写的生成者。这里只需要记住：本章说的"回写代际"，数的就是这样的复合主体一次次把果子压进场里的轮次，不是日历上的年头。

所以数学之场今天的样子，和那块草坪一样，是一部压缩的历史。哪些连接是很早就绑上、后来一直没动过的；哪些次序是在某次碰壁以后才改过来的；哪些结构是从一支里分出来、另立门户的——这些都写在场里，只是平时我们只看"现在的路"，不看"路是怎么踩出来的"。

这里要特别分清两件事：**回写的历史**和**今天的样子**。

两块草坪，今天的路可能长得一模一样：都是一条斜线，从教学楼直通食堂。可一块是学生自己踩出来的，另一块是设计师照着第一块的照片直接铺的石板。今天站在路上看，两条路分不出来。可要是明年食堂换了个门，挪到草坪另一头去，第一块草坪上会很快出现新的印子，旧路慢慢荒掉，新路一点点踩出来——因为这

块地本来就是被人走着改的，它"认"这种改法。第二块草坪上，石板是铺死的，草是围着石板种的，人们会别别扭扭地继续走石板路，或者干脆踩坏一片草，乱成一团。

同样的样子，不同的来历，碰到同一个新情况，反应不一样。

这一点放到数学上，就是本章的骨头：**两个场结构，今天的连接、次序、结构可以看起来一样，可它们是沿着不同的回写历史长成的；一条规律从一个搬到另一个时，搬得成不成、成到几分，跟着的是历史，而不只是今天的样子。**

为什么历史会起作用？因为回写不只留下了"结果"，也留下了"怎么被改过"的痕迹。一个被反例逼着收窄过的概念，和一个一开始就定义得很窄的概念，今天字面上可能一模一样；可前者带着"在哪儿碰过壁、往哪边收的"那一层，后者没有。新规律搬过来，碰到前者，常常能顺着当年收窄的那条缝走；碰到后者，就没有这条缝可走。

草坪上也看得见这条缝。踩出来的那条土路，路边的草不是一刀切齐的：常有人在拐弯处多踩一脚，那里的土就宽出一块，下雨后积一小汪水，大家又学会了在那儿往外绕半步。这些宽出一块、绕半步的地方，图纸上没有，照片上也看不清，可它们记着这块地被怎样改过。新来的走法碰上这些地方，顺着就过去了。

当然，这只是一个判断，还没有被测过。说"历史起作用"，必须说得出在什么情况下它不起作用——也就是要能被推翻。要能被推翻，先得能数。

所以下一节要做一件看起来很笨、其实最要紧的事：把"历史上的亲缘"一步一步数出来，而且数的时候，**不许偷看规律搬过去成没成**。

## ◆ 5.3　g 的定义：回写派生树上的共同祖先深度

数东西，最好从一锅肉开始。

第 4 章已经把罗秀英奶奶的红烧肉摆上了桌。这一节不再讲它香不香，而是拿它当一个演示：怎样把"两锅肉在历史上有多亲"一步一步数出来。下面的家族史是**一个构想的场景**，只为演示计数，不代表任何真实人家。

### 一 第一步：只画回写，不画别的

先拿一张纸，画一棵树。树上每一个点，是一种做法；从一个点往下长出一个新点，只在一种情况下才画：**某一代人做出来的结果，回头逼着做法改了**。

罗奶奶的红烧肉，是跟她母亲学的。母亲的做法就是树根，记作"第 0 代"。

罗奶奶刚学时，照母亲的做法做，肉总是偏腻。她在纺织厂上三班倒，下班累，吃不下太腻的，就在下肉前先把肉焯一遍水、撇掉浮沫。这一改，是结果（太腻）回头改了做法（加焯水），树上长出"第 1 代"。

后来她发现焯过水的肉不容易上色，就改成先把冰糖炒成糖色、再下肉翻炒。这又是结果（色浅）回头改了做法（先炒糖色），长出"第 2 代"。

到这一代为止，罗奶奶家的做法是一条直线：第 0 代 → 第 1 代 → 第 2 代。

然后，树开始分叉。

一支是女儿曾晓岚。她成家以后，一禾小时候不爱吃甜，她就把冰糖减了一半，又因为家里用的是电磁炉、火力不稳，把"大火收汁"改成"开盖小火慢收"。这是"第 3 代甲"，挂在第 2 代下面。

另一支是罗奶奶的老同事。九十年代，她在厂里跟罗奶奶学过一回，学的正是第 1 代的做法——那时罗奶奶还没想到先炒糖色。她回家后发现颜色浅，自己想的办法是多加一勺老抽。这是"第 2 代乙"，挂在**第 1 代**下面，不挂在第 2 代下面。

这样，树就有了两根枝：一根从第 2 代分出去，一根从第 1 代分出去。

注意画树的规矩：**只有回写才长新点**。某一天罗奶奶手抖多放了一点盐，下一次又照原样放，这不算新点——结果没有回头改做法。某一天曾晓岚换了个牌子的酱油，味道差不多，也没因此改别的，这也不算。某一回肉做得特别好，一家人都夸，下一回照原样做，这也不长新点——结果只是印证了原来的做法，没有逼它改。只有"做出来的结果逼着做法改了，而且改了以后留下来了"，才画一个新点。这就是我们叫它"回写派生树"的原因：树上的每一根枝，都是一次回写长出来的。

还有一条规矩：**代是按回写数的，不是按年头数的，也不是按人数数的。** 一代，就是一次完整的回写：被结果逼着改了一回，并且沉淀进了做法。 罗奶奶从五十多岁到七十一岁，二十来年做法没再改过，这二十年在树上一个新点也不长。反过来，曾晓岚刚换电磁炉那一个月，连改了两回——先改火候、发现收不干，又改

成开盖收汁——要是两回都留下来了，就长两个点。树记的不是"过了多久"，而是"被结果逼着改了几回"。一锅肉做了五十年，和一锅肉被改了五回，是两件不同的事；g 只认后一件。

### — 第二步：每个点登记三张单子

树画好了，给每一个点登记三张单子，对应场的三件事。

**连接单**：这一代做法里，哪些东西被绑在一起管。比如第 1 代多了一条"焯水"和"去腻"绑在一起；第 2 代多了一条"糖色"和"上色"绑在一起；第 3 代甲多了一条"火力不稳"和"开盖收汁"绑在一起。

**次序单**：这一代做法里，哪些先后是真要紧的——换了次序，结果会变。比如"先焯水，再下锅"；"先炒糖色，再下肉"；"先收汁，再放葱"。先洗葱还是先切姜这种换了也一样的先后，不登记。

**结构单**：这些连接和次序合起来，成了个什么"走法"。比如第 2 代的整体走法是"焯—炒糖—翻—炖—收"；第 2 代乙的整体走法是"焯—翻—加老抽—炖—收"。

单子上写的，都是**当时那一代人为什么改、改了什么**。这些从哪里来？从做法本身、从家里人记得的改动来由、从当年留下的纸条或者口头传下来的说法来。这一点后面讲防循环时还要回来。

### — 第三步：找两根枝的最近共同祖先

现在要比的是：曾晓岚这一支（第 3 代甲）和老同事这一支（第 2 代乙），在历史上有多亲。

顺着树往上找。曾晓岚这一支往上是第 2 代、第 1 代、第 0 代；老同事这一支往上是第 1 代、第 0 代。两条线最后一次走在一起，是在**第 1 代**。第 1 代就是它们的最近共同祖先。

再拿曾晓岚这一支和罗奶奶自己现在的做法（第 2 代）比。往上找，两条线一直走到第 2 代都在一起——第 2 代本身就是它们的最近共同祖先。

### — 第四步：沿着回写的代际，数共同的部分

到这一步才开始数。

先粗估一下：从树根数到最近共同祖先，一共经过了几代回写。曾晓岚和罗奶奶，共同走过了第 0、1、2 代，共同的回写有两次（0 到 1、1 到 2）；曾晓岚和老同事，只共同走过第 0、1 代，共同的回写只有一次（0 到 1）。前者比后者"深"。这只是快速的近似。

正式的数法：不只数代数，还要数**每一代回写进来、到今天两边都还留着的条目**。从第 0 代起，把每一代的连接单、次序单、结构单上新添的条目列出来，看这些条目在两根枝的今天是不是都还在。

曾晓岚和罗奶奶之间：第 0 代传下来的"肉要切方块""要小火炖"，两边都在；第 1 代添的"焯水去腻""先焯后下锅"，两边都在；第 2 代添的"糖色上色""先炒糖色后下肉"，两边都在（曾晓岚只是减了糖，没有去掉炒糖色这一步）。共同保有的条目多，而且跨了两代。

曾晓岚和老同事之间：第 0 代、第 1 代的条目两边都在；但第 2 代那一层，曾晓岚有"糖色上色"，老同事走的是"老抽上色"——这一层不是共同祖先的，不算进去。共同保有的条目少一截，只跨一代。

数到这里，会有一个细处要定："两边都还保有"怎么判？曾晓岚把冰糖减了一半，"炒糖色上色"这一条，她算不算还保有？

判法是看连接和次序，不看分量。"糖色"和"上色"仍然绑在一起，"先炒糖色、后下肉"这个先后也没变，那这一条就算保有——减糖只是量变了，没有把这处连接拆开。反过来，老同事用老抽上色，"上色"还在，可它绑的已经不是糖色，连接换了一根线，这一条就不算保有。同样，要是有一天曾晓岚图省事，改成先下肉、再撒糖进去一起炒，先后一换，就算"先炒糖色后下肉"这一处次序没保住，哪怕锅里照样有糖。

这个判法和 5.1 里认连接、认次序的办法是同一个：拆一下、换一下，看场自己跟着变不变。它不问这锅肉好不好吃，也不问醋淋下去成不成。

这个"沿着回写代际、数共同祖先传下来而两边都还保有的连接、次序、结构"的数，就是本书说的 **g**。g 大，两支在历史上近；g 小，两支在历史上远。

本书给 g 的统一说法是：**两个场结构在回写派生树上的共同祖先深度——沿回写代际计数它们共享的连接、次序、结构，不看任何规律的迁移结果**。

数完了，可以拿三件常识检查一下数得对不对。第一，一锅肉和它自己比，g 应当最大——自己和自己共走过全部的路。第二，曾晓岚比老同事，和老同事比曾晓岚，g 应当一样——共同的路不分谁先问。第三，一支和自己的"晚辈"比，g 应当随着晚辈往下长而不再增加——一禾将来要是从曾晓岚这里学去、又改了两回，她和罗奶奶的 g，不会比曾晓岚和罗奶奶的更大，因为她和罗奶奶共走的那一段，最多也就是曾晓岚和罗奶奶共走的那一段。这三条要是数出来不对，先查单子，别急着下结论。

本书数 g，以上面那个正式的数法为准：沿回写代际，数共同祖先传下、两边今天都还保有的条目。只数共同走过几代的粗估，可以拿来快速比一比，但不能代替它。真正用的时候，怎样给不同的条目分轻重，要在具体研究里事先定好（第 9–12 章各有研究设计）。但不管选哪种，有一条不能动：**数 g 的时候，不许看规律搬过去成没成。**

### 一 第五步：把"搬得成不成"另外测

那"规律搬过去成不成"在哪里出现？在另一张纸上。

比如曾晓岚最近摸出一个小窍门：收汁前沿锅边淋一小勺醋，肉吃起来不那么腻，还更香。这是一条"规律"。它搬到罗奶奶的锅里，成不成？搬到老同事的锅里，成不成？成到几分？

这要另外去试：让两家各照自己的做法、加上这一勺醋做几回，家里人尝，记下来。这个"成到几分"的数，本书记作 **d**——规律从一支迁移到另一支的成立程度。

g 和 d 是两张纸上的两个数。g 是先数的，只看历史；d 是后测的，只看迁移。本书要问的，就是这两张纸放在一起时，是不是对得上。

把五步收在一张表里，便于对照（这是本章唯一的一张表）：

| 步骤 | 做什么 | 红烧肉里的样子 | 不许做什么 |
| --- | --- | --- | --- |
| 一、画树 | 只在"结果逼着做法改了、并留下来"时长新点 | 焯水、炒糖色、减糖、加老抽 | 不把一次手抖、换酱油牌子算成新点 |
| 二、登记 | 每个点记连接、次序、结构三张单子 | "焯水一去腻"；"先炒糖色后下肉" | 不登记换了次序也一样的先后 |

| 步骤 | 做什么 | 红烧肉里的样子 | 不许做什么 |
| --- | --- | --- | --- |
| 三、找祖先 | 顺树往上，找两枝最后一次走在一起的点 | 曾晓岚与老同事交于第 1 代 | 不按今天做法像不像去"认"祖先 |
| 四、数 g | 沿回写代际，数共同祖先传下、两边今天都还保有的条目 | 曾晓岚与罗奶奶深，与老同事浅 | 不看任何规律搬过去成没成 |
| 五、测 d | 另找人、另一张纸，测规律迁移成到几分 | 收汁前淋醋，两家各做各尝 | 不在 d 测出之前拆开 g |

### 两个麻烦：合流与缺档

真去数的时候，会碰到两个麻烦，先说清楚怎么办。

第一个麻烦是**合流**。曾晓岚嫁过来以后，婆家做红烧肉有一步"出锅前撒一把炒香的花生碎"，她觉得一禾爱吃，就学了过来。这样，她那一支除了从罗奶奶的树上长下来，还有一根线接到了婆家那棵树上。树不再是一棵干净的树，有点像一张网。

办法是：每一个条目都记上**从哪一根线来**。"花生碎"这一条，来历在婆家那棵树上，不在罗奶奶的树上；拿曾晓岚和罗奶奶比 g 时，它不算共同祖先传下的条目；拿曾晓岚和婆家比时，它才算。条目各归各的来处，网也就数得清了。

第二个麻烦是**缺档**。罗奶奶记得自己为什么加焯水，可她母亲那一代为什么要小火炖，没人说得清了。回写的来由丢了，只剩下做法本身。

办法是：缺档的那一层，只记"有这一条"，不记"为什么改"，并且在单子上标明"来由缺档"。g 照数，但要附上一句：这一层的数不太稳。用到研究里，就是要报出 g 的误差范围；缺档越多，误差越大，用它去和 d 对照时就越要小心。数学里的情况其实比红烧肉好得多：形式化的数学库，每一个定义、每一条引理是从哪里引出来的，大多有记录可查——这正是第 9 章选择先在数学内部测的原因之一。

### 防循环：不许拿要检验的规律去认连接与次序

这里有一个陷阱，必须先堵上。

假如数 g 的人心里早就知道"醋在罗奶奶的锅里很成"，他在登记连接单时，会不会不知不觉地把"去腻"这一项看得特别重，把它和"醋"沾上边，结果 g 就被他"数"得

和 d 对上了？会的。那样一来，g 和 d 对得再好，也只是把同一个答案抄了两遍，什么也证明不了。

所以数 g 有三条规矩。

**第一条，单子只从回写记录里来。** 连接、次序、结构，登记的是每一代当时为什么改、改了什么——"太腻所以焯水""色浅所以炒糖色"。这些是在醋这条窍门出现之前就已经发生了的事。不许事后根据"醋成不成"去补一条、删一条。

**第二条，要检验的那条规律，和它直接牵涉的条目，不进 g 的单子。** 醋这条窍门本身，以及"收汁前加东西"这一类只为它而存在的条目，在数 g 时一律拿掉。g 只能用和它无关的历史去数。

**第三条，数 g 的人和测 d 的人分开，先数、先封存。** 数 g 的人不知道 d 的结果；g 的数字写好、封进信封，d 测完以后才拆。数学研究里，这对应的是：先从形式库的概念派生记录里把 g 算好、存档，再去测引理跨结构复用的成功率（第 9 章是这样设计的）。

守住这三条，g 和 d 才是两个独立的数。它们要是对得上，才算说明了点什么；对不上，命题就错了。

讲到这里，读者也许已经发现，这锅肉还藏着一个更麻烦的问题：要是有两锅肉，今天的做法写在纸上一模一样，可历史完全不同，那该怎么算？这就是下一节——全书最承重的一节。

## ◆ 5.4 结构相同而历史不同：本书的承重预测

曾晓岚的表弟林知远，在外地读完博士，做 Lean 形式化的博士后。（林知远是本书构想人物。）他一个人住，想家的时候就想吃一口家乡的红烧肉。

他没跟罗奶奶学过。去年过年，他在手机上找了个讲湘式红烧肉的视频，照着做。视频里的做法是：肉切方块，焯水，炒糖色，下肉翻炒，加料小火炖，最后收汁。他做了几回，越做越顺。

这是一个构想的场景。我们把林知远这一锅和曾晓岚那一锅并排放着。

两份做法写在纸上，几乎一样：都焯水，都炒糖色，都是先焯后炒、先炒糖色后下肉，整体走法都是"焯—炒糖—翻—炖—收"。如果有一个人只拿着两张做法单比对，问"这两锅有多像"，他会说：很像，几乎一样。

这个"只看今天的做法单、比两边有多像"的数，本书另记为 **g_结构**——静态结构相似度。它不问历史，只问此刻的连接、次序、结构对得上多少。

那么，这两锅肉的 g 是多少？

林知远的做法，和罗奶奶家那棵树没有一点历史联系。视频作者的做法是从哪一棵树上长出来的，我们不知道，但肯定不是罗奶奶家那一棵。两根枝在罗奶奶家的回写派生树上找不到共同祖先——或者说，要往上追到很远很远、远到"湖南人都这么做红烧肉"那一层，才勉强碰头。所以，曾晓岚和林知远之间，g_结构 很高，g 很低。

而曾晓岚和罗奶奶之间，g_结构 也很高（做法单也差不多），g 也很高（共同走过两代回写）。

现在把曾晓岚那条醋的窍门拿出来，分别搬进罗奶奶的锅和林知远的锅。

本书的预测是：**搬进罗奶奶的锅，成得多；搬进林知远的锅，成得少。** 尽管罗奶奶和林知远的做法单，和曾晓岚的做法单比，像的程度差不多。

为什么会这样？日常的道理并不难想。曾晓岚的醋，是在她这一支的历史里摸出来的：她减过糖，改过开盖小火收汁，她家的锅、她家的火、她家的人对"腻"的那份在意，都是一层层压进这锅肉里的。罗奶奶的锅和她共有前两代——"焯水是为了去腻"这一层，是罗奶奶亲手回写进去的；醋来接"去腻"这条缝，顺着走就进去了。林知远的焯水，是照视频做的一个步骤，他不知道这一步当年是为了什么改出来的，他的锅里没有"腻"这条缝，醋淋下去，可能只是酸。

这里要把话说准：上面是一个**预测**，不是一个结果。我们没有真的做过这个试验，也没有数据。它是一个能被推翻的说法：真去试了，要是醋在两家锅里成得一样，这一节就说错了。

把这锅肉的道理提到全书的高度，就是本书的承重命题：

> **在静态结构相同的条件下（制度论、理论态射或结构映射意义上的结构相似度相同），回写历史不同的两支场结构，规律在其间的迁移程度不同。程度属于数学之场本身，由回写历史生成，先于迁移结果即可测。**

换成三个记号：**控制 g_结构 相同时，d 随 g 变化**。

### – 为什么已有的结构模型预测不出它

这个预测要有分量，就得说清楚：已有的好办法，为什么不会给出同样的预测。

数学和认知科学里，有好几套很成熟的办法来回答"一个东西能不能从这里搬到那里"。第 6 章会逐一正面交手，这里只说它们共同的一点。

一套是**制度论**（Goguen 和 Burstall 那一路的办法，第 6 章详谈）。它把一套套理论看作对象，看两套理论之间有没有一种保持推理的对应——数学上叫"态射"。有态射，就能把这一套里的结论翻译到那一套里去。它很强，强在把"能不能翻译过去"说得严丝合缝。可它看的是两套理论此刻的样子：态射在不在，是由两套理论今天的定义决定的。

一套是**结构映射**（Gentner 那一路研究类比的办法）。人做类比时，不是看两样东西表面像不像，而是看它们内部的关系能不能一一对上，对上的关系越成体系，类比越好。它也很强，强在看见了"关系对得上"比"长得像"更要紧。可它比的也是两边此刻的关系网。

还有一套是**可迁移性**的结构模型（Pearl 和 Bareinboim 那一路）。它要回答：在一处得出的因果结论，能不能搬到另一处去用。它画一张图，标出两处在哪些环节上可能不同，再按规则判断哪些结论搬得过去。这张图本身就是结构，不是简单的"数据离得远不远"，这一点要说公道。可这张图同样是两处此刻的样子；两处是怎样一代代长成这样的，并不是图的输入。

三套办法各有各的高明，但有一点相同：**它们的输入是两边此刻的结构，历史不是输入**。

输入相同，输出就相同。曾晓岚和罗奶奶、曾晓岚和林知远——只要两对做法单此刻对得上的程度一样，这三套办法给出的"搬不搬得过去"就一样。它们不会说一个搬得多、一个搬得少，因为它们手里没有能把这两对分开的东西。

本书的预测，恰好落在它们分不开的地方：g_结构 一样，g 不一样，看 d 跟着谁走。如果 d 跟着 g 走，说明在这些办法看不见的地方，还有一样东西在起作用——那就是场的回写历史。如果 d 不跟着 g 走，只跟着 g_结构 走，那就说明这些办法已经够了，本书这一步多余。

这就是承重预测要做的事：在最强的对手都给出"一样"的地方，说"不一样"，并且把怎样分出胜负写清楚。

那么，输了是什么样子？这要事先讲明，免得事后找补。假如真去测了，挑出许多对 g_结构 相同的场结构，有的 g 高、有的 g 低，结果 d 的高低和 g 怎么排都对不上——亲缘近的不见得搬得好，亲缘远的也不见得搬得差——那么本书的承重命题就错了。不能事后改口说"那是 g 没数对"，因为数 g 的规矩是先定好、先封存的；也不能说"那几对不算"，因为挑哪几对也是先定好的。命题押在这里，就让它在这里接受检验。

### — 对手最强的反驳

最强的对手不会认输，会这样说："你说的'历史'，其实是你的做法单记得不全。林知远的锅里没有'腻'这条缝——那就是今天的结构不一样嘛。你把今天的结构记全了，g_结构 就不一样了，历史根本用不着。"

这个反驳很有力，要正面接。

第一，本书的预测说的是"在已有最好的静态度量下 g_结构 相同"。制度论、结构映射、可迁移性的图，就是今天最好的静态度量。在它们都说"一样"的地方，g 还能分出 d 的高低，这本身就是一个有内容的结果。

第二，对手说"记全了就不用历史"，可"记全"本身从哪里来？那一条"缝"，恰恰是在回写里留下的；不顺着历史去找，往往根本不知道该记什么。历史在这里不是可有可无的拐杖，而是找到那条缝的路。

第三，这里要老实承认：如果将来有人找到一种更细的静态度量，能把 g 能分出的差别全部吸收掉，而且不用借历史就能事先算出来，那么本书的强说法——"程

度由回写历史生成"——就要退一步，只剩下"历史是找到结构的捷径"这个弱说法。这是本书留给对手的一条正当的赢路。命题能被推翻，才有分量。

## — 四个格子，各家怎么押

把 g_结构 和 g 各分高低，可以排出四种两两相比的情形。四种情形里，各家的预测不一样，不妨一格一格看。

**结构像、历史也近**：曾晓岚和罗奶奶。所有办法都预测 d 高，本书也预测 d 高。这一格分不出胜负。

**结构不像、历史也远**：曾晓岚和一位做广式叉烧肉的师傅。所有办法都预测 d 低，本书也一样。这一格也分不出胜负。

**结构像、历史远**：曾晓岚和林知远。结构的办法预测 d 高，因为做法单对得上；本书预测 d 不如上面第一格高。这是承重的一格。

**结构没那么像、历史却近**：曾晓岚和老同事那一支。老同事用老抽代替了糖色，今天的做法单和曾晓岚的差了一截，g_结构 比林知远那一对还低；可她和曾晓岚共有第 0、1 两代的回写，"焯水为了去腻"这条缝她家锅里是有的。结构的办法预测这一对的 d 比林知远那一对低；本书则预测：醋在老同事锅里不一定比在林知远锅里差，甚至可能更好。这一格是承重一格的镜子：如果承重那一格成立，这一格大概也会显出同样的方向。

真正分胜负的，是后两格。前两格只是让大家都放心：本书没有在显而易见的地方另唱反调。

## — "先于迁移结果即可测"是什么意思

承重命题里有半句容易被读轻："先于迁移结果即可测"。

意思是：g 不用等醋淋下去再算。曾晓岚还没摸出醋这个窍门的时候，罗奶奶家那棵树就已经在那里了，g 就已经数得出来了。等她摸出了窍门，我们不用一家一家去试，就可以先说：这条窍门在罗奶奶锅里大概比在林知远锅里成得好。

这半句之所以要紧，是因为它把"程度"从一个事后的读数，变成了一个事前的判断。事后的读数，人人会读：试了，成了，说"它们像"；试了，不成，说"它们不

像"——这样的"像"永远对，也永远什么都没说。事前的判断不一样：它先押了，再看对不对。

放到 AI 身上，这半句就有了很实在的用处。AI 一夜之间能证出成百上千条引理，要是每一条都拿到每一种结构里去试一遍能不能复用，算力再便宜也是白费。要是 g 真能事先指路，那就可以先按 g 排个队：亲缘近的先试，亲缘远的后试，亲缘远到某个程度的，先交给人看一看是不是该另立一支。这是第 13 章要写的事，这里只指出它从哪里来——从"先数 g、后测 d"这一个顺序里来。

### — 放回数学

红烧肉只是演示。本书真正要测的，是数学之场本身。

研究设计大致是这样的（第 9 章详述，这里不给任何结果）：在一个形式化的数学库里，挑几种代数结构。先用静态的办法，给每两种结构算一个 g_结构——比如两者的公理和定义之间能不能对上、对上多少。再从库里的概念派生记录（哪个概念是从哪个概念、为了解决什么问题改出来的）里，按上一节的规矩算 g，算好封存。然后挑出 g_结构　差不多、g 却差得多的几对，去测：一条在甲结构里证过的引理，拿到乙结构里能不能复用、复用的成功率多高——这就是 d。

如果 g_结构　　相同时，d 随 g 变，本书的命题站住了一步；如果 d 和 g 毫无关系，命题就错了。这是对赌，不是自说自话。

下一节要问一个更大的问题：既然程度藏在场的回写历史里，为什么数学至今几乎从不讲这种程度？

## ◆ 5.5　伞模型，以及为何数学至今是场的统一性最大化

一个下雨的傍晚，谭一禾放学，和同桌合撑一把伞往公交站走。

伞不大。两个人肩挨着肩，伞往哪边歪一点，哪边的人就少淋一点。伞下面那一小块干地方，是两个人一起占着的；走到公交站，同桌往左上车，一禾往右走，那一小块干地方也就散了。

这把伞有两个很朴素的数：一个是**伞面有多大**——伞的半径；一个是**伞下罩住了谁、罩住了多远**——两个人，还是一个半；肩膀以下，还是连书包都护住了。两个数一起，定下了"在这把伞下面"是什么意思。

作者认为，伞模型把特征纠缠做了非局域化处理，引入了半径与纠缠范围。这句话我们只按作者的原意转述，不替它补细节。用日常话来说，大意是：纠缠不是一个点上的事，它像一把撑开的伞，有一个罩得住的范围；在范围里的东西缠着，出了范围就不缠了，而范围有大小、有边缘。

这对本章有什么用?

前面几节讲的 g，说的是两支场结构在历史上有多亲。伞模型提醒我们另一件事：**亲缘不只是"有没有"，还有"罩多远"**。 一禾和同桌在一把伞下，是缠着的；走散了，就不缠了；走在伞边上，半干半湿，是缠着一半。纠缠有范围，范围有边，边上是渐变的。

这和数学里通常的做法很不一样。数学里，一条定理要么在某个结构里成立，要么不成立；一个对象要么属于这个集合，要么不属于。成立就是全部成立，不成立就是一点也不成立。这是"一点上"的看法：每一处都是一个清清楚楚的点，点和点之间没有"罩着一半"。

说句公道话，数学并不是完全没有"程度"。有些数学分支让真值可以取很多值，让"相等"也可以有程度，第 6 章会仔细讲，不能把它们说成"只有对和错两种"。可即使在那里，程度也是由一把事先给定的尺子统一安排的：先定好一套真值、一个度量，再往每一处去量。尺子是一把，是事先定的，不是从每一支场结构自己的历史里长出来的。

伞模型的意思不同：罩多远，看这把伞撑开的方式；而撑开的方式，是走出来的。这正接上了 5.2 和 5.3：场的范围和边缘，是回写一层层压出来的；两支场结构在同一把"伞"下罩得有多深，就是 g 要数的东西。伞模型在九宫里属于"显露为场态"的那一格——连接、次序、结构弥漫成场，程度沿谱系连续。这一格到今天只有零星的发生，伞模型就是那零星之一。

那么，为什么数学至今几乎不讲这种程度?

作者的说法很直接：数学是最大程度的 E 统一性。用本章的话讲，就是数学预设了自己的场只有一种结构——一套公理定下一种连接、一种次序，然后把它推向对一切对象都成立。

这个预设不是哪个人的错，它本身有很长的来历，而且非常成功。

先看它为什么成功。一种场结构，意味着所有人在同一套连接和次序里推理。这样一来，一个人在北京证的定理，另一个人在巴黎可以直接接着用，不用先问"你那一支和我这一支亲不亲"。规矩简单：对就是对，错就是错。检查也简单：一步一步核对推理就行。方程理论项目用自动定理证明器，处理 4694 条等式律之间约 2200 万对蕴含关系——每一对都只问"蕴含还是不蕴含"，答一个是或否。这是在一种场结构里把二值测绘做到了极致。数学的统一性，给了人类最可靠、最好传递的一种知识。

数学的统一性，甚至能把自己的分叉也收编进去。几何就是一个例子。两千年里，人们一直以为过直线外一点只能画一条平行线；后来有人发现，换一种说法，也能推出一整套自洽的几何——这是历史上一次真正的分叉，本书第 7 章还会说到。可分叉之后，数学界并没有因此说"几何的场长出了两支，亲缘有远近"，而是后来找到办法，把几种几何都看成同一套更大框架里的不同"模型"，各自内部照样是对就是对、错就是错。几种结构并列摆着，每一种内部是满值的同一，彼此之间不讲亲缘——这正是第 4 章说的"多元化的统一性"。分叉发生了，回写也发生了，可记账的方式没变：账本上还是只有"成立"和"不成立"，没有"这两支共走过多长一段路"。

再看它为什么停在这里。场被预设成只有一种结构，那么 g 这个东西就根本不会被想起来：所有对象都在同一个场里，它们之间的"历史亲缘"恒等于一个满值，谈不上程度。回写当然也在发生——概念被改、被收窄、被分成两支——可每一次回写的结果，都被当作"同一个场里的又一个定理"收编进去，而不是当作"场长出了新的一支"记下来。草坪上踩出了好几条路，地图上却只画一个"草坪"。

用三原理来看这件事：是哪两样东西在顶，又推动了什么？

一边是 AI 在一种场结构内千倍地推导，撞出一颗又一颗果子（显露）。其中有一些，不是在原来的路上走得更远，而是把某条规律推到了它原先所属的那一片之外——本书叫"反面果子"，第 7 章详讲。2026 年 7 月，雅可比猜想被 AI 构造的反例推翻，陶哲轩用两天时间和聊天机器人一起消化，亲自推代数、逐步核对、查文献。这就是一颗需要被认真"消化"的果子。

另一边是共同体只会按一种场结构去消化果子（差异序列，也就是怎么走的那条路）：要么收编为定理，要么当作反例记下，要么扔进"废料"堆。果子一多，消化

不过来；陶哲轩起初把一批 AI 结果称作"有毒废料"，后来又改口说"也许是处理过的废料"——这两个说法之间，正好露出了消化力的吃紧。

果子越撞越多，路只有一条，两样东西顶得越来越紧。这股张力推动的，是第三样东西——数学的场本身（纠缠）：它会被逼着从"一种结构"走向"结构的谱系"，也就是承认场里已经长出了好几支，并开始数它们之间有多亲。场一旦成了谱系，再回写回去：果子有了新的种类（"这一颗落在哪一支、离哪一支多远"），人和 AI 也有了新的分工（AI 在每一支里推，人把反面果子织成新的一支）。

这里还可以拿另一颗果子作对照：OpenAI 那份 Navier–Stokes 爆破证明（第 1 章讲过它的来历）。陶哲轩说过，此前的共识本来就是 Navier–Stokes 正则性大概会失败。这颗果子再难、再重要，它印证的是共同体已经在押的方向，没有逼谁收窄什么——它是同向的果子，消化它不需要场长出新的一支。（同年 9 月 Alpöge 与 Buckmaster 宣布带光滑外力项的三维 Euler 方程有限时间爆破，可作旁例；Euler 与 Navier–Stokes 不是同一个方程，把它也算同向，属本书的判断。）雅可比反例不同：它逼着人回头问，原来那条规律默认管到哪里、现在得收到哪里。两颗果子都大，可只有后一种会在场里留下分叉的痕迹。本章的 g 要数的，正是这种痕迹积累起来的东西。

这件事今天还没有发生。为什么没有？因为张力还没积累到那一步：AI 撞出的反面果子还不算多，大多数时候，共同体还消化得了；而且消化的唯一办法——收编进一种场结构——过去几百年一直很管用，没有人急着换。

还有一层原因，藏在统一性自己的回写里。一种场结构用得越久，它就越被压进教科书、压进记号、压进每一个学生最早学会的那种"对就是对"的直觉里。一禾在学函数，老师教她的第一件事，就是一个输入只能对一个输出，不能含糊。这本来是很好的训练，可它也在一代代人的手上回写出一种看法：数学里没有"罩着一半"这回事。统一性不只是一个预设，它也是被一代代回写加深了的一条路——越走越实，边上的草越退越远。要从这样一条路上踩出支路，比在一块新草坪上踩路难得多。

那什么时候会发生？粗略地说：当反面果子多到共同体用一种场结构消化不了、只能一颗颗扔进废料堆的时候，扔掉的代价会大到让人回头问一句——这些果

子是不是落在了不同的支上？问出这一句，场的谱系化就开始了。这只是一个看法，不是一个时间表；它会不会发生、什么时候发生，要看现实。

这一章到这里，把"程度"放回了它的来处：不是一把事先给定的尺子，也不是规律搬过去以后才回头量出来的读数，而是场在回写中一层层沉淀出来的历史亲缘，而且先于搬运就可以数。下一章，我们就带着这把"先数后测"的办法，去和最强的近邻一个一个交手。

**带 走 的 话**

- **数学之场的三件事是连接、次序、结构；它们不在单个对象里，只在一片对象缠在一起的地方才显出来。**
- **场是一层层回写出来的：结果留下来、改了起点，才算回写；纠缠最容易被回写、最难抹去。**
- **g 是两支场结构在回写派生树上的共同祖先深度：只沿回写代际数共享的连接、次序、结构，不看任何规律搬过去成没成；d 另外测，g 先数先封存。**
- **承重预测：静态结构一样（g_结构 相同）、回写历史不同（g 不同），规律的迁移程度 d 就不同；只看此刻结构的办法预测不出这一点。**
- **数学至今是场的统一性最大化：一种结构让一切亲缘恒为满值，回写被收编、不被记成新的一支。**

**小　账**

**本章切开的差异：**静态结构相似（g_结构）与历史亲缘（g）——两锅做法单一样的红烧肉，因来历不同，接新窍门的程度不同。

**本章的场谱系读数：**今天的数学仍是一种场结构，回写落在"同一个场里的又一条定理"上；本章把回写改记到回写派生树上，让场开始成谱系，读数 g 先于迁移结果可数。

◆

06

第 6 章

# 与近邻正面交手

**这一章的问题**

前两章说，数学之场的同一性有程度，程度由回写历史生成。可"程度"这件事，逻辑学家、数学基础学者、认知科学家、因果推断学者、科学哲学家、统计学家、物理学家，早就各自讲过。本书说的程度，和他们说的程度，到底差在哪里？如果差不出来，这本书就不该写。

## ◆ 6.1 程度早已有了：多元宇宙、逻辑多元、拓扑斯与 Ω-集、量化等式逻辑

先说一个场景。这是一个构想的场景。

期中考试结束那天晚上，曾晓岚在家改卷子。她是初中数学老师，桌上摊着一叠答卷和一张教研组发的评分细则。第三道大题十二分：列对方程得四分，解对得四分，检验并写出答语得四分。谭一禾在旁边写作业，探过头来看了一眼，说："妈，你们改卷不就是对和错吗？"

曾晓岚笑了，指着一份卷子说："你看这个孩子，方程列对了，解的时候移项丢了一个负号，后面全错。按细则，他拿四分，再看他后面的步骤思路是对的，再给两分。他不是对，也不是错，他是十二分里的六分。"

谭一禾想了想："那这六分是你定的吗？"

"不是我定的。细则上写好了，哪一步几分。全年级几百份卷子，都照这一张细则来。"

这个小场景，正好把本节要交手的几位近邻放在了桌上。他们都看见了"不是对就是错"太粗，都让"成立"有了中间的地带。可他们的中间地带，和曾晓岚手上的六分一样：有程度，可程度是事先由一张细则统一安排的。

我们一位一位来，先把他们最强的地方讲足。

### — 多元宇宙：不止一个集合论的世界

二十世纪数学的地基，大多数人认的是一套公理，叫 ZFC。在这套公理里，有一些问题怎么都定不下来，最有名的是连续统假设：在自然数的"多"和实数的"多"之间，还有没有一种不大不小的"多"。哥德尔和科恩先后证明，这个问题在 ZFC 里既证不出真，也证不出假。

面对这样的问题，传统的想法是：ZFC 还不够，应该找到新的、大家都认可的公理，把它定下来。只要找到，"真正的集合世界"就只有一个，连续统假设在那个世界里要么真要么假。

美国逻辑学家汉金斯提出了另一种看法，常被叫作集合论的多元宇宙观（二〇一二年发表在《符号逻辑评论》上的《集合论的多元宇宙》一文）。他的主张大意是：并没有唯一一个"真正的集合世界"等着我们去找；有许多个同样合法的集合论宇宙，在有的宇宙里连续统假设成立，在有的宇宙里不成立。我们对连续统假设知道得最多的，恰恰是它在这些宇宙之间怎样被打开、怎样被关上——研究这些宇宙之间的来往，本身就是集合论的正业。

这个看法很有力量。它不再把"定不下来"当成数学的缺陷，而是当成数学本身的样子。更要紧的是，汉金斯的多元宇宙不是一堆互不相干的孤岛：宇宙之间可以用"强迫法"互相扩张，一个宇宙可以看成另一个宇宙的延伸。这里已经有"从哪里来、到哪里去"的意味。

### — 逻辑多元：不止一种"推得出"

再往下一层，连"推理"本身也可以不止一种。比尔与雷斯托尔在二〇〇六年出版的《逻辑多元论》一书里，系统地提出了这种看法。他们的主张大意是：一个论证"有效"，意思是在所有相关的情形里，前提成立则结论成立；而"相关的情形"可以有好几种合法的取法——取成经典的完整情形，得到经典逻辑；取成构造性的情形，得到直觉主义逻辑；取成可以不完整、可以不一致的情形，得到相干逻辑一类。几种逻辑都对，各管一片。

这一步同样有力量。它告诉我们，数学家平时默认的"排中律处处可用"，并不是推理的唯一样子。直觉主义数学家不用排中律，照样做出了大量严谨的数学，而且他们的证明往往能直接读出构造方法——这正是许多人现在在形式化证明里看重的。

### — 拓扑斯与 Ω-集：真值本来就是多值的

第三位邻居最容易被写成稻草人，所以要讲得格外仔细。

拓扑斯是二十世纪中叶从代数几何里长出来的一种数学"宇宙"。粗略地说，它是一种范畴，在里面可以像在集合世界里一样做数学：有对象，有映射，有子对象，还有一个特殊的对象，叫子对象分类子，通常记作 Ω。在普通的集合世界里，Ω 就是只有两个元素的集合，"真"和"假"。可在一般的拓扑斯里，Ω 可以有很多个元素，它们排成一个代数结构（海廷代数），一个命题的真值可以是"在这一块上成立，在那一块上不成立"，可以是"随着时间推移，从某一刻起成立"。

这就是说：在拓扑斯的内部，真值本来就是多值的。说拓扑斯"只有 0 和 1"，是错的。

Ω-集走得更远，直接让"相等"有程度。弗尔曼和斯科特在一九七九年的《层与逻辑》一文里给出了一种做法：取一个完备的海廷代数 Ω，一个 Ω-集就是一堆东西，加上一个"相等程度"的函数——给任意两个东西 x 和 y 指派一个 Ω 里的值，表示"x 等于 y"成立到什么程度。两样东西可以"在某种程度上相等"，这正是本书想讲的"同一性有程度"的一个形式化前辈。

### — 量化等式逻辑：相等可以差一点

第四位邻居来自计算机科学。马达雷、帕纳加登与普洛特金在二〇一六年的计算机逻辑会议（LICS）上发表了《量化代数推理》。在普通的代数里，我们写"s 等于 t"；在他们的体系里，可以写"s 和 t 相差不超过 ε"，ε 是一个非负实数。推理规则也跟着改：如果 s 和 t 相差不超过 ε，t 和 u 相差不超过 δ，那么 s 和 u 相差不超过 ε 加 δ。这样一来，"相等"成了一个可以算的量，模型是带距离的代数结构。研究概率程序、带噪声的系统时，这种"差一点相等"的推理非常好用。

## — 他们停在哪里

把四位邻居的长处摆在一起，可以看出一条清楚的走向：从"只有一个世界"到"有许多世界"，从"只有一种推理"到"有几种推理"，从"真值只有两个"到"真值有许多个"，从"相等就是相等"到"相等可以差一点"。程度这件事，在数学与逻辑内部早已正式登场。本书并不是第一个说"同一性可以有程度"的。

那么，本书与他们差在哪里？

回到曾晓岚的卷子。那个孩子拿了六分，这六分是真实的程度，不是假的。可这六分是从哪里来的？是从教研组事先发下的一张细则来的。细则在改第一份卷子之前就定好了，几百份卷子用同一张细则。一个孩子在这道题上走过什么路——他是从上一章哪个知识点一路学过来的、他这种写法是跟哪位老师学的——细则不看。细则只看此刻纸面上写出了哪几步。

四位邻居的程度，正有这样的共同点。

拓扑斯里的真值多值，可这些值全部住在 Ω 里，Ω 是这一个拓扑斯一开始就给定的；一个命题取哪一个值，由它在这个拓扑斯里的位置决定，不由这个命题是怎样一代一代被推出来的决定。Ω-集里的"相等程度"，也是取值在一个事先给定的海廷代数里，相等函数是这个 Ω-集的定义的一部分，先给出来，再在上面推理。量化等式逻辑里的 ε 是实数，距离是模型自带的度量，同样在推理之前就已安排好。逻辑多元论的几种逻辑并列，每一种内部依然有它自己的一套有效性；几种逻辑之间谁和谁更近，理论本身并不讲一个"亲缘的程度"。汉金斯的多元宇宙最接近"历史"的意味，因为宇宙之间有扩张、有来往；可这里的来往是一种数学关系，是此刻就能用强迫法写出来的，不是"这两个宇宙在数学家共同体里经过几代回写才分开"的那种来历。

用一句大白话说：这四位邻居让程度出现了，可程度由一把事先给定的尺子统一安排。尺子是一开始就放在桌上的，不是被量的东西一路长出来的。

这也正是第 4 章把它们归进"多元化的统一性"的原因。这里要把话说准：归进去，不是说它们只有 0 和 1。拓扑斯内部的真值确实多值，Ω-集的相等确实有程度，量化逻辑的 ε 确实连续。归进去的理由只有一条——系统内尺子统一，系统之间没有亲缘尺子。在每一个系统里面，程度若出现，也由事先给定的真值对象或度量统

一安排，系统一旦定下，尺子就不再随着里面的东西怎样长出来而改；几个系统并列时，系统和系统之间没有一把"亲缘的尺子"。这就是"多元化的统一性"的样子。

打个比方。全省统考，每个考场都按同一张细则改卷，这是"一把尺子"；甲省和乙省各出一张细则，各改各的，两省分数谁高谁低没法比，这是"几把尺子并列"。无论哪一种，一个孩子从小学到初中一路学过来的来历，都不进分数。

本书说的程度，不是这样来的。两个场结构的同一性程度，按第 5 章的定义，是它们在回写派生树上的共同祖先深度：沿着一代一代的回写，数一数它们共享了多少连接、多少次序、多少结构。这个数，不来自一张事先发下的细则，而来自这两支场结构走过的路。

换一个家常的说法：曾晓岚手上的六分，是按细则给的；可她当了二十年老师，心里还有另一种"程度"——这个孩子的错法，和她五年前教过的某个孩子很像，那个孩子后来怎么改过来的，她记得。这种"像"，不是细则给的，是她一届一届教下来、一次一次改卷、一次一次回头讲题，沉淀出来的。两个孩子的错法共享了多少"来历"，她心里有数。细则管不到这一层。

当然，有人会立刻反驳：那你的"回写派生树"难道不也是一把尺子吗？你也得事先定下什么算一代、什么算共享。

这个反驳很公道，必须正面回答。区别在于尺子从哪里来、刻度由什么决定。拓扑斯的 Ω、量化逻辑的实数度量，是在推理开始之前、由构造者统一指定的；它们可以完全不管这个系统是怎样一路被造出来的。本书的 g，刻度只能从回写的记录里读出——某个概念是由哪个概念改出来的，某条定义是因为哪个反例被收窄的，某个结构是从哪个结构分出来的。没有这份记录，g 就算不出来；记录变了，g 跟着变。尺子的形式是统一的（都是"数共同祖先"），尺子上的刻度却是被历史写上去的。

本书并不否认四位邻居的成就，反而要靠它们：拓扑斯和 Ω-集给了"程度化的相等"一套严谨的语言，将来要把 g 写进形式系统，很可能就要借这套语言（第 13 章会碰到这个问题）。本书多出来的，只是一个主张：程度的刻度，可以不由事先给定的真值对象安排，而由回写历史生成；并且，这样生成的程度，在别的条件都相同时，能多告诉我们一些东西。

能多告诉什么？这要等到下一位邻居出场才看得清。下一节的几位邻居，讲的不是"真值有程度"，而是"理论和理论之间有亲缘"——这比真值更接近本书说的场结构。

## ◆ 6.2　理论之间早有亲缘：制度论、MMT 理论图、Bourbaki、数学结构主义

这是一个构想的场景。

罗秀英奶奶在纺织厂干了三十多年。她说，厂里换过几代织机，每换一次，最头疼的事是老花样能不能搬到新机器上去。一块提花布的花样，在老机器上是一张打了孔的纹板，在新机器上是另一种格式。搬得过去搬不过去，老师傅一看就知道：只要新机器上每一个孔位都能找到对应，而且老纹板上"这一针提、那一针压"的规矩到了新机器上还是"这一针提、那一针压"，花样就搬得过去，织出来的布一模一样；有一处对不上，就搬不过去，要么改花样，要么不织。

她说这话的时候，谭一禾正在旁边做数学作业。外婆这番话，其实把本节要交手的几位邻居说了个大概：两套东西之间，有没有一个对得上的翻译；对得上，规矩就能搬过去。

### — 制度论：在逻辑和逻辑之间搬东西

上一节的邻居让"真值"和"相等"有了程度。本节的邻居更进一步，讲的是"理论和理论之间"——这已经很接近本书说的场结构了。

先说制度论。这是戈根和伯斯托尔在八十年代提出、一九九二年在《ACM 学报》上系统发表的一套框架。它的出发点是：计算机科学里用来写规格说明的逻辑太多了，一阶逻辑、等式逻辑、各种模态逻辑、各种类型系统，每一种都要从头搭一遍。能不能抽出它们共有的骨架？

制度论抽出的骨架，用大白话讲是四样东西：一套"签名"（你能用哪些符号），每个签名上的"句子"（能写出哪些话），每个签名上的"模型"（这些话可以在什么样的世界里被解释），以及"满足"（某个模型让某句话成立）。最要紧的是一条叫"满足条件"的规矩：当你把符号从一个签名翻译到另一个签名，句子跟着翻过去，模型反着翻回来，那么"成立"这件事必须不变——在新签名里的模型满足翻过去的句子，当且仅当翻回来的模型满足原来的句子。

这正是罗奶奶说的"孔位对得上、提压规矩不变"。满足条件一保证，在一个地方证明过的东西，就可以沿着翻译搬到另一个地方去用，不必重证。制度论还进一步讲了制度和制度之间的映射：不仅同一种逻辑里的理论可以互相搬，不同的逻辑之间也可以搭桥。

这是一个非常深刻的想法。它说的是：规律能不能搬，不看表面长得像不像，看底下的翻译是否守住了"成立"。这和本书的立场离得很近——本书也说迁移跟着场结构走，不跟着表面走。

### — MMT 理论图：把整个数学画成一张图

MMT 是拉贝与科尔哈泽等人在二〇一〇年前后发展起来的一套数学知识表示框架。它把一个个数学理论当成图上的点，把理论之间的关系当成图上的边。边主要有两种：一种是"包含"，比如群论包含了幺半群论的全部，再多加了"每个元素都有逆"；另一种是"视图"，把一个理论里的每个符号解释成另一个理论里的东西，并且保证前一个理论的公理在后一个理论里都成立。有了视图，前一个理论里证出的每一条定理，都可以自动搬进后一个理论。

这张理论图很有用。比如你证了一条关于"群"的定理，只要从群论到"某个具体的对称变换集合"有一条视图，定理就自动在那个集合上成立。数学家几百年来手工做的事——"注意到这是一个群，所以……"——被画成了一张可以让机器沿着走的图。

还要说一句公道话：MMT 的理论图里，"包含"这种边本身就带着一点"来历"的味道。群论是在幺半群论的基础上加东西得到的，这像是一种"派生"。所以说它一点不管历史，是不公道的。

### — Bourbaki：母结构与它们的后代

再往前，是二十世纪中叶的布尔巴基学派。这是一群法国数学家用的集体笔名。他们的雄心是把整个数学重新写一遍，用一个统一的骨架。在他们一篇广为人知的纲领性文章《数学的建筑》里（法文一九四八年，英译一九五〇年），他们提出数学有几种"母结构"：代数结构（讲运算）、序结构（讲先后大小）、拓扑结构（讲邻近和连续）。具体的数学对象，是这几种母结构的组合与加细：实数既有代

数结构（能加能乘），又有序结构（能比大小），还有拓扑结构（能谈极限），三者以一定方式咬合在一起。

布尔巴基的这幅图有一种谱系的样子：几个母结构，往下分出各种子结构，再交叉组合。读过的人很容易觉得，这已经是一棵"数学结构的家谱"了。

### — 数学结构主义：数学讲的就是结构

最后是哲学上的数学结构主义。夏皮罗、雷斯尼克等人（两人的代表作都出版于一九九七年）的主张大意是：数学对象没有"内在的本性"，数学讲的只是结构，对象只是结构里的位置。"2"不是某样具体的东西，它就是自然数结构里排在"0、1"之后的那个位置；任何一个满足同样结构的系统，都同样可以当自然数用。两个系统如果结构同构，从数学上说就没有区别。

结构主义的力量在于它解释了数学的可迁移性：为什么同一条定理能在完全不同的地方成立？因为它讲的是结构，只要结构一样，在哪里都成立。

### — 他们停在哪里

把这四位放在一起，他们共享一个非常强的立场：**理论之间有亲缘，亲缘由结构决定，结构决定了规律能不能搬。** 制度论用满足条件保证搬运，MMT 用视图和包含把搬运画成图，布尔巴基用母结构给出组合关系，结构主义说同构的系统在数学上无法区分。

本书完全同意前半句：迁移跟着结构走。分歧在后半句。

回到罗奶奶的纹板。老师傅判断"搬得过去"，看的是此刻两台机器的孔位能不能一一对上。这个判断有两个特点：一是**同时的**——只看此刻两张纹板摆在一起，不问它们是怎么来的；二是**两值的**——对得上就搬，对不上就不搬，没有"搬过去七成"这回事。

四位邻居的亲缘，大体也有这两个特点。

制度论里，两个理论之间有没有满足条件的映射，是一个此刻就可以判定的数学事实，不取决于这两个理论是哪一年、经过谁的手、因为什么反例改成今天这样。映射存在，规律整条搬过去；不存在，就不搬。MMT 的视图同样如此：一条视

图要么存在、要么不存在，存在就保证全部定理搬过去。包含边虽然有"派生"的味道，可它记录的是"现在这个理论里有那个理论的全部"这一事实，不记录这一包含是因为什么、经过几代回写形成的；两个理论都包含同一个父理论，它们的亲缘在图上就是一样的，不论它们后来各自走了多少代。布尔巴基的母结构谱系是一种按定义给出的分类，不是一代一代沉淀出来的家谱：实数"是"三种母结构的组合，是因为定义如此，不是因为历史如此。结构主义更是明说：同构即相同，历史无关。

所以，用本书的话来说：这几位邻居看见了结构亲缘，可这种亲缘是**同时的、按定义给定的**。态射在不在，此刻就定了，不由回写历史生成。

有人会反驳：数学本来就该这样。数学的好处正在于它不管历史——勾股定理不论是谁、在哪个年代证出来的，都一样成立。你非要把历史塞进来，是不是把数学变成了数学史?

这个反驳要认真回答。本书并不是说某条定理的真假依赖历史。勾股定理在欧氏平面里成立，这件事不随谁证的而变。本书说的是另一件事：当我们要把一条在甲结构里成立的规律搬到乙结构里去，而甲乙之间**并没有**一条完整的满足条件映射时——这恰恰是数学家日常最常碰到的情形——规律能搬过去多少？制度论在这里不说话：没有映射就是没有映射。可数学家的实际经验是：有些"不完全对得上"的地方，规律搬过去大体还能用，只要改几处；有些地方，表面上同样"不完全对得上"，规律搬过去却几乎全垮。

本书的猜想是：在静态结构的相似度一样的条件下，决定这件事的，是两支场结构共享了多少回写的来历。

还是用罗奶奶的话来打比方。新机器和老机器孔位对不上的时候，老师傅也不是一律说"不织"。他们会说："这台新机器是从咱们厂那台老机器改出来的，虽然孔位变了，老花样改一改还能织；那台是外厂引进的，孔位变化看着差不多，可老花样改了也织不顺。"两台新机器跟老机器之间"对不上的孔位数"一样多，老师傅的判断却不一样。他凭的不是此刻的孔位，是这台机器的来历——它是从哪台改出来的、改过几轮、每一轮因为什么问题改的。

数学里有没有这样的事？有一个很平常的例子可以帮着想。初中教"方程"，高中教"函数"。一个解方程很熟的学生，碰到函数时，有的地方顺手，有的地方别扭。曾

晓岚教了二十年书，知道哪些"顺手"是因为两样东西底下的结构本来就一样（等式两边同时做一件事，在方程里成立，在函数的变形里也成立），哪些"别扭"是因为结构看着差不多，可来历不同：函数这条线是从"量随量变"的那一支长出来的，方程那条线是从"求未知数"的那一支长出来的。同样是"x"，一边是一个等着求出来的数，一边是一个会动的量。两样东西在纸面上对得上的符号一样多，学生搬规矩时的顺与不顺，却跟着两条线各自的来历走。这只是一个日常的类比，不是证据；但它说明本书要问的问题，不是凭空造出来的。

这就是本书说的历史亲缘：沿着回写一代一代数下来的共同祖先深度。它不是要替代结构亲缘，而是在结构亲缘说"对不上"之后，再往下多问一句：对不上的两个，谁和谁更近？

制度论、MMT 和结构主义有很好的工具，将来本书要测 g，几乎一定要借它们的工具来表示"共享的连接、次序、结构"——MMT 的理论图稍加改造，记下每一条包含边、每一次定义修改的来由和先后，就很接近本书要的"回写派生树"了。第 13 章会再回到这一点。本书多出来的不是更好的工具，而是一个可以被检验的主张：结构对得上的程度相同时，历史近的那一对，规律搬得更顺。

到这里，我们一直在数学和逻辑内部打转。下一节的邻居来自数学之外——认知科学、因果推断和机器视觉。他们研究"迁移"本身，而且已经有了实测。

## ◆ 6.3　迁移早已被测：Gentner 结构映射、Pearl–Bareinboim 可迁移性、Taskonomy

这是一个构想的场景。

暑假里，谭一禾报了学校的羽毛球兴趣班。她小学打过两年乒乓球，班上还有一个男生从小练网球。第一周下来，教练说了一句让人意外的话：那个练网球的男生，拍子大、场地大，看上去跟羽毛球最像，可他挥拍总是用整条胳膊抡，一时改不过来；谭一禾的乒乓球拍子小、台子小，看上去差得远，可她手腕上那一抖一收，到了羽毛球里反倒很快就用上了。

教练的解释是：别看器材，看动作里"什么连着什么"。乒乓球和羽毛球都靠手腕在最后一刻发力，发力和击球点的先后关系很像；网球的发力链从腿到腰到肩，先后完全是另一套。表面像的不一定搬得过去，底下的关系像的才搬得过去。

这位教练说的话，认知科学家、因果推断学者和机器视觉研究者，都用各自的方式严肃地研究过，而且做出了实测。本节的三位邻居，离本书最近的地方在于：他们都主张迁移跟着结构走，不跟着表面走。

### — Gentner 结构映射：类比看的是关系，不是外表

先说认知心理学家根特纳。她在一九八三年的《认知科学》杂志上提出了结构映射理论。她的主张大意是：人做类比，真正搬过去的不是事物的外表属性，而是事物之间的关系，尤其是成体系的、高阶的关系。

她最常被引用的例子是"原子像太阳系"。太阳是黄的、热的，原子核不是；这些外表属性搬不过去，也不必搬。搬过去的是关系：大的东西吸引小的东西，小的绕着大的转，大的比小的重得多。而且这些关系串成一个体系——因为吸引、因为质量差，所以绕转。根特纳把这叫"系统性原则"：一组彼此牵连的关系，比零散的单条关系更容易被搬过去。

她和同事后来还做了大量实验，发现普通人做类比时常被表面相似带偏，专家则更会抓深层关系。这和教练的话完全一致：网球男生被"拍子大、场地大"的表面相似带偏，谭一禾抓住了手腕发力的关系结构。

结构映射理论的力量在于，它第一次把"什么东西能迁移"讲成了一件可以分析、可以实验的事：看关系结构对得上多少。

### — Pearl–Bareinboim 可迁移性：选择图本身就是结构

第二位邻居必须讲得格外公道，因为它最容易被写成稻草人。

珀尔和巴伦博伊姆在二〇一一年的人工智能年会（AAAI）论文及其后的期刊长文里，提出了"可迁移性"的形式理论。他们要回答的问题是：一项在甲地人群里做的研究——比如某种药在城市医院的试验——它的因果结论能不能搬到乙地人群——比如乡村——里去用?

一种粗糙的想法是：看两地人群的数据差得多远，差得近就能搬，差得远就不能搬。这是"静态距离"的想法。

珀尔和巴伦博伊姆恰恰不这么做。他们的做法是画一张因果图：图上的点是各个变量（年龄、病情、用药、疗效……），箭头表示谁直接影响谁。然后在图上加一种特殊的点，叫"选择节点"，标出两地人群在哪些机制上可能不同——比如乡村的年龄分布不同，就在"年龄"上挂一个选择节点。这张加了选择节点的图，叫"选择图"。接着，用一套严格的演算（do-演算）判断：在这张图的结构下，甲地的实验结果加上乙地的一些观察数据，能不能算出乙地的因果效应；能，就给出转换公式。

所以要说清楚：可迁移性理论**不是**静态距离理论。它判断能不能搬，靠的是因果机制的结构——哪些变量连着哪些变量、差异挂在哪个机制上。两地人群的数据看着差得很远，只要差异挂在一个可以调整的地方，结论照样能搬；数据看着差得很近，差异挂在一个要害上，也可能搬不了。这和教练说的"看底下什么连着什么"是一个道理，而且做到了数学上的严格。

把它写成"只看数据距离"，就是稻草人。本书不这样写。

### — Taskonomy：任务之间的迁移可以测出来

第三位邻居来自机器视觉。扎米尔等人在二〇一八年的计算机视觉会议（CVPR）上发表了一项叫 Taskonomy 的研究，涉及二十六种视觉任务。他们拿一大批室内场景的图像，训练机器做许多种视觉任务：认边缘、估深度、判断表面朝向、分割物体……然后系统地测：先学会任务甲，再学任务乙，能省多少力？把所有任务两两之间的迁移效果都测出来，排成一张"任务亲缘图"。

结果很有意思：有些任务之间迁移效果很好，比如几种和三维几何有关的任务彼此帮得上忙；有些看上去相近的任务，反而帮不上什么。这张图不是事先猜的，是一项一项测出来的。

这里也要替 Taskonomy 说句公道话：它不是只看两个任务"像不像"，它直接测的是"先学甲、再学乙能省多少"，测的就是迁移本身，比任何猜测都实在。而且它还考虑了多个任务一起当起点的情形，亲缘不只是两两之间的一个数。

Taskonomy 的力量在于：它把"哪些东西之间迁移得好"从理论推测变成了大规模实测，而且测出来的亲缘图里确实有结构，任务按迁移效果自然聚成了几群。

### — 他们停在哪里

三位邻居合在一起，几乎把本书想说的前半句都说完了：**迁移跟着结构走，不跟着表面走。** 根特纳说跟着关系结构走，珀尔和巴伦博伊姆说跟着因果机制的结构走，Taskonomy 测出了任务之间确实有结构化的亲缘。本书在这一点上是他们的学生。

那么本书和他们差在哪里?

回到羽毛球场。教练的判断是对的，可他只看了一样东西：此刻三种球的动作里，什么连着什么。这是一个**此刻的**结构比较。

再往下想一步。这是一个构想的追问。假如班上还有第三个孩子，也打过两年乒乓球，手腕动作和谭一禾一样好。按教练的道理，他也该一样快地上手羽毛球。可结果他慢得多。为什么？后来一问才知道：谭一禾的乒乓球是外婆家楼下一位退休老师教的，那位老师年轻时是打羽毛球的，后来才改打乒乓球，教手腕时用的就是羽毛球的那一套讲法和练法；第三个孩子的乒乓球是在体校学的，手腕一样好，可练法是另一条线下来的。两个孩子此刻的动作结构一样，来历不同，搬到羽毛球里的顺不顺也就不同。

这个追问正好碰到三位邻居的停点。

根特纳的结构映射比较的是两个领域此刻的关系结构，对得上多少，就搬过去多少；两个领域的关系结构是怎样一路形成的，不在理论里。珀尔和巴伦博伊姆的选择图同样是此刻的因果结构：图画好了，结论能不能搬就定了；两个人群的机制是怎样一代代演变成今天这样的，图上不记。这不是他们的缺点，因为对一个具体的药物试验来说，此刻的因果结构正是该问的东西。Taskonomy 测的是迁移结果本身，亲缘图是从迁移效果倒推出来的——它说明迁移有结构，但它的亲缘是"先测迁移、再画亲缘"，而本书要的是反过来："先测亲缘、再预测迁移"，而且这亲缘不从迁移结果里读，要从回写的历史里读。

这里还要替根特纳说一句公道话。她和鲍德尔在二〇〇五年的《心理学评论》上提出过"隐喻的生涯"一说，大意是：一个新鲜的比喻起初要靠一次次结构比较才读得懂，用得多了，它会慢慢变成一个现成的类别，读的人不必再比较就懂。这已经让"历史"进入了类比——同一个比喻，在它的用法史的不同阶段，被处理的方式不同。所以说根特纳完全不看历史，是不公道的。不过，"隐喻的生涯"讲的是一个比喻在使用者心里的熟练过程，它改变的是"怎样处理"，而不是主张"两个领域之间迁移得多好，由它们的共同来历决定"。历史在这里是比喻自己的年龄，不是两个领域之间的亲缘。

同一类邻居里，机器学习还有一支"领域适应"理论。本-大卫等人在二〇一〇年的《机器学习》期刊上给出过一类误差界，大意是：一个在源领域上训练的分类器，搬到目标领域上的误差，不会超过它在源领域上的误差，加上两个领域在某种意义上的分布差距，再加上一项"两个领域能否被同一个好分类器同时做好"的量。这里的分布差距，是此刻两份数据之间的一个距离；那个"能否同时做好"的量，也是此刻就定了的。它比单看数据距离精细得多，可同样不问两个领域是怎样一路来的。

把三者的停点合成一句话：**迁移跟着结构走，但与历史无关**。

本书的承重预测正卡在这里。第 5 章已经说过，本书预测的是：控制静态结构相似度 g_结构　相同时，迁移程度 d 仍随历史亲缘 g 变化。三位邻居对这一点的预测，按各自的理论，都是"不会变"——结构映射说关系对得上一样多就搬得一样多；可迁移性说选择图一样就可搬程度一样；Taskonomy 说表征相似就迁移相似。如果实测发现，结构真的控制住了，迁移还跟着历史走，本书多出的这一步就站住了；如果结构控制住以后，历史一点不起作用，本书在这一点上就错了，三位邻居是对的。

有人会说：这不公平。你说的"历史"，难道不会在此刻的结构里留下痕迹吗？谭一禾的那位老师教的羽毛球练法，总会在她的手腕动作里留下点什么，只是教练没看出来。只要结构描写得足够细，历史就全在结构里了。

这是对本书最有力的一个反驳，要老实承认：它可能是对的。如果历史的作用总能被一个足够细的此刻结构吸收，那么"历史亲缘"就只是"我们还没把结构描写够细"的另一种说法。本书的回答有两层。第一层，这是一个可以检验的问题，不是可

以辩论定的问题：如果在数学里（第 9 章）能找到这样的情形——两支场结构用当下所有的结构比较工具都比不出差别，迁移却显著不同，而差别恰好跟着回写派生树走——那么"历史全在结构里"至少在实践上就不成立。第二层，即使历史在原则上都留在结构里，"先读历史"也可能是一条更省力的路：一份回写的记录，比把两支结构描写到无限细，要容易拿到得多。教练不必研究透两个孩子每一块肌肉，问一句"你跟谁学的"就够了。

所以本书并不说这三位邻居错了。本书说的是：在他们停下的地方，还有一个可以测、可以赌的问题。下一节的邻居，就是那几位已经把"程度"和"历史"放在一起想过的科学哲学家——他们离本书又近了一步。

## ◆ 6.4　规律有程度、概念有历史：Mitchell、Woodward、卡特赖特、Mark Wilson

这是一个构想的场景。

欧阳伯在城郊种两块菜地。他有一条种了四十年的老规矩："清明前后，种瓜点豆。"这条规矩他自己用得很准。前几年他在娄底城东帮亲戚又开了一小块地，照着规矩种，也还行，只是豆子总比老地里晚出几天。再后来，他外甥在广东开了个菜园，打电话来问，欧阳伯说："清明前后种就是了。"外甥照做，结果那边天热得早，清明再种已经有点迟了。

欧阳伯琢磨了好一阵，跟罗奶奶说："我这条规矩，在我自家地里是十成的，在城东那块是八九成，到广东就只剩五六成了。规矩没变，是地不一样。"

罗奶奶问："那城东那块地，跟你老地离得近，跟广东离得远，所以准头不一样？"

欧阳伯摇头："也不全是近不近。城东那块地，是我拿老地里的种子、老地里的土肥、照老地的轮作养了三年才养熟的。要是隔壁那块从没种过的荒地，离我老地更近，那条规矩反倒不一定有城东那块准。"

欧阳伯这番话里有两层。前一层是：一条规律不是"成立"或"不成立"，而是在不同的地方成立到不同的程度。后一层是：这个程度不完全跟着远近走，还跟着"这块

地是怎样被养出来的"走。本节的四位邻居，把前一层讲得非常透；其中有一位，已经碰到了后一层的边。

### — Mitchell：规律的稳定有程度

先说科学哲学家米切尔。她在一九九七年的论文《实用规律》和二〇〇三年的《生物复杂性与整合多元论》一书里提出：传统科学哲学把"规律"想成严格普遍、毫无例外的东西，可生物学、社会科学里几乎找不到这样的规律。与其说这些学科"没有规律"，不如说规律本来就有程度。她用"稳定性"来描述这种程度：一条规律所依赖的条件，在多大范围里、多长时间里保持不变，它就稳定到什么程度。孟德尔的分离比在许多生物里成立，可它依赖减数分裂的一系列条件，这些条件在演化中是偶然形成的、也可能变，所以它是一条稳定度很高但不是绝对普遍的规律。

米切尔的力量在于：她把"规律有程度"从一种无奈的让步，变成了一个正面的、可以研究的性质。欧阳伯说"十成、八九成、五六成"，正是米切尔说的稳定度。

### — Woodward：不变性有程度

第二位是伍德沃德。他在二〇〇三年的《让事情发生》一书中提出了因果解释的"干预主义"说法，其中一个核心概念是"不变性"：一个关系是解释性的，是因为在一定范围的干预下它保持不变。比如弹簧拉力和伸长的关系，在一定拉力范围内你怎么改伸长，它都照样成立；超出弹性限度，它就不成立了。不变的范围越大，这个关系的解释力越强。伍德沃德明确说，不变性是有程度的，而且一个关系不必在一切情形下成立，才算得上解释。

伍德沃德的力量在于：他把程度和"干预"连了起来，给了程度一个可操作的含义——你去改一改，看它还成不成立。

### — 卡特赖特：世界是斑驳的

第三位是卡特赖特。她一九九九年的书《斑驳的世界》提出了一个更激进的看法：自然规律并不是统辖一切的普遍法则，它们只在一个个被精心安排好的局部里成立——实验室里、机器里、她称作"规律机器"的那些装置里。世界不是一张由几条大规律织成的整齐的网，而是一块块拼起来、每块各有各的规律、彼此边界不齐的斑驳的布。

卡特赖特的力量在于：她把"规律成立的范围是局部的"推到了最彻底。欧阳伯那条种瓜规矩，在他的老地这台"规律机器"里成立，换个地方就要打折，正是斑驳世界的一个小样子。

### — Mark Wilson：概念在各片应用里拼贴，由历史补丁衔接

第四位邻居是本节最要紧的一位，也是全书最近的邻居之一，必须正面交手。

马克·威尔逊在二〇〇六年出版了《漂移的意义》一书（英文书名 Wandering Significance，副题"论概念行为"；中文书名为本书暂译）。他研究的是"硬度""力""红色"这一类日常和科学里都用的概念，到底是怎样工作的。传统看法认为，一个概念有一个确定的内容，用到哪里都是同一个意思。威尔逊仔细考察了这些概念在物理、工程和日常中的实际用法，发现事情根本不是这样。

他的看法大意是：一个概念的用法，是一片一片拼起来的。在这一片应用里，"硬度"指的是划痕测试的结果；在那一片里，指的是压痕的深浅；在另一片里，又跟材料的弹性有关。每一片内部的用法是清楚的、可靠的；片与片之间，用法并不完全一致，靠的是一些历史上形成的"补丁"衔接起来——某个时候、因为某个实际的问题，人们把这一片的用法延伸到了相邻的那一片，延伸得顺，就这样沿用下来。从远处看，"硬度"像是一个统一的概念，像一座房子漂亮的正面；走近一看，是好几片用法拼起来的，背后靠历史的接缝撑着。威尔逊自己用的词，正是"正面"（facade）、"片"（patch）和把各片拼起来的"图册"（atlas）。

威尔逊还特别强调：这种拼贴不是概念的缺陷，而是概念能在复杂世界里管用的原因。一个概念要是硬被要求在所有地方一个意思，它反而会在许多地方失灵。

这一位为什么是最近的邻居？因为他已经说出了本书想说的几乎所有要素：概念的用法分片（像场结构的分支），片与片之间不是同一的、也不是毫无关系的（同一性有程度），而衔接靠的是历史上一次次的延伸（回写的历史）。欧阳伯说"城东那块地是我照老地养熟的"，几乎就是威尔逊说的"历史补丁"。

## 一 他们停在哪里

先把公道话说完。这四位邻居合起来，已经把本书的大半主张说过了：规律有程度（米切尔、伍德沃德），规律成立的范围是局部的、拼贴的（卡特赖特），概念的用法分片、由历史衔接（威尔逊）。本书在这里不是开拓者，是后来者。

本书多出的东西在哪里？有两处，都很具体。

第一处：**程度落在哪里。** 米切尔、伍德沃德、卡特赖特的程度，都属于经验规律——孟德尔比例、弹簧定律、实验室里的因果关系。数学在他们那里，是用来描写这些规律的语言，本身不动。欧阳伯的规矩在广东打了折，是因为广东的地不一样，不是因为"算日子的算术"不一样。本书要说的却是：数学之场本身就有这种程度。不是"数学描写的规律"在不同地方成立到不同程度，而是数学自己的连接、次序与结构，就沿着回写分了支、有了远近。这是把他们的程度从经验规律搬进了数学之场本身。

第二处：**程度能不能和静态结构分开测。** 这是和威尔逊交手的要害。威尔逊讲的历史补丁，是对概念使用的一种描写，而且是非常深刻的描写；但他的目标是说明概念为什么能这样工作，不是提出一个可以测量的量、并预言它在静态结构控制住之后还起作用。在他的书里，"历史补丁"和"各片用法此刻的相似程度"是缠在一起讲的，并没有被分成两个量、各自去测、再看谁决定迁移〔待核：威尔逊是否在别处提出过可测的量化说法〕。

欧阳伯的话里，恰恰有这一分。他说的不是"城东近所以准"，而是"隔壁荒地更近，反倒不一定准"。荒地和城东那块地，离老地的远近（相当于此刻的相似度）是一回事；它们是不是用老地的种子、土肥、轮作一代代养出来的（相当于回写的历史），是另一回事。欧阳伯把这两件事分开了，而且说决定准头的，至少有一部分是后一件。

为什么这一分要紧？因为不分开，就无法知道历史是不是多余的。米切尔可以说：城东的地稳定度高，是因为它此刻的土质、水分、日照和老地更像——养了三年，养得更像了而已，历史只是"变得像"的原因，真正起作用的还是此刻的像。这个说法完全讲得通。要驳倒它，不能靠讲道理，只能靠这样一种情形：两块地此刻的土质、水分、日照测下来一样像，一块是老地养出来的，一块不是，规矩在两块地

上的准头却不同。如果找不到这种情形，历史就真的只是"变得像"的原因，可以被此刻的像完全吸收——那么本书在这一点上错了，米切尔与伍德沃德的框架已经够用。如果找得到，历史就有它自己的一份。本书把赌注押在找得到这一边，但这是赌注，不是结论。第 9 章会说明在数学内部怎样设计这场赌。

本书要做的，就是把欧阳伯这一分做成一个可以测、可以赌的主张：把"结构亲缘"和"历史亲缘"立成两个量，前者记作 g_结构，后者记作 g；控制前者相同，看后者是否还决定迁移程度 d。威尔逊会不会同意这个预测？很可能会，他的书处处透出这种意思。可"透出这种意思"和"立成可测的量、与静态结构分开、写下会让自己错的条件"之间，还隔着一步。本书说自己多走了一步，指的就是这一步，不是更多。

还要承认一种可能：如果有一天读者发现，威尔逊或别的学者早已把这一步走完——把历史亲缘立成可测的量、与结构亲缘分开、并预言其独立作用——那么本书在这一点上就不是多走了一步，而是重走了一步。本书愿意被这样纠正。

讲到这里，程度和历史都已经出现了，只是还没被放到同一个可测的量里。下一节的邻居，恰恰是一群把"历史"做成了可测的量的人——只是他们测的不是数学。

## ◆ 6.5　历史早被计量：分层模型、系统发育比较方法，以及证人普适类

这是一个构想的场景。

林知远过年回娄底，在罗奶奶家吃饭。饭桌上说起他小时候的事。罗奶奶说："你们这一辈的表兄弟里，就你个子最像你外公。"林知远笑："我舅舅也高啊。"罗奶奶说："你舅舅高，是高在腿上；你是从肩膀到腰都像你外公。你表哥个子也不矮，可他像他爸那一边。"

曾晓岚在一旁插了一句："那我们家这几个孩子，谁像谁，是不是可以画一张图？"

林知远想了想："可以，而且有人专门干这个。不过你得小心：两个表兄弟长得像，有可能是因为都随了外公，也有可能是因为从小一起吃一样的饭、一起打球。前一种像是从来历里带出来的，后一种像是后来各自碰上的。不把这两样分开，图就画歪了。"

林知远这句话，碰到了本节的两位邻居：统计学里的分层模型，和生物学里的系统发育比较方法。这两位邻居有一个共同点，是前面几节的邻居都没有的：**它们真的把"历史"做成了可以计量的东西，而且用历史生成了程度。** 这是离本书在形式上最近的地方。

### 一 分层模型：部分合并，按亲缘借力

先说分层模型。设想一个县里有二十所中学，每所学校都想知道自己学生的数学平均水平。有的学校人多，数据足；有的学校只有几十个学生，数据少，算出的平均数很不稳。

两种极端做法：一种是每所学校只看自己的数据，人少的学校估计就很飘；另一种是把二十所学校混成一锅算一个平均数，又把学校之间的真实差别抹掉了。分层模型取中间的路：假定各校的平均水平来自一个共同的"上一层"分布，每所学校的估计，一部分靠自己的数据，一部分向全县的平均"收缩"——数据少的学校收得多，数据足的学校收得少。这叫"部分合并"。

再进一步，可以有好几层：学校属于乡镇，乡镇属于县，县属于市。同一个乡镇的学校之间互相借力更多，不同县的学校借力少一些。这样一来，"两所学校之间该互相借多少力"，就有了一个程度，而这个程度由它们在层级里的位置决定。

这个想法的力量在于：它用一个层级结构生成了"相似的程度"，并且这个程度真的改善了预测。

不过要看清楚，分层模型里的"层"是从哪里来的。学校属于乡镇、乡镇属于县，这是行政区划，是建模的人事先按已知的分组写进模型里的。它可以和历史有关，也可以完全无关——你完全可以按学校的规模、按开办的年代、按校长的籍贯来分层，模型都照样能跑。层级给了程度，可层级本身是给定的分组，不是从"谁是从谁改出来的"一路数出来的。只有当分层恰好按历史来分，它才接近本书要的东西。这一点，正好把分层模型和下一位邻居区分开：下一位邻居的"层"，是货真价实的历史。

## — 系统发育比较方法：物种不是独立的样本

第二位邻居更接近"历史"。生物学家想知道，比如，体型大的哺乳动物是不是寿命也长。最简单的办法是把一百种哺乳动物的体型和寿命画在一张图上，看是不是一起变大。

费尔森斯坦在一九八五年的《美国博物学家》杂志上指出了一个致命的问题：这一百种动物不是一百个独立的样本。几十种猫科动物，体型和寿命之所以相似，很可能只是因为它们来自同一个祖先，不是因为体型"导致"了寿命。就像林知远说的：两兄弟像，可能只是因为都随了外公。

他提出的办法叫"独立对比"：沿着物种的进化树，在每一个分叉处计算两支的差别，这些差别才是近似独立的；再用这些差别去看体型和寿命的关系。后来发展出一大批方法，统称系统发育比较方法，核心都是一样：**用进化树上的共同祖先关系，来计量两个物种之间"该有多相似"，并把这种由历史带来的相似从数据里分离出去。** 有的方法还专门估计一个性状有多强的"系统发育信号"——也就是这个性状有多大程度上是跟着亲缘走的。

这正是本书想做的事的形状：沿着一棵派生树，数共同祖先，算出程度，并把这个程度和别的东西分开。

## — 他们停在哪里

这两位邻居在形式上离本书最近，甚至可以说，本书的 g 就是向它们借来的思路——"回写派生树上的共同祖先深度"，跟"进化树上的共享枝长"是一家人。这一点应当明说，不能掩盖。

本书和它们差在两处。

第一处：**它们用历史计量的对象，是参数和生物性状，不是数学本身。** 分层模型里，层级结构决定的是各校平均数这类参数怎样互相借力；系统发育方法里，进化树决定的是体型、寿命这类性状怎样相似。在它们那里，数学——回归方程、似然函数、协方差矩阵——始终是一套固定不变的工具，被用来描写那些有历史的东西。数学本身没有进化树。本书要做的，是把这套"沿派生树数共同祖先"的思路，用到数学之场本身上：群论、环论、域论这些场结构，它们共享的连接、次序与结

构，是沿着怎样一棵回写的树分出来的？这件事，分层模型和系统发育方法都没有去做，也不在它们的问题里。

第二处：**进化树长在现实的生物里，回写派生树长在数学这片信息之场里。** 物种的进化树记录的是现实中一代代生物的繁衍与分化；本书要的派生树，记录的是数学共同体与机器一代代"撞果子、织谱"的回写——某条定义因为哪个反例被收窄，某个结构因为哪个问题被分出来。两棵树形状相似，长在不同的地方。把系统发育的工具搬到数学之场上来，本身就是一次需要检验的迁移；它能不能搬过去，按本书自己的主张，也要看两棵树共享了多少来历。这是本书对自己的一个提醒，不是一句漂亮话。

再说得细一点，两棵树的"回写"也不一样。物种的进化树上，一代传一代，后代的性状回头改变的是后代自己，不会回头改写祖先已经留下的东西。数学的派生树却会回头改：一个反例出来，共同体不只是在旁边长出一支新枝，还会回头修改原来那条定义的措辞、原来那批教科书的讲法，甚至原来那一支此后的推导方向。手艺也是这样：罗奶奶的女儿改了一处针法，若改得好，罗奶奶自己下回也跟着改。这种往回写的力量，在数学和手艺里比在生物性状里强得多。所以本书的派生树不能照搬进化树的算法。那么回改怎样记账？本书的口径是：计 g 时，按测量时已经记录下来的回写史来数；后来对定义措辞、教科书讲法的改写，算派生树上新的一代，不回头改动祖先那个节点。这样，祖先节点一旦记下就不再挪动，两支的共同祖先深度才数得稳。第 9 章的研究设计会照这个口径落到具体的计数上。

还有一条要老实说：系统发育比较方法里，早有人担心"共享的相似"中，有一部分不是来自共同祖先，而是来自各支独立地碰上了同样的条件（生物学叫趋同）。林知远在饭桌上说的"从小一起吃一样的饭"就是这一类。本书将来测 g 时，一样会碰到这个问题：两支数学结构共享某个连接，是因为同出一源，还是因为各自为解决类似问题、独立地发明了同一个东西？本书的口径是：后一种是趋同，不计入 g。g 数的是共同祖先，趋同是两条路各自走到了一处，它会让两支此刻看着像（算进 g_ 结构），却不是共同的来历。怎样从记录里把趋同分出来，是本书要向系统发育学者学的功课，不是邻居的停点。

### — 证人：普适类

最后请出一位特殊的邻居。它不是对手，而是证人。

统计物理里有一个惊人的现象，叫普适性。先用家常话打个底：灶上烧水，水开了冒汽，水和汽分得清清楚楚。可要是把水关在一个极结实的容器里，一边加热一边加压，到了某一个特定的温度和压力，水和汽的分别会忽然消失——这叫液气临界点，厨房里碰不到，实验室里做得出。另一件事：一块磁铁加热到一定温度，磁性忽然消失。两件事的材料、温度、尺度完全不同，可物理学家发现，在各自的临界点附近，描写它们的某些指数竟然一样——常举的例子是，液气临界点和一类磁性只能朝一个方向排的磁体，同属物理学家说的三维伊辛普适类。它们属于同一个"普适类"。

决定两个系统是否属于同一个普适类的，不是材料像不像、温度近不近，而是一些更深的东西：空间的维数，序参量的对称性，相互作用是短程还是长程。用本书的话说：决定同一性的，是连接结构，不是表面距离。

普适类在这里是本书的证人，证明一件事：在数学描写的世界里，"同一"确实可以由连接结构决定，而且可以跨越极大的表面差别。这给了本书"跟着场结构走"一个坚实的旁证。

可证人也有自己的停点。普适类只讲"同一个类"或"不同的类"：两个系统要么指数完全相同，要么不同，中间没有程度。它也不讲历史：一个系统属于哪个普适类，由此刻的对称性和维数定下，与它怎样形成无关。所以普适类能作证"同一性由连接结构决定"，却不能作证"同一性有程度、程度由回写历史生成"。后半句，还是要本书自己去测。

到这里，七组邻居都已经出过场了。每一组都在某个地方比本书走得更远、更严谨：拓扑斯的真值理论，制度论的搬运保证，可迁移性的因果演算，威尔逊对概念的细描，系统发育的计量方法。本书唯一敢说"多走了一步"的，只有一处。下一节就把这一处单独拎出来，说清楚它是什么、不是什么。

## ◆ 6.6　本书多走的一步：结构亲缘与历史亲缘

这是一个构想的场景。

腊月里，罗秀英奶奶家来了两位客人，都是上门来学织毛衣花样的。罗奶奶在纺织厂干了一辈子，退休后手上没停过，织的麻花、菱格、元宝针，楼里的人都想学。

一位是隔壁新搬来的小媳妇，娄底本地人。她以前没跟谁学过，自己照着手机上的视频织了大半年。罗奶奶让她先织一段平常的麻花针看看。织片一拿过来，罗奶奶捏着翻了两面，说："你这一段，起针、交叉的先后、松紧，跟我织的差不了几处。"

另一位是罗奶奶的外甥媳妇，从邵阳嫁过来的。她的手艺是跟婆婆学的；她婆婆年轻时，是跟罗奶奶的母亲学的。罗奶奶也让她织一段麻花。翻看下来，罗奶奶说："你这一段，跟我的也是差这么几处。"

两段织片，跟罗奶奶的比，"差的处数"一样多。用前几节的话说：结构亲缘一样。

接下来，罗奶奶教了她们一样新的东西：怎样在麻花的底子上，改织一种罗家的"双股绞花"。这是罗家的花样，有几个关节——哪一针先挑、哪一针后压、换行时线往哪边带——罗奶奶自己也是摸索了好多年才定下来的。

教完一遍，两人回家各织。过了一周，外甥媳妇拿来的绞花，罗奶奶一摸就说"对了"；小媳妇拆了织、织了拆，三回下来总有一处别扭——她说不清是哪里，罗奶奶也说不太清，只说"手上的先后不对"。

这是一个构想的场景，不是证据。它只是把本书多走的那一步，放在了一只针线笸箩旁边：两个人此刻的手艺跟罗家"差得一样多"，可从麻花往双股绞花搬的时候，一个顺，一个不顺。不同在哪里？在来历。外甥媳妇的手艺，往上数两代，跟罗家共享一个祖先——罗奶奶的母亲；那一路传下来的挑压先后、带线的讲究、遇到松紧不匀时的改法，虽然各自走了几十年，有的改了，有的没改，底子里还连着。小媳妇的手艺此刻看着同样近，却没有这一段共同的来历。

## 一 两种亲缘

前五节的邻居，可以按他们讲的"亲缘"分成两类。

第一类讲的是**结构亲缘**：两样东西此刻的连接、次序、结构对得上多少。制度论问有没有守住"成立"的翻译，MMT 问有没有视图，结构主义问是否同构，根特纳问关系对得上多少，珀尔和巴伦博伊姆问选择图允不允许搬，Taskonomy 测表征之间帮得上多少忙。它们之间有很大的差别，可有一个共同点：**亲缘是同时的**——把两样东西此刻摆在一起，就能比；**亲缘是按定义给定的**——对得上什么、对不上什么，由结构本身的定义决定，不由这两样东西是怎样一路来的决定。

第二类讲的是**历史亲缘**：两样东西沿着一代一代的来历，共享了多少祖先。系统发育比较方法是这一类的典型，分层模型在层级恰好按历史分时也属于这一类，威尔逊的"历史补丁"在描写上属于这一类。它们的亲缘是**历时的**——要数一路走过来的代际；**是由回写生成的**——每一代怎么改，决定下一代从哪里出发。

还有一类邻居讲的是程度本身：拓扑斯与 Ω-集、量化等式逻辑让真值和相等有了程度，米切尔、伍德沃德、卡特赖特让规律的成立有了程度。前一组是第 4 章说的"多元化的统一性"：系统内尺子统一，系统之间没有亲缘尺子，程度若出现，也由事先给定的真值对象或度量统一安排；后一组的程度属于经验规律，数学在其中不动。

还有一位邻居，本章没有请上桌，留给下一章：拉卡托斯。他在《证明与反驳》里讲多面体的欧拉公式怎样被一个个反例逼着改定义，那本书里"多面体"的定义本来就分化成了好几种，每一种各管一片；数学史上非欧几何也是一次真实的分叉。所以"分叉"不是本书发明的，拉卡托斯和数学史早已摆在那里。第 7 章会正面交手，说明本书在那里多出来的，只是分叉的计量——反面果子进入回写派生树、改变 g。这与本节的区分是同一件事的两面：拉卡托斯讲分叉怎样发生，本章讲分叉之后的亲缘怎样数。

把三类放在一起，本书多走的一步就可以说得很短：

**把结构亲缘和历史亲缘分成两个量，各自去测；主张在结构亲缘控制住相同时，历史亲缘仍然决定规律迁移的程度；并且把这一主张用在数学之场本身上，用在人与机器的分工上。**

这一步有三个部件，缺一个都不算。

第一个部件是**分开**。系统发育方法有历史亲缘，但它关心的是把历史带来的相似"扣掉"，好看清性状之间的真关系；它没有把历史亲缘和此刻的结构相似并排立成两个量、去比谁决定迁移。威尔逊两者都看见了，但在他的描写里两者缠在一起讲。本书要做的是把它们拆成 g_结构 和 g，各记各的账。

第二个部件是**控制之后仍起作用**。这是承重预测：g_结构 相同，g 不同，迁移程度 d 不同。如果这一条不成立——控制结构亲缘之后，历史亲缘一点不起作用——那么历史只是"变得像"的原因，可以被此刻的结构完全吸收，本书的承重命题就错了。这是本书最容易被推翻的地方，也是本书最愿意被测的地方。罗奶奶的针线笸箩旁，两段麻花"差得一样多"，双股绞花却一顺一不顺——如果在数学里，把类似的对子找出来、测下来，发现顺与不顺跟来历毫无关系，本书就输了。

第三个部件是**用在数学之场本身**。前面的邻居里，有历史亲缘的，计量的是生物性状和统计参数；有结构亲缘的，讲的是理论之间的翻译，可翻译此刻就定，不问来历。没有一位把"历史亲缘"放进数学自己的连接、次序与结构里——群论和环论、这一支几何和那一支几何，它们沿回写派生树数下来共享多少祖先，这个数会不会预言一条引理从一支搬到另一支能成立几分。本书的 g 就是这个数。

### — 为什么这一步不是小事

有人会说：这一步不过是把系统发育的思路搬到数学上，换了个对象，算不上什么。

这话有一半对。思路确实是借来的，本书在 6.5 已经明说。可换对象这件事，在这里不是小事，理由有两条。

第一条：数学一向被当作那个"不动的东西"。前面所有的邻居，无论讲多值真值还是讲规律有程度，数学都站在最后一排，当一套不变的描写语言。一旦主张数学之场自己也有历史亲缘、而且这亲缘决定规律在其中搬得多远，数学就不再是站在对象外面的那把尺子，而是一块自己也有来历、有远近的田。这正是第 4 章说的：同一性谱系数学不是多元化的统一性，而是同一性的不同程度——这个程度属于数学之场本身。

第二条：这一步直接落到陶哲轩和大模型公司的分工上。如果数学之场只有结构亲缘，那么机器在一种场结构里沿态射推导，能推多远就推多远，人能做的事越来越少——这正是第 2 章说的统一性赛道上的内卷。如果数学之场还有历史亲缘，而这种亲缘是由一次次"撞果子、回写"生成的，那么就有一样机器单独做不了的活：把机器撞出来的反面果子回写成派生树上的新一支，记下它的来由和先后，让 g 有处可数。第 7、8 章会把这件事讲开。这里先说清楚：本书的人机分工，不建立在"人比机器聪明"上，而建立在"结构亲缘之外还有历史亲缘、而历史亲缘要靠复合主体一代代回写出来"上。

### — 这一步不是什么

最后，要防止把这一步说大。

它不是说结构亲缘不重要。恰恰相反，本书要测 g，前提是先把 g_结构 测准、控制住；制度论、MMT、结构映射、可迁移性的工具，本书一样也离不开。

它不是说历史决定真假。一条定理在它所属的场结构里成立，就是成立；历史亲缘讲的是"搬到另一支去成立几分"，不是"在原地成立不成立"。

它不是说邻居们没想到。威尔逊很可能想到了；系统发育的学者若被问到，大概会说"这在形式上很自然"。本书只说：据本章所查，还没有人把这一步立成可测、可赌、可错的主张，并把它用在数学之场本身与人机分工上。这个判断只管到本章查过的范围，欢迎读者指出更近的邻居。

它也不是一个已经证明了的结论。它是一个预测，赌注写在第 9 章：在数学的形式库里，挑几种代数结构，用它们的概念派生史算 g，用引理跨结构复用的成功率当 d，看控制 g_结构 之后，d 是否仍随 g 变。那是一份研究设计，结果还没有。

罗奶奶的两位客人，后来一个成了她的常客，一个过了年又来学了两回。小媳妇第三回来的时候说："奶奶，我想明白了，不是我手笨，是我没从你家这一路走过来。"罗奶奶说："那你就从现在开始走。"

这一句家常话，正好留给下一章。历史亲缘不是天生的，是一代代回写出来的；那么，一个原本不在这条路上的结果——一个机器撞出来的、让共同体不得不

收窄某条规律的反面果子——是怎样被写进这条路、成为新的一支的？第 7 章就从这里讲起。

**带 走 的 话**

1. **程度早已有了：拓扑斯里真值本来多值，Ω-集和量化等式逻辑让相等有程度；可这些程度由一个事先给定的真值对象或度量统一安排。**
2. **亲缘也早已有了：制度论、MMT、结构主义、结构映射、可迁移性都说迁移跟着结构走；可它们的亲缘是同时的、按定义给定的，不问来历。**
3. **历史也早被计量：系统发育比较方法沿进化树数共同祖先；可它计量的是生物性状与参数，数学本身始终不动。**
4. **本书多走的一步只有一处：把结构亲缘与历史亲缘分成两个量，主张控制前者之后后者仍决定迁移，并把它用在数学之场本身与人机分工上。**
5. **这一步可以错：控制结构亲缘后，迁移若与回写历史无关，本书的承重命题就错了。**

**小　账**

**本章切开的差异：**结构亲缘（同时的、按定义给定的）与历史亲缘（历时的、由回写生成的）。

**本章的场谱系读数：**邻居们的数学之场大多仍是一种结构或几种并列结构，程度由给定的尺子安排；回写只在系统发育那里被计量，却落在生物性状上，尚未落进数学之场本身——本书要把回写的落点从性状挪到场结构的派生树上。

◆

07

第 7 章

# 反面果子：规律被推出场谱系之处

> **这一章的问题**
>
> AI 一年能撞出成百上千颗果子，可果子和果子不一样。哪一种果子会逼着数学长出新的一支，哪一种只是把老树再结满一点?

## ◆ 7.1　同向与反面：孩子第一次发现"爸爸也会算错"

这是一个构想的场景。

谭一禾七岁那年的一个星期天，跟爸爸去菜市场买菜。爸爸在她眼里是什么都会的人：自行车链条掉了，他蹲下去两下就装好；晚上指着天上那几颗亮星，他说得出哪个是哪个；她问"为什么下雨前蚂蚁要搬家"，他也答得上来。每一次，她心里那个"爸爸什么都知道"的样子就更结实一点。

那天买完排骨和青菜，摊主报了个数，爸爸掏出一张一百的，摊主找回一把零钱。爸爸看也没看就塞进口袋。一禾刚在学校学了两位数加减，她拉住爸爸，掰着指头重新算了一遍，算出来摊主多找了五块钱。爸爸愣了一下，又算了一遍，笑了，转身回去把五块钱还给了摊主。

回家的路上，一禾没怎么说话。她不是难过，是心里有一样东西被挪了位置。

我们先把这两种经历分开看。

前面那些——爸爸会修车、会认星、会答蚂蚁的问题——每一件都是一颗果子，而且都顺着她心里早就有的那条线长：爸爸什么都知道。果子越多，那条线越粗。这种果子，我们叫它**同向果子**：结果出来了，可它印证的正是大家本来就默认的那一套，原来的线不用改，只是更结实。

菜市场那五块钱不一样。它也是一颗果子，可它把"爸爸什么都知道"推出了它原来管得着的地方。一禾不能再把这句话照原样用下去了。她得收窄它：爸爸修东西、认星星说得对，可算账这件事，他也会出错。

光收窄还不够。更要紧的是收窄以后发生了什么。

从那天起，一禾买东西时多了一个动作：先自己在心里算一遍，再听大人报的数。她不是不信爸爸了，而是在"算账"这一块，她另起了一套做法——先算后听，算完再对。这套做法和原来那套"听爸爸的"不是同一条线上多加一句"注意，有时会错"，而是先后次序整个换了：原来是先听后信，现在是先算后对。

这种果子，我们叫它**反面果子**：结果落地以后，大家必须把某条默认的规律收窄，而且收窄以后，那一块要换一套连接和先后，另起一支，才能接着往下走。

作者认为，数学的革命需要果子，而且必须是"反面的果子"。这句话乍一听有点怪：数学家不是最怕错吗？反面果子不就是"出错了"吗？其实不是。爸爸算错五块钱这件事本身不值得惊喜，值得惊喜的是一禾心里那棵树从此多了一个杈：一边是"爸爸说的我可以信"，一边是"账我自己来算"。这个杈不是把原来的树砍了，也不是在原来的树枝上贴一张"小心"的纸条，而是树真的多长出一支，此后两支各自往前长。

这个杈还有一样后来才看得出的东西：它有来历。几年以后，一禾上了初中，碰到一个说话很有把握的数学老师。她会照样听，也会在自己算得出的地方先算一遍。她对这位老师的那一套做法，和对爸爸的那一套，在"先算后对"这一步之前是同一个样子，都是从菜市场那天分出去的那一支。再过几年，她读到一篇网上的文章，数据说得头头是道，她的第一反应也是先找个地方自己核一核。她不一定记得菜市场那五块钱，可她身上这一支做法，往回数，就是从那一代分出来的。一颗反面果子留下的，不只是当时的一个杈，而是往后很多枝条共同的祖先。

再说同向果子。为什么在一个人、一个家、一个共同体里，同向果子总是多数？因为人总是沿着已经长熟的线去找东西。一禾问爸爸问题，问的多半是她猜爸爸答得上来的那一类；爸爸露一手，露的多半是他拿手的那一类。线越熟，果子越顺着线长。这不是谁有意为之，是场本身的样子决定的：已经连好的地方，最容易再结果。本书第 2 章讲的那把尺子也是这个道理——大家都在同一条线上比谁快，结出来的几乎全是同向果子，结得再多，也只是把那一条线压得更沉。

我们再看一眼这件事里有什么在同时发生。

一禾掰着指头算，一步一步，个位、十位、借一、减去——一个差别接着一个差别，排成一条路。在这条路上，"多找了五块"这件事一层层显出来：先是"好像不对"，再是"多了"，再是"多了五块"，最后是"爸爸也会算错"。而这一切都缠在一个具体的场里：菜市场的吵闹、那张一百块、爸爸平常的样子、她刚学会的两位数减法、她对爸爸的那份信。换一个从没学过减法的孩子，这颗果子根本不会显出来；换一个平时就爱算错的爸爸，它显出来也只是同向——"果然又错了"。

所以，同向和反面，不是看果子本身长什么样，而是看它落进了一个什么样的场：那个场里已经默认了哪些连接、哪些先后。这一点下一节要细讲。

我们不妨设想，那天在菜市场，一禾可能有三种不同的反应，看看哪一种才算让反面果子落了地。

第一种，她发现多找了钱，可是一转念：爸爸怎么会错呢，一定是我算错了。于是什么也没说。这颗果子掉在地上，被她自己踢开了。她心里那条线照旧，"爸爸什么都知道"一根毫毛都没动。这不是因为果子不够硬，是因为她把它当成了自己的毛病，没让它和那条线真正顶上。

第二种，她回家后越想越不对，第二天对妈妈说："爸爸连钱都算不对，他说的话我以后都不信了。"这一回果子是落地了，可她把整棵树都砍了。连修车、认星这些爸爸真会的，也一并扔掉。这样做看着很"革命"，其实和第一种一样粗：前一种是什么都信，后一种是什么都不信，心里都只有一条线，只是方向倒了过来。

第三种，就是前面说的那样：修车认星，她照样跟爸爸学；算账，她自己先算。原来那条线没有被抹掉，只是被划了一道界，界那一边，长出了新的一支。

三种反应里，只有第三种让反面果子真正发挥了作用。第一种是不认果子，第二种是用果子推倒一切，第三种是让果子成为一个分叉点。数学共同体面对 AI 撞出来的果子，也会有这三种反应：当成废料、当成"AI 证明数学家没用了"的宣言，或者当成谱上的一个杈。本书要说的，只有第三种能让数学长出新的一支。

先把本章要用的两件事说定。

第一，同向果子不是坏东西，更不是没价值。爸爸会修车、会认星，这些都是真本事，一禾因此更愿意跟他学。数学里的同向果子也一样：一个难题按大家预料的方向被证出来，证明里往往有新手法、新工具，值得学，值得用。只是它不逼着那棵树分杈。

第二，反面果子也不是"推翻"。一禾没有因此认定"爸爸什么都不懂"，那是从一个极端跳到另一个极端，和原来一样粗糙。反面果子做的事是划一道界：在界这一边，旧规律照样好用；在界那一边，要另起一支。它留下的不是一片废墟，而是一个分叉。

带着这两件事，我们去看数学。2026 年这一年，AI 撞出来的果子多得共同体消化不过来。哪些是同向，哪些是反面？分辨它们，不能看结果是"证明了"还是"推翻了"，也不能看它有多难、多长、花了多少钱。要看的是：它落进去以后，共同体默认的那一套连接和先后，要不要动，动了以后要不要另起一支。

## ◆ 7.2 "反面"是相对于共同体默认的场结构，不是逻辑形式

湖南人请客，桌上一般少不了辣椒。娄底一户人家来了个广东朋友，主人特意做了一道清蒸鱼，一点辣都没放。广东朋友尝了一口，说："这才是鱼的味道。"他说得很平常，鱼不辣，正合他的口味，他心里那一套"好菜要吃出本味"的讲究又被印证了一回。可坐在旁边的主人家老人尝了一口，筷子停了一下：原来不放辣也能这么好吃。

同一道菜，同一句"这道菜不辣"，在广东朋友那里是同向的，在老人那里是反面的。

为什么？不是因为这道菜变了，也不是因为这句话的说法变了。是因为两个人嘴里、心里早就沉淀下来的那一套东西不一样。老人吃了几十年的饭，在他那里，"好吃"和"有辣"是连在一起的，做菜的先后也是围着辣排的——先爆辣椒，再下主料。这是他的默认。这道清蒸鱼把"好吃"和"有辣"之间的那根连线挑断了，他得收窄"好吃的菜要有辣"这句话。而在广东朋友那里，"好吃"本来就连着"本味"，清蒸鱼正好落在这条线上，什么都不用动。

这就是本节要说清的一件事：**"反面"不是一句话的逻辑形式，而是相对于共同体默认的场结构说的。**

什么叫逻辑形式？就是一句话长得像肯定还是否定，像"存在"还是"不存在"，像"成立"还是"不成立"。很多人一说"反面结果"，脑子里想的就是否定句：某某猜想不成立，某某方程会爆破，某某反例存在。可是光看句子长成否定的样子，判断不了它是同向还是反面。"这道菜不辣"是一句否定句，可它对广东朋友是同向的。

什么叫共同体默认的场结构？本书前面几章已经讲过，数学在 SDE 里是信息那一维的"场"：一群特征之间怎样连在一起、按什么先后、搭成什么样子。一个数学共同体做了几十年、上百年的研究，就会在这个场里沉淀出一套默认：哪些概念总是连着用，哪些引理总是先证，哪些规律被当成不用再问的前提。这套默认，没有写在哪一本教科书的扉页上，它散在成千上万篇论文的引用里、证明的先后里、研究生读书的次序里。就像那位老人家里的做菜次序，不是谁规定的，是几十年一锅一锅炒出来的。

一颗果子是同向还是反面，要拿它去碰这套默认。碰了以后，如果默认的连接和先后一根都不用动，只是多了一个结果挂在上面，它是同向的；如果某条被当作前提的规律必须收窄，而且收窄后那一块要换连接、换先后才能接着推，它是反面的。

这里有三点容易弄混，我们一条一条说。

**第一，否定形式的结果可以是同向的。** 假如一个共同体普遍认为某个猜想大概不成立，后来真有人证出它不成立，那这是一个印证。它的句子是否定的，可它的方向和共同体的默认是一致的。大家心里那张图上，这个猜想早就画在"大概不成立"那一边，现在只是把虚线描成了实线。下一节要讲的 Navier–Stokes 那件事，正是这一种。

**第二，肯定形式的结果也可以是反面的。** 道理反过来一样。假如大家默认某一类东西不存在，或者默认某条路走不通，有人构造出一个、走通了一条，句子是肯定的，可它挑断了默认里的一根连线。它是不是反面，仍然要看后面那半句：共同体要不要收窄某条规律，收窄后要不要另起一支。

**第三，"反例"也不等于"反面果子"。** 数学里每天都有人找到反例。有的反例针对的是一个没人当真的猜想，它落地以后，没有哪一串推导是站在那个猜想上面的，共同体的默认一根线都没断，这样的反例在本书的意义上不算反面果子，它只是一个零碎的事实。有的反例落在一条被大量结果默认使用的规律上，它一落地，一长串推导都要回头看：哪些用到了这条规律、用到了它的哪一段。只有后一种，才可能是反面果子。

所以，同一颗果子，在不同的共同体那里可能方向不同。就像那道清蒸鱼，在广东人那里同向，在娄底老人那里反面。数学里也是这样：一个结果对研究偏微分方程的人可能完全在意料之中，对另一群把它当工具用的人可能是挑断连线的大事。说"反面"，要先说"相对于谁的默认"。

这听上去好像把"反面"说得很主观，谁说是就是。其实不然。共同体的默认不是藏在每个人心里的想法，它是可以读出来的。它沉淀在那张越长越大的推导网里：哪些结果引用了哪些结果，哪些定理在证明里把哪条规律当作前提，哪些概念总是一起出现。现在有了形式化的定理库，这张网的一部分已经被写成了机器能读的依赖关系。一条规律被多少条后续推导当作前提，它的适用范围一旦收窄，要回头动的是哪些地方，原则上是查得到的。

这样一来，"反面"就有了一个不靠嗓门大小的读法：一颗果子落进来，看它碰到的那条规律在推导网里压着多少东西，收窄以后要动多少，动的时候是贴一张"注意"的条子就够了，还是那一片要换连接、换先后重新长。前者分量轻，后者才是反面果子。至于"贴条子"和"另起一支"之间的界线到底在哪里，7.5 节专门讲。

说"相对于共同体"，还要多问一句：哪一个共同体？数学不是一个大锅饭，它是一层套一层的。研究流体方程的人是一群，研究多项式映射的是一群，用这些结果的物理学家、工程师又是一群。同一颗果子落下来，在一层里同向，在另一层里可能反面。这不是乱，正是场有谱系的样子：每一群人的默认，是他们自己那一支一代代回写出来的。判断一颗果子的方向，先要说清它落进的是哪一支、哪一层的默认。

这对 AI 时代特别要紧。AI 学的是已经写下来的数学，它最熟的，正是共同体默认的那一套连接和先后。让它在熟线上冲，它结出来的大半会是同向果子：快、

多、顺。可它也有一样人没有的本事：不怕累，一条路试一万遍，敢往大家默认"不值得去"的角落里摸。反面果子往往就藏在那些角落里——默认的线以为管得着、却没人真去走过的地方。所以，同一台机器既可以是同向果子的流水线，也可以是反面果子的探测器，差别在于它被放到哪里、被让去找什么。这一点第 14 章会再说。

还有一点要说透：为什么偏偏是"默认的场结构"，而不是"默认的观点"？

因为观点可以一夜之间改，场结构不行。那位老人尝了清蒸鱼，嘴上马上可以承认"不放辣也好吃"，可他明天做饭，手还是会先去拿辣椒。他的做菜次序，他舌头上"好吃"连着"有辣"的那根线，是几十年一顿一顿回写出来的，沉淀在手上、舌头上，不是一句话能抹掉的。数学共同体也是这样。一个反例公布了，大家嘴上都会认，可推导网里那些默认它的连线，那些研究生读书的先后，不会自动改。改它们要真花工夫：回头查、重新证、换概念、立新支。正因为场结构难改，反面果子才有分量；也正因为难改，它一旦改了，就会留下来，成为后面所有推导的起点。

用 SDE 的话说一句（只说一次，后面都用白话）：反面果子是一次显露，它和共同体沿着单一结构消化果子的那条路顶撞了；这一顶，推动的是数学那一维的场本身，场的结构从一种变成分了权的谱系；分出来的权再回头写进下一轮推导的起点。顶撞的是果子和路，被推动的是场，回写的是新的一支。三样在同一件事里，拆不开。

用这个眼光再看那位老人。他尝到清蒸鱼那一口，舌头上的"好吃"和他几十年的"有辣"顶了一下。如果这一顶就此过去，下一顿照旧，那就是轮回。如果他从此在家里偶尔也蒸一回鱼，学着不放辣，那么他做菜的那一片场就分了权：一支照旧围着辣排先后，一支围着鲜排先后。往后他的孙辈学做菜，学到的就是两支，而且知道它们是从哪一顿饭分开的。

这也说明了为什么本书一直说"规律被推出场谱系之处"，而不说"规律被推翻之处"。被推翻，听上去是这条规律错了、作废了。被推出，是说这条规律原来以为自己管得着整片地，现在发现它只管得着一部分；越出那一部分，就进了另一支场谱系，那里有另一套连接和先后。规律还在，只是有了边。那位老人的"好吃的菜要有辣"没有作废，在他家的红烧鱼、小炒肉那里照样成立；只是到了清蒸鱼这里，它够不着了。

下一节，我们拿 2026 年两件真事来对一对：一件是 Navier–Stokes 那一头的爆破，一件是雅可比猜想的反例。两件都是 AI 撞出来或参与撞出来的大果子，两件的句子都长成"否定"的样子，可一个是同向，一个是反面。

## ◆ 7.3　Navier–Stokes 爆破与雅可比反例

先讲一个日常的场景，这也是一个构想的场景。

曾晓岚在娄底一所初中教数学。期中考完，她批到一个平时数学不太好的孩子的卷子，最后一道大题空着没做。她不意外，这孩子这类题一向卡住，她心里早就有数。这件事落进她的教学里，什么都不用改：原来的判断是对的，原来的教法照常，最多下周多找那孩子讲一回。

批到第三十份卷子，她停住了。全班成绩最好的那个课代表，选择题第七题选了一个和标准答案不一样的选项。她拿起来细看，又重新算了一遍，发现错的不是课代表，是年级统一发下来的标准答案。

这件事就不一样了。她不能只改这一份卷子。凡是按标准答案判过这道题的卷子，都要回头重看；年级里别的老师按同一份答案批的，也得通知；更麻烦的是，这道题出得本身有点含糊，在一种读法下答案是 B，在另一种读法下是 C。她和备课组最后的决定，不是简单把 B 改成 C，而是把这道题拆开：在题目说的那种情形下是 C，若换成另一种情形，B 才对，下次出题要把两种情形分开写。

一个空着的大题，印证了原来的判断，什么都不用动，是同向的。一道错掉的标准答案，逼着大家把"这份答案在全年级通用"收窄，而且收窄以后，那道题要拆成两支、分开讲，是反面的。两件事都是"出了个错"，句子长得都像"不对"，方向却完全相反。

带着这个场景，我们来看 2026 年的两件事。

### – 一、Navier–Stokes：一颗巨大的同向果子

Navier–Stokes 方程描述的是像水、像空气这样的流体怎么流。它有一个著名的问题：在三维空间里，从光滑的初始状态出发，解是不是会一直保持光滑，还是会在有限时间里"爆破"，出现无限大的奇异。这是千禧年难题之一。

OpenAI 用约一万个智能体攻下的那份 Navier–Stokes 证明，来历第 1 章已经讲过：约 165 页，附 Lean 证书，据陶哲轩说没有专家真正理解整个论证。〔待核：这一证明所针对的方程具体形式与结论的确切表述，以原始公告为准〕

同年 9 月还有一件相近的事，只能算旁例：Alpöge 与 Buckmaster 宣布，带光滑外力项的三维不可压 Euler 方程会在有限时间爆破，论证经过 Lean 形式化。Euler 方程可以看作 Navier–Stokes 去掉黏性的那一位近亲，但两者不是同一个方程；下面把它也算作同向，依据的是"流体方程大概会爆破"这一共同预期，属本书的判断。

这是一颗很大的果子。花的钱多，用的机器多，证明长，形式化也做了。可是在本书的分辨里，它是同向的。为什么?

陶哲轩说过，此前的共识是，Navier–Stokes 的正则性大概会失败。也就是说，研究流体方程的这个共同体，心里那张图上，"会爆破"这一边早就画了虚线。几十年里很多人在构造爆破的机制、找可能出奇异的路线，许多推导默认的方向正是"光滑性大概守不住"。现在爆破这一边被证出来了，句子是否定的——"光滑性不成立"——可它的方向和共同体的默认一致。

它要求谁收窄什么吗? 没有哪条被大量推导当作前提的规律因此要缩小适用范围。原来朝着爆破方向做的工作，现在有了落脚处；原来的连接、原来的先后，一根都不用动。就像那张空着的大题：老师的判断被印证了，教法照常。

这里要特别分清一件事：**难消化，不等于反面。** 陶哲轩说没有专家真正理解整个论证，这是一个真问题，而且是这本书第 1 章就碰到的问题：果子交了，过程没交，或者交了的过程人读不进去。可这个问题和"同向还是反面"是两回事。一颗同向果子可以非常难懂，一颗反面果子也可以很好懂。难懂说的是复合主体之间的消化力，方向说的是它和共同体默认场结构的关系。把两件事搅在一起，就会以为"越难越震撼的结果越是革命"，其实一个一万个智能体跑出来的、没人读得懂的证明，若是顺着大家早就预料的方向，它对数学之场的形状改得并不多。

## 二、雅可比猜想：一颗反面果子

雅可比猜想说的是多项式映射。拿 n 个变量的 n 个多项式，组成一个从 n 维空间到 n 维空间的映射。如果这个映射的雅可比行列式（衡量它在每一点附近怎样伸缩的那个量）处处是一个不为零的常数，那么它就有一个同样是多项式的逆映射。这个猜想 1939 年由 Keller 提出，八十多年里，围绕它积累了大量工作：有人证明了低次数情形，有人把一般情形化归为某种特殊形状的映射，也有人把它和别的猜想连成了等价或蕴含的链条（比如与代数里的狄克斯米尔猜想之间的关系）〔待核：各项化归与等价结果的确切条件〕。

2026 年 7 月，雅可比猜想被 AI 构造的反例推翻了。陶哲轩用了两天时间，和聊天机器人一起把它消化下来：他亲自推代数，用工具一步一步核对，去查文献。〔待核：反例所在的维数、次数与系数域〕

为什么说这是反面果子?

第一，它落在一条被大量工作默认的规律上。八十多年里，"常数雅可比行列式意味着多项式可逆"这件事，被很多人当作值得为之化归、为之搭桥的目标，一批结果的价值就挂在"它若成立"这条线上。这和一个没人当真的猜想被推翻不一样。它一落地，推导网里一大片连线都要回头查：哪些结果是无条件的，照样成立；哪些是"若雅可比猜想成立则……"，现在要改写；哪些化归在反例所在的那一块还管不管用。

第二，共同体必须收窄。原来的话是"对一切 n、一切满足条件的多项式映射都成立"，现在不能这么说了。最起码要说：在某些维数、某些次数、某些情形下它还成立（或者还没被推翻），越出这条界，就不成立。这正是 7.1 那个孩子心里发生的事："爸爸说的都对"变成了"修车认星说得对，算账我自己来"。

第三，也是最要紧的，收窄以后，那一块要另起一支。反例所在的那一片，往后的研究不能再沿着"它若成立"的方向推，而要问新的问题：这类反例是怎样长出来的，它们在多大的范围里有，哪些附加的结构能把它们排除掉，排除之后剩下的那一块又该怎样重新组织。这些问题需要新的连接——把反例的构造方式和原来的化归方式连起来；需要新的先后——先弄清反例在哪里，再谈哪里成立。这已经不是在原来那条推导链上加一句"另需假设某某"能打发的事了，而是一支新的场结构。

陶哲轩那两天的工作，恰好是这一支开始长的样子：不是读一下"反例存在"就算完，而是亲手推一遍，看它怎样和已有的文献接上，查清楚它断掉了哪几根线。这是回写的第一拍。

## 三、722 道题：分不出方向的一大堆

第 1 章讲过的那 722 道题，陶哲轩读了大约十篇，延伸、新意、难懂、撤回，四样都有。

这一大堆果子放在本章的眼光下，最扎眼的不是它们对不对，而是没人说得出它们各自是什么方向。"延伸已有工作"的那些，多半是同向的：顺着原来的线再往前一步。"真正新的想法"那一两篇，可能是同向里的新手法，也可能碰断了什么，读完之前不知道。而"许多难以理解"的那一部分，连方向都判不了：你不知道它落进的是哪一支的默认，就更说不清它是印证还是挑断。

方向判不出来，后果是实在的。一颗反面果子若混在七百多颗里，没被认出来，它就只是一个"已解决"的标记，那一块该另起的一支没人去起；一颗同向果子若被误当成反面，又会让人白白去找并不存在的分叉。陶哲轩批评这次释出事先没有和数学家协调、抹掉了一些年轻人的课题，那是另一层的问题；在本章这一层，问题是：果子是一颗一颗倒出来的，没有一颗随身带着"我落在哪一支、碰了哪根线"的标签。7.6 节要讲的，就是这张标签怎么写。

## 四、两颗果子放在一起看

| | Navier–Stokes 一侧的爆破 | 雅可比猜想的反例 |
|---|---|---|
| 句子的形式 | 否定的：光滑性不成立 | 否定的：猜想不成立 |
| 共同体默认 | 大概会失败 | 被大量工作当作目标与前提 |
| 落地后要收窄吗 | 不用，印证了默认 | 要，适用范围必须划界 |
| 收窄后要另起一支吗 | 不用，原有连接与先后照旧 | 要，反例那一片要新的连接与先后 |
| 本书的分辨 | 同向果子 | 反面果子 |

两件事的句子都是否定的，都是 AI 深度参与，都是大事。区别不在句子，不在规模，在它们和共同体默认的场结构是什么关系。一个落在虚线上，把虚线描实；一个挑断了一根被很多东西压着的实线，逼出一个权。

还要补一句公道话。说 Navier–Stokes 这一侧的结果是同向果子，不是说它不重要。它会养活一大批后续工作：爆破的机制是怎样的，在什么条件下会出现，能不能推到别的方程。同向果子让原来那一支长得更壮。只是本书关心的是另一件事：数学这棵树会不会多长出新的一支。在这件事上，同向果子使不上劲，反面果子才是燃料。

那么，"规律被逼着收窄，然后另起一支"，这件事在过去的科学哲学里有没有人讲过？有，而且讲得很好。下一节就去见他们。

## ◆ 7.4　与库恩不同，与拉卡托斯相近，本书多出的是分叉的计量

家里煮米饭，很多人记着一条老规矩：米和水一比一，水没过米一个指节。这条规矩在一户人家用了很多年，一直好使。

有一年秋天，买回来的是新米。照老规矩煮，饭软得发黏。家里人第一个反应往往是："这米不对，不是正经米。"这是把反例往外推：出问题的不是规矩，是米。

过了几天，又说："新米除外，新米少放点水。"这是给规矩加个例外：规矩还是那条规矩，只是开了一个口子。

再过一阵，有人琢磨明白了：其实不是新米、陈米的事，是米本身干湿不同，越湿的米越要少放水。于是规矩被改写成"水量看米的干湿"。这一步比前两步深：原来那条规矩里藏着一个没说出来的前提——"米是干的"——现在这个前提被挖出来，写进了规矩本身。

后来家里又买了糙米。糙米光少放水不行，要先泡上几个小时，再煮，煮的时间也长。这一回，不是在"看干湿定水量"上再加一条，而是整个先后都换了：先泡，后量水，再煮，煮完还要多焖一会儿。糙米的做法和白米的做法，从这里分开了，成了两支。

这个煮饭的故事，熟悉科学哲学的读者一眼就能认出来，它几乎是拉卡托斯那本《证明与反驳》的家常版。在说本书的看法之前，先把两位前人的路讲足、讲公道。

## 一、库恩：反常、危机与整体更替

库恩在《科学革命的结构》里讲，一门成熟的科学平常处在"常规科学"的状态：大家在一个公认的范式下解难题。解题过程中会碰到"反常"，也就是按范式预料不该出现的结果。反常一开始会被搁置，或者被想办法纳入；积累多了，范式陷入危机；危机严重到一定程度，一个新范式取而代之，这就是科学革命。新旧范式之间，在库恩看来有某种"不可通约"，彼此不能用同一把尺子量。〔待核：库恩对数学是否同样适用的具体说法〕

库恩看见了很要紧的东西：科学不是一条直线累积，有一些结果会撼动整个共同体的做法。本书第 3 章讲过，"AI 做常规、人做典范"这个共识，很大程度上就站在库恩的肩上。

本书和库恩不同的地方有两处。

第一，库恩不分同向与反向。在他那里，一个结果重不重要，尺子是范式的成败：能不能解掉悬着的难题，会不会动摇范式。可正如上一节看到的，一个巨大的、印证共识的结果和一个挑断默认连线的结果，在"重大"这一点上可以不相上下，在方向上却完全相反。库恩的框架里没有专门的位置区分这两种果子：一个让原来那一支更壮，一个逼出新的一支。

第二，库恩的变化是整体更替，不是分叉。反常积累到危机，换来的是一个新范式，旧范式退场。新旧之间若不可通约，就谈不上谁和谁亲缘多深。本书要的恰恰相反：反面果子落地以后，旧的那一支并不退场，在它管得着的地方照样好用，新的一支从某个点分出去，两支之间的亲缘有多深，正是要数的东西。就像煮饭，糙米的做法立起来以后，白米照样按老规矩煮，两种做法从"量水"这一步之前是一样的，从"泡不泡"开始分开。

## 二、拉卡托斯：反例怎样逼出概念的分化

拉卡托斯的《证明与反驳》用一堂虚构的课堂讨论，重走了多面体欧拉公式的历史：顶点数减棱数加面数等于二。课上不断有人拿出反例，比如中间挖空一个立方体的立方体、像画框那样中间有洞的多面体、星形的多面体，每一个都让公式不成立。

面对反例，课堂上出现了几种应对。一种是"排除怪物"：说这些东西根本不算多面体，把定义改得把它们挡在门外，就像说"新米不是正经米"。一种是"排除例外"：承认它们是多面体，但说公式只对"没有这些毛病的"多面体成立，开个口子，就像说"新米除外"。还有一种拉卡托斯最看重的，"引理吸收"：回到证明里去看，反例到底让证明的哪一步失效了，把那一步隐含的前提挖出来，写进定理的条件里，就像把"米是干的"这个隐含前提写进"看干湿定水量"。在这个过程里，证明本身反过来生成新的概念，拉卡托斯叫它"证明生成的概念"。

这里必须如实承认：**拉卡托斯并非只讲收窄、不讲分叉。** 在他的叙述里，"多面体"这个概念被一个一个反例逼着分化了：有的多面体满足公式，有的不满足，人们开始区分不同种类的多面体，各自配上相应的条件。一个原来以为统一的概念，在反例的推动下长出了好几个分支。这正是反面果子逼出分化的一个经典案例。后来这条线一路长下去，欧拉公式被推广：对于不同"形状"的曲面，那个"等于二"的二换成了一个随曲面而变的数，也就是今天说的欧拉示性数〔待核：这一推广在拉卡托斯书中的呈现程度〕。

同样要如实承认的，是数学史上另一次著名的分叉：非欧几何。欧几里得几何里有一条平行公设，大意是过直线外一点有且只有一条直线与它平行。两千年里很多人想从其他公理推出它，都没成功。十九世纪，罗巴切夫斯基、鲍耶等人干脆换一条：过直线外一点，可以有不止一条平行线。从这里长出了一整套自洽的几何，后来又有了另一种情形下的几何。一条原来以为对整个空间都成立的公设，被推出了它的场谱系，几何从此分成了几支。这是一次真正的分叉，而且分出去的每一支都发展出了自己的连接和先后。

把拉卡托斯那几种应对和煮饭对一对，会发现它们正好落在本书要用的几个格子里。"排除怪物"是不认这颗果子，相当于把它当废料扔出去；"排除例外"是开个口

子，相当于下一节说的"加一条假设"；"引理吸收"最有意思，它有时只是把一个隐含前提写明，规矩的先后不变，那仍是加假设；有时却挖出一个原来没有的概念，后面的证明要围着新概念重新排，那就已经是另立一支了。拉卡托斯自己并没有用"加假设"和"另立一支"来分这两种引理吸收，可他写下的那些课堂对话，正好给后面的分辨留了足够多的材料。

所以，说"反例迫使收窄，收窄迫使分化"，这一层前人早就看见了。拉卡托斯写出了它在概念层面怎样一步步发生，数学史上也有非欧几何这样的大分叉为证。本书在这一层上，是站在前人的路上，不是另开一条。

## 三、本书多出的一步：分叉的计量

那么本书多出了什么？多出的是一件看上去很小、做起来不小的事：**数分叉**。

拉卡托斯写出了多面体概念的分化，可分化以后，不同种类的多面体之间亲缘有多深，他没有去量；他关心的是证明与反驳怎样推动知识增长，分化是这个过程的结果，不是被计量的对象。非欧几何分出来以后，后人确实给几何排过秩序：十九世纪后期有人按"保持哪些性质的变换"来排列各种几何，谁包含谁、谁是谁的特例（克莱因的"埃尔朗根纲领"）。可这种排列，是按结构排的：看两种几何的变换群之间是什么关系。那是同时给定的、按定义就能查到的结构亲缘，和这两种几何是在哪一步、因为哪一颗果子分开的，没有关系。

本书要的是另一种亲缘：历史亲缘。

回到煮饭。白米的做法和糙米的做法，从"量水"之前的那几步——淘米、看米、估量人数——是同一套；从"要不要先泡"那一步分开。新米的做法和陈米的做法分得更晚，只在"水放多少"上差一点。如果有一天你家来了一种没见过的米，你想知道原来白米的哪些诀窍能用过去，最好的办法，往往不是看这种米和白米长得像不像，而是看它是在哪一步、因为什么分出去的——分得越晚，共同的步子越多，诀窍搬过去就越管用。

数学里也是这样。本书在第 5 章定义了 g：两个场结构在"回写派生树"上的共同祖先深度。说白了，就是沿着一次次回写的代际往回数，两支在分开之前共享了多少连接、多少先后、多少结构；不看任何规律搬过去成不成，只看它们的来历。反

面果子在这里的位置很清楚：**每一颗反面果子，都是回写派生树上的一个分叉点。**它落地、被收窄、另起一支，派生树上就多出一个杈；从这个杈分出去的两支，共同祖先就停在这一代。往后在两支上各自长出来的东西越多，它们的 g 就固定在分叉那里不再增加，而各自的新结果就越来越多地只属于自己那一支。

于是，反面果子不再只是"知识增长"故事里的一个情节，它成了一个会改变 g 的事件。雅可比猜想的反例一落地，那一片多项式映射的研究就在派生树上被劈开：反例这一侧，和"仍成立"那一侧，从此有了一个可以标出代数的分叉点。

这一步多出来，就能说一句前人的框架里说不出来的话。本书的承重预测是：在两对场结构静态结构一样像的条件下（不管你用理论之间的态射、结构映射还是别的什么办法量这种像），回写历史不同，规律从一支搬到另一支的成立程度就不同。放到反面果子上，就是：拿两对静态结构相似度相同的分支，一对是在很晚的一颗反面果子处才分开的，一对是很早就分开的；本书预测，前一对之间引理搬过去成立的比例更高。这是一个研究设计，不是已经测出来的结果。在本书里，它要到第 9 章才搭成一个可以动手的测法。

它可以被推翻：如果真去测了，控制住静态结构的相似度之后，搬得动搬不动和分叉的早晚毫无关系，那么本书多出的这一步就是多余的，前人的结构排列已经够用。

最后再说一句为什么这一步不是咬文嚼字。在一个 AI 一年能撞出成百上千颗果子的时代，反面果子会越来越多。如果只像拉卡托斯那样，在每一个具体案例里写出概念怎样分化，那是一部又一部精彩的历史；可当分叉一年冒出几百个，共同体需要的不只是历史，而是一张能数、能查、能预测的谱：哪两支近，哪两支远，哪里的引理可以放心搬，哪里搬过去要重新证。分叉的计量，就是把反面果子从"故事"变成"谱上的点"。

可是，要数分叉，先得认得分叉。一条规律被收窄了，到底是另起了一支，还是只在原来那支上加了一条假设？这条界线不划清，派生树上就会满是虚假的杈。

## ◆ 7.5 "另立一支"与"加一条假设"的界线

教孩子过马路，大人都会教一句：先看左，再看右，再看左。在中国，车靠右走，离你最近的车道上的车从左边来，所以先看左。

有一天你家孩子要过一条正在修路的街，交警站在路口指挥。你会补一句："有交警的时候，听交警的。"这是在原来那条规矩上加了一条：先看左再看右照样有效，只是多了一个优先的情形。孩子不用重新学过马路，原来的先后一个都没变，只是多了一个"如果……就……"。

后来你们去了一个车靠左行驶的地方旅游。这一回，你不能再加一句"注意，这里车靠左"了事。车从右边先来，整个看的先后都要倒过来：先看右，再看左，再看右。孩子在国内练熟的那个动作——一到路边，头先往左转——在这里恰恰是危险的。他要另起一套：站在路边先想一想"这是哪种路"，再决定头往哪边转。这不是在原来那条规矩上贴一张纸条，而是另立了一支。

两件事都可以说成"原来那条规矩被收窄了"：在有交警的路口，"先看左"不再是全部；在靠左行驶的地方，"先看左"干脆不成立。可它们收窄以后的样子很不一样。前一种，原来的连接和先后全都保留，只多了一个前提；后一种，先后本身换了，新的动作要在新的次序里重新练熟。

反面果子的判据，本章开头已经说定：结果落地后共同体必须收窄某规律默认的适用范围，而且收窄后的规律要另立一支场结构才能继续推导。"另立一支"的意思是，后续推导要在一个新的连接与次序中进行，进入回写派生树成为新枝。光是收窄、加一条假设，不算。

这条界线在数学里怎样落到能操作？下面给四个检验，按从易到难排。它们都是为了让"另立一支"这件事可以被别人查、被别人反驳，而不是由写论文的人自己宣布。

**第一，删除检验：去掉新加的条件，原来的推导还能不能照抄？** 如果收窄的办法只是给一条规律加上一个前提，那么所有用到这条规律的旧推导，只要把这个前提一路带着走，一个字不改就仍然成立。就像有交警的路口：原来过马路的每一步都还在，只是前面多了一句"若无交警"。这种情形是加一条假设。反过来，如果加了

条件以后，旧推导的某些步骤本身失效了，要换别的引理、别的论证才走得通，那就开始像另立一支了。

**第二，重排检验：后续推导的先后有没有变？** 这是最要紧的一条。另立一支的标志，是在新的那一块里，引理的先后、概念出场的次序要换。原来先证 A 再证 B，现在要先弄清楚某样新东西，A 和 B 的证法都跟着变；或者原来 A 是 B 的前提，现在倒过来。过马路那件事，核心就是"先看哪边"换了。如果收窄以后，后续推导的骨架一节都没挪，只是到处多带了一个条件，那还是加假设。

**第三，新概念检验：要不要新的连接？** 另立一支，往往要把原来不连在一起的东西连起来，或者要一个原来没有的概念来组织这一块。雅可比猜想的反例落地以后，要问"反例是怎样构造出来的、它和原来的化归方式怎样接上"，这就要把构造反例的手法和原来的研究线连起来；拉卡托斯的多面体故事里，也是反例逼着人去区分原来没有区分的几种多面体。如果收窄只是在旧概念上划一条线，不需要任何新的连接，多半只是加一条假设。

**第四，回写检验：在派生树上，新结果的后代经不经过旧节点？** 这一条要借形式化定理库才做得细。把推导网画成一棵派生树：每一条新定理，看它的证明依赖哪些旧定理。如果收窄以后，新那一块里长出来的定理，依赖链仍然一路穿过原来的那个节点，只是在节点上多挂了一个前提，那是加假设；如果新那一块里长出来的定理，有一大批绕开了原来的节点，从一个新的定义、新的引理出发往下长，那一块在派生树上就真的成了一根新枝。

这四条里，前三条读论文、问行家就能初步判断，第四条要有机器可读的依赖关系，越来越多的形式化库正在让它变得可行。四条不必全过。下面是本书提议的判据，不是学界已有的定规：**第二条（先后换了）加上第一、三、四条中至少一条成立，才算另立一支；只有第一条那种"带着条件照抄"的，算加一条假设。** 这是一条粗线，会有拿不准的情形，那时就如实记成"待定"，不要硬判。

拿雅可比猜想的反例试一试这四条，看看判断会怎样走。这里只是演示怎么判，具体判成什么，要等行家把反例和已有文献对照清楚。〔待核：以下各项均需专业文献核对〕删除检验：那些写成"若雅可比猜想成立，则……"的结果，在反例所在的那一片已经失去了前提，没法带着条件照抄，因为条件本身在那里不成立了；

第一条大致过。重排检验：在那一片里，往后的研究要先回答"反例在哪里、长什么样"，再谈哪些情形下可逆，先后翻了过来；若行家确认这一点，第二条也过。新概念检验：要把构造反例的手法和原有的化归方式连起来，很可能需要新的概念来描述"哪一类映射会出反例"；这一条要看后来的研究怎样长。派生树检验：要等形式化库把相关结果的依赖链补齐了才查得清。按本书的界线，第二条加上第一条，已足以先把它记为"另立一支"；后两条留给续修。

再拿 Navier–Stokes 一侧的爆破试一试。删除检验：原来朝着爆破方向的工作不用删什么条件，照样成立。重排检验：后续推导的骨架不用挪。新概念检验和派生树检验，眼下没有迹象显示要另起一支。四条都不过，它连"加一条假设"都谈不上，是一颗同向果子，把原来那一支描实了。

这条线划下去，有两个好处。

一个好处是防虚胖。如果每加一条假设都算分叉，派生树会长满虚假的杈，g 就失去意义：两支明明共享全部的连接和先后，只是一边多带了一个条件，却被算成"在这里分开了"。这就像族谱上把"从小过继给叔叔"和"迁居外省另立门户"当成一回事。

另一个好处是防漏记。有些反面果子来的时候并不轰轰烈烈，它只是让某个定理的条件变复杂了一点，大家便以为是"加一条假设"；可往后几年，那一块的推导慢慢换了先后、长出了新概念，事实上已经另立了一支，却从没有人在派生树上标出分叉的那一代。这样，g 就会被高估，人们会以为两块很近，搬引理时屡屡碰壁，又说不出为什么。

所以，这条界线最好不只在果子刚落地时判一次，而是隔一段时间回头再判一次：当时以为是加假设的，后来是不是长成了一支？这本身就是回写：后面的推导回过头来，改了前面那颗果子的身份。

## ◆ 7.6　AI 撞出的反面果子怎样标出分叉

湖南很多人家里有族谱。修族谱的老人有一套不成文的做法：家里某一代有一个人迁到了外省，在那边成了家，子孙繁衍，几十年后有人回来认亲。修谱的人不会把他们删掉，也不会硬塞进原来那一房里，而是在谱上另立一支，写明"某某公于

第几代迁居某地"，从那一代往下，外省这一支单独记。以后谁想知道两房亲不亲，翻开谱一看：从哪一代分开的，往上数几代是同一个祖先，一目了然。

族谱做对了三件事。第一，来了一个"对不上"的人，不删、不硬塞。第二，另立一支的时候，写明分在哪一代。第三，这个记法会一直留着，后人查亲缘，是靠它，而不是靠看两家人长得像不像。

这三件事，恰好是 AI 时代处理反面果子最需要、又最缺的。

今天 AI 撞出一个反例，或者一个让某条规律对不上的结果，共同体通常有两种反应。一种是把它当废料：没人约好就一下子倒出一大堆，读不懂，没法用，陶哲轩当初就说过"有毒废料"，后来改口"也许是处理过的废料"。一种是把它当成一条孤立的事实，挂在某个猜想条目底下：此猜想已被推翻。前一种是删，后一种是记了，却没有记分在哪一代。两种都没有把它织进谱里。

按本书的看法，标出一个分叉，至少要记下四样东西。我们一样一样说，仍拿族谱对着看。

**第一，被收窄的是哪一条规律，收窄到哪里。** 就像族谱要写明是哪一房、哪一个人迁走的。一颗反面果子落地，先要说清它碰断的是哪根线：原来默认的适用范围是什么，现在界在哪里，界外是"已知不成立"还是"不再能默认成立"。这一步 AI 可以帮很大的忙：它撞出果子的同时，往往已经知道自己碰的是哪条命题。

**第二，压在这条规律上的有哪些推导。** 族谱上迁走一个人，他名下的子孙要一并挪过去。一条规律被收窄，所有把它当作前提的后续结果都要回头查一遍：哪些是无条件的、不受影响；哪些要带上条件；哪些在界外那一块失效。在一个形式化的定理库里，这件事原则上可以让机器把依赖链拉出来，交给人去判断每一处是加假设还是要动筋骨。这正是 7.5 那四条检验派上用场的地方。

**第三，分在哪一代。** 族谱最值钱的就是"第几代迁居"这一句。派生树上也一样：要标明这一支是从哪个节点分出去的，分出去之前，两支共享到哪一代的连接、先后和结构。有了这一句，g 才算得出来。没有这一句，分叉只是"有个杈"，量不了远近。这里的"代"，和第 5 章同一个口径：一代就是一次完整的回写——被结果逼着改了一回，并沉淀进推导的做法里。同向果子再多，也不添一代；按年头数、按参与的人数数，都不算代。

**第四，隔一段时间回头再标。** 族谱也有续修。刚迁走的时候，人们未必知道这一支以后会不会自成一房；过了几十年，才看清楚。反面果子也是这样：刚落地时判成"加一条假设"的，过两年可能长成了一支；刚落地时以为要另立一支的，后来也可能被一个更好的引理收回原来那一支。标分叉不是一锤子买卖，而是随着回写一次次续修。

这四样东西，谁来记?

不是 AI 单独记，也不是数学家单独记。陶哲轩消化雅可比反例的那两天，已经是一个小样子：机器帮着核对、帮着查，人亲手推、亲手判断它断在哪里。撞出果子的是人和机器组成的复合主体，标出分叉的也是。本书第 8 章要讲，回写本身就是这种复合主体一代代写出来的；这里只先说一句：如果没有人把反面果子织进谱里，AI 撞得再多，也只是堆在门口的果子，越堆越像废料。

这也解释了为什么本书九格里，有一格只发生了一半，有一格至今空着。前一格是"AI 推导、撞果子、人回写成分叉、再交 AI 支内推导"这个环：前一半已经发生了，AI 在一种场结构里推导、撞出果子，今年处处可见；后一半，人把果子回写成分叉、再交回 AI 分支推导，还没有成规模地发生。它没发生，是因为共同体只会按一种场结构消化果子，果子来了，要么判它对错，要么判它有没有用，没有"标在谱上第几代"这一个动作。什么矛盾会让它发生？当反面果子多到共同体按原来的办法消化不过来——一个个读、一个个判对错、一个个当成孤立事实挂起来已经来不及——果子和消化的路顶到一定程度，场就会被逼着改：不得不开始记谱。

后一格是"误差是规律越出所属场谱系的程度"。今天的形式验证只有两个值：对，或者不对。一条定理在 Lean 里过了，就是对的。它没有"在这一支里成立到什么程度、越出这一支以后差多少"这样的读数。这一格没发生，是因为数学至今把自己的场当成只有一种结构，在一种结构里，对就是对，用不着程度。什么矛盾会让它发生？当有一天，一个在形式库里判为全对的结果，被搬到另一块地方去用，却在那里失灵，而且失灵得说不出是哪一步错了——二值验证判全对、现场却失效——人们就会被逼着去问"它离开自己那一支有多远"。这两格未发生的部分，本书不替它们填内容，只说为什么还没发生、什么矛盾会让它发生。

回到族谱。修谱的老人从来不怕家里来了"对不上"的人。对不上，正说明家族在长、在走、在分。怕的是来了人既不记、也不问，任由他站在门外。反面果子之于数学，也是这个道理。AI 撞出来的反面果子越多，数学这棵树越有机会从一种场结构长成场结构的谱系；前提是有人在每一个权上写一句：从第几代分出去的。

谁来写这一句？写这一句的人，在今天的数学里是什么身份？下一章去回答。

**带 走 的 话**

1. **同向果子把原来那一支养得更壮，反面果子逼出新的一支；分辨它们，不看句子是肯定还是否定，不看结果有多大、多难懂。**
2. **"反面"是相对于共同体默认的场结构说的：一颗果子挑断了被许多推导压着的连线，而且收窄后那一块要换连接、换先后，才算反面。**
3. **Navier–Stokes 一侧的爆破印证了共识，是同向果子；雅可比猜想的反例逼着共同体划界、另起一支，是反面果子。**
4. **拉卡托斯写出了反例逼出概念分化，非欧几何是历史上的大分叉；本书多出的一步是数分叉：反面果子进入回写派生树，改变两支的历史亲缘 g。**
5. **"另立一支"以先后换了为准，再加删除、新概念、派生树三条检验之一；只是带着条件照抄的，只算加一条假设。**

**小　账**

**本章切开的差异：**同向果子与反面果子；"加一条假设"与"另立一支"。

**本章的场谱系读数：**今天数学消化果子时仍按一种场结构处理，反面果子只被判对错或挂成孤立事实；回写应落在派生树的分叉点上——标明收窄了哪条规律、压着哪些推导、分在哪一代，并随续修再判。

◆

08

第 8 章

# 复合主体织谱：回写是谁写的

> **这一章的问题**
>
> 上一章说，反面果子会让数学之场分出新的一支，回写派生树因此多长一根枝。可是，这根枝是谁写上去的？是 AI，是数学家，还是别的什么？

## ◆ 8.1 "AI，去解决哥德巴赫猜想"里站满了人

这是一个构想的场景。

一个周六的傍晚，罗秀英奶奶的腰有点疼，不想开火。她对外孙女谭一禾说："一禾，叫个外卖吧，就要楼下那家的辣椒炒肉。"

一禾在手机上点了几下。四十分钟后，门铃响了，一盒热乎乎的辣椒炒肉放在了桌上。

罗奶奶说的是一句很短的话："叫个外卖。"听上去，像是她对着一个东西下了一道命令，那个东西就把饭送来了。好像"外卖"是一个会自己干活的家伙。

可我们把这四十分钟摊开看一看。

厨房里有个师傅，按他自己炒了十几年的路子，先煸辣椒、再下肉；他的手法里，有他师傅当年怎么教他，也有这家店的老顾客一次次说"辣一点""肉嫩一点"的回声。店老板一早去菜市场挑了辣椒，挑哪一种，是他和这片街坊的口味磨了好几年的结果。手机上那个点单的软件，有人写了它的程序，有人定了哪家店排在前面；地图上的路线，是无数骑手跑出来的轨迹一层层修出来的。送餐的小哥知道哪个单元门禁坏了，要从后门绕。还有一禾自己：她点的是"楼下那家"，而不是"评分最高的那家"，因为外婆只认这一家。

"叫个外卖"这四个字后面，站满了人。厨师、老板、写程序的人、修地图的人、骑手、一禾，还有吃了几年、提了几年意见的街坊。机器也在里面：手机、软件、

地图、电动车。人和机器缠在一起，每一个都带着自己的来历，这一盒菜才到了桌上。

可是，谁也不会因此说"外卖是一个独立的厨师"。我们心里清楚，"外卖"不是一个站在外面、单独干活的东西。

到了数学，事情就奇怪了。

作者认为，今天很多数学家仍然把 AI 当作一个独立存在、独立思考的东西——一个从外面闯进数学界的"他者"。它会不会抢我们的题？它算不算作者？它会不会胡说？这些担心里，AI 都被摆成了一个单独的主角。作者的说法很直接：哪怕只是简单地说一句"AI，去解决哥德巴赫猜想吧"，这里面也已经是一个复合主体了。

我们照着外卖的样子，把这句话摊开。

先看"哥德巴赫猜想"这几个字。这个问题为什么值得解？它被谁选出来、被谁一代代传下来、被谁写进教科书、被谁说成"数论皇冠上的明珠"？它的意义，是几百年里一代代数论学家一点点堆出来的。没有这些人，"哥德巴赫猜想"只是一串数字的说法，不会有人愿意为它投入一分钱。

再看"去解决"。什么叫"解决"了？要写到什么程度、用什么语言、检验到什么地步才算数？今天的答案里，有形式化证明库，有像 Lean 这样的证明检查工具，有一代代人写进去的定义和引理——这些都是人一条条敲进去、改了又改的。"解决"这两个字的标准，本身就是一个共同体长出来的。

再看"AI"。它读过的数学文本，是谁写的？它被训练成会推导、会尝试的样子，是谁设计了训练的办法、谁定了什么样的输出算"好"？它在哪台机器上跑，花的钱是谁出的、为什么愿意出？它跑完了，交出来的东西又要谁来读、谁来判断它对不对、有没有意思？

最后，看说这句话的人。他为什么挑哥德巴赫，不挑别的？他在什么时候说？说这句话之前，他心里已经有了对"这个问题配得上一台机器"的判断。

这样一摊开，"AI，去解决哥德巴赫猜想吧"就和"叫个外卖"一样，后面站满了人：出题的、传题的、立标准的、写形式库的、写训练办法的、出钱的、读结果的、下命令的。机器在里面，人也在里面，缠成一团。

这里有一个容易滑过去的地方，要说清楚。

我们说"站满了人"，不是说"AI 背后有人在操纵"，也不是说"AI 其实没用，功劳都是人的"。这两种说法，还是把 AI 当成一个单独的东西：一种说它是木偶，一种说它是摆设。我们要说的是另一回事——"AI 解题"这件事，从头到尾就不是一个单独的东西在干活。问题的分量、解法的标准、机器的样子、结果的去处，是缠在一起一起发生的。拿掉任何一样，这件事就不是这件事了：没有几百年数论，就没有"哥德巴赫"；没有形式库，就没有"解决了"；没有出钱的人，就没有机器在跑；没有读的人，结果就只是一堆字符。

第 4 章讲三大感觉时说过，摸东西的时候，手和物贴在一起，你很难假装自己站在外面。罗奶奶捏着布角一搓一推，滑、涩、疙瘩一个接一个排出来，"这布洗两水要起球"一层层显出来；可这个判断不是她一个人凭空认出来的，也不是布自己报上名来的，是她几十年车间里养出的手劲和这块布贴着，一层层摸出来的。"AI 解题"也是一样，只是那只手更长、贴着的东西更多：几百年的问题、一代代的形式库、一整套训练的办法、一笔笔投进来的钱，全贴在一起。说"AI 独立地解了题"，就像说"布自己认出了自己"。

用本书的话说，这一团人和机器缠在一起、一起把一件事做出来的东西，叫**复合主体**。

为什么这件事要紧?

因为前几章的冲突，全是在"AI 是独立主体"的眼光下吵起来的。菲尔兹奖得主们的联署宣言里有一句担心：没有数学家的照料，AI 构想的想法不会真正活起来。这句话本身是对的，可它的底子还是"AI 是一个"和"数学家是另一个"——两个主体，一个出想法、一个照料。OpenAI 一次释出 722 道题的证明，陶哲轩批评它事先没与数学家协调、抹掉了一些年轻人的课题。这批评也对，可在大多数读者眼里，事情被读成了"AI 抢了人的题"——又是两个主体在抢。

第 1 章说过，作者认为这份宣言常被误读成"反对 AI"，其实它反对的是"果子"——只交结果、不交过程。放到这里看，"过程"二字有了更具体的样子：过程，就是那一团缠绕。题是谁出的，标准是谁定的，哪些旧工作被用上了，哪一步是机器推的、哪一步是人改的——一份只交结果的证明，把这一团全抹掉了，只剩一个"AI 解了"。宣言的不安，说到底是对这一抹的不安。

一旦把 AI 看成独立主体，人和 AI 就只能有两种相处：要么对抗（它抢我的），要么雇佣（我用它的）。对抗的结局是签名、设限；雇佣的结局是把它当计算器，交给它一道题，拿回一个答案。这两种相处，都没有问一个问题：那个答案交回来以后，**谁把它写进了数学的历史**？

外卖的例子可以再往前走一步。

假设楼下那家店有一天把辣椒炒肉做咸了。罗奶奶吃了一口，说："咸了。"一禾在软件里写了一句评价。店老板看到了，跟厨师说了。厨师下一回少放了半勺盐。这一句"咸了"，经过奶奶的嘴、一禾的手、软件的页面、老板的转述、厨师的手，最后落进了下一盘菜里。

这就是回写：结果回头改了下一次的起点。

请注意，这个回写不是哪一个人单独写的。奶奶只说了一句话，她不会去改厨师的手法；厨师没吃过这一盘，他不知道咸了；软件只是一张页面，它不会自己炒菜。是这一团人和机器缠在一起，才把"咸了"写进了下一盘菜。少了任何一环，这个回写就断在半路：奶奶说了没人记，记了没人看，看了没人改。

数学里也一样。上一章我们说，反面果子会让共同体收窄一条规律的适用范围，另立一支场结构——数学之场就此在回写派生树上多长出一根枝。这根枝是谁写上去的？不是 AI 单独写的：AI 撞出一个反例，那只是一颗果子掉在地上，它不会自己说"这说明我们该另立一支"。也不是数学家单独写的：没有那颗果子，数学家不会知道这里该分叉。

是复合主体写的。

为什么数学家容易把 AI 看成一个独立的主体？有一个很日常的原因：它会说话，而且用"我"说话。你在对话框里问它，它答"我认为""我证明了"。一台洗衣机洗完衣服，只会"嘀"一声，没有人会说"洗衣机独立地洗了衣服"；可一台会说"我"的机器交出一份证明，人就很自然地把它当成了一个和自己一样的作者。对话框是一个人对着一个"我"，这个样子本身，就把背后那一团缠绕藏了起来。

这一藏，带出了一串具体的麻烦。宣言里提到，仓促宣布结果，已经引出了署名与剽窃的问题。放在"独立主体"的眼光里，这个问题只能问成：这个结果，算 AI 的，还是算人的？可这样问，怎么答都别扭——算 AI 的，它不会为错误负责；算下

命令的人的，他可能一行都没推过；算公司的，那些被抹掉课题的年轻人的前期工作又去了哪里？换成复合主体的眼光，问题就换了一个问法：这一团里，每一份是谁出的，哪一份写进了历史？这样问，署名就不再是"一个主角"的争夺，而是一张账：谁出了题，谁出了钱，谁的旧工作被用上了，谁读懂了结果。账可以记清楚，主角却永远争不清楚。

本章接下来要做的，就是把这句话讲透。先在下一节看三种不同的复合主体——公司、专家、共同体——它们缠法不同，写进历史的东西也不同。

## ◆ 8.2　公司 E、专家 E、共同体 E

这是一个构想的场景。

曾晓岚家的老房子要翻修厨房。她问了三拨人。

第一拨是一家装修公司。业务员上门量了尺寸，第二天就发来一套效果图，报价单上写着"十五天完工"。公司手底下有几个施工队，同一个月要接几十单活。工人到了现场，按图纸走：拆旧、走水电、贴砖、装柜子。哪一步慢了，工头在电话里催；隔壁那家公司刚打出"十二天完工"的广告，他们的工期也跟着往前压。

第二拨是一位老木匠，罗奶奶的老熟人。他来了不量尺寸，先在厨房里站了半天，看罗奶奶平时站在哪里切菜、伸手去哪里拿油盐、哪块地砖底下有点空响。他说灶台要比图纸上低两公分，因为罗奶奶个子矮；他说这面墙不能打吊柜，里面走的是老电线。他干得慢，一天只做一样事，可他做的每一样，都先自己摸一遍、敲一遍。

第三拨不是人，是小区的业主群。几十户人家住了二十多年，谁家修过厨房、哪家公司偷工减料、楼里的老水管哪年换过、哪面墙是承重墙——这些事在群里一年一年地攒着。曾晓岚在群里问了一句，十几户人家七嘴八舌地回：你那栋楼的下水是铸铁的，别动；那家公司去年把三楼的防水做坏了。

三拨人，都能把厨房修好。可他们修出来的东西不一样，留下来的东西更不一样。

装修公司修完，留下的是一个新厨房，和一张"十五天完工"的单子。下一单活，施工队还是按同一套图纸走——这一家的空响地砖、老电线，不会进入公司的图纸

库。老木匠修完，留下的是一个合身的厨房，还有他心里又多了一条"这种老楼的墙不能乱打"的门道；可这条门道在他自己手上，他不说，别人也拿不到。业主群里留下的，是一条又一条散乱的提醒，攒了二十年，没有人整理，可新搬来的人一问，它就开口。

三拨人，是三种缠法。

装修公司那一团，是公司、工期、图纸、施工队、广告、竞争对手缠在一起。它的劲全在"快"上：同样的活，谁先干完、谁先接下一单。我们把这种缠法叫做**公司 E**。

老木匠那一团，是一双手、几十年的门道、一间具体的厨房、一位具体的老人缠在一起。它的劲在"懂"上：这一间、这一面墙、这一个人。这种缠法叫做**专家 E**。

业主群那一团，是很多人家、很多年、很多次修修补补缠在一起。它的劲在"留"上：一件事过去了，它沉下来，等下一个人来问。这种缠法叫做**共同体 E**。

这里的"E"，就是本书一直说的特征纠缠：一样东西和它所在的场缠在一起，拆不开。我们说"公司 E"，不是说"公司所处的环境"，而是说：在这一团里，人、机器、钱、时间、对手已经缠成了一个会干活的东西，它干活的样子里，处处是这些缠绕的印子。

现在回到数学。

先看公司 E。第 1 章讲过那场抢跑：一则传言，数千万美元，约一万个智能体攻 Navier–Stokes，交出一份带 Lean 证书、却没有专家真正读通的证明。这里只补一句：据陶哲轩转述，OpenAI 内部还为此拉响过"红色警报"（code red），他自己则把这种局面说成"战时状态"。

这是一团怎样的缠法？传言、对手、优先级、上千万美元、一万个智能体、Lean 证书、一个千禧年难题，缠在一起。它像那家赶工期的装修公司：劲全在"先"上。它交出的东西是一颗果子——一个经过检查的结果。果子是对的，可它没有走进任何一个人的手里。陶哲轩后来说，AI 公司陷在囚徒困境里，没人想跑这么快，但每个人都觉得别无选择。这话说的正是公司 E 的样子：不是哪一个人想跑，是这一团缠法本身在跑。

再看专家 E。2026 年 7 月，雅可比猜想被一个由 AI 构造的反例推翻了。陶哲轩怎么对待这颗果子？他用了两天，和聊天机器人一起把它消化掉：亲自推代数，用工具一步一步核对，去查文献。

这两天里发生了什么？一颗果子落下来，落进了一双推了几十年代数的手里。机器帮他算、帮他查，可每一步都要经过他自己推一遍、摸一遍——像老木匠先把那块地砖敲一敲。两天以后，这颗反例不再只是一个"对的结果"，它在一个专家的理解里找到了位置：它推翻的是哪一条默认、它说明哪里该收窄、它和已有的哪些东西连得上。

这一团缠法，是一位专家、一个聊天机器人、几种检查工具、一摞文献、一个反例缠在一起。它的劲在"懂"上。它慢，两天只消化一颗果子；可果子经过它，就从掉在地上变成了埋进土里。

最后看共同体 E。菲尔兹奖得主联署宣言发出后，据 Quanta 的报道，几天之内就有七千四百多位研究者加签。还有方程理论项目：许多人和自动定理证明器一起，处理了 4694 条等式律之间大约 2200 万对蕴含关系。还有形式化证明库，一代代人往里面一条条写定义、写引理。这些都是共同体 E：很多人、很多年、很多工具缠在一起。它的劲在"留"上——一个项目做完，2200 万对关系就沉在那里，后来的人可以接着用。

我们把三种缠法排一排：

| | 公司 E | 专家 E | 共同体 E |
|---|---|---|---|
| 日常样子 | 赶工期的装修公司 | 先摸一遍再动手的老木匠 | 攒了二十年的业主群 |
| 数学里的例子 | 数千万美元、一万个智能体攻 Navier–Stokes | 陶哲轩两天消化雅可比反例 | 七千四百余人加签；方程理论项目 |
| 劲在哪里 | 先 | 懂 | 留 |
| 交出什么 | 经过检查的果子 | 被理解、被安放的果子 | 沉下来、可接着用的成果 |
| 缺什么 | 果子没进任何人的手 | 进了手，未必进了公共的史 | 留下了，可多半只在一种结构里 |

这张表最要紧的是最后一行。

公司 E 撞果子撞得最快，可果子落地就停在那里，像那份 165 页、没人整个读懂的证明。专家 E 能把一颗果子消化透，可消化的结果常常留在专家自己的理解里，像老木匠心里的门道。共同体 E 能把成果沉下来，可沉下来的东西多半是在同一种场结构里攒的——方程理论项目处理的 2200 万对蕴含，每一条的答案是"成立"或"不成立"，它们都在同一套等式逻辑里。

表里"缺什么"那一行，用第 1 章讲过的 722 道题就能看清：陶哲轩读了约十篇，先说"有毒废料"，后来改口"也许是处理过的废料"。

把这件事放回三种缠法里看。722 道题，是公司 E 一口气撞下来的果子。一位专家，读了大约十篇——专家 E 消化的速度，和公司 E 撞果子的速度，差了几十倍。读了的那十篇里，才分得出哪篇是延伸、哪篇是新想法、哪篇是错的；没读的那七百多篇，就那样堆着。而能把这堆果子分拣、沉下来、让后来的人接着用的那一团共同体 E，几乎还没有为这件事搭起来。"废料"和"处理过的废料"之间的那一点改口，说的正是这个：果子本身未必是废的，是没有一团缠法去接它，它才成了堆在地上的东西。

三种缠法，各缺一块。

这也是为什么前几章的冲突吵不出结果。宣言是专家 E 和共同体 E 在对公司 E 说话：你跑得太快了，果子没人照料。公司 E 的回答，大致是：我们也不想跑，可对手在跑。双方各说各的，因为它们都把对方当成了一个独立的主体——"他们"和"我们"。

可是，三种缠法并不是三个站在外面、彼此对峙的东西。陶哲轩用来消化雅可比反例的聊天机器人，正是公司 E 造出来的；公司 E 用来证明自己的 Lean 证书，是共同体 E 一代代写出来的工具；专家 E 自己的门道，也是在共同体 E 里泡大的。它们本来就是缠着的。

这里要顺带交代两门学问，因为它们和"复合主体"这个说法看上去很像。

一门是**行动者网络理论**，通常和拉图尔、卡龙这些人的名字连在一起。它的核心主张，大致是：做成一件事的，不只是人，也有物——实验仪器、文件、微生

物、门把手，都可以是"行动者"；人和物在一张网里互相牵连、互相转译，事情才做成。它要求对人和物一视同仁地去描述，不预先认定谁是主角。

这一点和本书很近：本书也说"AI 解题"里没有一个单独的主角，人和机器缠在一起。可两者有一处分开的地方。行动者网络理论主要做的是**描述**：把一张网里的牵连一条条摊开，看事情是怎样被"组装"起来的。它对人和物一视同仁，于是不问"谁在写历史"——在它那里，网是平的。本书要问的恰恰是这个：一团缠法交出一颗果子以后，这颗果子有没有进入回写，写进了哪一支场结构，让回写派生树多长了哪一根枝。装修公司和老木匠，在行动者网络的眼光里都是一张人和物的网；在本书的眼光里，它们的分别在于——谁把这一回的结果写进了下一回的起点，写进了哪一本"谱"。

另一门是**延展心智**的说法，通常和克拉克、查默斯两位哲学家连在一起。他们举过一个著名的思想实验：一个记性不好的人，靠随身带一个本子记路，这个本子在他的认知里起的作用，和别人脑子里的记忆差不多；所以心智可以延伸到身体之外，延伸到本子、工具上去。

这也很近：数学家用 AI，像那个人用本子。可这里也有一处分开。延展心智的说法里，始终有一个中心——那个记路的人。本子是他心智的延伸，是从他那里往外伸出去的。本书说的复合主体，没有这样一个事先就在的中心。陶哲轩消化雅可比反例的那两天，不是"陶哲轩的心智伸到了聊天机器人里"，而是一位专家、一台机器、一个反例、一摞文献缠在一起，在这一团里才发生了"这个反例说明了什么"的理解。理解不是从一个中心往外伸的，是在缠里长出来的。何况，"AI 解题"那一团里，下命令的人往往并不是理解结果的人——说"去解决哥德巴赫猜想"的人，和最后读懂结果的人，可能根本不是同一个。延展心智的那个"中心"，在这里找不到。

所以，本书的复合主体，比行动者网络多问一件事（回写写进了哪一支），比延展心智少设一样东西（一个事先就在的中心）。

那么，在三种缠法里，回写到底是谁写的？下一节回答。

## ◆ 8.3　复合主体是回写的生成者

这是一个构想的场景。

罗秀英奶奶的小区里有一支广场舞队，二十来个人，每天晚饭后在楼下空地上跳。队里的舞，最早是领舞的阿姨从手机视频上学来的：一首歌，一套三十二拍的动作。手机放着，音箱响着，领舞的阿姨在前面跳，大家在后面跟。

跳了一个多月，出了一件事。罗奶奶的膝盖不好，有一个下蹲转身的动作，她怎么也蹲不下去，有一回还差点摔倒。

这本来是一件小事。可它让这支队伍的舞，第一次分了叉。

领舞的阿姨琢磨了两天，没有把这个动作硬教下去，也没有把罗奶奶劝回家。她把下蹲改成了屈膝、把转身改成了侧步。改完一试，罗奶奶跟得上了，另外几位年纪大的也说舒服多了。可年轻一点的几位阿姨不乐意，说原来的才好看。于是队里有了两个版本：一个叫"原版"，一个大家管它叫"护膝版"。两个版本前二十四拍一模一样，只有最后八拍不一样。

又过了半年，队伍越跳越大，有人从隔壁小区过来学。学的人照着"护膝版"跳，跳着跳着，又有人嫌侧步太单调，加了一个摆手——"护膝版"里又分出了一支。

现在，你去问这支队伍："你们跳的是哪一套舞？"已经说不清了。它是一个谱：一套"原版"，两支后来长出来的枝，枝上还有小枝。每一支和别的支，共享的拍数不一样，共享的来历也不一样。"护膝版"和"摆手版"，共享前面所有的改动，只差最后那一下摆手；"原版"和"摆手版"之间，隔着罗奶奶那一次差点摔倒。

到了第二年夏天，领舞的阿姨又从视频上学来一首新歌、一套新动作。她发现，新动作教给"护膝版"那一拨人，很快就跟上了；教给"摆手版"那一拨，也不难；教给"原版"那一拨，反而别扭——因为新动作里有几步屈膝，和"护膝版"是一个路数。同一套新动作，在这几支里"迁移"得顺不顺，不一样。

这就是本书承重命题的一个日常影子：几支舞，单看动作清单，"原版"和"护膝版"只差八拍，"摆手版"和"护膝版"也只差一下；可新动作搬过去顺不顺，跟着的是它们一路改过来的历史。

现在问本节的问题：这个谱是谁写出来的？

是领舞的阿姨吗？她改了动作，可她不是凭空改的——没有罗奶奶那一次蹲不下去，她不会改。是罗奶奶吗？她只是蹲不下去，她没想过要创一个新版本。是手机视频吗？视频只给了一套"原版"，它不知道这个小区里有人膝盖不好。是那几位不

乐意的年轻阿姨吗?没有她们坚持"原版好看",就不会两版并存,而是"护膝版"一统天下——那就不是一个谱,只是一套舞换了个样子。

是这一团缠在一起的东西写出来的:视频、音箱、领舞阿姨的眼光、罗奶奶的膝盖、年轻阿姨的不乐意、每天晚饭后那一个钟头、楼下那块空地。少了任何一样,分叉要么不会发生,要么发生了也留不下来。

这就是本节要说的那句话:**复合主体是回写的生成者**。

我们把"回写"的意思再说一遍。回写,是结果回头改了下一次的起点。罗奶奶蹲不下去,是一个结果;这个结果回头改了队伍下一次跳舞的起点——从此有了两个版本。这一改,不是写在哪一张纸上,而是写进了这支队伍的"谱"里:以后每一个新来的人,学的都是这个谱里的某一支。

回写的每一代,都是这样一回:一颗果子落下来(罗奶奶蹲不下去),一团人和物缠着把它接住(领舞的阿姨琢磨、大家试、有人不乐意),最后要么把它当成一次小失误放过去("罗姐你别蹲了,站着比划一下就行"),要么让它在谱上长出一根新枝("护膝版")。前一种,舞还是那一套舞;后一种,谱多了一代。

现在把这个影子搬回数学。

上一章讲了反面果子:一个结果落地以后,共同体必须收窄某条规律默认的适用范围,而且收窄以后,要另立一支场结构才能继续往下推——后面的推导要在一套新的连接与次序里进行。雅可比猜想被 AI 构造的反例推翻,就是这样一颗果子。

这一次分叉,是谁写的?

按"AI 是独立主体"的眼光,会有两种答案。一种说:是 AI 写的,它找到了反例。另一种说:是数学家写的,AI 只是工具。两种答案都只看见了一半。

AI 撞出了反例,可反例只是一颗果子。它本身不会说"这里要收窄",更不会说"收窄以后另立一支"。这颗果子要被读懂:它推翻的到底是哪一条默认?是这条猜想在某一类情形里本来就不该成立,还是整个想法从头就错了?这需要专家——像陶哲轩那样,花两天,和聊天机器人一起推代数、核对、查文献。读懂以后,它还要被共同体接住:有人写进综述,有人改教科书里那一节的说法,有人在形式化证明库里把相关的定义分开写。这些事做完,数学之场才真正多了一支——后来的人推导时,会意识到自己是在哪一支里推。

所以，这一次分叉，是一团复合主体写出来的：构造反例的那一团（公司的机器、写训练办法的人、出钱的人、出题的人），消化反例的那一团（专家、聊天机器人、检查工具、文献），把它沉下来的那一团（期刊、综述、教科书、形式库、一代代读者）。上一节分出的公司 E、专家 E、共同体 E，在这一次分叉里，本来就是缠在一起的。

把这件事放进三原理里看，会更清楚。三原理说：两维相顶，推动第三维改变；被改变的一维，再回头写进相顶的那两维。

在这里，顶撞的是哪两维？一边是那颗果子——反例这个已经显露出来的结果；另一边是共同体默认的那一套场结构——大家一直以为这条猜想在这里该成立。两者顶上了：结果说"不成立"，默认说"该成立"。这是显露和纠缠在顶撞。

被推动的是哪一维？是推导的路子。顶撞积累到一定程度——专家确认反例没错，共同体接受它——后来的人就不能再照原来的次序往下推了：哪些引理还能用、哪些要换条件、哪一类情形要单独处理，全要重排。推导的差异序列变了形。

回写写进了哪里？变了形的推导路子，回头写进了数学之场：场里多了一支，有了新的连接与次序。同时也写回了"果子"那一头：以后 AI 再在这一片撞果子，它是在两支里撞，而不是在一支里撞。

这一拍一拍里，每一拍都有人和机器缠着在做：机器撞出果子，专家让顶撞积累到"不得不改"，共同体让改过的路子留下来。少了谁，三拍就走不完。机器不撞，没有顶撞；专家不消化，顶撞积累不起来，大家只当它是一个怪例子；共同体不接，改了的路子留在一个人脑子里，下一代人又从原来那一支推。

这就是为什么本书说：**回写的代际，就是复合主体一次次"撞果子、织谱"的代际**。

"代际"这个词要说准。不是说时间过了一年就算一代，也不是说多来了几个人、发了一篇论文就算一代。一代，是一次完整的回写：做法被一个结果逼着改了一回，而且改法沉淀了下来，进了以后的做法或推导。有的一代只是让一支往下长一节，有的一代让谱分出一根新枝——反面果子带来的，正是后一种。广场舞队那一年，也许跳了三百个晚上，可谱上只多了两代：一代是"护膝版"，一代是"摆手版"，

两回都是被结果逼着改、改了又留下来的。其余的晚上，大家只是在已有的那几支里跳——跳得再熟、来学的人再多，谱也没有多一代。

第 5 章给 g 下过定义：两个场结构在回写派生树上的共同祖先深度——沿回写代际计数它们共享的连接、次序、结构。现在可以说清楚，这棵树是谁长出来的了。树上每一个分叉点，都是一次复合主体撞果子、织谱的地方。g 沿着回写的代际往下数：两支分开之前一起走过的那些代里写进去的连接、次序、结构，到今天两边都还保有多少——也就是一起经历过的那些织谱，还剩多少留在两边身上。

所以，**g 是由复合主体写出来的**。

这句话容易被听成另一个意思，要防一防。有人会说：既然 g 是"写出来的"，那它就是人为的、主观的，想写多少就写多少，还有什么好测的?

不是这样。广场舞队的谱，是一团人和物缠着写出来的，可它一旦写下了，就是这支队伍实实在在的历史："护膝版"和"摆手版"共享哪些拍、隔着哪一次改动，是可以一拍一拍数出来的，不由今天哪一个人说了算。新动作搬过去顺不顺，你可以等到明年夏天再看；可它们共享了几代，今天就能数。

数学之场也一样。g 是复合主体写出来的，可写下以后，它就属于数学之场本身——它是这片场的历史，沉在形式库里、教科书里、引用链里。写，是发生；数，是在发生之后、在迁移结果出来之前，就能做的事。这正是承重命题说的"程度属于数学之场本身，由回写历史生成，先于迁移结果即可测"。复合主体是写的一方，可它不能随手改写已经沉下的历史，正像领舞的阿姨今天不能宣布"护膝版从来没有改过那八拍"。

还要说清楚一件事：不是每一颗果子都让谱多一代。

上一节说的那份 Navier–Stokes 爆破证明，就是一颗这样的果子。陶哲轩说过，此前的共识是，Navier–Stokes 方程的正则性大概会失败。这颗果子分量很重，花了上千万美元、一万个智能体，可它和共识是同一个方向的——它印证了大家原本的猜测，没有迫使谁收窄哪一条规律的适用范围。第 7 章把这样的果子叫作同向果子。（同年 9 月 Alpöge 与 Buckmaster 宣布带光滑外力项的三维 Euler 方程有限时间爆破，也可以放在旁边看；不过 Euler 与 Navier–Stokes 不是同一个方程，把它也算同向，依据的是"流体方程会爆破"这一预期，属本书的判断。）

同向果子落地，复合主体照样要花力气去接：要读、要核、要形式化。可接住以后，场里没有另立一支，推导照原来的次序往下走。用广场舞来说，它像是领舞的阿姨把"原版"跳得更齐了，大家都夸好，可做法没有被逼着改，谱上也没有多一代。所以，回写的代数，数的不是"复合主体忙了多少回"，而是复合主体在哪几回里真的被结果逼着改了做法、并且改法留了下来；其中把反面果子织成分叉的那几回，决定两支从哪一代分开。忙与织，是两件事。

那么，什么情况下这一节的说法就错了？

如果有一天，数学之场的分叉，可以在没有任何果子落地、没有任何共同体收窄的情况下长出来——比如有人凭空立一套新公理，大家沿它推导下去，而规律在它和旧支之间迁移得顺不顺，照样跟着"共享了几代"走——那么，"回写的代际就是复合主体撞果子、织谱的代际"这句话就说窄了：还有别的东西在写这棵树。又或者，分叉的确都来自果子，可迁移顺不顺和共享了几代毫无关系，那么 g 即使是复合主体写的，也不是我们要找的那个"程度"。这两种情况，都是可以等着看的。

上面讲的是一次分叉。可数学里，果子不会只落一颗。下一节把一次一次的分叉连成一个圈，看它怎样转起来。

## ◆ 8.4　五步闭环：撞果子、织谱、再撞果子

这是一个构想的场景。

曾晓岚是娄底一所初中的数学老师。去年，学校给每个班配了一套作业自动批改的软件：学生拍照上传，软件对着标准答案打勾打叉，几秒钟就出结果。

开学头几周，一切顺利。软件批得飞快，曾老师省下了大把时间。

第五周，出了一道题：已知两个数的和与差，求这两个数。软件的标准答案是列方程组、消元求解。有个男孩没列方程组。他画了一条线段代表大的数，再画一条短一点的代表小的数，把"差"那一截先剪掉，剩下两段一样长，一除就出来了。软件给他打了一个叉——它认不出这种写法。

曾老师看到这个叉，愣了一下。她没有简单地把叉改成勾了事，也没有对男孩说"考试要按标准写法"。她想：这不是一个错误，这是另一条路。用线段图解和差问

题，是小学里常讲的老办法，可到了初中，标准答案只认方程组。这道题的"标准"，默认了只有一条路。

她做了一件事：在这道题的答案库里加了一支"线段图法"，写清楚它的几步，告诉软件也认这一支。

加了以后，事情起了变化。软件再批同类的题，遇到画线段的，不再打叉了，而且开始在"线段图法"那一支里接着批——哪一步剪错了，哪一步除错了，它能指出来。又过了两周，另一个女孩交上来一种写法：她既没列方程组，也没画线段，而是先猜两个数，再一次一次地调。软件又打了一个叉。曾老师又看到了。这一回，她得想：这是第三支，还是"线段图法"那一支里一个没写完的变化?

这个场景里，转着一个圈。我们一步一步把它拆开：

**第一步，机器在一种结构里推。** 软件对着一套标准答案批作业。它快，它不累，它在这一套答案的连接与次序里，比任何老师都批得勤。

**第二步，撞出果子。** 男孩的线段图，撞上了这套答案没算到的地方。软件打了叉——在它的那一套结构里，这就是"错"。可这个叉，正是一颗果子：它标出了标准答案默认的适用范围，到这里就不够了。

**第三步，人把果子回写成分叉。** 曾老师认出这是另一条路，在答案库里另立一支。注意，她不是"加一条假设"——不是在原来的标准答案后面补一句"也可以用别的方法"。她是写出了这一支自己的几步，让后面的批改要在一套新的次序里走。

**第四步，机器在新的一支里推。** 软件在"线段图法"那一支里接着批。它在新的连接与次序里，照样又快又勤。

**第五步，新的果子。** 女孩的"猜着调"又撞了上来。圈转回了第二步，可起点已经不一样了：现在答案库里有两支，新的果子要放在两支构成的谱里去认——它离哪一支近? 要不要另立第三支?

这五步，正是本书说的数学里人机合作的那个圈：

一、AI 在一种场结构内推导；二、撞出果子；三、人把反面果子回写成分叉，另立一支；四、AI 在新的一支内推导；五、撞出新的果子，回到第二步。

圈每转一次，谱就多一代。

这里要特别说清楚，"人"和"AI"在这个圈里，不是两个各干各的主体在轮流上场。第一步里，软件对着的那套标准答案，是一代代老师写出来的；第三步里，曾老师能认出线段图法，是因为她自己小时候也学过、教过；第四步里，软件能在新的一支里批，是因为写软件的人留了一个"答案可以加支"的口子。每一步都是一团复合主体在做，只是那一团里，有时是机器的那一份更亮，有时是人的那一份更亮。

那么，今天数学里的这个圈，转到哪一步了？

第一步、第二步，已经转得飞快。First Proof 测评里，十道全新的研究级问题，有七道被至少一支 AI 团队解到了可发表的水准，每道题的算力花费在十美元到一千美元之间。OpenAI 一次释出了 722 道题的证明。数千万美元、一万个智能体攻 Navier–Stokes。这都是公司 E 在第一、第二步上的劲：在一种场结构里推导、撞果子，越来越快。

第三步，零零星星地在转。陶哲轩两天消化雅可比反例，是这一步的样子：专家把一颗反面果子读懂，看清它推翻了哪一条默认。可这一步做到"读懂"就停了一半——读懂以后，有没有在一个公共的地方另立一支、写清这一支自己的连接与次序，让后面的人和机器知道"现在是在哪一支里推"？目前多半没有。读懂留在了专家的理解里和几篇论文里，像老木匠心里的门道。

第四步、第五步，几乎没转起来。因为第三步没写进公共的谱，AI 也就无从"在新的一支里推"：它面对的，仍然是一片被当成"只有一种结构"的数学之场。下一颗果子落下来，又被放回同一种结构里去认——不是"对"就是"错"，不问它离哪一支近。

用本书附录的九格来说，这个圈处在"半发生"的状态：推导和撞果子已经发生了，回写成分叉、再在支内推导的那个环，还没有合上。

为什么环合不上？用三原理再看一次。

公司 E 撞出果子的速度，和共同体 E 消化果子、把它写成分叉的速度，顶上了。果子越落越多（722 道题、350 多项发现），可接住果子、把它回写成谱的那一团缠法，几乎还没有长出来。陶哲轩说过，未解的问题像一种不可再生的资源。他的担心，放在这个圈里看，正是这一顶撞的读数：第一、二步转得太快，第三步跟

不上，果子落了一地，每一颗都在"一种结构"里被算成"解掉了一道题"——问题就这样被消耗掉，而谱一代也没有多。

这一顶撞要推动的，是什么？是那一团复合主体本身的缠法——第三步要有人、有工具、有地方去做。只有这一团缠法变了形，环才合得上。下一节要看的两样东西——消融研究和定理邻域——就是第三步正在冒出来的苗头。

再换一个角度看这五步。第 4 章以来我们多次说，一条路要走成洪流，光有往前走不够，还要有往回写、有往上跳。拿学做一件事来说：先猜、动手、看结果，这是往前走；结果回头改了下一次的做法，这是往回写；做到某一天，从一件事跳到了一类事，这是往上跳（SDE 把这三段叫作前行、回写、跃层）。

五步闭环里，第一步、第二步是往前走：在一种结构里推，推出结果，结果和默认一比，对不上。第三步是往回写：对不上的结果回头改了推导的起点。第四步、第五步，看上去又是往前走，可它是在新的一支里往前走。圈转多了，会出一件单转一圈看不出来的事：支多了，有人开始看出几支之间谁和谁近、谁和谁远，哪几支其实是同一个老分叉上长出来的——这时候，眼睛就从"这一支里怎么推"跳到了"这一片谱怎么长"。这是往上跳。

曾老师的作业软件里，这一跳大概会在第三支、第四支出现以后发生：她不再只问"这种写法对不对"，而是开始问"和差问题有哪几支解法，它们从哪里分出来，哪一支适合哪一类孩子"。到这一步，她手里的不再是一套标准答案加几条补丁，而是一张解法的谱。

今天数学里的人机合作，往前走走得飞快，往回写才刚冒头，往上跳还没有影子。这就是本书说"环没合上"的具体意思：不是机器不够强，而是三段里缺了后两段。

陶哲轩 2023 年曾预言，到 2026 年，这一级别的 AI 会成为数学研究中可信的合著者；2026 年初，他认为这件事几乎如期实现了。"合著者"这个说法很好，可它仍然带着"两个作者"的影子：一个人，一台机器，名字并排写在论文上。放进五步闭环里，"合著"会换一个意思：不是两个作者各写一半，而是一团复合主体在圈上的不同位置各出一份——机器那一份在第一、二、四步更亮，人那一份在第三步更亮。一篇论文的署名，只是这个圈在某一刻的截面。圈转起来以后，要记的不只是"谁和谁合著了这一篇"，还有"这一篇让谱多了哪一支"。

还要补一句，防一个误会。五步闭环不是说"AI 做常规、人做典范"。那是第 3 章讲过的共识，它停在了一个地方：它没回答人做的是哪一种"典范"。在五步闭环里，人做的不是另起炉灶去想一套全新的公理——那还是在"一种结构"里换一种结构。人做的是第三步：把机器撞出的反面果子，回写成场结构谱系上的一支。这一步，离不开机器的果子；机器的下一轮推导，也离不开这一步写下的支。这是一个缠着转的圈，不是两条分开走的路。

那么，什么情况下这一节说错了?

如果在今后几年里，AI 撞果子越来越快，而人和 AI 的合作照样越来越稳、越来越长久，可数学之场始终只当成一种结构——没有谁去另立一支、没有谁在支内推——那么"环合上了才能稳定合作"这个说法就错了。本书第 1 章到第 3 章讲的抢跑和内卷，若是只靠一份规则协议就终结了，同样说明这个圈不是关键。这是可以看的。

## ◆ 8.5　重读消融研究与定理邻域

这是一个构想的场景。

谭一禾周末在家学做蛋炒饭。她看了一个视频，视频里说要做好蛋炒饭有五样要紧事：用隔夜饭，先炒蛋，大火，葱花最后放，饭要先打散。

一禾是个爱较真的孩子。她想知道：这五样，到底哪一样是真要紧的?

第一回，她用刚煮好的饭，别的照做。饭粘成一团，炒不散。看来隔夜饭是要紧的。第二回，她用隔夜饭，可是没先炒蛋，直接把蛋液倒在饭上。出来的饭金黄金黄的，每一粒都裹着蛋，她外婆罗奶奶尝了一口说："这不是我们家的炒饭，这是黄金炒饭嘛。"一禾一下子明白了：去掉"先炒蛋"，炒饭没坏，可它变成了另一种炒饭。第三回，她用中火。饭不香，可也能吃，只是差一点。

三回下来，一禾手上有了一张小地图：去掉"隔夜饭"，这道菜塌了；去掉"大火"，这道菜还是这道菜，只是差一点；去掉"先炒蛋"，这道菜没塌，可它走进了另一种炒饭。

这三种"去掉"，结果完全不同。第一种，是越出了这道菜能成立的边。第二种，是在这道菜里面挪了一挪。第三种，是走到了一个分叉口——那里另有一支炒饭，有它自己的做法和样子。

一禾做的这件事，在科学里有个名字，叫**消融研究**：把一样东西里的某一部分去掉，看剩下的还成不成立，以此弄清哪一部分是真正承重的。

陶哲轩在 2026 年 10 月那场名为 Math 2.0 的公共讲座里，说过一个意思：在证明越来越充裕的时代，解题只是更有价值目标的代理，已经错位了；数学要拓展前沿，同时让"解题"不再占中心。他建议的几件事里，就有消融研究，有探索定理的邻域，还有开放的阐释问题。他还说，瓶颈在想象力。

在数学里，消融研究的样子是：一条定理有几个条件，去掉其中一个，定理还成立吗？如果还成立，那个条件就是多余的，定理可以写得更强；如果不成立了，就要找出一个反例，说明那个条件是承重的。探索定理邻域，是把条件挪一挪、放宽一点、换一个相近的对象，看定理在附近还站不站得住。

这两件事，AI 恰好擅长。去掉一个条件、找一个反例、换一个相近的对象再试——这些都是在一种结构里大量地、快速地推导。把它们交给机器，一个下午可以试几百种"去掉"。

可是，问题在于：这样试出来的东西，今天通常被读成什么？

通常被读成两个字：成立，或不成立。去掉条件 A，定理还对——打一个勾；去掉条件 B，找到了反例——打一个叉。一张勾叉表做出来，像一禾只记"炒饭成了""炒饭没成"。

一禾的第二回，在勾叉表里只能记成"成了"——饭炒出来了，能吃。可这样记，就把最要紧的东西丢了：那一回，她不是"成了"，她是走进了另一支炒饭。这道菜在那里分了叉。

本书要做的，是把消融研究和定理邻域重读一遍：它们不只是在一种结构里打勾打叉，它们是在**扫描场结构谱系的边**。

每一次"去掉"，结果可能落在三种地方：

一种，落在这一支里面——定理换了个说法还成立，或者只是弱了一点、强了一点。这像一禾用中火：还是这道炒饭，只是差一点。这里没有分叉。

一种，落在这一支的边外——定理塌了，反例显示这个条件是承重的。这像一禾用新饭：炒饭塌了。这里也没有分叉，只是知道了边在哪里。

还有一种，落在分叉口——去掉一个条件以后，定理没有单纯地"塌"或"不塌"，而是显出：在这个条件拿掉的地方，另有一套连接与次序可以接着往下推，而且旧的那一支里的某些规律，到了这里得收窄才能用。这像一禾的黄金炒饭。这里，场结构分了叉。

勾叉表只分得出前两种。第三种，在勾叉表里要么被记成"成立"，要么被记成"反例"，它作为"分叉"的那一面，就被抹掉了。

而第三种，恰恰是上一节五步闭环里第三步要接住的东西：一颗反面果子，一个要另立一支的地方。

所以，消融研究和定理邻域，在本书的眼光里，是第三步正在冒出来的苗头。它们已经在做"扫描边界"这件事了——用附录九格的话说，这一格（扫描场谱系边界）处在"半发生"。方程理论项目也是一样：许多人和自动证明器一起，处理了 4694 条等式律之间约 2200 万对蕴含关系，把一大片场里"谁推得出谁"一条条摸清楚。这是了不起的测绘。可它的读数仍然是二值的：推得出，推不出。它是在一种结构里画的一张极细的地图，还没有在地图上标出"这里分了叉、这两支共享了几代"。

那么，怎样从勾叉表走到谱？

这是一个研究设计的方向，不是已有的结果。大致的想法是：每做一次消融，或探一次邻域，不只记"成立／不成立"，还要多记一件事——这个结果落下以后，共同体（或者一个具体的研究团队）有没有不得不收窄某条规律的适用范围？收窄以后，后面的推导是不是要在一套新的连接与次序里进行？如果是，就把它登记为回写派生树上的一个分叉点：这一支从哪里分出来，和母支共享了哪些定义和引理。

这样记下去，扫描出来的就不再是一张勾叉表，而是一棵树的雏形。树上每一个分叉点，都是一次复合主体撞果子、织谱的地方：机器做了大量的"去掉"和"挪一挪"，人认出了哪几次是分叉口，共同体把它写进公共的库。

这里也要防一个误会。不是说每一次消融的结果都要算成分叉——那就成了"加一条假设"也算分叉，谱会乱长。第 7 章已经立了界线：加一条假设，是在原来那一

支里补一句话，后面的推导照旧走；另立一支，是后面的推导要换一套连接与次序。一禾用中火，不过是"火小了点"，这是加一条说明；她做出黄金炒饭，后面放葱、放盐、翻炒的次序全都变了，这才是另立一支。

顺着这个读法，陶哲轩说的"瓶颈是想象力"，也可以换一个角度来听。在勾叉表里，想象力常被理解成"想出一道好题""想出一个巧妙的证明"。可在扫描谱系边界这件事上，想象力还有一个更朴素的去处：在一大堆"去掉"的结果里，看出哪一个不是简单的塌或不塌，而是一个分叉口。一禾的外婆尝了一口说"这是黄金炒饭"，靠的就是这种眼光——她吃过几十年的炒饭，知道那一盘不是"做坏了的蛋炒饭"，而是另一种好东西。机器可以一个下午试几百种"去掉"，可那一句"这是另一支"，今天还要靠吃过几十年炒饭的那张嘴。

还有一层，也不能漏掉：认出分叉口这件事，将来未必全靠人。一禾若把三回炒饭的做法、外婆的每一句评语都记下来，攒到几百回，一台机器也许能从里面看出，"先炒蛋"这一条一去掉，后面的步子就整个换了次序——这正是分叉口的样子。在数学里也一样，AI 既然能在一个下午试几百种"去掉"，它也有可能帮人看出哪几次"去掉"之后，后面的推导换了一套连接与次序。本书在后面会预测：下一阶段最稳定的人机合作，会出现在用 AI 测绘场谱系的团队里。到了那一步，"认出分叉口"本身，也是复合主体里机器那一份越来越亮的事。

这一节的判断，什么情况下会错?

如果认真地去登记了一段时间的"分叉口"，结果发现：被登记成分叉的那些地方，和只记成"成立"或"反例"的地方，在后来规律迁移顺不顺这件事上毫无分别，那么"消融研究是在扫描场谱系的边"这个读法，就只是一个好听的比喻，不承重。这是可以做、可以看的。

## ◆ 8.6　织谱者：数学家的新身份

这是一个构想的场景。

林知远在外地做博士后，春节回娄底，开着他表姐曾晓岚的车，带姨妈罗奶奶去乡下走亲戚。

他不熟路，一上车就打开了导航。导航很能干：它算出了三条路，标了哪条最快，哪个路口要拐，前面三公里有没有堵车。林知远照着开，开得很顺。

开到半路，导航让他从一个岔口右拐，抄一条近路。罗奶奶在后座说："莫走那里，那条路去年发大水冲坏了一段，现在只能走半边，过不得小车。"

林知远犹豫了一下，还是听了姨妈的，从左边绕了一段。到了亲戚家，他在导航软件里点了"道路报错"，写上"该路段损坏，小车难行"。

回去的路上，他问姨妈："您怎么知道那段路冲坏了？"

罗奶奶说："去年你舅舅骑摩托过去，差点摔了，回来讲的。"

这一趟路上，有三样东西在一起干活。

导航，在一张地图里算路。它在这张地图的连接与次序里，比任何人都算得快、算得全。

罗奶奶，心里有一张别的图。那不是一张画出来的地图，是几十年里这一家人、这一片乡下一次次走、一次次出事、一次次讲回来，攒下来的。那张图里，"那条路去年冲坏了"是一个分叉点：从那以后，近路分成了"大车走"和"小车绕"两支。

林知远，夹在两者之间。他做了两件事：一是在那个分叉点上，听了姨妈的而不是导航的；二是把这个分叉点，写回了导航的地图里。

我们可以想象林知远有两种开车的法子。

一种，全听导航。导航怎么说，他就怎么走。他开得顺，可他不知道自己在哪一张图里，遇到导航不知道的地方，他就只能撞上去。这样的司机，和导航是在抢同一件事——"算路"。可论算路，他永远算不过导航。他越想在算路上胜过导航，越是内卷。

另一种，他把算路交给导航，自己去做导航做不了的事：知道哪里分了叉，哪两条路共享一段来历、哪两条路早就分开；在导航撞上冲坏的路时，认出"这是一个分叉口"，然后把它写回去。这样的司机，和导航不抢同一件事。他越会开车，导航越好用；导航越好用，他越能腾出眼睛看路上的分叉。

第二种司机，本书叫他**织谱者**。

现在可以说数学家的新身份了。

作者认为，数学的基础公理系统——一种典范——一旦给定，剩下的推导交给AI，效率是一般科学家的上千倍；数学家留在里面和AI比推导，就是内卷，必须出来，去做新的数学典范的发生，也就是同一性谱系数学的发生。

"出来"去做什么？这一章给出的答案是：去做织谱者。

织谱者不和AI比在一种场结构里推导得快不快——那是导航的活，交给它。织谱者做三件事。

第一件，认出分叉口。AI撞出的果子里，哪些是"在这一支里挪了一挪"，哪些是"越出了边"，哪些是"走到了分叉口"——这一分，机器目前分不出来，勾叉表也分不出来。陶哲轩两天消化雅可比反例，做的正是这一件事的头一半：读懂这颗果子推翻了哪一条默认。

第二件，把分叉写进公共的谱。认出来不够，要写下来：这一支从哪里分出去，和母支共享了哪些定义、哪些引理、哪些推导的先后。写进形式库，写进教材，写进一个后来的人和机器都能读到的地方。林知远点那一下"道路报错"，就是这一件事。罗奶奶心里那张图再准，不写回去，下一个开车的人还是会被导航带到冲坏的路上。

第三件，读谱、用谱。谱写下了，两支之间共享了几代，就是可以数的。织谱者可以在新问题来的时候，先看它落在哪一支、离哪一支近，再决定把哪一支的规律搬过去、搬过去要先收窄什么——而不是把每一个新问题都当成"同一种结构"里的又一道题去抢。

这三件事里，AI都不是旁观者。第一件，AI撞出果子，也可以帮着把果子按"挪一挪""越出边""分叉口"先粗分一遍；第二件，写进公共的谱，形式化工具本身就是AI最拿手的地方之一，林知远天天在做的，正是这件事的底子；第三件，读谱时要数两支共享了几代，这种一条条比对定义与引理来历的活，交给机器又快又准。织谱者不是站在AI外面的裁判，他在织的时候，手里一直握着机器。

这三件事，每一件都不是一个人单独做的。认出分叉口，要有AI撞出的果子和专家的眼睛缠在一起；写进公共的谱，要有形式库、期刊、教材和一代代读者缠在一起；读谱、用谱，要有AI在各支里推导的速度和人对亲缘远近的判断缠在一起。织谱者，本身就是复合主体里的一个位置——不是复合主体之外的一个独立的人。

这和"人做典范、AI 做常规"不是一回事。那种说法，让人退到一个 AI 够不着的高处，去想一套又一套新公理；人和 AI 各在一层，互不相干。织谱者不退到高处。他就站在 AI 撞果子的地方，一颗一颗地接，一支一支地写。没有 AI 的果子，他无谱可织；没有他织下的谱，AI 的下一轮推导，仍然只在一种结构里打转。

这也给"和解"换了一个底子。宣言担心的是：没有数学家的照料，AI 构想的想法不会真正活起来。这句话在本章的眼光里，可以读成：果子落了地，要有织谱者把它写进谱里，它才算活了——活在一支场结构里，活在后来人的推导里。照料，不是挡住 AI 交果子，而是把果子接住、织进去。

还有一个问题绕不开：织谱者的眼睛，从哪里来?

罗奶奶能说出"那条路冲坏了"，是因为她和这一家人在这片乡下走了几十年。林知远若从小只会照着导航走，他到了那个岔口，就没有任何理由犹豫。认出分叉口的眼光，不是坐在导航旁边就能长出来的。

陶哲轩讲过两个和这件事很近的意思。一个是区分两种"摩擦"：一种是人为的摩擦，比如繁琐的计算，可以交给工具，前提是你能抽查；一种是自然的摩擦，是真正的概念难点，把它抹平了，就把学习者本该得到的收获也夺走了。另一个是"认知饮食"的类比：食物从稀缺变得充裕，带来了肥胖和体能退化；认知从处处有摩擦变得充裕，教下一代保持有意识的"认知饮食"，会成为教育的一项重大新使命。

放在织谱者身上，这两个意思合起来就是：织谱者要先亲手推过、亲手卡过，才认得出哪里是分叉口。陶哲轩消化雅可比反例，用的是两天，可这两天背后，是几十年亲手推代数推出来的手感。把推导交给机器，不等于把手感也交出去；恰恰相反，越是推导交给了机器，那一份"先手算、后交机器"的功夫越要紧——它是织谱者的眼睛。这一点，第 14 章讲培养织谱者时还要细说。

最后，回到林知远。他回到外地，照样每天用形式化工具写证明——这是他的本行。可是那一趟回乡的路，也许会让他想到另一件事：他每天在 Lean 里敲进去的定义和引理，是一张越来越大的地图；而这张图上，目前还没有地方标"这里分了叉、这两支共享了几代"。导航的报错按钮，地图上有；数学的形式库里，这个按钮还没有长出来。

这个按钮怎么长出来?要先回答一个更朴素的问题:g 真的能数吗?在纯数学的内部,场结构之间的历史亲缘,真的有程度、真的可测吗?下一章就先在数学内部测一测。

**带 走 的 话**

- **"AI,去解决哥德巴赫猜想吧"——这句话后面站满了人:出题的、传题的、立标准的、写形式库的、出钱的、读结果的。没有独立的 AI,只有人和机器缠在一起的复合主体。**
- **公司、专家、共同体是三种缠法:公司的劲在先,专家的劲在懂,共同体的劲在留。它们本来就缠着,冲突是把它们看成了三个对峙的主角。**
- **回写的每一代,就是复合主体一次撞果子、织谱:果子落地,有人认出分叉,共同体把它写进谱里。g 由复合主体写出,写下以后就属于数学之场本身,在迁移结果出来之前就能数。**
- **数学里的人机合作,应该是一个五步闭环:AI 在一种结构里推,撞出果子,人回写成分叉,AI 在新一支里推,再撞新果子。今天前两步转得飞快,第三步才冒头,环还没合上。**
- **数学家的新身份是织谱者:不和 AI 比推导,而是认出分叉口、把分叉写进公共的谱、读谱用谱。**

**小　账**

**本章切开的差异:**把"AI 是独立主体"切开为"人与机器缠成的复合主体";再把复合主体切成公司、专家、共同体三种缠法,看清谁在撞果子、谁在织谱。

**本章的场谱系读数:**今天的数学之场仍当作一种结构在用,回写多半停在专家的理解里,尚未进入公共的回写派生树;消融研究、定理邻域、方程理论项目是扫描谱系边界的前身,处于半发生;五步闭环的第三步(回写成分叉)是回写应当落下的地方。

◆



下　编

# 实测、案例与形式系统的谱系

## 编　序

这一编把主张写成能输的样子，全是研究设计，没有实测数字。第 9 章先在数学内部，用几种代数结构的概念派生史算 g、用引理跨结构复用的成功率测 d；第 10 至 12 章把同一套设计搬到学骑车、细胞用药与土壤施肥上，各自与最近的邻居对赌；第 13 章写给陶哲轩：形式系统怎样从二值验证走向谱系验证。

09

第 9 章

# 先在数学内部测一测

**这一章的问题**

如果数学之场真的有"程度"，能不能不出数学的门，就在数学家最熟悉的地方先把它测出来？怎样测，才不会测到最后只是给"结构相似"换了个名字？

## ◆ 9.1 为什么先在数学内部测

这是一个构想的场景。罗秀英奶奶（本书的构想人物，娄底的退休纺织女工）家的堂屋里，摆着两把一模一样的竹靠椅。一样的楠竹，一样的高矮，靠背都是十二根竹片，椅腿都是火烤弯过来的。外人看，像一个模子里出来的。

罗奶奶知道它们不一样。一把是她舅舅那一路篾匠手艺做的。那套做法不是一次定下的。舅舅年轻时做的椅子，椅腿和横档用竹钉一插就算，坐几年就晃，他改成先火烤让竹子收紧、再插钉；后来有人嫌靠背太直，他把靠背的弯从烤一回改成烤两回；再后来发现南方的潮气让竹片发霉，他又把刷桐油的先后换了，先刷里面再编。今天堂屋里这一把，就是这一路改出来的。另一把，是前几年在集市上照着样子买的，别人家的作坊做的。两把摆在一起，样子分毫不差。

去年夏天，两把椅子都有一条腿松了。罗奶奶请来一位跟着她舅舅学过手艺的表侄。表侄蹲下看了看舅舅做的那把，说横档这里当初是先烤后插的，退一颗钉，重新烤一下，再敲回去就紧了。一顿饭的工夫就修好了。轮到集市那把，他翻来覆去看了半天，说不晓得它里面是怎么插的，只好整条腿拆下来从头摸。同样是"把松腿修紧"，在一把上顺手就成，在另一把上要从头来。

这件小事，正好拿来回答一个问题。几乎每一位读到这里的数学家都会问：你们说数学之场有程度，可纯数学里，一条定理要么对、要么错，哪来的程度？

这个反驳有力，我们先承认它对的那一半。篾匠插的每一颗竹钉，插紧了就是插紧了，没插进去就是没插进去，没有"插进去七成"的一颗钉。数学里也一样。在一

套给定的公理里，一条命题证出来了就是证出来了，Lean 这样的证明检查器只回答"过"或"不过"。本书不打算动摇这一点。一条定理在它自己的地盘里成立与否，仍然是二值的，也应当是二值的。第 13 章还会说，这一层检查不但要留，还要做得更严。

也要承认另一件事：数学里早就有不止两个值的真。拓扑斯内部的真值可以有很多个，Ω-集和量化等式逻辑也让"相等"有了程度。可是在那些地方，程度是由一个事先给定的真值对象或一把事先给定的度量统一安排的——先有尺子，再往上量。本章要找的程度不是那一种。

那两把竹椅告诉我们：程度不在每一颗钉牢不牢上。两把椅子的每一颗钉都牢，样子也一样，差别在两把椅子之间的来路。一把和舅舅几十年的改法连在一起；另一把跟这段历史只隔着一个"照样子"。"把松腿修紧"这个做法在哪把上更顺，要看这把椅子和表侄手里那套手艺共享了多少一回回改出来的东西。

细看舅舅做的那把，它的样子是一层层显出来的：先有"插钉之前要先烤"，再有"靠背要烤两回"，再有"桐油先刷里面"。每一层都是上一批椅子用出了毛病、毛病又回头改了下一批的起点。这一串改动排成一条路，路上每一步都缠着具体的人和物——坐了几年就晃的那家人、嫌靠背太直的老人、梅雨天的潮气、舅舅自己烤竹子的火候。拿掉这些，这套手艺就不是这套手艺了。集市那把也有它的来路，只是那条路在别人的作坊里走完，到罗奶奶家时只剩一个样子。

数学里的情形是这样的：程度不在单条定理的真假上，而在场结构与场结构之间的历史亲缘上。群、环、模、格，每一种在自己的公理里，定理真假分明；可是两种结构之间，一条在这边成立的规律，搬到那边去成几成、要费多大的劲，这件事不是二值的。它有远近，有深浅。本书的主张是：这份远近，不全由两种结构的公理长得像不像来定，还由它们是怎样一代代被回写出来的来定。

其实数学家天天在和这种程度打交道，只是没有给它记账。一位做代数的老师给学生讲完群里的一条结论，学生最常问的一句是："这个在环上也对吗？"老师的回答，很少是干脆的"对"或"不对"。更常见的是："大体对，要加一个交换的条件。""前半截照搬，后半截要换一个证法。""这个别想了，到环上整个思路都不一样。"这三种回答，说的是同一件事的三个档位：规律搬过去，有的几乎原样成立，有的要改几处，有的要推倒重来。每一个当过学生的人都听过这三种回答，可是没有哪一本教科书把这三个档位当成一个可以量的东西。

还有一种更隐蔽的经验。两种结构，公理写出来差不多，老手却会说："这两个看着像，其实不是一路的。"另两种结构，公理差得挺远，老手又会说："它们是一家子，那边的办法这边多半能用。"老手凭的是什么？不是公理表。他凭的是这两种结构各自是怎么被一代代数学家做出来的：从哪个问题里分出来，借了谁的办法，被哪些反例逼着改过定义。这份"一路不一路"的感觉，就是本书要拿出来量的东西。它一直在老手的手上，像表侄蹲下看一眼就知道该退哪颗钉。我们要做的，是把这一眼变成一个数。

那为什么要先在数学内部测？有三个理由。

第一个理由，是公平。本书的承重命题，说的就是数学之场本身有程度。如果一开口就跑去学习、细胞、土壤里找证据，数学家完全可以说：那是经验对象的事，数学自己仍然是一把不变的尺子。要让命题站住，得先在数学家自家院子里给他们看。

第二个理由，是干净。学习、细胞、土壤，牵扯的东西太多，一个孩子学会没学会，背后缠着一百样事。数学内部却有一块难得的干净地：形式化的库。在那里，每一个定义写在哪一行、哪一天被谁改过、哪条引理用了哪条引理，都留着记录。这就像舅舅要是把每一次改做法都记在一个本子上，我们就不用凭老人的回忆，可以一页页翻出来算。

第三个理由，是好推翻。在数学内部，"规律从一种结构搬到另一种结构，成不成"，可以交给机器一条条去试，成就是成，不成就是不成，不靠人打分。如果本书错了，在这里最容易露馅。我们把最容易输的赌局放在最前面。

这里要说清楚：本章是一份研究设计，不是一份已经做完的报告。下面每一个数，都是"打算怎样算"，不是"已经算出来是多少"。这个实验还没有人跑过。写成设计，是为了让任何一个熟悉形式库的团队拿去就能做；做出来是赢是输，都算数。

这个设计会把"程度"拆成两个分开量的数。一个叫 g，量两种结构的历史亲缘：它们在一代代回写里共享了多少连接、多少先后、多少结构。另一个叫 d，量规律迁移的成色：一条在甲结构里成立的规律，搬到乙结构里，能成几成。此外还有第三个数，叫 g_结构，量两种结构静态上长得多像——公理和公理能不能对上、对上多少。这正是制度论、理论态射那一路学问最擅长的事，本书不和它们抢这块地。

本书押的注是：把 g_结构 拉平以后，d 仍然跟着 g 走。就像那两把竹椅：样子一样，g_结构 相同；来路不同，g 不同；"把松腿修紧"的顺手程度就不同，d 不同。

接下来三节，依次讲怎么算 g，怎么算 d，怎么在 g_结构　相同的配对上把这一注押下去。

## ◆ 9.2　g：几种代数结构的概念派生史

先说一件学校里的事。

曾晓岚（罗奶奶的女儿，本书的构想人物）在娄底一所初中教数学，教了二十年。她的电脑里有一个文件夹，里面是历年的教案。开学前，教研组长让各位老师交"一次函数"这一课的教案。曾晓岚交的那份，和隔壁班新来的小老师交的那份，打印出来摆在桌上，几乎看不出差别：同样的引入，同样的三道例题，同样的板书格局。

组长要是只看这两张纸，会说它们一样。可是曾晓岚自己知道，她这份教案有一条长长的来路。第一年，她照着教参讲，学生在"斜率为什么是比值"上卡住了，她第二年加了一个"爬楼梯"的引入。第三年发现爬楼梯讲多了，学生把斜率当成了"陡不陡"，看见负斜率就糊涂，她又把引入改成"每多买一斤，多付几块钱"。第五年，教材换了版本，例题顺序变了，她把"先画图后列式"调成"先列表再画图"。今天这份教案，是这一路回头改出来的。小老师那份呢？是从网上下载的一份优秀教案，略作修改。那份网上的教案也有它的来路，只是和曾晓岚这条路，在很早的地方就分开了——大概只共享"教参"这个老祖宗。

如果有人想知道"这两份教案有多亲"，有两种量法。一种是把两张纸并排，数有多少句话相同，这是看样子。另一种是翻出两份教案的来历，看它们在哪一年、哪一次修改之后才分的家，这是看家谱。本节要做的，就是第二种量法，只不过对象从教案换成了数学结构。

### — 回写派生树是什么

本书第 5 章给过 g 的定义：两个场结构在"回写派生树"上的共同祖先深度。这里把它落到一个具体的地方：一个形式化的数学库。

拿今天最大的一个来说。Lean 的数学库 Mathlib，是一个由全世界志愿者合写的库，里面有半群、幺半群、群、环、半环、域、格、模等等一长串代数结构，每一种都写成一个可以被机器检查的定义。这些定义之间是一棵大树：环是在"加法交换群"和"乘法幺半群"之上搭起来的，交换环又从环上再加一条，等等。库的官方设计说明里写着，它一般用"扩展"的办法搭这棵树——交换环扩展环——并且讲明了一

条门槛：只有当一个新的类真有数学可做，或者把一个公共部分拎出来能让事情明显简单时，才加这个类。说明里举的一个例子，是"带零的群"这一类结构。

这条门槛本身就很有意思。它说明库里的每一个结构，不是哪一天整整齐齐地一次摆上去的，而是一回一回被逼出来的：有人在证明里反复遇到同一段重复的东西，嫌麻烦，才把它拎出来立成一类；有人发现某条引理在原来的结构里证不顺，才回头改了定义的写法。这一回一回，就是本书说的回写：后面的推导碰了壁，碰壁的结果回头改写了前面的定义，改写后的定义成了下一轮推导的起点。

所以我们说的"回写派生树"，不是今天那棵整整齐齐的继承树。今天的继承树是一张截面，像曾晓岚今天打印出来的那份教案。回写派生树是这张截面背后的来路：每个结构的定义是在哪一次修改里从哪一个更早的定义分出来的，又因为什么被改过。

### 一 树上的节点和枝

要把这棵树搭出来，得先说清楚树上的东西。

**节点**，是某一个结构定义在某一个时刻的样子。"群"不是一个节点，而是一串节点：最早写进库里的那一版群，后来改过字段写法的那一版群，再后来为了和别的结构对齐、拆过一次的那一版群。每一版各占一个节点。

**枝**，是一次派生事件：一个新节点从一个或几个旧节点那里来。派生事件要分两种来记。

第一种是平常的增添：给一个结构多证了几条引理，多加了几个例子。这像曾晓岚在教案后面多附了两道练习题。它是往前走，没有回头改起点。这一种不算一代。

第二种才是回写：定义本身因为后面的推导出了问题而改了——拆开、合并、加一个中间层、换一种写法、为某个反例收窄或放宽。这像曾晓岚因为学生把斜率当陡不陡，回头把整个引入换掉。只有这一种算一代。

为什么只数第二种？因为本书的 g 要量的，是两个结构共享了多少"一回回改出来的连接、次序、结构"。光是在后面添东西，没有回头改起点，就没有沉淀。舅舅的手艺传给表侄的，也不是他做过的每一把椅子，而是每一次用出毛病以后改掉的那几处。

## 一 g 怎样算

有了节点和枝，g 的算法就朴素了。照第 5 章的主数法：对两个结构今天的节点，沿着枝往回找到它们的共同祖先，再沿回写的代际一代代往下数——每一代回写沉淀下来的连接、次序、结构里，有多少条是两支今天都还保有的。数出来的条目总数，就是 g。

本书说场有三件事——连接、次序、结构（第 5 章）。一次回写事件，改的可能是连接（哪些运算被放在一起，比如把"加法和乘法"捆在一个类里），可能是次序（先有哪一层再有哪一层，比如先定义幺半群再定义群，还是倒过来从群里拆出幺半群），也可能是结构（整个继承的形状换了）。设计里把每一件回写事件按这三类打标签，g 就可以分成三个分量来报告。这样做，日后可以问更细的问题：迁移成色到底是更跟着"共享的连接"走，还是更跟着"共享的次序"走。

举一个示意（数字都是编来说明算法的，不是实测）：设想结构甲和结构乙，往回追，发现前七次回写它们是一起经历的，之后才分家；这七代沉淀下来、两边今天都还保有的条目，比如有二十来条。结构甲和结构丙，第二次回写之后就分开了，两边都还保有的只有五六条。按本书的定义，甲乙的 g 比甲丙的 g 高。如果只想先快速估一下，也可以只数"一起经历了几代回写"（七代对两代）当近似；正式对赌一律用主数法。

真做的时候，比这个示意要细。一个结构往往不止一个"父亲"：环既从加法这一路来，也从乘法这一路来。所以回写派生树更像一张多亲本的家谱图，而不是一棵只有一个根的树。主数法本身不怕多亲本：不管条目是沿哪一条亲本路线传下来的，只要两支今天都保有、又能沿派生记录追到同一个祖先节点，就记一条，同一条不重复记。

有三条计数规矩，要在开算之前写死。

第一，"一代"指一次完整的回写：被后面的推导逼着改了一回，并且改动沉淀进了定义。只添引理、不改起点的不算代；按年头算、按参与人数算，都不算代。

第二，祖先节点一旦记下，就不再改动。库里常有这种事：多年以后，某个老定义的措辞被重新写过，或者讲法整个换了一种。这算不算"回头改了祖先"？按本书的口径，计 g 时只用测量那一天已经记录在案的回写史；后来的改写，算派生树上新长出的一代，不回头涂改祖先节点。

第三，趋同不计。两支结构各自独立地发明出了同一个写法、同一层中间结构，在派生记录里却追不到同一个来源，那么这份相像不进 g。它是两条路各自走到了一处，不是共同祖先传下来的；它若起作用，应当算进静态的结构相似那一边。

### — 材料从哪里来

材料就是库的历史。一个形式库的每一处修改都有提交记录：改了哪一行，谁改的，什么时候改的，附了什么说明。很多修改还连着一段公开的讨论：为什么要拆这个类，哪条证明在旧写法下太别扭。这些都是现成的。

难处有三个，设计里都要正面交代。

第一，要区分"回写"与"重新排版"。库里有大量改名、挪文件、调格式的修改，它们不改连接、次序和结构。这一层可以先用程序粗筛：只看定义本身的签名和字段有没有变。剩下的再由两位互不通气的标注者判断"这次改动是不是因为后面推导碰了壁"。两人一致的才算数，不一致的单独列出来。

第二，要接上断开的历史。今天的 Mathlib 是从 Lean 3 时代的旧库整体迁移过来的，迁移前后的提交记录不在同一条线上，要靠迁移时留下的名称对照把两段接起来〔待核：迁移期名称对照记录今天是否完整可查〕。g 要追到迁移之前，才算追全了家谱。

第三，也是最要紧的：库的历史不等于数学的历史。群这个概念在纸上发展了一百多年，库里的群只有十来年的来路。所以本章测到的 g，严格说是"形式化的回写史"上的共同祖先深度。这不是缺点，反倒是本设计的立足点：形式库是一个自成一体的小世界，在这个小世界里，历史和迁移都可以被完整记录，可以先把账算清。至于纸上数学的百年家谱能不能也这样算，留到 9.5 再说。

### — g 不许偷看的东西

g 有一条铁律：不看任何规律的迁移结果。

这条铁律很容易被不知不觉破坏。比如，有人会想：两个结构共享的引理越多，说明它们越亲。这就犯了规。共享的引理，正是规律从一边搬到另一边、搬成功了的结果，那是 d 要量的东西。拿它去算 g，等于拿答案去出题，后面的对赌就没有意义了。

所以 g 只数定义层面的回写事件：定义怎么来的、怎么改的、跟谁一起改的。不数引理，不数哪条证明搬过去用上了。

还有一层更隐蔽的偷看。库里有些回写，恰恰是因为"想把甲的一条规律搬到乙上，搬不过去"才发生的：搬不过去，于是回头改了乙的定义，或者拎出一个甲乙共有的中间层。这种回写事件，它的起因里就有一次迁移的结果。要不要把它算进 g？

本书的回答是：要算，但要在时间上切开。因为这正是本书说的回写——果子撞了壁，回头改了土。只是做对赌的时候，g 必须用某个日期之前的历史来算，d 必须用这个日期之后才出现的新规律来测。这样，g 里沉淀的是过去的迁移撞壁，d 量的是未来的迁移成色，两者不会互相抄。这一点在 9.4 还会用到。

回到曾晓岚的两份教案。教研组长若想知道哪一份教案拿去教下一届学生更顺手，正确的做法不是看哪份教案以前被别人借用得多（那是结果），而是先翻家谱，记下两份教案在哪一年才分的家，然后封存这本账，等新学期开课以后再看哪份更顺手。先记账，后开奖。g 就是那本先记下的账。

账记好了，下一步是开奖：规律搬过去，到底能成几成？

## ◆ 9.3　d：引理跨结构复用的成功率

谭一禾（曾晓岚的女儿，本书的构想人物）上高一，这学期家里换了一台新洗衣机。旧的那台用了八年，一禾早就摸熟了：深色衣服扔进去，转到"快洗"，按两下"漂洗加一次"，再按开始。新洗衣机是另一个牌子，面板长得完全不一样。

一禾站在新机器前面，把旧机器上的几条经验一条条往上试。"深色衣服单独洗"——这条不看机器，照搬就成。"快洗"——新机器上也有，名字一样，一按就对。"漂洗加一次"——新机器上找了半天，没有单独的按钮，要先进"自定义"，再调漂洗次数，绕了一个弯才成。"按两下开始"是旧机器的毛病，新机器按一下就启动，这条经验搬过来，反倒多按了一次、把机器暂停了。

四条经验，搬到新机器上，一条原样成立，一条换个位置就成，一条要绕弯，一条搬不过来。如果有人问"一禾的洗衣经验在新机器上管用几成"，最老实的回答就是把这四种情形分别数一数，而不是给一个笼统的"差不多"。

本节的 d，做的就是这件事，只不过从洗衣经验换成了数学里的引理，从两台洗衣机换成了两种代数结构。

## 一 搬什么：引理

形式库里有成千上万条引理，每一条都是在某一种结构里证过的一句话。比如在群里，有一条大家都熟的：一个元素的逆的逆，等于它自己。这条话在群里成立，库里也有它的机器证明。

d 要问的是：一条在甲结构里证过的引理，拿到乙结构里，能不能复用？复用到什么程度？

这里的"拿过去"要说清楚是怎么拿。不是随便把字面抄过去。乙结构里未必有"逆"这个东西，那这条引理在乙那里就没有对应的说法，谈不上成不成。所以第一步要先做翻译：把甲结构里的说法，按事先定好的对应办法，翻成乙结构里的一句话。翻不过去的，单独记成一类，不算失败，也不算成功。

翻过去以后，看这句话在乙结构里能走到哪一档。和一禾的洗衣机一样，分成四档来记。

**第一档，原样成立。** 翻过去的那句话，在乙结构里用原来的证明（照着翻过去的证明）就能过机器检查。像"深色衣服单独洗"，搬过去一个字不用改。

**第二档，小改即成。** 原来的证明照搬过不去，但只要补一两处、换一两个引用，就能过。像"快洗"，按钮换了个位置，找到了就对。改动有多小，事先要定一条界线，比如证明的骨架不动、只替换少数几处引用。

**第三档，要另证。** 这句话在乙结构里是对的，但原来的证明思路用不上，要另找一条路证明。像"漂洗加一次"，结果做到了，可绕了一个大弯。

**第四档，不成立。** 这句话在乙结构里根本是错的，能找到反例。像"按两下开始"，搬过去反倒坏事。

翻译这一步，最容易被人做手脚，所以要多说几句。

一禾搬洗衣经验时，其实也在做翻译：旧机器上叫"漂洗加一次"，新机器上没有这个名字，她得先认出"自定义里调漂洗次数"说的是同一件事。认得对不对，决定了后面算成还是算不成。要是她把新机器上的"强力洗"错认成了旧机器的"快洗"，那条经验就会被冤枉成"搬不过来"。

数学里也是这样。群里的"逆"，翻到环里，是翻成加法的相反数，还是乘法的倒数？翻成前者，"逆的逆等于自己"在一切环里原样成立；翻成后者，很多元素根本没有倒数，这句话就成了"要加条件"。同一条引理，翻法不同，落进的档位就不同。如

果翻法可以事后挑，想让 d 高就挑顺的翻法，想让 d 低就挑别扭的翻法，d 就成了随人捏的泥。

所以设计里规定：每一对结构之间的翻法，在测 d 之前由一组不知道 g 的人定好，写成对照表，封存；测 d 时一律照表翻，不许临时改。对照表本身尽量借库里已有的现成办法，比如库里本来就有的那些"把这种结构看成那种结构"的桥接定义，而不是另起炉灶。

还要说一句"翻不过去"的那一类。有的引理在乙结构里就是没有对应的说法，像旧洗衣机的"童锁"，新机器压根没这个功能。这一类单独记数，不进四档。可它也不是没有用：两种结构之间"翻不过去"的引理占多大比例，本身就是一个值得报告的数。它和 g_结构 关系更近，正好可以拿来核对 g_结构 量得准不准。

有了这四档，d 就可以有几种报法：最简单的，是看第一档和第二档加起来占多少，叫"顺手复用率"；细一点，给四档各定一个分值，算一个加权的成色。设计里两种都报，并且事先写死用哪一种做主报，免得事后挑一种对自己有利的。

### — 谁来搬：机器先试，人来复核

这件事以前做不了，原因很简单：太费人。要把成千上万条引理一条条翻译、一条条试证明，一个研究组做十年也做不完。

现在不一样了。能自动搜证明的工具和能写形式化证明的 AI，恰好擅长这种"照着一个样子去试"的活。第一档和第二档，大多可以交给机器：把翻过去的命题和原证明一起交给它，让它在乙结构里试，试过了机器检查器说了算。第三档，可以交给更强的证明搜索，或者交给 AI 去找新证法；找不到的，并不等于第四档。第四档要的是反例，反例可以让程序在小的有限模型里搜，搜到了，就是铁的。

这里有一个难处要老实交代：机器"试不出来"，和"本来就不成立"，是两回事。一条引理在乙结构里试了很久没证出来，可能是它真的不成立，也可能只是机器还不够聪明。所以设计里要单开一类"未决"，既不归第三档也不归第四档。未决的比例要报出来。如果未决太多，d 就不可信，整个对赌要往后推，等工具再强一些。

这一点和方程理论项目的经验相通。那个项目由陶哲轩于 2024 年秋发起，把 4694 条等式律之间两两的蕴含关系，约 2200 万对，一条条判成"能推出"或"推不出"（据项目论文 arXiv　2512.07087）。按论文的说法，这件活离不开大量的自动化：自动证明器、在小的有限代数结构里搜反例、再加上人想出来的各种构造，最后都交给 Lean 检查；论文也如实列出了在有限情形下仍未解决的个别配对。这说明

一件事：机器先试、人来收尾，是可以做到大规模、可复核的。也说明另一件事：总会有一些"未决"，要如实留着，不能为了表面整齐把它们塞进某一档。

### — 搬哪些：只搬"新"引理

d 有一条和 g 配对的铁律：用来测 d 的引理，必须是在 g 封存那一天之后才进库的。

为什么？9.2 已经说了：库里有一些回写，正是"想把甲的引理搬到乙、搬不过去"逼出来的。那些旧引理的搬运史，已经沉淀进了 g。要是再拿它们来测 d，等于让 g 和 d 吃同一锅饭，对得上也不稀奇。

所以设计是这样的：选一个日期，把这个日期之前的库历史拿去算 g，算好、封存、交给第三方保管。这个日期之后新进库的引理，才拿来测 d。新引理是什么？就是这些年数学家和 AI 一起往库里一条条添的东西。它们进库的时候，没有人会想到要拿它们来给本书的预测作证。

这像曾晓岚的教案：先翻完家谱、记下账，封存；再看新学期新编的那几道题，放进两份教案里各自顺不顺。

### — 还要防一种"自己人偏心"

还有一个麻烦，比偷看更难防。

形式库里，一条引理写成什么样子，常常和写它的人习惯在哪种结构里工作有关。一位一直在群这一支里干活的贡献者，他写下的新引理，句式、用词、证明的套路，天然更像群这一支的老习惯。这样的引理搬到和群亲缘近的结构里，当然更顺——可这顺，到底是因为两种结构历史亲，还是因为写引理的人本来就是这一家的人？

这个麻烦不能装作没有。设计里的办法是：给每一条测 d 的引理记下作者和他过去主要在哪一支干活，分析的时候把这一项单独拿出来看。如果把"作者出身"这一项控制住以后，d 跟着 g 走的趋势就没了，那说明 g 起的作用，其实是"同一家人写的东西互相顺手"——这本身也是一种历史亲缘，但比本书主张的要窄得多，要如实报告。

还有一个更省事的办法：请 AI 来生成一批测试用的引理。AI 不属于任何一支，它在甲结构里随机生成一批成立的命题，再拿去各支试搬。这批引理不是"自然长出

来的数学"，可正因为它不是，它可以当一组对照：如果连 AI 随手生成的引理，搬过去的成色也跟着 g 走，那么"作者出身"的解释就站不住了。

### — d 不是好坏分

最后要说一句，免得误会：d 高不等于"这对结构好"，d 低也不等于"这对结构差"。

一禾的新洗衣机，"按两下开始"那条经验搬不过去，不说明新机器坏，只说明它和旧机器不是一路的。数学里也一样。两种结构之间 d 很低，可能正说明乙结构里有甲结构没有的东西，正是值得另立一支、好好去做的地方。本书第 7 章说，反面果子是规律被推出它所属场谱系的地方。d 低的那些配对，正是反面果子最容易冒出来的地方。

所以，d 不是用来给结构排名次的，更不拿去给做这些结构的人打分。它只是一张"搬得顺不顺"的记录，和 g 那本家谱放在一起对照用。

现在两样东西都有了：一本先封存的家谱 g，一张后测的搬运记录 d。最后一步，是挑出合适的配对，把赌注押下去。

## ◆ 9.4　对赌：g_结构 相同、g 不同

欧阳伯（罗奶奶的邻居，本书的构想人物）年轻时在镇上的锁匠铺当过几年学徒。他讲过一件事，这里把它整理成一个构想的场景。

有一回，一位客人拿来两把旧锁，要配钥匙。两把锁是同一个厂、同一个型号，锁芯里的弹子数一样，钥匙齿的深浅档位也一样。拿卡尺量，样样对得上。照理说，配出来的钥匙，在一把上顺，在另一把上也该顺。

可老师傅接过来，拿手里转了转，说：这把是原装的；那把是人修过的，锁芯换过一次，弹簧也换过，换的不是原厂的件。一样的型号，用起来手感不一样。果然，配好的钥匙，在原装那把上一拧就开；在修过那把上，要往里多推一点、手腕带一下劲，才拧得动。

卡尺量出来一样——这是静态的结构相似。用起来不一样——这是迁移的成色。差在哪里？差在两把锁各自的来路：一把从出厂到今天没被动过，一把中途被拆开、换件、重装过一回。

细看那把修过的锁，它的来路是这样的：原来的弹簧用久了，和锁芯越来越对不上——锁芯还是那个样子，弹簧却一天天软下去，每开一次门，这份顶撞就积累

一点。积累到有一天钥匙拧不动了，锁匠把它拆开、换了一副弹簧，锁里那一套件与件的配合就变了形。换上的弹簧又回头改了以后每一次开锁的手感：钥匙要多推一点，手腕要带一下劲。这一回"顶撞—改形—回写"，没有在卡尺上留下任何读数，却留在了这把锁的来路里。

数学结构的来路也是这样走的。一个定义写定了，大家顺着它推；推到某处，定义的写法和要推的东西顶上了，证明怎么也不顺。顶撞积累到有人受不了，就回头改定义：拆一层、并一层、换一种写法。改过的定义又成了后面所有推导的起点。9.2 数的 g，数的正是这一回回"顶撞—改形—回写"共同经历了多少代。卡尺量不到它，可它在。

本书的承重命题，就是在这种"卡尺量出来一样"的情形下押注。

### — 为什么一定要把 g_结构 拉平

先说为什么要费这么大的劲找"g_结构 相同"的配对。

如果随便拿几对结构来比，发现 g 高的配对 d 也高，这什么也说明不了。因为历史亲近的两种结构，多半公理也长得像；公理长得像，引理当然搬得顺。这时候说"d 跟着 g 走"，制度论那一路的人完全可以回答：你那个 g 只是结构相似的影子，真正起作用的是结构，历史是多余的。

第 6 章已经承认，这个反驳很有力，它可能是对的。制度论（Goguen–Burstall）讲的是理论与理论之间的态射，一个理论能不能翻进另一个理论、翻进去以后保不保持真；MMT 的理论图把这种翻译画成一张网；Gentner 的结构映射讲类比跟着关系结构走；Pearl 和 Bareinboim 的可迁移性，用一张选择图标出两个群体在哪些因果机制上不同，再判断一个结论能不能搬过去。这些学问都很成熟，都说"迁移跟着结构走"，而且它们的"结构"都不是粗糙的表面距离，是精细的连接方式。它们共同不讲的，是历史：两个理论之间有没有态射，是按定义当下就定了的，不问这两个理论是怎么一回回改出来的。

所以，唯一能把本书和这些邻居分开的办法，是让它们在结构上打平：找两对结构，用这些邻居能拿出的最好的结构比较办法量，两对一样像；而两对的回写历史不同。在这种配对上，邻居们一致预测：d 应当一样。本书预测：d 不一样，历史亲的那一对更顺。

这就是对赌。像那两把锁：卡尺先量平，再看钥匙。

## — g_结构 怎么量

要拉平，先得会量 g_结构。设计里不自己发明，直接借邻居的工具，而且借它们最好的。

第一种量法，借制度论和理论图的思路：把两种结构的公理系统都写成理论，看它们之间能找到什么样的翻译，翻过去以后保住了多少公理、多少运算。能保住的越多，越像。

第二种量法，借结构映射的思路：把每种结构的定义写成一张"谁和谁连着"的图——哪个运算作用在什么上，哪条公理牵着哪几个运算——然后看两张图能对上多大一块。

第三种量法最直接：拿今天库里两种结构定义的样子，按库自己的继承关系看，它们共享了哪些上层结构、各自多出几条公理。

三种量法，设计里都算，并且要求：被选进对赌的配对，在三种量法下都要打平（相差在事先定好的小范围之内）。只在一种量法下打平，邻居可以换一种量法说"其实不平"。三种都平，邻居要辩，就得拿出第四种更好的量法来，这也是好事——那正好让对赌升级。

这里要特别小心一种情形：g_结构　的第三种量法，看的是今天库里的继承关系，而今天的继承关系本身就是历史回写的截面。会不会 g_结构　里已经偷偷带了 g？会带一部分。这正是本书和邻居争的焦点：邻居说历史全都留在今天的结构里了；本书说没有全留下，还有一部分留在"怎么改出来的"那条路上。所以对赌里，g_结构　用今天的截面算，尽量吃掉历史能留在截面里的那部分；g 用回写的路算。截面吃完了，路上还剩下的那部分若还管用，本书就赢；若不管用，邻居就赢。

## — 配对怎么挑

最理想的配对，长得像那两把锁：同样的型号，一把原装、一把修过。

数学里，什么样的两种结构"型号一样、来路不同"？设想这样一种情形（这是一个构想的例子，不是已经找到的实例）：库里有某种结构，早先是作为甲的一个特殊情形写进来的；后来因为一批引理在它上面证不顺，社区把它从甲那里拆出来，挂到了另一条线上，重写了定义。今天它的公理和另一种结构乙差不多，和甲也差不多，可它一路上和甲共同经历的回写，远比和乙多。这样，它和甲、它和乙，g_结构 相近，g 却不同。

真要做，挑配对的办法应当事先写死、交给第三方，不许看了 d 再挑。大致的步骤是：先把库里所有候选结构两两算出 g_结构，挑出 g_结构　相近的配对组；在这些组里，再看 g，挑出 g 相差最大的配对。挑好以后封存配对名单。然后才开始测 d。

### — 押什么注，怎么算输

注要押得清楚，输也要输得清楚。

本书押的是：在 g_结构　　打平的配对里，g 高的那一对，d 更高。说得再细一点：如果把所有打平的配对排成队，按 g 从高到低排，d 大体也应该从高到低排。

什么情况下算本书输？有三种局面，事先写明。

第一种，把 g_结构　　拉平以后，d 和 g 毫无关系：g 高的配对，d 有时高有时低，看不出趋势。这是最干脆的输，说明历史亲缘是多余的，邻居对了。

第二种，d 和 g 有关系，可一旦把"作者出身"那一项（9.3 说的）控制住，关系就没了。这是半输：历史有点用，但只是"同一家人写的东西顺手"，不是本书说的场结构本身的亲缘。

第三种，配对挑不出来：库里压根找不到 g_结构 打平而 g 差得开的配对。这不算输，也不算赢，说明在这个库里，历史和结构绑得太紧，分不开。那就要换一个历史更长、分叉更多的库，或者等库再长几年。

只有当这三种局面都没出现——配对挑得出来，d 跟着 g 走，控制作者出身以后趋势还在——本书才算在数学内部赢了第一局。

还有一件事要事先定好：要多少对配对才算数。只比一对，赢了也可能是碰巧，像只配了一把钥匙就说修过的锁都难开。配对少了，结论站不住；配对多了，未必挑得出来。设计里要先按常规的统计办法估一估，大概要多少对、d 的差别要多大，才能和碰巧分开；估出来的数和判输赢的门槛一起写进封存的文件，开奖以后不许改。挑不够配对，就老老实实报"本局作废"，不凑数。

还有一点要说在前面：赢了第一局，不等于命题被证明了。它只是说，在一个形式库、几种代数结构、一个时间段里，历史亲缘在结构之外多管了一份事。下一章到学习、细胞、土壤里去，每一块田都要另赌一局。

### — 一个容易被忽略的好处

最后说一件事。这场对赌即便本书输了，对数学家和做形式库的人也不是白费。

为什么？因为做这场对赌，要先把库的回写派生树整理出来，要先把成千上万条新引理跨结构试搬一遍。这两样东西本身就是礼物。前一样是一张"库是怎么长成今天这样的"家谱，以后任何人想改库的结构，都可以先翻一翻：这一处当初为什么这样拆，拆的时候碰了什么壁。后一样是一张"哪些引理能搬到哪里"的大表，以后谁在一种新结构里干活，可以先查一查哪些引理现成能用、哪些要另证。

就像那位老锁匠。他不需要什么理论，只要见得够多，拿起一把锁转一转就知道它被修过没有。设计这场对赌，就是想把老锁匠手上那点"转一转就知道"的功夫，先在数学里变成一本人人能翻的账。账一旦有了，赌赢赌输，都有人用得上。

可是，这个设计到底有多牢靠？哪些地方它还没想清楚？最后一节把短处摆出来。

## ◆ 9.5　局限与待做

林知远（曾晓岚的表弟，在外地做 Lean 形式化的博士后，本书的构想人物）过年回娄底，饭桌上听晓岚讲起这本书的设计。这是一个构想的场景。他夹了一筷子菜，想了想，说了一句很实在的话：库里的改动，很多是为了让机器跑得快，不是因为数学上碰了壁。

这句话点中了本设计的第一个短处，也提醒我们：一个设计写得再整齐，拿到真干活的人面前，总会露出几处没想到的地方。最后这一节，把已经看得见的短处一条条摆出来。

**第一，回写和"工程改动"难分。**　形式库不只是数学，它也是一个要编译、要运行的软件。很多改定义的修改，起因是编译太慢、类型推断卡住、某个自动化策略跑不动，和数学上的"碰壁"关系不大。林知远说的正是这个。这类改动算不算回写？严格说，它也是后面的推导碰了壁、回头改了前面的定义，只是碰的是机器的壁，不是数学的壁。设计里能做的，是把回写事件再分一层：数学起因的、工程起因的、两者都有的。g 分别用前一类和全部两种口径算。如果只有算上工程改动时 d 才跟着 g 走，那这份历史亲缘有一大块是"机器上的亲缘"，要如实说。

**第二，有些改动后来又被改回去了。**　库里不少修改，过一阵子被撤销，回到原样。这像草坪上的路被铺平又被踩出来，起点没有真的变。第 5 章把这种情形叫轮

回，不叫回写。设计里的规矩是：一次改动，如果在事先定好的一段时间里被完整撤回，就不算一代；只有留下来、成了后面推导起点的改动才算。这条规矩看起来简单，真做起来要逐条核对，费工夫。

**第三，库的历史太短。** 9.2 已经说过，库里的群只有十来年的来路，纸上的群有一百多年。今天测到的 g，只是这一百多年里最后一小段在库里的投影。如果真正决定迁移成色的，是更早的那段纸上历史，那么库里的 g 可能测不出来，本书会在这里输得冤枉。反过来也一样：如果库里的 g 测出了效果，也不能直接说纸上的百年历史就是这样起作用的。把纸上数学史整理成同样格式的回写派生树，是一件大工程，要数学史家、形式化者和 AI 一起做。本章不敢说它做得成，只把它列为待做。

**第四，一个库是一家人的家谱。** 本章只设计了在一个库里测。可一个库，本身就是一个共同体按自己的习惯一代代改出来的，它的回写派生树带着这个共同体的口味。换一个库——比如别的证明助手上的数学库——同样几种代数结构，派生史可能完全不同。本书的命题若是对的，就该在几个库上都站得住；只在一个库上站住，可能只是这一家人的特点。这也是待做：等这个设计在一个库上跑通，再拿去另一个库照做一遍。

**第五，"结构"本身是谁定的。** 本章的配对用的是"几种代数结构"，可哪些算一种结构、哪些算同一种结构的不同写法，本身就是库的回写决定的。今天库里分成两个类的东西，十年前可能是一个类。这件事不能装作不存在。设计里的办法，是在 g 封存那一天，把当时库里的类划分也一起封存，以那一天的划分为准，不用后来的划分。

**第六，这不是全部的数学。** 代数结构是数学里最"成谱系"、最好比较的一块。分析、几何、组合，也许不那么整齐。本章选代数，是因为它最好下手，不是因为它最有代表性。在代数里赢了，只能说在代数里赢了。

这些短处摆出来，读者也许会问：既然有这么多麻烦，为什么还要设计？

回答是：这些麻烦，每一条都可以被别人查、被别人改。它们是一个设计的短处，不是一句空话的短处。一句"数学之场有程度"说一万遍，也不会露出任何一条这样的短处，因为它根本没有说什么事情发生了它就错了。而现在我们知道：在什么库里、拿哪几种结构、按什么规矩数 g、怎样测 d、怎样挑配对、出现哪三种局面就算输。命题第一次有了能被打倒的样子。

林知远那句话，后来被晓岚记在了笔记本上。他没有说这个设计好还是不好，只说了一件干活的人才知道的事。可正是这一类话，会让设计一回回被改：先分出工程改动，再分出撤回的改动，再加一个库。设计本身，也要走它自己的回写派生树。

下一章，我们从数学的内部走出来，到第一块田里去：学习。

**带 走 的 话**

- **纯数学有没有程度？单条定理的真假，在给定的公理里仍然是二值的；程度不在这里，而在场结构与场结构之间的历史亲缘：两种结构一路上共同经历过多少回写。**
- **g 是先记的家谱：在形式库的概念派生史里，数两种结构共享多少代回写；只数定义层面的改动，不看任何引理搬没搬成。**
- **d 是后测的搬运记录：新进库的引理跨结构复用，分原样成立、小改即成、要另证、不成立四档，另留"未决"一类。**
- **对赌只在 g_结构　打平的配对上下注：用邻居最好的结构比较办法把两对量平，再看历史不同的两对，引理搬得顺不顺。**
- **本章是研究设计，没有任何结果；它把"数学之场有程度"第一次写成了能输的样子。**

**小　账**

**本章切开的差异：**把"数学里一条定理对不对"（二值）和"规律在两种结构之间搬得顺不顺"（有程度）切开；再把后者切成静态结构相似 g_结构 与回写历史亲缘 g 两份。

**本章的场谱系读数：**形式库今天仍被当作一种场结构在用，它的继承树是一张截面；回写落在定义的一次次拆分、合并与重写里，记录都在，只是还没被当作家谱整理出来、拿去和迁移成色对账。

◆

10

第 10 章

# 学习的数学

> **这一章的问题**
>
> 两个孩子今天骑车骑得一样好，明天换一辆车、换一条路，为什么一个上手就会、一个要从头摔起？学习有没有一种数学，能在"换车换路"之前，就先说出谁走得过去？

上一章我们在数学内部做了一次设计：几种代数结构，先按它们的概念派生史算出共同祖先有多深，再去看引理能不能从一种结构搬到另一种结构里用。那一章回答的是"纯数学有没有程度"。这一章开始，我们把同一套设计搬出数学，搬到第一块田里去：学习。

为什么第一块田是学习？因为学习是每个人都亲身走过的回写史。每一次摔倒、每一次改正、每一次"哦，原来是这样"，都是一次回写。学习的数学如果真有同一性谱系，它的谱系就写在每个学习者自己的这些回写里。

## ◆ 10.1　统一性模型及其停点

先从一个场景说起。这是一个构想的场景，人物是本书的陪读人物。

谭一禾，十六岁，高一，在娄底读书。暑假里，她终于下决心学骑自行车。她妈妈曾晓岚小时候是在村里土路上学会的，没人教，摔了一个夏天。一禾不想这样摔，就在小区里先练"滑"：把座子放到最低，两脚踩地，像划船一样一下一下往前蹬，车往前溜，脚离地的时间越来越长。练了五个傍晚，她能双脚离地溜十几米，这时候才第一次把脚放到踏板上。

她的同班同学罗晓檬（这也是一个构想的人物，和罗奶奶家不沾亲）走的是另一条路。晓檬的表哥把她带到小区后面一段缓坡上，扶着后座说"别怕，往下冲"，冲了两趟就松手了。坡上有速度，车自己就稳，晓檬第一天就"骑起来了"，第二天学会了蹬，第三天在平地上学会了起步。

两个星期以后，两个人在小区里一起绕圈。你站在旁边看，看不出谁先学会了什么、谁后学会了什么：一样能起步，一样能拐弯，一样能刹车。如果拿一张测试单来——直线骑一百米不歪、绕两个桩子、听到口令三秒内停稳——两个人很可能分数一样。

我们今天关于学习的主流数学，大体就停在这一张测试单上。它有三种常见的样子。

第一种，叫**统一能力模型**。它假定每个学习者身上有一个能力值，每道题、每个任务有一个难度值，一个人做对一道题的可能性，由"能力减难度"的差来决定。教育测量里的项目反应理论就是这一类的代表，其中最简单的一种（拉施模型）就是"能力减难度"这个样子。这套数学很漂亮：能力和难度放在同一把尺子上，不同的人、不同的题都能比。它在大规模考试里非常有用，这一点要公道地说清楚。

第二种，叫**学习曲线**。一个人练一样东西，练的次数越多，出错越少、用时越短，而且前面降得快、后面降得慢。心理学里有"练习幂律"一类的说法，描述的就是这种先陡后平的曲线。它把学习写成一条曲线，横轴是次数，纵轴是表现。

第三种，叫**知识追踪**。它把一门课拆成很多个"知识点"，假定每个知识点在学习者身上要么掌握了、要么没掌握，每做一道题，就按做对做错去更新"这个知识点已经掌握"的可能性。常被提到的是贝叶斯知识追踪（上世纪九十年代中期由科贝特和安德森用在编程辅导系统里），后来又有用神经网络做的版本。在线学习平台里，"系统觉得你这个知识点还没掌握，再给你推三道题"，背后多半就是这一类。

这三种数学各有长处。可是放回一禾和晓檬身上，它们有一个共同的停点。

统一能力模型会说：两人能力值相同。学习曲线会说：两人都走到了曲线平的那一段。知识追踪会说：起步、平衡、转向、刹车，四个点两人都已掌握。三种数学的结论是一样的——这两个人在"骑车"这件事上，现在是同一个人。

它们为什么能这样说？因为它们都预设了一件事：**"会骑车"只有一种连法**。起步、平衡、转向、刹车，这几个点之间怎么连、谁接着谁，是事先画好的一张图，对谁都一样。每个学习者只是在这张图上走到了哪一格、在每一格上的数值是多少。统一能力模型把这张图压成了一根轴；学习曲线把它压成了一条线；知识追踪把它摊成了一张表，表上的格子对谁都一样，只是勾和叉不同。

用这本书的话说，这三种数学都把学习的"场"——特征之间怎么连、按什么先后、搭成什么样子——当成了一种结构。不同的人，只是同一种结构上的不同读数。这正是第 4 章说的统一性：场只有一种，同一性恒为一，差别全落在读数上。

可是一禾和晓檬的"会骑"，是同一种连法吗?

一禾是先有平衡、后有蹬。她身上，"脚离地也不倒"这件事是先长出来的，"蹬"是后来接上去的。晓檬是先有速度、后有平衡——坡给了她速度，速度替她扶住了车，"不倒"是借着速度长出来的；平地起步那一下没有坡帮忙，是最后才补上的。同样是起步、平衡、转向、刹车四样东西，在两个人身上连的先后不一样，谁扶着谁也不一样。

测试单看不出这个差别，因为测试单只考"现在"。而这本书的承重命题说的恰恰是：在现在一样的情况下，长出来的历史不同，规律能不能从一个搬到另一个，程度也不同。如果这是对的，那么一禾和晓檬的差别不在今天的测试单上，而在明天——在换一辆车、换一条路、驮上一个人的时候。

不妨让三种模型都替明天下一个判断。假设下个月，两个人都要换一辆座子更高的成人车。统一能力模型会给"骑成人车"这件任务一个难度值，两人能力值一样，于是预测两人上手的可能性一样。学习曲线会说：新车是一条新曲线的起点，两人站在旧曲线的同一处，新曲线的起步也该差不多。知识追踪会在表上加一个新格子"骑成人车"，并且说它的先修格子是平衡和起步，两人这两格都打了勾，所以两人都"准备好了"。三种说法细节不同，结论一样：明天两人一样。

这不是三种模型笨。它们在设计时就决定了只看今天这张图上的位置，所以它们在今天一样的两个人身上，只能给出明天也一样的答案。要让它们给出不同的答案，只有一个办法：在今天的读数里找到差别——比如再加一道"最慢能骑多慢"的测试，把两人分开。这条路走下去，读数会越加越多，测试单越来越长，可它永远是在今天这张图上加格子，不是去问这张图是怎么长的。

这就是三种统一性模型的停点：它们把学习的场当成一种，所以只能看见读数的差别，看不见连法的差别；而连法的差别，是由每个人一次次回写长出来的。下一节，我们就把"学习的场"摊开来看。

## ◆ 10.2　这一群对象的 E2 之场

先说清楚，这一节讲的"场"是什么。

第 4、5 章已经交代过：在这本书里，数学不是站在对象外面、对谁都一样的描述语言，而是对象身上特征缠在一起的方式——哪些特征连在一起，按什么先后，搭成什么样子（SDE 叫信息维度 E2 的场）。学习的数学，就是学习者身上各种本事缠在一起的那张连法、先后、搭法。

还是骑车。一个人会骑车，身上缠着好几样东西：眼睛看哪里，身子往哪边倾，车把往哪边带，脚下蹬多快，手上捏多紧。这些不是五样各自独立、加起来就是"会骑"的零件。一禾骑车时，身子往左一倾，车把就跟着微微往左带，这两样在她身上已经缠成一个动作；她从来不需要想"现在我要倾了，接着我要带把"。这就是**连接**：哪几样本事在一个人身上已经连成了一件事。

再看**次序**。一禾身上，"倾"在前，"蹬"在后——她是先会了不蹬也不倒，后来才把蹬接上去。所以她每次起步，总是先把车身稳住，再踩下第一脚。晓檬身上反过来，她是先有了速度、借着速度才稳住的，所以她起步时习惯先猛踩一脚，让车先走起来，平衡随后就到。两个人起步的先后，不是性子不同，而是各自"会"的那张连法里，谁接谁的顺序就是这样长的。

再看**结构**。连接和次序搭在一起，就成了一个有轻重的样子。一禾"会骑"的样子，重心压在平衡上，速度是挂在平衡上的一个附件，慢也能稳；晓檬"会骑"的样子，重心压在速度上，平衡是挂在速度上的，一慢就晃。你让两个人比赛"谁骑得最慢而不落脚"，这两种结构一下就分开了。

这三样——连接、次序、结构——就是学习者身上的 E2 之场。它不是一张写在课本里的知识点地图，而是长在每个人身上的那一张。

那它是怎么长出来的？是一次次回写长出来的。

一禾练滑的第二个傍晚，有一次往右歪，她本能地把脚往右边一撑，没倒。下一次溜的时候，她发现自己在快歪之前，身子就先往回收了一下。这一下"收"，是上一次"撑"写回来的：结果回头改了下一次的起点。第四个傍晚，她第一次把一只脚放上踏板，车一下子往那一边沉，她吓了一跳；第二次，她放脚之前先把重心往另一

边让了一点。又是一次回写。每一次这样的回写，都在她身上把两样本事缠紧一点，或者改一改它们的先后。

晓檬的回写是另一串。她第一次冲坡，车头乱晃，表哥在后面喊"往远处看"，她抬头，车稳了——"看远"和"稳"在她身上缠在一起，而且缠在"有速度"这个前提上。第三天在平地起步，车没速度，她又看远，可车还是倒——这一次的回写告诉她：没有速度时，光看远不够。于是她在平地上学会了先猛蹬一脚。她身上的连法，就是这样一层层写出来的。

你会发现，同样是"会骑车"，两人身上的场，是两串不同的回写一层层堆出来的。第 5 章用过一个比喻：土壤是落叶和果子一层层回写堆成的。学习者身上的场也是这样——每一次摔、每一次改，都像一片落叶落下来，烂进土里，成了下一次长出来的东西的土。

这里有一件事要特别说清楚，因为它决定了这一章和下一章为什么不能写成同一个模板。

学习者身上的回写，**是在一个人身上一代代写下去的**。一禾的第五次回写，是写在她第四次回写的结果上的；她不会"分裂"成两个一禾，各自往下写。所以学习的回写史，在单个人身上是一条线，不是一棵树。那"谱系"从哪里来？

很容易想到一个办法：把很多人的回写史摆在一起，看谁和谁前几代长得像，像的就并成一根枝。这个办法不能用。设想另一个孩子，住在另一座城市，也是自己在小区里先练滑、也先学会了"快歪之前先收"。他和一禾前两代的回写看上去一样，可两人之间没有一根线连着：没有同一个人教，没有同一套练法，没有一起摔过、一起被纠正过。这只是两条各走各的路，碰巧走成了相似的样子（生物学里管这叫趋同）。趋同出来的像，会实实在在留在今天的样子里，所以它要算进今天的静态相似度 $g_{结构}$，不能算进 g。第 5 章说得清楚：g 数的是共同祖先，不是长得像。

那学习者之间的共同祖先在哪里？在**传承**里。一禾为什么先练滑？因为她在网上看到一套儿童平衡车的教法，又因为她妈妈小时候摔怕了。晓檬为什么冲坡？因为她表哥当年就是这么被他爸带会的。一套教法本身也有回写史：最早教的人怎么教，教摔了几个孩子以后改成了什么样，再传给下一个教的人。两个孩子如果跟同一个教练、用同一套练法、在同一个训练班里一起被纠正过，他们身上头几代的回

写，就是从同一个源头一路传下来、并且有记录可查的——这才是共同的祖先。这和第 4 章讲的红烧肉是一个道理：同一双手教出来的人像，是因为同出一源，不是因为碰巧做得像。

所以学习的树，和下一章细胞的树长法不一样。细胞是一个分成两个，树是"分"出来的；学习者是一个个人从各自的源头接上来，树是沿着真实的传承"并"出来的——同一位老师带出的一群孩子并在一根枝上，这位老师和他的师兄弟又沿着各自的师承并到更粗的枝上。只有真实的传承边能并，长得像的不能并。在这棵树上，两个学习者沿传承共享的回写越多，他们的场就越亲。

这两串回写，都不是孤零零在一个人身上发生的。一禾每一次"收"，都缠着小区那段水泥路的平、车座放到最低时脚尖刚好够着地的那个高度、她妈妈在旁边一句"慢点"时她心里的那点不服气。换到村里那段土路上，同样的"收"未必会长出来，因为土路坑坑洼洼，脚一撑先撑到一个坑。晓檬那一句"往远处看"，也缠着那段坡的长短、表哥扶着后座的那只手、她第一次冲下去时风灌进耳朵的那股劲。所以说学习者身上的场，不是一个人带着走、到哪里都一样的东西；它是这个人和她学的那条路、那辆车、那几个人一起长出来的，搬到别处，哪一部分搬得过去、哪一部分搬不过去，正是本章要测的。

所以，学习者的场谱系，有两股线：一股是这个人自己一代代的回写，一股是教的人传下来的开头。前一股决定一个人身上的场长成什么样；后一股决定两个人之间有没有共同的祖先、共同到哪一代。两股合起来，才是学习这一群对象的回写派生树。

这棵树不只在骑车上有。一禾开学以后学函数，她妈妈是初中数学老师，看得很清楚。有的学生是先列表、再看出规律、最后写式子，"函数"在他身上，是从一行行数字里长出来的；有的学生是先看图，图上一条线往上走，再去配一个式子，"函数"在他身上是从形状里长出来的；还有的学生先背定义，"对于每一个 x 都有唯一的 y"，再去套题。期中考试，三种学生可能一样分数。可他们身上"函数"这个场——表、式、图三样东西怎么连、谁先谁后、谁扶着谁——长得不一样。到了高二遇到一个从没见过的题型，比如一段用文字描述的变化过程，要自己把它写成函数，谁一下子能接上、谁要从头摸，很可能就跟着这三种长法走。

这只是一个猜想，不是结果。这一章要做的，正是把这个猜想写成一个能被检验、也能被推翻的设计。

但在设计之前，先把"统一性模型看不见的东西"再说透一点。统一性模型并不是不知道每个人的学法不同。教育研究里早就有人讲"学习路径""先备知识""个体差异"。问题不在于知不知道，而在于这些差别被放在了哪里。在统一性模型里，差别被放在**读数**上——同一张图，你走到这一格、我走到那一格；同一根轴，你高一点、我低一点。在这本书里，差别被放在**场本身**上——两个人身上那张图本身就不一样，而且不一样的程度，是由各自的回写史决定的。

前者说：两个人站在同一块地的不同位置。后者说：两个人身上长的是两块地，这两块地的土是怎样一层层堆起来的，决定了它们有多像。

如果后者是对的，那就有一个很具体的后果：在今天的测试单上一模一样的两个人，明天搬到新车、新路、新题上去，能搬过去多少，不跟今天的读数走，而跟两块地的土的来历走。下一节，我们就把这个后果写成一个先测 g、再测 d 的研究设计。

## ◆ 10.3　先测 g 再测 d 的研究设计

先重申一遍规矩：这一节写的是**设计**，不是结果。下面所有的数，都是"要去测的数"，没有一个是已经测出来的。

再重申全书统一的三个量。g，是两个场结构在回写派生树上的共同祖先深度——沿回写代际数它们共享的连接、次序、结构，不看任何规律搬过去以后成不成。d，是一条规律从一支搬到另一支后成立的程度，另外测。g_结构，是今天这一刻两个场结构的静态相似度，另外记。本书的预测是：把 g_结构　控制成一样，d 仍然跟着 g 变。

放在学骑车上，这三个量各是什么?

g_结构，就是 10.1 那张测试单能看到的东西，再加上一些更细的"今天"的读数：直线骑一百米偏了多少，绕桩用了几秒，从听到口令到停稳用了多久，最慢能骑多慢不落脚，起步时第一脚之前车身晃了几下。所有这些，都是今天这一刻在这

个人身上能看见的样子，不问它是怎么长出来的。两个学习者在这些读数上越接近，g_结构 越高。

g，要去回写史里数。

d，要到新车、新路上去测。

下面按先后，把设计分成五步来讲。

**— 第一步：先把"什么算一次回写"定下来，再开始记。**

这一步最要紧，也最容易被跳过。如果等孩子们学会了再回头问"你是怎么学会的"，记下来的就是他们事后编的故事，不是回写史。所以，必须在学的过程中就记。

怎么记？设想一个小区或几所学校，暑假里有一批十几岁、还不会骑车的孩子愿意学，家长同意，孩子本人也同意。每一次练习，用一个固定在车把上或旁边的小摄像头录下来；每次练完，孩子花两三分钟口述"今天哪里不一样了"。

但录像和口述只是原料。要从原料里数出 g，先得有一本"回写编码手册"：什么样的事情算一次回写？手册要在第一个孩子上车之前就写好、封存。比如可以这样定：**一次回写，是一个结果在下一次练习的开头留下了可见的改变。** 摔了一跤，不算回写；摔了以后，下一次在同一个地方提前收了身子，算一次回写。表哥喊了一声"看远"，不算回写；喊了以后，下一趟车头不晃了、而且之后每趟都抬着头，算一次回写。回写的单位，不是"发生了什么"，而是"下一次的起点被改了什么"。

每一次回写，按手册记三样东西：改的是哪几样本事之间的连接（比如"倾"和"带把"缠在了一起）；改的是谁先谁后（比如"先稳车身再踩脚"）；改完以后，谁扶着谁（比如"平衡扶着速度"还是"速度扶着平衡"）。这正好是场的三件事：连接、次序、结构。

编码的人，要两组以上，互相不知道对方怎么编，也不知道这个孩子以后的成绩。两组编出来的一致程度，本身就要报告；一致程度太低，说明手册写得不清楚，要改手册，而改了手册就要从头编，不能边编边改。

**— 第二步：先排好传承，再沿传承边把人并成树。**

学习者的回写，在一个人身上是一代接一代的。这里的"一代"，照全书口径，是一次完整的回写：被结果逼着改了一回，而且这一改沉淀进了下一次的做法。练的天数、摔的次数都不算代。一禾的回写史可能是这样一串（这是构想的样子，不是记录）：第一代，脚撑地时身子往回收；第二代，溜行中快歪之前先收；第三代，放脚上踏板前先往另一边让重心；第四代，起步时先稳车身再踩……晓檬的可能是：第一代，冲坡时抬头看远；第二代，平地起步先猛蹬；第三代，速度慢下来时车把小幅来回带着保持平衡……

上一节说过，不能按"前几代像不像"把这些线对齐成树。树要沿着真实的传承来并。所以设计在开始时就要把传承安排出来、记下来：请几位教练，每位教练带一套写成文字的练法，各带几个小组；每个小组的孩子在同一个场地、同一个时段练，一起被教练纠正。教练给小组讲的每一条"下次这样做"，只要在组里孩子下一次练习的开头留下了可见的改变，就记为这个小组共同的一代回写。孩子之后分开各练，各自的回写就记在各自的线上。

这样，一棵树就有了实打实的边：树根是几套练法的共同来源（如果几位教练出自同一个师承，就并在同一根粗枝上）；往下是教练，再往下是小组，再往下是一个个孩子。两个孩子的 g，按第 5 章的细数法来数：沿着这条传承路，从根往下，一代一代数两人都保有的连接、次序、结构条目——也就是同一套练法写进去、同一个小组一起被纠正出来、到测量那天两人身上都还在的那些。同一小组、一起练了很久才分开的两个孩子，g 深；同一位教练、不同小组的，浅一些；不同教练、练法不同源的，几乎是零。

这里有三个细节要交代。

第一，"保有"怎么判。两人身上同一条条目不会一模一样，要按手册判"改的连接、次序、结构是不是同一条"。判的规则先定好、封存，可以定几种宽严不同的判法，事先说好主分析用哪一种。

第二，趋同另记。不同教练底下的两个孩子，各自摸出了同一条"快歪之前先收"，这条在他们之间不进 g，只在今天的测试单上显出来，归进 g_结构。这条线划死了，对赌才赌得成。

第三，家里带的那一份。一禾的妈妈说"慢点"，晓檬的表哥喊"看远"，这些设计之外的传承也会写进孩子身上。能问清来源的照实记成一条传承边（比如两个孩子是表兄妹，被同一个大人带过），问不清的不记进 g，在分析里单列为一项要扣除的量。

**— 第三步：在测 d 之前，先把 g_结构 配平。**

学了一个月以后，所有孩子都过了"会骑"这一关。这时候，做 10.1 说的那一整套"今天"的测试，算出每两个孩子之间的 g_结构。

接下来，挑对子。挑出很多对孩子，每一对的 g_结构　都在同一个窄的区间里——今天看上去差不多一样会骑。在这些对子里面，有的 g 深（同一小组、沿传承共同保有的条目多），有的 g 浅（不同教练、练法不同源，今天的相像主要是各自摸出来的）。这就是这个设计的骨头：**静态结构一样，历史亲缘不一样。**

同时还要把一些明摆着的东西配平：总练习时长差不多，年龄差不多，身高腿长和车的尺寸差不多，以前有没有骑过别的带轮子的东西（滑板、平衡车、三轮车）要记下来。这些都不是 g，可它们都可能让 d 不同，所以要么配平，要么记下来在分析里扣掉。

挑对子这一步，还有一个只在学习这块田里才有的麻烦：两个孩子一旦知道自己被配成了一对，可能会互相教。一禾教晓檬"慢点骑"，晓檬教一禾"先猛蹬"，这一教，两人的回写史就在测 d 之前又多写了几代，而且是互相写进对方的。所以配对的结果只在分析的账上，不告诉孩子，也不安排配成对的两人一起练；新情境的测试也分开做，一个测完离开了，另一个再来。同样，测 d 用的那几种新情境，在测之前不许任何孩子先去试，否则测到的就是第二次而不是第一次。

到这一步为止，所有 g、g_结构　的数都要封存，交给一个不参与后面测试的人保管。

**— 第四步：再测 d。**

d 是"一条规律从一个人身上搬到另一个人身上，成立到什么程度"。放在骑车上，这句话要说得更具体：我们在一个孩子身上看到的某个"怎么做就行"，在另一个孩子身上换到新情境里，还行不行。

设计几种新情境，事先写好、封存：

换一辆车——座子高一截、把手窄一些的成人车。

换一条路——一段碎石路，或一段有积水的路。

驮一样东西——后座绑一袋十斤的米。

学一样新东西——站着滑的滑板车，或者带小电机、起步会往前一窜的电动自行车（只在封闭场地、低速、有保护的条件下）。

每一种新情境里，先在一对中的一个孩子身上，找到一个"怎么做就行"——比如在碎石路上，一禾是"先放慢、身子更低、把握松一点"就过去了。然后看这个做法放到对子里另一个孩子身上，成不成：照这个做法，另一个孩子用了几趟才稳住、摔了没有、中途有没有自己改成别的做法。

成立的程度，就是 d。要事先定好怎么算：比如"照这个做法，第几趟稳住"折成一个零到一之间的数，也可以用好几种算法并报。测 d 的人，不知道这一对孩子的 g 是多少。

**— 第五步：对赌，然后看谁输。**

把所有对子的 g、g_结构、d 放在一起看。

本书的预测是：在 g_结构　一样的对子里，g 深的对子，d 高；g 浅的对子，d 低。换句话说，今天看上去一样会骑的两个孩子，沿传承共同保有的回写越多，一个人在新车新路上找到的门道，越能直接搬给另一个人。

更细一点：搬过去搬不过去，应该跟两人的传承从哪一层分开、分开的那一层是"平衡先"还是"速度先"有关。一禾和晓檬是两个源头，一个源头先教平衡，一个源头先给速度，那么凡是新情境里要靠"慢而稳"的（碎石路、驮米、积水），一禾的做法搬给晓檬，应该搬得最差；而在"起步一窜"的电动车上，可能反过来，晓檬那个"先让车走起来"的做法，搬给一禾最差。这就是"程度属于场本身"——它不是一个笼统的"像不像"，而是共同在哪几层、分开在哪几层，决定了哪类规律搬得动。

什么样的结果说明本书错了？说得粗一点就够：**如果在 g_结构 配平以后，d 和 g 之间看不出任何关系——g 深的对子和 g 浅的对子，在新车新路上搬得一样好或一**

**样差——本章的命题就错了。** 如果 d 只跟今天的 g_结构 走（今天越像，明天越能搬），而跟回写史无关，那就是统一性模型和下一节那些邻居赢了。

这个设计还要回答一个最常见的质疑：回写史不同，难道不会在今天的读数上留下痕迹吗？如果留下了，那 g_结构 配平的时候，不就已经把 g 的差别配掉了吗？

这个质疑很好，它正是对赌的要害。回写史当然会在今天的读数上留下痕迹——一禾骑得慢而稳，晓檬起步先猛蹬，这些都是痕迹。问题是：今天的测试单能把所有痕迹都读出来吗？本书赌的是不能。今天的测试单只测今天这些任务，而回写史里那些"谁扶着谁"的结构，在今天的任务上常常不显，要到新的任务上才显。就像两锅卤牛肉，今天尝起来一样咸一样甜，可放到明天回锅，一碗越回越香，一碗回一次就柴了，差别在第一次的火候和肉的选法里，今天那一口尝不出来。

设计里还要放两道"负对照"，用来防止自己骗自己。

第一道：不管代际先后，只把两个孩子身上今天都有的条目点个数，算一个"假 g"。如果假 g 预测 d 的本事和真 g 一样好，那说明起作用的只是"回写的内容有多少一样"，而不是"按什么先后一样"——这其实又退回到了今天的结构，因为内容一样多，今天的样子大概也一样。本书说程度由回写历史生成，历史包含先后；如果先后不要紧，命题至少要大打折扣。

第二道：只拿传承路上最后一两代的共同条目算 g。如果最后一两代就够预测 d，前面的历史全不要紧，那也说明"历史"在这里只是今天的另一种读法。本书赌的是：传承越早分开的对子，在新情境里越难搬，越早的那几代越要紧。

还有一个时间上的问题。学一个月就测，可能太早——有的连法要几个月才稳住；也可能太晚——有的孩子在一个月里已经在别的地方骑过很多次，回写史外面又多了没记下的几代。所以要事先定一个测 d 的时点，同时定一两个备用时点，事先说好哪个是主分析；孩子们在设计之外骑车的次数，请家长大致记一下，作为一项要扣除的量。

所以，配平 g_结构 用的测试越细，这个对赌就越硬。如果测试单细到一定程度，g 的作用就消失了，那也是一个重要的结果：说明在学骑车这块田里，历史已经全部写进了今天的样子，同一性谱系在这里没有多出东西。本书愿意接受这个可能。

最后，这个设计不只能用在骑车上。一禾学函数的那三种长法——先表、先图、先定义——一样可以照这五步来：学的时候记回写，沿师承和教法（同一位老师、同一套讲义、同一个学习小组）并树，期中考试分数配平，再拿一类没见过的题型去测"一个学生的解法搬给另一个学生成不成"。只是函数的回写比骑车难记得多，要靠作业本上的改动、错题本、课堂上的口头追问。这一点留给下一节的邻居们来挑战。

有一条线，整个设计都不许越过：这些读数只用来检验一个关于学习的命题，不用来给孩子打分、排名、分快慢班。g 深 g 浅，不是孩子好坏，只是两个孩子的回写史前面像了几代。

## ◆ 10.4　与最近邻居对赌

一个设计好不好，要看它能不能和最强的对手分出输赢。这一节请三位邻居出场，每一位都先站在它最强的立场上说，再看它在哪里和本书分开、分开的地方能不能用数据判输赢。

### – 第一位邻居：分层模型。

分层模型在教育研究里用得很多。它的想法是：学生嵌在班里，班嵌在学校里，学校嵌在地区里。估一个学生的能力或进步时，不是只看他自己那几道题，而是"借一点"同班同学的信息，借多少，看这个班里学生之间有多像。班里学生越像，借得越多；越不像，借得越少。这叫部分合并。

这位邻居很强。它承认了"程度"：两个学生不是全同或全异，而是按分组远近有不同程度的相似。它也承认了"历史"：一个班的学生之所以像，往往是因为同一个老师教了一年。

那它和本书分在哪里？分在两处。

第一处，分组是谁给的。分层模型里的"层"，通常是事先按行政归属定的——同一个班、同一所学校。它们是历史的一部分，但只是很粗的一部分。本书的 g，是沿传承路一代一代数出来的共同保有的条目。两个同班的孩子，骑车可能是各自家里教会的，在骑车这件事上没有共同的祖先；两个不同城市的孩子，如果师承同一位教练的同一套练法，倒可能共同保有好几代。

第二处，程度落在哪里。分层模型里，相似的程度落在**参数**上——这个学生的能力值、那个班的平均进步。它借的是数值。本书里，程度落在**场的连法**上——像的是哪几样本事怎么连、谁先谁后。

公道地说，分层模型完全可以把"层"换成本书的回写派生树：把树的每一个分岔点当成一层，深的枝嵌在浅的枝里。统计上，这是做得到的，而且这样做以后，它和本书的距离就很近了。那还剩下什么可赌？剩下一件事：**用回写树分层，和用今天的读数分层，哪一个对 d 预测得更好。** 如果用今天读数的相似度来分层（这等于用 g_结构），预测 d 的本事和用回写树一样好，那本书多走的那一步就没有必要。这正是 10.3 的对赌，换了一种统计写法。

**— 第二位邻居：可迁移性的结构模型。**

这位邻居来自因果推断。它的问题和本书很像：在一群人身上学到的因果规律，能不能搬到另一群人身上？它的回答很讲究：把两群人背后的因果结构画成一张图，再在图上标出两群人在哪些环节上不一样（这张图叫选择图）。如果不一样的环节，在图上能被别的已知量"绕过去"，规律就能搬；绕不过去，就不能搬，或者只能部分搬。这一派常和珀尔、巴伦博伊姆的名字连在一起，叫"可迁移性"。

一定要说清楚：这位邻居**不是**"按静态距离来判迁移"的稻草人。它看的不是两群人数值上差多远，而是两群人的因果结构哪里一样、哪里不一样。它的选择图，本身就是一种结构。从这一点说，它和本书都主张"迁移跟着结构走"，是真正的近邻。

那么分在哪里？分在"结构从哪里来、在哪一刻读"。

可迁移性的结构模型，读的是**此刻**的因果结构：在一禾身上，哪个环节决定哪个环节；在晓檬身上，哪个环节决定哪个环节。只要此刻两张图一样、差异标在同样的地方，它就预测：搬过去的程度一样。它不问这两张图各自是怎么长出来的。

本书赌的是：两张此刻一样的图，长出来的历史不一样，搬过去的程度也不一样。

这位邻居会有一个很聪明的回应：如果历史要紧，那就把历史画进图里——加一个节点"第一代回写是平衡先还是速度先"，让它指向后面的环节。这样，历史就成了结构的一部分，图不一样了，模型自然预测迁移不同。

这个回应要正面接。本书的回答是：可以画进去，而且画进去以后，图会越来越像一棵回写派生树。到那时，两家争的就不再是"历史要不要算"，而是"历史怎么算"——是把历史当成图上一个个的原因变量，一个一个地查它们影响了什么；还是把历史当成"共享了几代"的一个深度，直接拿深度去预测迁移程度。前者要求你事先知道是哪一代的哪件事起作用；后者不要求，只数共同祖先有多深。

这就可以赌了：在样本有限、不知道哪一代起作用的条件下，"共同祖先深度"这一个数，对 d 的预测，能不能比"此刻的因果图"好？如果不能，本书在学习这块田里就没有多走出东西。

**— 第三位邻居：系统发育比较方法。**

这位邻居来自生物学，乍一看离学骑车很远，其实是三位里离本书"历史生成程度"最近的。

它的出发点是：比较许多物种的性状时，不能把每个物种当成独立的一个点，因为它们共享进化史——两个近缘的物种身体大小相近，可能只是因为它们的共同祖先就大，而不是各自独立适应出来的。所以要按进化树上共享的枝长，去扣除这种"因为同宗所以像"的部分。费尔森斯坦 1985 年提出的"系统发育独立对比"是这一类方法的经典起点。

这位邻居做到了本书最想要的一件事：程度由历史生成，而且可以在树上数。

那它停在哪里？停在两处。第一处，它用历史，主要是为了**校正**——为了把"同宗造成的像"从统计里扣掉，好看清性状之间真正的关系。历史在这里是要扣除的干扰，不是要预测的东西。本书反过来，把"同宗造成的像"当成主角，拿它去预测规律能搬多远。第二处，它的对象是生物性状和物种，它的树是进化树。它从没有把树用到"一个人身上本事的连法"这种东西上。

有人会问：把系统发育方法搬到学习者身上，不就是本书要做的事吗？差不多是，但有一个关键的不同，正是学习这块田特有的。物种的树是真的分出来的——一个祖先物种分成两个后代物种，后代各自继承祖先的全部。学习者的树不是这样。一禾和晓檬没有共同的"祖先学习者"；她们之间能连上的，只有教法和师承这一类传承边。所以学习的树，是沿着真实的传承边**并**出来的：同一个小组的孩子并在一起，同一位教练的小组并在一起，同出一个师承的教练再并在一起。系统发育方

法很在意区分"同宗"和"趋同"——两个物种像，是因为同一个祖先，还是因为各自独立地适应出了同一个样子。学习者身上这个区分更要紧，也更容易做错：两个孩子碰巧在同一处摔了同样的跤、做了同样的改，看上去和"同一个教练教出来的"一样，可它只是同样的路，不是同一个源头。

这是本书在学习这块田里要老实承认的一处软肋：传承边要靠记录，记录总有漏的。家里大人顺口的一句，网上看过的一段视频，都可能是没记下的传承边。漏掉一条，两个本来同源的孩子就被算成了 g 浅；它们今天的相像跑进了 g_结构，对赌会因此偏向邻居一边。所以本书宁可把树做小、把边记全：设计里的传承尽量由研究者安排出来，而不是事后去打听。如果在记得最全的那一部分对子里，g 仍然说不出 g_结构 之外的话，那就是本书输了，不能拿"边没记全"来推托。

三位邻居都请过了。另外再提一位更老的邻居，因为它和学骑车太近，不提不公道：教育心理学里很早就有"相同要素说"——学了一样东西能不能用到另一样上，看两样东西之间共享的要素有多少（桑代克与伍德沃斯二十世纪初的说法）。这是 g_结构 最朴素的说法：今天两样东西里共有的要素越多，迁移越多。它不问要素是怎么连起来的，更不问是按什么先后连起来的。本书和它的对赌，就是 10.3 的整个设计：共有要素一样多，连起来的历史不一样，迁移不一样。

把四位邻居合起来看，它们和本书之间，不是"谁对谁错"的大吵，而是一个可以赌、而且可能赌输的小分歧：控制住今天的结构以后，回写史的深度还能不能多说出一点东西。说得出来，学习的数学就多了一层；说不出来，统一性模型和它们的近亲就够用了。

## ◆ 10.5　复合主体分工与验证

10.3 那个设计，靠一个人、一支笔做不下来。几百个孩子、每人几十次练习、每次一段录像和一段口述，要一代一代编码、对齐、并树、配对，再去新车新路上测。这件事只能由人和 AI 一起做。第 8 章说过：没有独立的 AI，"AI 去分析学习数据"这句话里站满了人。这一节就把这群人和 AI 各站在哪里，说具体。

先说一个日常的对照。曾晓岚批作业，二十年前刚教书时是一本一本拿红笔改；后来学校有了阅卷系统，选择题机器改，她只改大题。机器改得快，可是哪道题算对、哪种写法算"思路对了但算错了"，标准是她和教研组一起定的。机器在她们

定好的那一种标准里，一秒钟改一千份；遇到一份怪答案，机器判不了，退回给她，她看了说："这孩子用的是另一种思路，也对。"——下一年，评分标准里多了一条。

学习的数学里，人和 AI 的分工，大体就是这个样子，只是多了一层：标准本身要分支。

### — AI 做什么。

第一，AI 在一种编码手册之内，把海量的录像和口述编成回写记录。人定了"什么算一次回写"，AI 去一段段地看：这一趟和上一趟比，起点改了什么。这是一种场结构内的千倍劳动，正是 AI 的长处。

第二，AI 把回写记录挂到人记好的传承边上，沿传承路逐代核对两人共同保有的条目，算出每两个孩子的 g；算出 g_结构；挑出配平的对子。

第三，在每一根枝上，AI 可以放心地跑统一性模型。这一点很要紧：本书不是要扔掉知识追踪和学习曲线，而是给它们找到成立的地方。在一根枝里面——比如同一位教练用同一套"先练平衡"的练法、在同一个小组里带出来的那一群孩子——场结构是近乎同一种的，统一性模型在这里该怎么用就怎么用，而且会比在全体孩子身上用得更准。AI 撞果子，就在枝内撞。

第四，AI 去撞"反面果子"。在某一根枝里，枝内模型预测一个孩子到了碎石路上应该一点就通，结果他摔了五次。这不是噪声，是第 7 章说的反面果子的候选：某条规律被推出了它所属的那一支。AI 能做的，是把这类"枝内模型在这里不成立"的情况一条条找出来、排好、交上去。

### — 人做什么。

第一，人定编码手册。什么算一次回写，什么算两代回写"一样"，这不是机器能定的。定它的人里，要有懂骑车的人，有带过孩子的家长，有体育老师，也要有孩子本人——孩子说"那天我是因为怕前面那只狗才抬头的"，这一句话可能就改了一代回写的编法。

第二，人织谱。AI 交上来的反面果子，要由人来判：这个孩子在碎石路上摔了五次，是因为他这一代的回写其实和这一枝不一样，编码编错了（那就改他在树上

的位置）；还是因为碎石路这件事，本来就要求一种这一枝里没有的连法（那就在这一枝上另分一个岔，以后的孩子到了这一步要分开看）？前者是修树，后者是长树。第 7 章的判据在这里落地：收窄以后，是不是要另立一支才能继续推下去。判这一步的，是人。

第三，人决定读数不越界。读数只用来检验命题，不进学校的考核、不给孩子分班、不贴"平衡型""速度型"的标签。这一条不是 AI 会自己守的，得人来守。

这里还有一个容易被忽视的地方：AI 编码，本身也会留下回写的痕迹。AI 是用人给的手册和人标过的样例学会怎么编的；如果最早那批样例恰好都来自先练平衡的孩子，AI 看所有孩子，都会不自觉地用"平衡先"的眼光去切。这样数出来的 g，会把本来不同的条目判成同一条，两根本来分开的枝被算得比实际更亲。所以在分工里，要专门安排人去抽查 AI 编码，而且抽查要按枝抽——每一根枝都抽，而不是全体里随便抽几段。抽查发现某一枝编得系统地偏，就要回到手册，看是不是手册本身只写了一种场结构的语言。这一步是人和 AI 组成的复合主体在给自己做回写：工具的偏差被发现了，下一轮的编法就改了。

**— 怎么验证。**

验证分三层。

第一层是二值的：编码是不是按手册编的，树是不是按规则并的，g 是不是按定义算的。这一层可以写成程序检查，甚至可以像第 13 章要讲的那样，把定义写进形式系统，让机器一条条核。这一层像高铁的信号系统——每一段闭塞、每一道制动，对就是对，错就是错。

第二层是重复：换一批孩子、换一座城市、换一组编码的人，同样的设计再做一遍。如果在娄底看到 g 深的对子 d 高，在另一座城市看不到，那就要追问：是两地的教法传承不一样，让树的形状不一样，还是第一次的结果只是碰巧？

第三层是谱系的验证：这是新的，也是这本书最想推的。它不问"这条规律对不对"，而问"这条规律在这棵树的哪几根枝上成立、成立到什么程度、到哪一根枝开始不成立"。一条"在碎石路上先放慢、身子放低"的门道，它的验证结果不是一个对勾，而是一张标在树上的图：在一禾那一枝上几乎全成立，在晓檬那一枝上成立一半，在另外一枝上不成立。这张图，才是学习的数学在同一性谱系里的样子。

说到这里，回到一禾和晓檬。等到秋天，两个人都要骑车上学了，要穿过一段在修的路。设想她们各自摸出一套过那段路的办法——一禾慢慢挪，晓檬一鼓作气冲过去。如果本书说的对，这两套办法互相搬，搬不太动；可如果班里有一个和一禾跟同一套练法、同一个人学出来的同学，一禾的办法给他，大概一说就会。这件小事，就是学习这块田里同一性谱系的样子：程度不在两个孩子今天骑得好不好，而在她们一路摔过来的那些跤里。

学习是人身上的回写，一代接一代写在同一个人身上，谱系要靠把很多人的历史并起来才看得见。下一章要去的那块田不一样：那里的回写，是真的一分为二、各自往下传的。

**带 走 的 话**

1. **两个人今天一样会，不等于他们身上长的是同一种"会"；"会"的连法、先后和搭法，是一次次回写堆出来的。**
2. **统一能力模型、学习曲线、知识追踪，都把学习的场当成一种，所以只看得见读数的差别，看不见连法的差别。**
3. **学习者的回写在一个人身上是一条线；谱系只能沿真实的传承（同一位老师、同一套练法、一起被纠正过）并出来，碰巧长得像的只算今天的相像，不算共同祖先。**
4. **先把回写史数成 g、封存，再去新车新路上测 d；今天的结构配平以后，d 若不跟 g 走，本章就错了。**
5. **统一性模型不必扔掉，它在一根枝里最好用；人定编码、织谱、守住读数不进考核，AI 编码、沿传承边算 g、枝内推导、撞反面果子。**

**小　账**

**本章切开的差异：**今天一样会，与一路怎么摔过来的不一样。

**本章的场谱系读数：**学习的场至今被当成一种（能力轴、曲线、知识点表），回写落在每个学习者一代代的改正和教法的传承里，谱系要沿传承边并树才显出来。

◆

11

第 11 章

# 细胞的数学

**这一章的问题**

同一种药，邻居吃了见好，你吃了不大见效。是你和邻居"不一样"，还是你们身上那些细胞一路长过来的历史不一样？细胞有没有一种数学，能在吃药之前，就先说出这条"见效的规律"能不能从他身上搬到你身上？

上一章讲学习。学习的回写，是一代代写在同一个人身上的：一禾不会分成两个一禾，各自往下摔。所以学习者的谱系，要把许多人的回写史沿真实的传承边（同一位教练、同一套教法与练习材料一路传下来）并起来，才看得见一棵树。

这一章去的这块田，和学习正好相反。细胞是会真的一分为二的。一个细胞分成两个，两个都带着母细胞的全部，然后各走各的路。细胞的谱系不用"并"，它本来就是"分"出来的。这一点，会让这一章的 g 和上一章的 g 数法完全不同。

## ◆ 11.1　统一性模型及其停点

先说一个场景。这是一个构想的场景，人物是本书的陪读人物。

罗秀英奶奶七十一岁，住在娄底。隔壁的欧阳伯六十六岁，在城郊种两块菜地。今年开春，两位老人前后脚去了同一家医院，看的是相近的毛病，同一位医生给两人开了同一种药，剂量也一样。一个月后，两人在楼下碰到，欧阳伯说："那药好，吃了两个礼拜就轻了。"罗奶奶说："我吃着没什么感觉。"

这样的事，几乎每个家里都碰到过。同一种药，这个人吃好了，那个人吃不好；同一种护肤品，闺蜜用了变好，你用了起疹子；同一种降火的凉茶，有人喝了舒服，有人喝了拉肚子。

先把话说在前头：本章不评判罗奶奶该不该换药，也不对两位老人作任何诊断。吃药的事听医生的，不要因为读了一本书就自己加减。本章只借这件事，问一个数学问题。

这个数学问题是：我们今天用来回答"这药对谁有效"的数学，是什么样的?

第一种，可以叫**通用通路模型**。生物学课本里有许多通路图：一个信号分子落到细胞表面的某个受体上，受体把信号交给细胞里的下一个分子，下一个再交给下一个，最后某些基因被打开或关上，细胞做出反应。一种药之所以有效，是因为它卡在这条通路上的某一环——让某一步加快、减慢、或者断掉。这些通路图是生物学最了不起的成就之一，几十年里无数实验室一环一环搭起来的，必须公道地说清楚。

这种数学有一个默认的前提：**这条通路，在所有细胞里是同一条。** 图只画一张。罗奶奶的细胞和欧阳伯的细胞，用的都是这张图；药卡在图上同一个位置。两个人反应不同，要么是图上某个零件的"量"不同（这个人受体多一点、那个人少一点），要么是某个零件"坏了"（某个基因有一个变异）。差别落在图上零件的读数上，图本身只有一张。

第二种，可以叫**群体平均**。一种药上市前，要做临床试验：一群人吃药，一群人吃不含药的安慰剂，比两群人的平均结果。药组平均比对照组好，好到统计上站得住，药就被认为有效。这是现代医学最可靠的工具之一，挡住了无数无效甚至有害的药，也必须公道地说清楚。

可群体平均回答的是"一群人平均起来怎样"，不是"这一个人会怎样"。医学界对这一点很清楚，于是有了"分亚组"：按年龄、性别、某个基因型，把人分成几组，各算各的平均。再往前走，就是"精准医学"：先测一个人的基因、蛋白，看他属于哪一类，再决定用什么药。

这两种数学合起来，就是今天回答"这药对谁有效"的主干：一张通用的通路图，加上按读数分出的人群。罗奶奶和欧阳伯，如果在年龄、性别、病情、某几个关键基因上读数都差不多，这套数学就会说：两个人应该差不多。如果实际不一样，那就再去找更多读数，直到找到一个把两人分开的读数为止。

这里的停点和上一章很像，但长在不同的地方。

两种数学都预设了：细胞里各样东西之间怎么连、谁接着谁、搭成什么样子——也就是细胞的 E2 之场——**只有一种**。通路图只画一张，差别落在零件的多少和好坏上；人群按读数分组，组和组之间只是读数不同，场还是那一个场。这就是第 4 章说的统一性：场只有一种，差别全落在读数上。

可是一个细胞里的连法，真的对谁都一样吗？

罗奶奶膝盖附近的一个细胞，和欧阳伯同一部位的一个细胞，往上数，各自是几十年里一次次分裂传下来的。每一次分裂，都把母细胞那一刻的样子——哪些基因开着、哪些关着、哪些蛋白多、哪些少、哪条信号线常被用、哪条快生锈了——有相当一部分一起带给两个女儿细胞（带走多少，因细胞种类而不同）。而母细胞那一刻的样子，又是它一路上碰到的东西写进来的：哪一年受过一次伤、长期干哪种活、吃什么、睡多少。这些不是贴在细胞外面的标签，而是一层一层写进了细胞里那张连法图本身：某两条信号线在这个细胞里缠得紧，在那个细胞里缠得松；某一步在这里是主路，在那里是备用的岔路。

如果这是对的，那么两个人在今天的读数上一样，不代表他们细胞里的场一样，更不代表一条"这药卡住这一环就见效"的规律，能从欧阳伯的细胞搬到罗奶奶的细胞上。差别不在今天的读数里，在细胞一路分过来的历史里。

让两种模型都替罗奶奶的明天下个判断。假设医生下个月想给两位老人都换一种新药，这种新药卡在同一条通路的另一环上。通用通路模型会说：两人细胞里的图是同一张，新药卡的那一环在图上的位置一样，所以只要两人那一环的零件读数差不多，反应就差不多。群体平均会说：先看新药的试验里，和两人年龄、性别、病情相近的那一组平均怎样；两人落在同一组，预测就一样。

这样一来，欧阳伯吃旧药见好、罗奶奶吃旧药不见好，这件已经发生的事，在两种模型里都没有给"新药"留下任何线索——除非能在今天的读数里，找到一个把两人分开的东西。于是精准医学的路，就是一直往今天的读数里加：多测几个基因，多测几种蛋白，把人越分越细。这条路非常有用，本书不反对。但要看清它的方向：它是在今天那一张图上加格子，不是去问两人细胞里的图各自是怎么长的。旧药吃得好不好，本来是一条关于"这两人的细胞一路怎么长过来"的线索；放在统一性模型里，它只能被当成一个要去今天读数里找原因的谜。

这就是两种统一性模型的停点：它们把细胞的场当成一种，所以只能找读数的差别；读数找完了还解释不了的部分，它们只好叫作"个体差异"或者"噪声"。而这一章要说的是：那一部分里，有相当一块可能不是噪声，是细胞场的谱系。

## ◆ 11.2　这一群对象的 E2 之场

在讲细胞之前，先讲一盆窗台上的花，它比细胞好懂，而且和细胞有一个要紧的共同点：它也是"分"出来的。

这是一个构想的场景。罗奶奶家阳台上有一盆吊兰，是她退休那年从厂里带回来的。吊兰好养，长大了会从叶丛里抽出细长的走茎，走茎梢上冒出一簇簇带根的小苗，剪下来往土里一插，就是新的一盆。

十几年前，罗奶奶从这盆里剪了一棵小苗给隔壁欧阳伯。几年前，又剪了一棵给女儿曾晓岚。三家都接着养。

今天，三盆吊兰不一样了。欧阳伯那盆摆在朝南的窗台上，太阳大，他浇水又勤，叶子短而硬，叶边的白条纹很宽，走茎抽了一大把；曾晓岚那盆在楼房里朝北的书桌边，光少，叶子长得又长又软，绿多白少，有两年一根走茎都没抽；罗奶奶家的，还是老样子。

注意这里发生了什么。剪下来的那一刻，小苗和母株是同一个身子长出来的——带着母株那时的全部脾气。剪下来以后，各家的光、水、盆土、摆放的地方，一年年碰在这棵苗上。每一回碰，有的东西过后就恢复了，有的留了下来：被晒伤过一回的那几片新叶，后来就长得更厚；那一年盆土板结、根被憋过，第二年它先往下扎根、后抽走茎。留下来的这部分，就写进了下一年这株苗长东西的先后和轻重里。这就是回写。

更要紧的是，从这几盆里再剪出去的小苗，带走的是"被写过以后"的那株的脾气。比方曾晓岚那盆后来抽了一回走茎，她剪了一棵送给同事，这棵小苗的起点就不是罗奶奶阳台上那盆的起点，而是曾晓岚书桌边那盆被写过以后的起点。一盆分出一盆，一层写在一层上，就分出一棵树来。

而且这棵树上的亲疏是有程度的。曾晓岚那盆和罗奶奶那盆，从同一个身子一路长到几年前才分开；欧阳伯那盆，十几年前就分开了。从剪下来的那天往前数，曾晓岚那盆和罗奶奶那盆一起被写过的年头更多，共享的历史更深。

还要留意一件事：假如欧阳伯后来把他那盆也挪进了屋里、少晒了太阳，几年以后叶子也变得又长又软，看上去和曾晓岚那盆很像。这个"像"，是两盆各自碰到相似的事、各自被写成的，不是共同祖先留下的。树上的亲疏不会因为它们后来长得像就变近。这一条，后面数 g 时要划死。

这就是细胞的谱系的样子。细胞也是这样：一分为二，两个女儿各带着母亲那一刻的全部，然后各自在各自的地方、碰各自的事、走各自的回写史。

现在可以说清楚，细胞这一群对象的 E2 之场是什么了。还是那三件事：连接、次序、结构。

**连接**，是细胞里哪些东西连在一起成了一件事。一个信号分子落到受体上，受体后面接着哪几个分子，哪几个分子平时总是一起出现、一起开一起关。课本上的通路图画的就是连接。可是同一张通路图，在不同的细胞里，连的松紧不一样：某两条线在这个细胞里几乎总是一起动，在另一个细胞里各动各的。

**次序**，是谁先谁后。信号进来，先动哪一步，后动哪一步；一种药进来，细胞先做哪种应对，后做哪种应对。有的细胞先关掉一扇门，有的细胞先打开另一扇门绕过去。

**结构**，是连接和次序搭在一起以后的轻重：哪条路是主路，哪条是备用的岔路，哪一处是很多条路都要经过的要道。一种药之所以在一个细胞里见效，往往是因为它卡住的那一环，在这个细胞里正好是要道；同一种药在另一个细胞里不见效，可能是因为那一环在那里只是一条岔路，主路在别处。这是把一种常见的解释说成白话，具体到每一种药，机制各不相同。

这三件事，在每一个细胞里，都不是一出生就定好的一张图，而是一层层回写出来的。

怎么回写？一个细胞碰到一次刺激——一次缺氧、一次炎症、一种药、一种激素的长期高低——它会做出反应。反应完了，有些东西回到原样，有些东西没回

去：某些基因从此开得更容易了，某些从此关得更紧了。这些没回去的部分，有一部分会随着分裂传给女儿细胞（生物学里叫表观遗传的"记忆"；能记多久、记得多稳，至今还在研究）。女儿细胞的起点，就不是母细胞最初的起点，而是母细胞被写过以后的起点。下一次刺激，再写一层。

这正是第 5 章说的土壤：落叶、果子一层层回写，堆成土。细胞的场，就是细胞一辈辈碰过的事一层层写进去、堆成的土。

这里要把细胞和学习的不同说透，因为它决定了下一节 g 怎么数。

学习的回写，是在一个人身上一代接一代写下去的，一个人是一条线。谱系要靠把很多人的线沿真实的传承边并起来，所以上一章不得不面对一个麻烦：两个孩子的头几代像，可能是同一个教练教的（真的传下来），也可能只是碰巧在同一个地方摔了同样的跤（只是走了同样的路）。

细胞的回写，是在一个分支上写，写到某一刻，分支一分为二，两个女儿各自往下写。所以细胞的谱系是真的分出来的树，就像那几盆吊兰。两个细胞的共同祖先是谁、在哪一刻分开、分开前一起被写过多少层，原则上是一件实打实的史实，不需要按"像不像"去并。

这让细胞的 g 比学习的 g 更好数，但也带来一个学习那里没有的问题：**分开以后，两支各自碰到的事，常常是相近的。** 罗奶奶的细胞和欧阳伯的细胞，两人之间的共同祖先早就远得没法数，可两人都住在娄底，都吃湘菜，都上了年纪，碰到的事有很多相似。这时候两人细胞的场有几分像，就不全是共同祖先留下的，也有"各自碰到相似的事、各自被写成相似的样子"的部分。生物学里把前者叫同源，后者叫趋同。上一章学习那里，难的是分清"传下来的"和"碰巧一样的"；这一章细胞这里，难的是分清"分开前一起写的"和"分开后各自写成一样的"。两块田的难处，长在树的两头。

还要说清一个尺度的问题。罗奶奶和欧阳伯是两个人，两个人的细胞之间，共同祖先要往上数到不知多少代以前，按"分开前一起写了多少层"来数，几乎是零。那这一章的 g 还有什么用?

有用，但要换一个尺度来看。细胞的谱系，有好几层：

第一层，是**一个人身体里**的细胞。罗奶奶身上的细胞，全都来自一个受精卵，一路分下来，分成了今天身体里的各种细胞。她膝盖附近的两个细胞，可能在她出生前很久就分开了，也可能在她五十岁那年一次受伤后的修复里才分开。它们之间的 g，是有深有浅的。

第二层，是**实验室里的细胞系**。很多研究用的细胞，是几十年前从一个人身上取下来，在培养皿里一代代传下来的。一个细胞系，被分到世界各地的实验室，各家用各家的培养液、各家的温度、各家的传代习惯养着——这就和那几盆吊兰一模一样。同一个名字的细胞系，在不同实验室里养了多年以后，会不会已经长成了不一样的几支？这是生物学里一直被讨论的一个问题。2018 年《自然》上有一项研究，把一种常用乳腺癌细胞系从各处收来的 27 个样本放在一起比，发现它们在基因和基因表达上已经各有不同，对几百种药的反应也跟着不同。

第三层，是**病人身上取下来的细胞**，在培养皿里长成小团的类器官，或者长成细胞系，用来在体外先试药——这类做法目前多在研究阶段。同一个人身上取下来的细胞，分成几份，分头去养、去试，又是一棵真分出来的小树。

所以，回答罗奶奶和欧阳伯那个问题，这一章不直接拿两位老人的细胞去比——那两棵树分得太早，太远。这一章要做的，是先在那些"分得晚、分得清、能记账"的细胞上，检验本书的承重命题；命题站住了，才谈得上以后能不能一步步往人身上走。这和第 9 章先在数学内部测、再去别的田是一个道理：先在能数清楚的地方数。

## ◆ 11.3　先测 g 再测 d 的研究设计

还是那条规矩：这一节写的是**设计**，不是结果。下面所有的数，都是要去测的数，没有一个已经测出来。

全书统一的三个量，在细胞这块田里各是什么？

g，是两个细胞群在"回写派生树"上的共同祖先深度：从它们一起的那个祖先群开始，往下数，它们在分开之前一起被写过多少代、多少层——一起传了几代、一起碰过哪些处理、一起被改过哪些连接、次序和结构。和上一章不同，这棵树不是按像不像并出来的，是按分开的史实一笔笔记下来的。

g_结构，是两个细胞群今天这一刻的静态相似度：今天测得的基因开关情况、蛋白的多少、通路图上各条线的松紧、各种已知的基因变异。今天越像，g_结构 越高。这正是 11.1 那两种统一性模型能看到的全部东西。

d，是一条"药在这里怎样起作用"的规律，从一个细胞群搬到另一个细胞群以后成立的程度。比如在甲群上发现"这种药加到某个浓度，细胞的某项活动就降到一半"，拿到乙群上，还成不成、成几成。

本书的预测：把 g_结构 配成一样，d 仍然跟着 g 走。

下面分六步说。

**— 第一步：造一棵自己记账的树。**

第 9 章的设计，是从形式库里已经存在的概念派生史去数 g。细胞这里，最干净的办法是不去追溯一段说不清的历史，而是从今天开始，**亲手造一段历史，边造边记账**。

设想这样做：取一个起点细胞群。把它分成两份，这是第一次分岔。两份各自养一段时间，期间给它们不同的"经历"——一份换一种培养液，一份不换；一份周期性地缺一点氧，一份不缺；一份在低浓度的某种药里泡一阵再拿出来，一份不泡。这些经历，就是第 5 章说的回写：经历过后，有些东西回不到原样，被写进了细胞，传给下一代。

养一段时间以后，再把每一份各分成两份，再给不同的经历。再养，再分。每到一次分岔，都从分岔前的那一份里留一小管冻起来，像给树上每个节点存一张底片。这样几轮下来，就得到一棵有好几层分岔的树。树上的每一个叶子是一个细胞群；每两个叶子之间，在哪一轮分开、分开前一起经历过哪几种回写，全有账可查。

这就像罗奶奶那几盆吊兰，只是账记得清清楚楚：哪一年剪给谁，分开前一起晒过多少太阳、换过几回盆土、憋过几回根。

为了让读者看清这棵树的样子，下面用一个最小的构想说明（这是一个构想的样子，不是任何实验的记录）。起点细胞群叫"根"。第一轮，分成甲、乙两份：甲在低浓度的某种药里泡过一阵，乙没有。第二轮，甲再分成甲一、甲二，乙再分成乙

一、乙二：甲一和乙一换了一种培养液，甲二和乙二没换。这样，四个叶子之间就有了两种亲疏：甲一和甲二是第二轮才分开的，一起走过"泡药"这一层；甲一和乙一第一轮就分开了，可第二轮各自都换了同一种培养液——它们是"分开得早、后来经历相同"的那一对。如果几轮下来，甲一和乙一今天的体检比甲一和甲二还像，这就是设计最想要的那种对子：静态更像，历史更远。真做的时候，树要比这大得多，每一种安排都要有好几份重复，才能分清哪些是经历留下的、哪些只是偶然。

**— 第二步：在树上数 g。**

两个叶子的 g，照第 5 章的细数法来数：从树根往下，沿着它们一起走过的那一段，一代一代列出每一代回写新写进来的连接、次序、结构条目（比如"泡过药以后，某两条信号线从此一起开关"），再看这些条目到测量那天在两个叶子身上是不是都还在。两边都还保有的条目越多、跨的代越多，g 越深。只数"一起走过几代"是一种粗略的近似，可以拿来快速看看，主分析不用它。

这里的"一代"，照全书口径，是一次完整的回写：细胞被一次经历逼着变了，而且这个变化留了下来、传给了下一批细胞。传一次代、换一次培养液，如果没留下回不去的改变，就不算一代。哪些读数的改变算"留了下来"，要在开始之前定好、封存，并事先说好主分析用哪种判法，其余作稳健性检查。

这里有一个细胞特有的讲究：回写不只发生在"给经历"的那一刻。细胞在培养皿里每传一代，本身也会有小的变化——有的变化是随机的突变，有的是被培养条件慢慢挑出来的。这些不在设计者手里的回写，也要尽量记：每隔几代取一点样，留档。按回写派生树的定义，g 数的是共享的连接、次序、结构，这些也是树上的东西。只是它们要事后补记，所以要单独标出来，分析时看看有它和没它，结果变不变。

**— 第三步：在今天把 g_结构 配平。**

几轮分岔以后，到了"今天"。对每一个叶子做一次细细的体检：测哪些基因开着、开多大；测主要蛋白的多少；测几条已知通路上各节点的活跃程度；测基因组上有哪些变异。用这些读数，算出每两个叶子之间的 g_结构。

然后挑对子：很多对叶子，每一对的 g_结构 都落在同一个窄区间里——今天看上去几乎一样。在这些对子里，有的是很晚才分开的（g 深），有的是第一轮就分开、后来又各自被写得很像的（g 浅）。后者正是 11.2 说的趋同：分开得早，各自碰到的事让它们今天又长得很像。

这一类"g 浅而 g_结构　高"的对子，是整个设计的心脏。统一性模型看它们，会说"今天一样，所以对药的反应应该一样"；本书看它们，会说"今天一样，可是来历不同，场里的连法是两条不同的回写史各自堆出来的，规律搬过去会打折扣"。

要能拿到足够多这样的对子，第一步造树时就要有意安排：让一些早早分开的枝，在后面几轮里经历相似的事，看它们会不会被写得相像。这不是作弊，是为了把"静态一样、历史不同"的情况造出来，否则这个对赌就无从赌起。

**— 第四步：封存，然后测 d。**

所有 g、g_结构 的数，交给一个不参与后面测试的人封存。

测 d 的人只知道一对一对的编号，不知道哪对 g 深、哪对 g 浅。对每一对，先在其中一个叶子上做一组药的试验：几种药，每种几个浓度，看细胞的某几项活动怎么变——长得快慢、死多少、某个信号开还是关。从这些试验里，总结出一条"规律"：比如"这种药在这个浓度以上，这项活动降到一半；同时加第二种药，降得更多"。

然后，把这条规律拿到对子的另一个叶子上去试：照同样的浓度，降不降到一半？两种药一起，是不是也降得更多？成立的程度，折成一个数，就是 d。怎么折，事先定好；可以有几种折法并报。

为什么要用"规律搬过去成不成"来测 d，而不是直接比两个叶子对药的反应像不像？因为本书说的迁移，是规律的迁移：在一处发现的"怎么做就行"，搬到另一处还行不行。直接比反应像不像，又会退回到比今天的读数。

这里还有一个容易被忽略的陷阱：规律从哪里来。如果测 d 的人在甲叶子上试了一百种药、挑出最漂亮的那一条规律，再拿去乙叶子上试，那么搬不过去，可能只是因为那条规律在甲上本来就是碰巧好看。所以要事先列好一张"规律清单"：哪几种药、哪几个浓度、看哪几项活动、规律写成什么样子，全部在测之前写定、封

存。每一对叶子都按这张清单来，不许看了结果再挑。清单里最好有三类规律：一类和分岔时泡过的那种药走同一条要道，一类走不相干的路，一类是两种药一起用时的配合。按本书的预测，第一类在 g 浅的对子里搬得最差，第二类几乎不受影响，第三类介于两者之间。这样一张清单，让对赌不只是"有没有关系"的粗赌，还多了"关系落在哪类规律上"的细赌——细赌输了，粗赌赢了，也要如实报告。

还要交代 g 在细胞这里和学习那里的一个根本不同，它决定了怎样算才不会自己骗自己。学习者那里，两个孩子"共享"的回写，是沿传承记录并出来的，记录总有漏的，碰巧走了同样路的孩子要靠记录才分得开，稍不留神就会掺进 g 里。细胞这里，g 只数分开以前一起走过的那一段——照第 5 章的细数法，沿着这一段的代际，数两边到测量那天都还保有的连接、次序、结构条目；分开以后各自经历得再像，也一律不算进 g，而是算进 g_结构 能读到的今天的样子里。这条线要划得死：一旦把"分开以后各自变得像"也算进 g，g 就和 g_结构 混在一起，对赌就赌不成了。这正是细胞这块田的便利，也是它对本书最严的考验——g 在这里是一笔干干净净的史账，如果连这样一笔干净的账都说不出 g_结构 之外的话，本书在细胞上就没有多走出一步。

样本也要算。树上每一种分岔安排要有几份重复，挑出来的对子要有多少对，才能分清"g 深的对子 d 高一点"是真的还是偶然，这要在开始之前按通行的统计办法估好，写进方案，不够就不开始。宁可树小一点、做得干净，也不要树大而账糊。

测 d 还有一个时间上的讲究，也是细胞这块田特有的。学习那里，测 d 时孩子在新车上骑几趟，就会在自己身上多写几代回写，所以只能测"第一次"。细胞这里，药加进去，细胞也会被写——泡过药的细胞，已经不是原来那群细胞了。所以测 d 用的每一份细胞，只能用一次；要从同一个叶子里事先分出足够多份冻存起来，测一种规律取一份，用完就弃，不能拿测过一种药的那份再去测另一种。否则，测第二条规律时，细胞身上已经多了一层测第一条规律时写进去的回写，树上的账就对不上了。这一点听上去琐碎，可它正是本书的意思在实验台上的样子：每一次碰，都是一次写；写过了，就回不去。

**— 第五步：对赌。**

本书的预测：在 g_结构 一样的对子里，g 深的，d 高；g 浅的，d 低。

再细一点：规律搬不过去的地方，应该和分岔时经历的那种回写有关。如果甲、乙两枝第一次分开时，一枝经历过"在低浓度药里泡过一阵"，一枝没有，那么凡是和这种药、或者和这种药走同一条要道的药有关的规律，从甲搬到乙应该搬得最差——哪怕今天两枝在体检上一模一样。这就是"程度属于场本身"的意思：不是一个笼统的"像几分"，而是在哪几层回写上分开，决定了哪一类规律搬不动。

什么结果说明本书错了？粗一点说：**如果在 g_结构 配平以后，d 和 g 看不出任何关系——早分开的对子和晚分开的对子，规律搬得一样好——本章的命题就错了。** 如果 d 只跟今天的体检读数走，体检越像越能搬，那就是通用通路模型和精准分组的路子赢了：只要体检做得够细，历史不必算。

**– 第六步：负对照与局限。**

和上一章一样，要放两道负对照。一道，把树上的分岔顺序打乱，重算一个"假 g"，看它能不能和真 g 一样好地预测 d；如果能，说明起作用的只是经历的种类，而不是先后。另一道，只用最后一轮的分岔算 g；如果最后一轮就够，前面几轮的历史不要紧，那"历史"在这里也只是今天的另一种读法。

局限也要老实写出来。第一，培养皿里的细胞，不是身体里的细胞。身体里的细胞是和周围的细胞、血管、神经、免疫缠在一起长的；拿出来单养，那一大片缠绕就断了。在培养皿里站住的结论，搬回身体，本身就是一次要打折扣的迁移。第二，体检能测的读数是有限的。如果今天的体检做得不够细，g 的作用可能只是体检漏掉的那部分读数，而不是历史本身。所以体检越细，这个对赌越硬；如果体检细到一定程度，g 的作用消失了，那也是一个重要结果——说明在这块田里，历史已经全部写进了今天可测的样子。第三，这一切离罗奶奶和欧阳伯还很远。即使在培养皿里站住了，要在两个人身上数 g，还得等能在人体内记录细胞谱系的办法成熟——这在今天的人身上还很难做到。

还有一条线不能越：这些读数只用来检验一个关于细胞的数学命题，不拿来给病人分类、不进任何诊疗决定、不作为加减药的依据。

## ◆ 11.4　与最近邻居对赌

三位邻居，和上一章同名，可它们在细胞这块田里站的位置不一样，对赌的地方也不一样。

**— 第一位邻居：分层模型。**

在药物研究里，分层模型很常见。比如估一种药在人身体里怎么被吸收、怎么被清除，研究者会把每个人的参数看成从一个总体里抽出来的，人和人之间有差，可差得有分寸；同一个医院的病人，又比不同医院的病人更像一些。估一个人的参数时，从总体里、从同医院的人那里"借一点"信息，借多少按分组远近来定。这一路叫群体药代动力学，用的正是分层的混合效应模型。

这位邻居承认程度，也承认一部分历史——同一个医院、同一个地区，往往有相似的经历。

它和本书分在哪里？和上一章一样，分在两处：一是分组由谁给，二是程度落在哪里。分层模型的组，多半是按行政归属或已知协变量事先定的；相似的程度落在参数（吸收快慢、清除快慢）上。本书的分组是细胞的派生树本身，相似的程度落在细胞里那张连法图上。

但在细胞这块田里，这位邻居离本书比在学习那里更近：因为细胞的树是真分出来的，分层模型完全可以把"层"直接取成派生树的分岔——同一轮分出的叶子嵌在同一个枝里。这样做以后，两家剩下可赌的只有一件事：**用派生树分层，和用今天体检读数的相似度分层，谁对 d 预测得更好。** 这又回到了 11.3 的对赌。

**— 第二位邻居：可迁移性的结构模型。**

这位邻居在药物研究里有一个现成的用武之地：临床试验做在一群人身上，药上市以后要用在另一群人身上。试验里的效果，能不能搬到目标人群？可迁移性的结构模型的回答是：把两群人背后的因果结构画出来，标出两群人在哪些环节上不同，看这些不同能不能被已知的量"绕过去"。绕得过去，就能搬，而且能算出搬过去该怎么调整；绕不过去，就要另外收集数据。

再说一遍：这位邻居不是"按两群人数值上差多远来判"的稻草人。它看的是因果结构，结构哪里一样、哪里不一样。它的选择图本身就是结构。在"迁移跟着结构走"这一点上，它和本书站在一起。

分歧在于：它读的是**此刻**的结构。只要两群细胞此刻的因果图一样、差异标在同样的地方，它就预测迁移一样。本书赌：此刻的图一样，来历不同，迁移就不一样。

这位邻居同样可以把历史画进图里：加一个节点"第一轮分开时有没有在药里泡过"，指向后面的环节。细胞这里，这样做比在学习那里更自然，因为分岔时经历了什么，是有账可查的。画进去以后，图就会越来越像派生树。到那时候，争的就是"历史怎么算"：是把每一次经历当成一个原因变量，一个一个查它影响了什么；还是直接数共同祖先有多深，拿深度去预测迁移。

细胞这里有一个学习那里没有的赌点：**分开以后各自经历的事一样，能不能抹掉分开前的差别**。 因果图的写法，会说：只要分开以后的经历在图上标得清楚，分开前的历史若已经不再影响此刻的结构，就可以不管。本书说：分开前一起被写过的那几层，会留在连法里，此刻的体检未必读得出，可是一换到新的药上，就显出来。这就是 11.3 那些"早分开、后趋同"的对子要回答的问题。

**— 第三位邻居：系统发育比较方法。**

在细胞这块田里，这位邻居是最近的近邻，近到几乎和本书贴在一起。

它本来是比较物种的：许多物种放在一起比性状，不能把每个物种当成独立的点，要按进化树上的共享枝长，扣掉"因为同宗所以像"的那一部分。细胞的派生树和物种的进化树是同一种树——都是真分出来的。所以这位邻居的方法，几乎可以原封不动地用到细胞群上；事实上，研究肿瘤的人已经在用画树的办法，去追一个肿瘤里各个克隆是怎样一支支分出来的。

那本书还多走了哪一步?

第一，这位邻居用树，主要是为了**校正**：它要把同宗带来的像扣掉，好看清性状和性状之间、性状和生活条件之间真正的关系。树在这里是要扣除的干扰。本书反过来，把同宗带来的像当成主角，拿共同祖先深度去**预测**一条规律能搬多远。

第二，这位邻居比较的是**性状**——一个物种多大、一个细胞长得多快。本书比较的不是性状，而是性状背后那张连法图：哪些东西连在一起、谁先谁后、哪条是要道。两个细胞群可以在"长得多快"上一模一样，而让它们长这么快的连法不一样。本书说的 g，数的是连法共享了几代，不是性状像几分。

第三，这位邻居默认树上的性状沿着枝慢慢漂，漂多远和枝多长有关（最常用的一种叫布朗运动模型）。这种默认里，"像几分"是枝长的一个平滑的函数。本书的预测更具体，也更容易被推翻：规律搬不搬得动，要看分开时经历的是哪一种回写；同样的枝长，分开时在药里泡过和没泡过，对和这种药有关的规律，搬起来会差很多，对无关的规律，几乎不差。如果数据显示只有枝长要紧、经历的种类不要紧，本书多走的那一步就可以收回。

再请一位更老的邻居，因为不提它不公道：发育生物学里有一个流传很广的比喻，叫"表观遗传景观"。它把一个细胞的发育画成一颗小球从山顶往下滚，山坡上有许多沟，小球滚进哪条沟，细胞就成了哪种细胞；越往下沟越深，越难再翻到别的沟里去。这幅图出自英国生物学家沃丁顿，最常被引的是他 1957 年《基因的策略》一书里的画法。

这个比喻里，历史是要紧的：小球走过哪几道岔口，决定了它今天在哪条沟里。它也承认程度：两颗小球在同一个岔口之后才分开，就落在相邻的沟里；在山顶就分开，就落在两边。从这一点说，它和本书很像，而且比前三位邻居更早看见了"细胞的样子是一路长出来的"。

它停在哪里？停在两处。一是山是事先画好的。沟在哪里、有几条、哪条通哪条，是一张对所有细胞都一样的地形图，小球只是在这一张图上走了不同的路。这正是统一性的样子：场只有一种，差别在于你走到了图上哪里。本书说的是：细胞一路被写过来，被改写的不只是"走到了哪里"，还有山本身——这个细胞里哪两条沟之间的坡变陡了、哪一条沟里多了一条岔路。二是它讲的是细胞变成哪一种细胞，没有讲一条药理规律能从一个细胞搬到另一个细胞搬多远。把它和本书放在一起赌，可以这样赌：两个今天落在同一条沟底、体检一样的细胞群，如果只是走了图上不同的路，按景观的说法它们现在就是同一种东西，规律应该搬得一样好；如果

它们一路被写过来，连山的样子都被写得不同，规律就搬不一样。11.3 那些"早分开、后趋同"的对子，正好用来分这一局。

四位邻居都请过了。合起来看，细胞这块田和学习那块田，对赌的位置正好错开：学习那里，最难的是证明"并出来的树"是真的谱系，而不只是今天像不像；细胞这里，树是真的，最难的是证明"树上的历史"在今天配平以后还说得出话，而不只是在帮系统发育方法做校正。

## ◆ 11.5　复合主体分工与验证

先回到阳台。

还是那几盆吊兰（仍是构想的场景）。有一年春天，曾晓岚想弄明白：为什么同一个身子分出来的几盆，长得这么不一样？她从三家的盆里各剪一棵小苗，种进三个一模一样的新盆，用同一袋土，摆在同一个窗台上，一样地浇水。一个夏天过去，三棵还是不一样：欧阳伯家来的那棵抽走茎最早，她自己家来的那棵叶子仍偏长偏软。她又去问欧阳伯，这些年怎么养的：哪年换过盆，哪年冬天冻过一回、剪掉了半盆叶子才缓过来，多久施一次肥。一家一家问完，她才大概弄明白：今天长得不一样，跟今天的土和窗台关系不大，跟这些年各家怎么养的关系很大。

这件事，曾晓岚一个人问三家，还问得过来。细胞的事，一棵树上几十上百个叶子，每个叶子一路经历了几十次传代、十几种处理，每一次都要记、要测、要对齐，一个人问不过来。这一节说的，就是这件事里，人和 AI 各站在哪里。第 8 章说过：没有独立的 AI。"AI 去分析细胞数据"这句话里，站着做实验的人、写方案的人、定规矩的人、出钱的公司，也站着把数据喂给 AI 的那一整个共同体。

### — AI 做什么。

第一，记账与对齐。每一次传代、每一次处理、每一次取样，AI 可以把实验记录、仪器读数和样品编号一笔笔对上，生成那棵派生树，算出每两个叶子之间的 g。这是在一种场结构里的千倍劳动——记账的规矩人定好了，AI 按规矩记。

第二，体检读数的整理和 g_结构 的计算。今天的体检读数成千上万项，算两两相似度、挑出配平的对子，正是 AI 擅长的。

第三，枝内推导。在一根枝里——比如"一起走过前三轮、都在同一种培养液里、都没泡过药"的那一群叶子——场结构近乎同一种。通用通路模型和群体平均在这里该怎么用就怎么用，而且会用得更准。本书不扔掉通路图，而是给通路图找到它成立的那一根枝。AI 在枝内撞果子：在枝内用通路图预测一种新药的作用，再拿去试。

第四，撞反面果子。在某一根枝里，通路图预测这种药卡住要道、细胞活动该降一半，实际几乎没降。这就是第 7 章说的反面果子的候选：一条规律被推出了它所属的那一支。AI 把这类情况一条条找出来、按可信程度排好、交上去。

**— 人做什么。**

第一，定规矩。全书口径已经说了，要有回不去的改变才算一代；可在细胞上，"回不去"测到哪一项、隔多久复测才算数？两次经历算不算"同一种"？体检要测哪些读数才算"细"？这些都要人来定，而且要在开始以前定好、封存。定规矩的人里，要有做细胞培养多年、知道哪些"小习惯"会让细胞变样的老技术员——比如传代时用的力道、换液的时间、冰箱开门的次数——这些东西不在任何手册里，却可能是树上的回写。

第二，织谱。AI 交上来的反面果子，人来判它是哪一种：是测错了、记错了（那就修账）；是这个叶子其实在某一轮有一次没记下的经历，它在树上的位置要挪（那就修树）；还是这条规律本来就只在某一支里成立，搬出这一支就要另立一支、按另一种连法去推（那就长树）。第 7 章的判据在这里落地：收窄以后，后面的推导是不是要换一张连法图才推得下去。前两种是修，第三种才是织。

第三，守线。读数只用于检验命题，不拿去给病人分类、不进诊疗。哪一天这种办法真的走到了人身上，那一步也要由医生、病人、伦理审查一起决定，不由一本书、一个模型决定。

这里还有一层，是细胞这块田特有的。细胞的派生树里，有一大块回写不在设计者手里：随机的突变、被培养条件慢慢挑出来的变化。AI 很擅长从读数里把这些"没记下的回写"推出来，补进树里。但推出来的东西，是 AI 按它学过的那种场结构去推的；如果它学的数据大多来自某一类细胞，它补的树就会偏向那一类细胞的连法。所以人要按枝去抽查 AI 补的树，每一枝都抽。抽查发现某一枝系统地补偏

了，就要回去看：是不是 AI 用的那套"细胞一般怎么变"的知识，本身只是一种场结构的知识。这一步，是人和 AI 组成的复合主体在给自己回写。

**— 怎么验证。**

验证的三层，名目和上一章一样：二值的核对、重复、谱系验证。可在细胞这块田里，每一层要防的东西都换了。

第一层仍是对就是对、错就是错的核对，但细胞这里最怕的不是算错，而是"拿错了"：一个瓶子上写的是甲二，里面装的其实是甲一，或者混进了别的细胞。这类事在细胞研究里并不罕见，所以实验室里早有一套给细胞"验明正身"的办法（比如比对一组短重复序列的指纹）。在本书的设计里，树上每一个叶子，在分岔时、测 d 之前，都要各验一次正身，验的结果写进账里。这一层可以写成程序一条条核，也可以按第 13 章要讲的办法写进形式系统。

第二层是重复：换一个起点细胞、换一个实验室、换一批人，同样的设计再做一遍。细胞这里有一个学习那里没有的便利：同一个起点细胞群可以冻存一份，分到几个实验室，各自从头造树——这本身就是在造一棵更大的树，各实验室是树上的几支。几个实验室结果一致，说明结论不是某一家的手法造出来的；不一致，正好可以问：是哪几轮的哪种回写，让实验室之间分了岔。

第三层是谱系验证。上一章说过它的样子：一条规律的验证结果不是一个对勾，而是一张标在树上的图。细胞这里多了一样学习那里做不到的事：图画出来以后，可以回到冻存的叶子上再试。比如图上标着"这条药理规律在泡过药的那一枝上只成立一半"，那就从冻存里取出那一枝分岔前后的细胞，看"成立一半"是从哪一轮开始的。学习那里，孩子回不到一个月前；细胞这里，树上的每一个节点都留着一份，可以回头去问。图上的每一个"成立几成"，因此都能落到具体的某一轮回写上。这张能回头去问的图，就是细胞的数学在同一性谱系里的样子。

说到这里，回到楼下的两位老人。本书不能告诉罗奶奶该吃什么药，也不能告诉欧阳伯他的细胞和罗奶奶的差在哪里。本书只能说一件事：两个人今天的检查单可以一模一样，而身上的细胞是各自一路分、一路被写过来的；"这药对他好"这条规律能不能搬到她身上，不一定写在今天的检查单上，可能写在两棵树分开以后各自

走过的那些年里。就像那几盆吊兰，今天全搬到同一个窗台上、浇同样的水，明年长出来还是几样。

学习这块田，谱系是并出来的；细胞这块田，谱系是分出来的。下一章要去的那块田，是 E 的原型：土壤。在那里，回写不在一个人身上，也不在一个细胞里，而是一层层堆在脚下——同一包种子撒进两块地，收成为什么两样？

**带 走 的 话**

1. **同一种药，今天检查单一样的两个人，反应可以不一样；差别可能不在读数里，而在细胞一路分、一路被写过来的历史里。**
2. **通用通路模型只画一张图，群体平均只按读数分组，两者都把细胞的场当成一种。**
3. **细胞的谱系是真分出来的树，和学习者"并"出来的树不同；细胞这里最难的，是分清"分开前一起写的"和"分开后各自写成一样的"。**
4. **先亲手造一棵记账的派生树、数出 g 并封存，再配平今天的体检、去测规律能不能搬；配平以后 d 若不跟 g 走，本章就错了。**
5. **通路图不必扔，它在一根枝里最好用；AI 记账、对齐、枝内推导、撞反面果子，人定规矩、织谱、守住读数不进诊疗。**

**小　账**

**本章切开的差异：**今天的检查单一样，与细胞一路分过来、被写过来的历史不一样。

**本章的场谱系读数：**细胞的场至今被当成一种（通用通路图、按读数分组的人群），回写落在一次次分裂之间细胞碰过的事里，谱系是真分出来的树，尚未被当作预测规律迁移的量来数。

◆

12

第 12 章

# 土壤的数学

**这一章的问题**

同一包种子撒进两块地，收成为什么会两样？如果土壤的差别不全在今天测得出的那几项数字里，而在它被种过、翻过、施过什么的那一串回写里，土壤的数学该怎样先量"历史亲缘"，再量规律能不能从一块地搬到另一块地？

## ◆ 12.1　统一性模型及其停点

欧阳伯今年六十六岁，在城郊种着两块菜地。（欧阳伯与本书的其他陪读人物一样，是构想的人物；下面这件事是一个构想的场景。）

两块地隔着一条水沟，走路不到三分钟。开春的时候，他在镇上的农资店买了一包辣椒种子，回家分成两半，一半撒在沟东那块，一半撒在沟西那块。育苗、移栽、搭架、浇水，两边都是他一个人的一双手，用的是同一把锄头、同一担粪水、同一个早晨的工夫。

到了七月，沟东的辣椒挂得密，一棵摘下来能装半篮子；沟西的苗也长了，叶子也绿，可开花少、落花多，结出来的辣椒又短又歪，摘了两回就不怎么结了。

邻居罗奶奶来串门，看了两块地，说了一句最常见的话："沟西那块土不行。"

可是哪里不行呢？前年镇上农技站来测过土。欧阳伯把两张单子都留着：两块地的酸碱差不多，有机质差不多，氮、磷、钾也都在同一个档里，单子上写的土类名称一模一样，推荐的施肥量也一模一样。照这两张单子看，两块地是"同一种土"，该长出同一种辣椒。

这就是土壤学里的统一性模型在一块菜地上的样子。它有两件大家伙。

第一件是统一的土壤分类体系。世界上通行的几套土壤分类〔待核：美国土壤系统分类、联合国粮农组织的世界土壤资源参比基础、中国土壤系统分类的具体层级与命名〕，做的是同一件事：按照今天挖得出、测得到的特征——土层怎样排、颜色怎样、黏还是沙、酸还是碱、有没有某种特殊的层——把天下的土分进一棵分类树里。分到同一个类里的土，被看作"同一种土"。

第二件是通用的肥力模型。它的想法很朴素：作物要吃哪些养分，土里有多少，缺多少就补多少。哪一样养分最缺，哪一样就卡住收成，这是农学教科书里常讲的"最小养分律"〔待核：李比希最小养分律的表述与归属〕；施肥越多收成越高、但越往后加得越少，也常用一条递减的曲线来描述〔待核：米切利希方程等产量—施肥曲线〕。测土配方施肥，就是把这两样拼起来：先测，再按公式配。

这两件家伙都很厉害，要先把它们的好处说足。没有统一的分类，一个湖南的农技员和一个东北的农技员说"红壤""黑土"时，就对不上话；没有通用的肥力模型，农民只能凭感觉撒化肥，撒多了烧苗、污水，撒少了减产。统一性模型让成千上万块地能在同一张表上比较，让一个县能用同一套办法服务十万户人家。这是一种了不起的"一把尺子"。

那么它停在哪里？

它停在一个地方：**它把今天测得出的样子，当成土的全部。** 分类看的是此刻土层的排法，肥力模型看的是此刻养分的读数。两块地今天的读数一样，它就只能说"一样"；收成不一样，它就只好把差别推给"别的因素"——天气、管理、病虫、运气。可欧阳伯两块地的天气是同一片天，管理是同一双手。

更具体一点说，统一性模型遇到"读数一样、收成不一样"时，有一套很成熟的处理办法。做田间试验的人会把许多块地放在一起比，把能测的因素都算进去，剩下解释不了的那一部分，叫作"地块效应"或者"误差"〔待核：田间试验统计中地块随机效应的通行处理〕。这个办法在统计上很干净：既然不知道每块地为什么偏，就承认它偏，用一个随机数把它装起来，平均掉。可是"装起来"的意思，就是不再追问。沟西那块地的"不行"，在这套办法里只是一个偏离平均数的小数点，它是从哪里来的、还会不会传下去、和别的哪几块地同病相怜，模型不问。

这不是统计学家粗心，而是统一性模型的题中应有之义。它的出发点就是：天下的土，在一张表上，按同一套读数排开；读数一样的地，本该是同一种土；不一样的那一点，是噪声。一把尺子量天下，尺子上没有刻度的东西，就只好算成误差。

罗奶奶那句"那块土不行"，和统计学里的"地块效应"，其实说的是同一件事：承认有差别，但不说差别的来处。只是罗奶奶的那句话里，还隐隐带着一个乡下人都懂的意思——"不行"的地，往往是有来历的。

欧阳伯自己心里其实有数。他说："沟东那块，是我爹那辈就种菜的园子，几十年粪水泼下去，烂菜叶子、辣椒秆子都翻回土里。沟西那块，十来年前还是人家的水田，种了好多年稻子，后来不种了，荒了几年，我才接过来改成旱地。"

这话说的不是今天的读数，是两块地各自的来历：种过什么，翻过几回，施过什么，荒过多久。统一性模型并不是完全不知道"来历"这回事——土壤学里一直讲"成土时间"，讲母质，讲人为影响——但在分类和配方的那一刻，来历要么被压成一个"年龄"，要么被看作已经全部写进了今天的读数里，用不着再单独算。

这个停点在日常生活里也处处见得到。两家面馆进的是同一袋面粉、照的是同一张配方，一家的面筋道，另一家的面总差一口气；两个班的期中平均分一样，用同一套复习办法，一个班期末往上走，另一个班原地不动。今天的读数一样，背后的来路不一样，这种事并不稀奇。只是在人身上、在班级上，大家都隐约知道"来路"要紧；到了土壤上，因为土不会说话，来路就更容易被当成不存在。

还要说一句公道话。统一性模型本身并不笨，它把来历压掉，是有理由的：来历难记、难查、难量，一个县几十万块地，谁说得清每一块几十年里种过什么？把来历当成已经写进今天的读数，是在"做不到"面前的一种聪明的省事。本章并不是要把这份省事一笔勾销，而是要问：省掉的那一截，到底有多大？如果很小，统一性模型就够用；如果不小，它就停在了一个该往前走的地方。

这一章要追问的就是这一点：**两块地今天的读数一样，来历不一样，规律在它们之间搬得动搬不动，会不会也不一样？** 如果会，那么土壤的"同一"就不止一种程度，而是有一张由来历织成的谱。这张谱长在哪里，下一节去看。

## ◆ 12.2　这一群对象的 E2 之场

欧阳伯有个习惯，下地先不动锄头，先蹲下来抓一把土。

沟东的土，抓在手里是一颗一颗的小团子，捏一下就散开，散开了又不是粉，是更小的团子，指缝里带着一点潮气和一股说不上来的、像蘑菇又像烂叶子的味道。沟西的土，捏起来发黏，一捏一个饼，饼掰开是光面，干了以后硬得像瓦片，闻着味道淡。

这一抓，正好是第 4 章讲过的触觉的发生，换了一个对象。手指一捏一松，团子和饼、潮和黏、散和硬，差别一个接一个排出来；"这块土"的样子跟着一层一层显露——先是"有点潮"，再是"是团子不是粉"，最后是"这是块熟了的菜园土"；而欧阳伯的手、他几十年蹲在地头的经验、这块土被他亲手翻过的那几十个春天，缠在这一把里，拆不开。换一个城里人来抓，摸到的只是"一把湿泥巴"。

可是本章关心的，不只是欧阳伯手里的那一把，而是土里头那些东西之间是怎样连着、怎样排着先后、怎样搭成一个架子的。本书把这叫作数学之场：特征纠缠之间的连接、次序与结构（第 5 章）。土壤是看这件事最好的地方，因为土几乎就是"回写堆出来的场"本身。

先说**连接**。土里不是一堆各自独立的东西——沙粒、黏粒、水、空气、腐烂的根、细菌、真菌、蚯蚓——它们彼此连着，而且连法有讲究。沟东那块土里的小团子，是烂菜叶子变成的腐殖质把细土粒粘在一起，真菌的细丝又把小团子串成大团子；蚯蚓吃进土、拉出土，又把团子重新捏过一遍。于是在这块土里，"水"和"空气"是连着的：团子之间有大缝走气，团子里面有小缝存水；"养分"和"根"是连着的：根往哪里钻，哪里的细菌就多，细菌一多，粪水里的氮就被转成辣椒根吃得进的样子。沟西那块土，长年泡在水里种稻，团子早被泡散了，细土粒一层层沉下来，压得密实，水和空气就不再连着，而是互相挤：水多了没有气，气多了是因为干裂了。同样一份"氮"，放进两块土里，它和根、和细菌、和水的连法不同。

再说**次序**。土里的事情有先后，先后换了，结果就换了。沟东那块，粪水泼下去，先有细菌吃，细菌吃了，氮慢慢放出来，辣椒的根正好在这时候伸过来。沟西那块，同样的粪水泼下去，先遇到的是一层不透气的黏土，水下不去，在表面积

着，太阳一晒，氮跑掉了一部分，剩下的等根伸过来时已经不多。不是两块地里"有没有氮"的问题，是氮、水、细菌、根这几件事谁先谁后的问题。

最后说**结构**。连接和次序久了，会稳成一个架子：一层表土、一层心土，团子大小怎样分布，根系通常扎多深，哪个季节土里最热闹。这个架子就是今天农技站测得到的那些"读数"背后的东西。可它不是一下子出现的，是每一年的落叶、烂秆子、粪水、锄头、雨水一遍遍回写出来的。

这里要接上第 5 章那个比方。作者认为，土壤是由树的落叶和果子一层层回写堆成的；土壤、树、果子三样里，土壤最复杂；一块土通常只长一种树，回写的那一部分就有了同一性。松树林下的土，年年落的是松针，回写进去的是松针的那一路东西，几十年下来，这块土就"像松林的土"；橡树林、茶园、菜园，各有各的一路。一块土的同一性，不是天生的，是它长期长着的那一种东西一遍遍回写给它的。

这句话放在欧阳伯的两块地上，就看得清清楚楚了。沟东那块，几十年回写的是"菜园"那一路：菜叶、菜秆、人畜粪、浅翻、常浇。沟西那块，前面很多年回写的是"稻田"那一路：稻草、长期泡水、犁耙、田埂、水下那一群不喜欢空气的细菌；后来荒了几年，回写的是野草那一路；最近这几年才开始回写菜园那一路。两块地今天的几项读数凑巧落在同一个档里，可它们里头的连接、次序、结构，是两条不同的回写路走出来的。

这条回写路还在走，而且走的样子很值得细看。欧阳伯接手沟西那块后，每年秋天把辣椒秆子、南瓜藤剁碎了埋回去，冬天挑几担粪水，开春浅翻一遍。头两年，土还是一捏一个饼；第三年，表面一层薄薄的土开始有了小团子，下雨后不那么积水了；到今年，上面一拃深的土已经有几分像沟东，再往下一锄，还是当年稻田那层又黏又紧的底子。也就是说，沟西那块土此刻同时是两样东西：上层在慢慢被写成"菜园"那一路，下层还守着"稻田"那一路。它的同一性不是一个定了的数，而是正在移动——每多一年菜园式的回写，它和沟东在家谱上就多共享一点什么。

这一层移动里，三样东西是缠在一起走的。土里那些有机质攒着的劲，是慢慢放出来的养分，像一个存着的家底；辣椒根一年年往下扎、细菌一年年在根边繁殖，是正在用、正在推的劲；而已经稳住了的团粒、已经熟了的表土，是存下来、

下一季随手就能用的底子。欧阳伯心里那个"菜园土该是什么样"的样子，他手上年年的那几担粪水、那几锄头，他自己"这块地我要把它养熟"的那份心思，也都缠在这条回写路上。换一个只种一年就走的租户，这块地的回写路就会断在半截，上层也许又回到荒草那一路去。

所以，两块地是"同一种土"吗？用统一性的眼睛看，是，读数一样就是一样。用"多元化的统一性"的眼睛看，可以再细分几个亚类，各类内部仍然一样，类与类之间不讲亲缘。用同一性谱系的眼睛看，问题换了一个问法：**这两块地的场结构，在回写的家谱上，共享了多少代？** 共享得多，同一性的程度高；共享得少，程度低。程度不是今天读数的远近，是来历的远近。

这里拿第 4 章的红烧肉对照一下，会更清楚土壤的特别之处。罗奶奶家的红烧肉，是一口锅、一双手、一家人的口味一代代传下来的；同村的相近，同省的相似，全国同名而差别很大。红烧肉的谱系是靠人传的：人一走，手艺可能就断了。土壤的谱系不一样，它不靠人记也照样留着——稻田留下的那层黏底子，人忘了它也还在。土是自己替自己记账的。可是土记账的办法是"一层压一层"，不是"一页接一页"：它记下了每一代回写的结果，却把先后搅在了一起。上层菜园的团粒、下层稻田的黏底，是看得见的；可这中间荒过几年、撒过几回石灰、是先改旱地再分家还是先分家再改旱地，土自己说不出来。

所以，土壤上的同一性谱系，一半在土里，一半在人那里。土里的那一半，是回写留下的连接与结构；人那里的那一半，是回写的次序。两半合起来，才是一块地完整的场谱系。这一点会一直带到后面的研究设计和分工里去。

这也说明了为什么土壤在这本书里是"E 的原型"。E 最容易被回写、最容易沉淀、最不容易抹掉（第 5 章）。树会被砍，果子会被摘，可土里留下的东西，十年、几十年都还在。欧阳伯说沟西那块"到今天一下大雨还是积水"，就是十来年前的稻田在今天这块旱地里的回声。

有了这一层，下一节要回答的问题就很具体了：既然同一性的程度长在回写的家谱里，那就要先把家谱画出来，量出两块地的"历史亲缘"，然后再去量一条种地的规律能不能从这块搬到那块。而且两样必须分开量。

## ◆ 12.3　先测 g 再测 d 的研究设计

先说清楚：这一节写的是一个研究设计，不是已经做完的研究，下面没有一个数字是测出来的结果。

故事从一个小本子开始。暑假里，罗奶奶的外孙女谭一禾到欧阳伯的菜地帮忙，听他讲两块地的来历，觉得有意思，就拿了个本子，一块地一页，按年份往下记：哪一年种的什么，哪一年翻过地、翻得深还是浅，哪一年撒过石灰、泼过多少回粪水、烧过草木灰，哪一年荒着，哪一年被水淹过。记到后来，她说："这像是给土写家谱。"

这个"土的家谱"，正是本书第 5 章说的回写派生树。下面把它在土壤上的做法一步一步写出来。

**第一步：画回写派生树。**　一块地的家谱里，"一代"不是一年，而是一次完整的回写：一季作物长出来、它的残体和人施进去的东西回到土里、土被翻动或不翻动、下一季在这个新起点上开始。每一代记下三类回写事件：种过什么（作物、休耕、荒草）；动过几回（深翻、浅翻、免耕、起垄、平整）；施过什么（粪肥、秸秆、石灰、草木灰、化肥的种类）。另外记下一种特别的事件：分叉。两块地原来是同一块田，某一年被分开，从此各走各的回写路——比如一大块祖上的园子分家时一分为二，或者一片稻田后来一半改了旱地、一半还种稻。分叉之前的那些代，就是两块地的共同祖先。

**第二步：算 g。** g 定义为两块地在回写派生树上的共同祖先深度：从它们分开的那个节点往上，沿着回写的代际，数分开之前写进去、到今天两边都还保有的连接、次序、结构。在土壤上，这就是**血缘深度**：两块地真的曾是同一块土、在分开之前一起被回写过的那些代，留到今天两边都还在的部分。一块土被分成两块，最常见的是分家、分田，一块田被田埂隔开各种各的；还有一种土壤特有的分法——土被搬走：修路、平地时挖下来的熟土被运到别处铺开，那一层土就带着它原来那块地的家谱，在新地方接着被回写。

算 g 时守一条规矩：只看家谱，不看收成。算 g 的人手里不能有任何一块地的产量记录、也不知道后面要拿哪条种植规律去试，这样 g 才是"先于迁移结果即可测"的。

为了让这个算法看得明白，下面用一个构想的小家谱来演示**怎样数**——注意，这只是演示计数的办法，不是任何测量结果。

设想欧阳伯家祖上在城郊有一大块菜园，后来分家，一分为二：一半归了欧阳伯的父亲，就是今天的沟东；另一半归了他父亲的一个堂兄，今天还由那一房的后人种着菜，我们叫它"堂兄园"。再设想前些年修路，从沟东园子边上挖下来一大片菜园熟土，运到十几里外一处新开的苗圃，铺了厚厚一层，苗圃这些年在上面种菜苗，我们叫它"苗圃地"。

沟东和堂兄园：分家之前，同一块园子，同一双手在回写；分家以后两边都还种菜，可那是各自往下长的事了，不算共同祖先。数的是分家前那些代写进土里、到今天两边都还留着的东西——团粒的样子、熟土的厚薄、根和细菌那一套连法。它们的 g 会很高。

沟东和苗圃地：隔着十几里，可苗圃上面那层土，修路那年以前一直就是沟东园子的一部分，跟着沟东走过了几十代菜园式的回写；运走以后才分开。它们的 g 也不低，只是要打一个折扣——苗圃底下原来那层土和沟东毫无亲缘，只算搬过去的那一层。

沟东和沟西：从来不是同一块土，没有共同祖先，g 是零。沟西这几年改种菜、也照着菜园的路子回写，那是它自己往下长的，不算进它和沟东的共同祖先。

这个演示里最有意思的一对是"沟东和苗圃地"：它们隔着十几里，今天的读数也未必相近，可在家谱上，它们比"沟东和沟西"这两块只隔一条水沟的地亲得多。本书的预测说的就是这种地方：一条在沟东上摸索出来的种植办法，搬到苗圃地上，可能比搬到一沟之隔的沟西更管用。

这里要交代一个本书暂不计入 g 的候选。土地有一种别处少见的情形：两块从来不相连的地，各自走过同一路回写。比如沟西和十几里外另一个村的一块地，都先种了多年稻子，又都在差不多的年份改了旱地。它们的连法会不会因此也像？很可能有一点。可是本书不把这一层算进 g，理由是：它是两条历史各自走到了相近的地方——是收敛的历史，不是共同的祖先。g 要量的是"从同一个源头分出来"的亲缘；把"走过同类的路"也算进去，g 就混进了"像不像"的成分，又滑回到静态相似那

一边去了。这一层可以另记一笔"同路"的备注，留作以后检验的扩展，看它在控制了 g 和 g_结构 以后还多不多说一点；在本书的承重预测里，它不出场。

计数还有几处细节要交代。

**次序要算进去。** 两块地分开以前共同走过的那一段，要按先后一代一代对：先稻后菜的那块土，稻田的回写压在下面、菜园的回写盖在上面，和先菜后稻是两种不同的连法。所以数共同保有的条目时，只数"在同一段先后位置上"两边都还在的，不把历史打乱了再比。

**一代怎么划要事先说定。** 全书的口径是：一代＝一次完整的回写，做法被结果逼着改了一回，而且改法沉淀进了以后的做法。按年头、按季数、按种地的人数都不算代。落到土上，一季作物照旧种、照旧收，只是又走了一遍，不增代；某一季收成逼着人改了茬口、改了翻法或施法，并且以后一直这样做了，才记一代。分田、分家、搬土这样的分开，记成分叉点。划法写死以后，所有地块都按同一个划法数，不能看了结果再改。

**不知道的要写成不知道。** 许多地的来历只能问到两三代人以前，再往上就断了。断了的部分不猜，记作"未知"。两块地的 g 只在双方都知道的那段家谱上数，同时记下这一对地的家谱有多长；家谱太短的对子，单独放一组，不和家谱长的对子混在一起比。

**防住"近就是亲"的混淆。** 同一个村、挨得近的地，往往家谱也更亲——都归同一户人、都种同一种菜。这样一来，g 高的对子可能同时是天气更像、水源更像、病虫更像的对子，规律搬得动，未必是家谱的功劳。所以配对时要专门找"挨得近而家谱远"（像沟东和沟西）和"隔得远而家谱近"（像沟东和苗圃地）的对子；本书的预测若要站住，就得在这两种对子上都看见 g 的作用，而不只是在"又近又亲"的对子上。

要强调的是，土壤的 g 和学习、细胞的 g 有一处根本的不同：土壤的回写史有一大部分不在土里，而在人的记忆、村里的账、地契与分家单、老照片和历年的航拍里。土自己会"记"——黏土层、犁底层、残留的石灰——但它记下的是结果，不是顺序；顺序要靠人去问、去对。这就是下面 12.5 节要讲的复合主体分工最早出场的地方。

**第三步：测 g_结构。** 和 g 分开，另外测两块地今天的静态相似度，本书记作 g_结构：农技站那一套读数（酸碱、有机质、氮磷钾、质地、容重），加上分类体系里的土类归属，再加上今天能做的更细的测量，比如团粒大小的分布、土里微生物群落的组成。g_结构 越接近，说明两块地"此刻的样子"越像。

**第四步：测 d。** d 是一条种地的规律从一块地搬到另一块地时，还成立几成。这里的"规律"要先在源头那块地上被确认，比如："这个辣椒品种，在这块地上，用这样的底肥加这样的追肥，坐果最好"；或者："在这块地上，种过一季豆子再种辣椒，辣椒少得病"。然后把同一条规律原样搬到另一块地上，看它的效果还剩多少。d 可以记成几档：几乎照样成立、打了折扣、完全不成立、反着来。

土里的规律大体有三类，搬的时候要分开记。一类是**配方类**：这块地用什么肥、什么比例、什么时候追；一类是**次序类**：前一季种什么、后一季种什么，哪种茬口接哪种茬口；一类是**适配类**：哪个品种在这块地上最合适。三类规律对土里"连接"和"先后"的依赖不一样：配方类主要靠养分怎样和根、和细菌连着；次序类主要靠上一季回写给下一季的先后；适配类两样都靠。本书的预测对三类都成立，但次序类最可能最先看出差别——因为它本身就是一条回写的规律，最能分辨两块地是不是走过同一路回写。

**第五步：配对与对赌。** 研究要找的，是这样的成对土地：g_结构 几乎相同（今天的读数、土类、微生物组成都落在很近的范围里），而 g 不同——有的对子共享很多代回写，有的对子几乎不共享。本书的预测是：在 g_结构 相同的对子里，g 越高，d 越高；规律在共享回写多的两块地之间搬得动，在共享回写少的两块地之间搬不动，哪怕两块地今天测出来一模一样。

把这几样东西放在一张表里，便于看清各自分工：

| 量 | 测什么 | 从哪里来 | 什么时候测 |
|---|---|---|---|
| g | 两块地在回写家谱上的共同祖先深度（只算血缘深度） | 农户记忆、村账、分家单、航拍、土层里的痕迹 | 最先测，测的人不看任何收成 |
| g_结构 | 两块地今天的静态相似度 | 土壤测试、分类归属、团粒与微生物测量 | 与 g 分开测 |

| 量 | 测什么 | 从哪里来 | 什么时候测 |
|---|---|---|---|
| d | 一条种植规律从甲地搬到乙地后还成立几成 | 在乙地照原样重做、比较效果 | 最后测，测的人不看 g |

这个设计里有几处容易出错的地方，要事先堵住。

其一，**记忆会被收成改写**。一个农民如果知道哪块地收成不好，回忆它的来历时，容易往"那块地本来就有毛病"上靠。所以问家谱要放在测 d 之前，而且问的人不告诉他这项研究要比什么。能对上村账、航拍的，以对上的为准；对不上的标成"只凭口述"，单独分析。

其二，**g 不能偷偷含进 g_结构**。如果今天的读数已经把来历全部记下了——比如稻田史在今天就表现为一层测得出的犁底层——那这一部分应当算进 g_结构，而不是 g。本书的预测要站得住，必须是在把今天测得出的东西都算进 g_结构 之后，g 还多出一截。

其三，**"规律"要事先写死**。搬过去的那条规律，必须在测 d 之前就用一句话写定：什么品种、什么时节、什么做法、看什么指标。不能等乙地收成出来后再去挑一条"恰好搬得动"或"恰好搬不动"的规律。

其四，**地块要多、地区要多**。一对地只是一个故事，说明不了什么。欧阳伯的两块地只是讲道理用的主例，真要检验，得有许多对、许多村、许多种土。

这一套设计有一个朴素的地方，也正是它和第 10、11 章不同的地方：土壤的 g 计数的不是人的练习，也不是细胞的分化，而是**土地自己挨过的那一串事**——种过什么、翻过几回、施过什么、什么时候被一分为二。土最老实，挨过什么就留下什么；可土也最沉默，留下的东西不按顺序排，要人来替它把顺序排出来。

设计写到这里，下一个问题自然就来了：土壤学里早有人在讲"来历"，讲"时间"，讲"上一季作物对下一季的影响"。他们的说法和这里的 g 有什么不同？本书凭什么认为自己多走了一步？下一节和最近的邻居对赌。

## ◆ 12.4　与最近邻居对赌

曾晓岚家阳台上有十几盆花。去年她把一盆养了好几年的茉莉换了盆，旧土没舍得扔，倒在一个空盆里种了一棵小番茄；另一个空盆装的是刚从花店买回来的新营养土。两盆放在一起，同一天浇水，同一天晒太阳。小番茄在旧土里长得慢，叶子发黄；在新土里长得快。她拿了一个便宜的测试笔插进去，两盆的酸碱读数都偏酸，差不多。（这也是一个构想的场景。）

她打电话问欧阳伯，欧阳伯说："茉莉的土养了几年，是茉莉的土了，你种番茄，番茄不认它。"

这句土话，其实已经站到了土壤学一位很近的邻居门口。下面依次和几位邻居交手，先说足他们的好，再说清本书多走在哪里。

**第一位邻居：成土因素与"时间"。**　土壤学里有一个经典的说法：一块土长成什么样，由几样东西一起决定——气候、生物、地形、母质，再加上时间〔待核：詹尼成土因素方程的具体表述与年代〕。这个说法很了不起，它早早承认了土不是天生的，是慢慢"成"出来的，而且把"时间"明明白白放进了公式。从这一点看，它离发生学很近。

它停在哪里？它的"时间"主要是一个长度：这块土成了多少年。两块土，成土一百年和成土一千年，被看作在"时间"这一项上不同。可是"一百年"里种过什么、翻过几回、哪一年被分成两块，这一串次序和分叉，并没有成为单独的一个量。本书的 g 不是"年龄"，是"共同的家谱有多深"：两块成土年龄完全一样的地，可以 g 很高（曾是一块田），也可以 g 很低（各走各的回写路）。

**第二位邻居：植物—土壤反馈与"遗留效应"。**　这一位比第一位还近。生态学里有一批研究专门看：一种植物长在一块土上，会把土里的微生物、养分"调成"适合或不适合它自己的样子，下一种植物长上来时，就受到上一种植物留下的影响〔待核：植物—土壤反馈研究的代表学者与基本结论，如 Bever 等人的工作〕。农民说的"连作障碍"——同一块地年年种同一种作物，病越来越多、收成越来越差——以及"换茬""轮作"的老经验，都在这一路上。曾晓岚那盆"茉莉的土"，正是一个遗留效应的例子。

这位邻居已经承认了**历史会改变土**，这一点必须如实说，不能写成稻草人。它停在哪里？它通常把历史的作用看成"历史留下了今天的某种状态"——今天土里的微生物群落是什么样，今天某种病菌多不多——然后用今天的状态去解释下一季的收成。也就是说，历史一旦留下状态，就可以退场；把今天的状态测全了，历史就没有多余的话可说。

这正是本书要和它对赌的地方。

**对赌的题目**：把两块地今天能测的都测全——养分、质地、团粒、微生物群落组成，统统算进 g_结构。在 g_结构 相同的对子里，回写家谱的共享深度 g，还能不能预测一条种植规律搬过去还成立几成（d）？

邻居们的预测是一致的：不能。成土因素说会说，年龄一样、因素一样，土就一样；遗留效应说会说，历史已经全写进今天的微生物里了，测全了今天，历史就没有余量；分层模型会说，同村同乡就更像，与家谱无关；统一的分类和肥力模型更会说，读数一样就一样。

本书的预测是：能。因为土里的连接和次序，有一部分不在任何一样单独测得出的东西里，而在"这些东西以什么先后、什么方式连起来"里；而这种先后和连法，是一代代回写沉淀下来的，同一条回写路走出来的两块地，连法更像，规律就更搬得动。

**什么样的结果会让本书输**：如果在许多对、许多地区的土地上，把今天能测的都测全以后，g 和 d 之间看不出任何关系——共享家谱深的对子，规律也不比共享浅的对子更搬得动——那么本书在土壤上的承重命题就错了，土壤的同一性就只是今天状态的相似，用不着谱系。这一条要写在明处。

**第三位邻居：分层模型。** 12.1 里提到的"地块效应"，在更讲究的统计里会被做成分层：地块套在村里，村套在县里，同一个村的地被认为比不同村的地更像，像的程度由数据估出来〔待核：农业试验中多层随机效应模型的通行做法〕。这一位邻居已经承认"同"有程度，而且程度是一层套一层排出来的，离本书的谱系很近。

它停在哪里？它的层是事先按地理和行政划好的：村、乡、县。层与层之间的"像"，估的是作物产量这类参数在各层的波动，并不问两块地在回写的家谱上从哪一代分开。沟东和苗圃地分属两个村，在分层模型里它们隔得远；在家谱上它们很

亲。本书把这个"像"的依据，从地图上的远近换成家谱上的深浅，并主张在今天读数相同的条件下，后者还能说出前者说不出的东西。生物学里用系统发育树来校正物种之间的相似（第 6 章），做的正是"按家谱算像不像"这件事，只是它算的是生物的性状；本书想把它搬到土地的场结构上来。

**第四位邻居：普适类。** 这一位要提一句。物理里有一种现象，许多看上去完全不同的系统，在临界点附近表现出同样的规律，决定它们归不归同一类的，不是表面上像不像，而是内部的连接方式（第 6 章）。普适类在这里不是对手，是证人：它说明"同一性由连接方式决定、而不是由表面读数决定"这件事，在最硬的科学里也是成立的。本书只是再往前推一步：在土壤这样的回写之物上，连接方式是由回写史一代代沉淀的。

这场对赌里，有一个邻居最可能使出的招数，要先摆到桌面上：**"你只是还没测全。"** 遗留效应一派可以说，g 之所以还能多说一截，是因为今天的测量还漏了什么——某一类没测到的微生物、某一种没测到的有机分子、土层里某一处没取样的细节。等测量再精一些，g 的那一截自然会被今天的状态吃掉。

这一招不能当没看见，也不能被它拖进无底洞。本书的应对有两条。

第一，g_结构 的测量清单在研究开始前写死，写进去的是当时能做到的最全的测量。对赌只在这张清单上赌：清单上的都测了，g 还多不多说一截。

第二，如果后来真有一项新测量把 g 的那一截吃掉了，本书算输一半，但输得有内容：那就说明，在那项新测量出现之前，土的回写家谱一直替人记着一样今天读数里看不见的东西，而且家谱先于那项测量就把它分出来了。这时候，家谱就成了一张"该去找什么"的寻宝图——它指出哪些地之间藏着还没被测量认出来的连接与先后。这样的输，也比"读数一样就一样"多走了一步。

还有一种可能要如实写出来：g 只对某一类规律有用（比如只对次序类），对配方类没用。那本书在土壤上的命题就要收窄，只对回写性强的规律成立。这本身就是一个"反面果子"，它会逼着本书在土壤这一支里另立一个更窄的说法，按本书自己的规矩，这一支也要进派生树。

回到曾晓岚的阳台。那一盆"茉莉的土"和新营养土，读数差不多，番茄的长势却不一样。这一个例子什么也证明不了——它既可以用遗留效应解释（茉莉留下了某

种微生物），也可以用本书的说法解释（回写家谱不同）。正因为单个例子分不出谁对，才需要上一节那样配对、控制、对赌的设计。

可是，谁来画这么多块地的家谱，谁来测这么多对地的 d？一个农技员画不完，一台机器也画不出来。下一节讲分工。

## ◆ 12.5　复合主体分工与验证

秋天，曾晓岚的表弟林知远回娄底过节。他在外地做形式化证明，对种地一窍不通，可手机里装了一个用 AI 给土壤配肥的小程序：拍一张土的照片，填几项测试读数，程序就给出这块地该施什么肥、施多少。

他兴冲冲地拿着手机去了欧阳伯的菜地，给两块地各拍了照、填了农技站那两张单子上的读数。程序给出的建议，两块地一模一样。（这是一个构想的场景，文中的程序也是构想的，不指任何真实产品。）

欧阳伯看了一眼，笑了："它不晓得沟西那块种过十几年稻子。"

这一句话，把本书第 8 章讲的事情搬到了土里。

**AI 撞果子。** 那个配肥程序做的，是在一种场结构里推导：它把天下的土都放进同一套读数、同一张分类表、同一条肥力曲线里，从读数推出建议。这件事它做得又快又多，一天能给几十万块地出建议，比任何一个农技员都勤快。它推出来的建议，有的落在家谱和读数都相近的地上，照样成立，这是同向的果子；有的落在读数相同而家谱很远的地上，建议照做了，收成却对不上——这就是土壤上的**反面果子**：它逼着人收窄"读数一样，施肥就一样"这条规律的适用范围。

按本书的判据（第 7 章），反面果子要算数，还得多一步：收窄之后的规律，要另立一支场结构才能继续推导。在土里，这一步的样子是：不再把"稻田改旱地"的那一类地塞进普通旱地的配肥公式里加一条修正，而是承认它们是回写家谱上另外一支，这一支里氮、水、细菌、根之间的连法和先后不同，要在这一支里重新积累规律。这一支一旦立起来，就进了派生树，改变了它和其他地之间的 g 的算法。

**人织谱。** 程序撞出了反面果子，可它说不出"为什么在这里对不上"，因为家谱不在它的读数里。这时候就需要另一群人。欧阳伯这样的老农，记得每块地的来历；谭一禾这样的年轻人，肯坐下来把来历一页页记成家谱；村里管账的人，手里

有分田、分家的老单子；农技员会测今天的读数，也认得土层里那些旧日回写留下的痕迹；做数据的人，能把成千上万本"土的家谱"整理成一棵可以计数的派生树。这一群人和那个程序合在一起，才是土壤数学的生成者——本书叫它复合主体。

这里要特别提醒：不是"AI 来测土、人来种地"那样一边一半，而是回写的每一代都由人与机器一起写成。程序撞出一个对不上的地方，人回去问家谱，发现这块地有一段特别的来历；家谱补进去，派生树多了一个分叉；程序在新分出的这一支里再推导，又撞出下一个对不上的地方。这样一圈一圈，土壤的场谱系才一层层显露出来。

把这一圈放进第 8 章的五步闭环里看，土壤上的样子是这样的：程序在一种场结构里给几十万块地出建议（一种结构内推导）；在稻田改旱地那类地上一再对不上（撞果子）；人回去补家谱，认出这是家谱上另外一支，把它从普通旱地里分出来（回写成分叉）；程序在这新的一支里重新学、重新推（支内推导）；在这一支里又碰到新的对不上，比如稻田改旱地以后种果树的那几块，和种菜的那几块又不一样（新果子）。每走一圈，土壤的家谱就多画清一枝。

在这个闭环里，欧阳伯的身份也悄悄变了。过去他是一个"种地凭经验"的老农，经验被看作说不清、教不了的土办法。在织谱的眼光下，他手里握着的恰恰是程序最缺的东西：每块地的回写次序。他不必学会编程，就像第 8 章里开车用导航的人不必会造导航；他要做的是在导航说"直走"的时候，知道这条路去年修过、今年下面是空的。本书把这种人叫作织谱者。

**验证怎么做。** 这一节的验证要守三条。

第一，**先家谱，后收成。**家谱在测 d 之前记，记的人和测收成的人分开，互相不通气。

第二，**反面果子要留底。**程序每一次"对不上"，都要和那块地的家谱一起存下来，而不是改一下参数就抹掉。抹掉了，就是第 5 章说的"轮回"：顶撞一次次冒头、一次次被压回去，起点一直没变。用三原理来说，读数给出的预测和这块地的家谱顶上了，这一顶本来该推动配肥的路子分出一支、再回写进派生树；参数一改了事，等于把顶撞压下去，回写没有留下来。这一点和书中九格里那个至今没有发生的格子有关——保留谱系冗余：今天的做法习惯把对不上的地当作噪声去掉，让模

型更"统一"；要等到有人发现那些被去掉的对不上，恰恰排成了家谱上的几支，这个格子才会发生。

第三，**不拿读数去评人**。这套办法只用来看土怎样回写、规律能搬多远，不拿去给哪个农户、哪个村打分排名，也不替任何地方定施肥的政策。

分工里还有一件事要说透：人和程序谁也离不开谁。离开程序，欧阳伯的经验只能管住他自己这两块地，管不了十几里外的苗圃地，更比不出成千上万对地里谁和谁更亲；离开欧阳伯这样的人，程序只能在今天的读数里打转，撞出的反面果子没人认领，撞一次丢一次。复合主体不是两样东西放在一起，而是程序撞出的每一个对不上，都要人的家谱来接住；人补进的每一段家谱，都要程序在新的一支里推下去，才算没有白补。

这套分工落到一个村，样子可以很朴素。这是一个构想的场景：村里每户把自家几块地的来历讲给一个年轻人听，年轻人照谭一禾那个本子的格式记下来；记好的家谱交给会整理数据的人，拼成一棵全村的回写派生树；配肥程序照旧出建议，但每一条建议旁边多挂一行"这块地在家谱上和哪几块最亲"；第二年收成出来，对得上的、对不上的都存档，对不上的那几块，再回去找老人问一遍有没有漏掉的来历。这里头没有一项是高科技，难的只是"不把对不上的当噪声删掉"这一个念头。

有了这个念头，老人口里那些"这块地以前是塘""那块地分家时吵过架、荒了三年"之类的闲话，就不再是闲话，而是家谱上的一个节点。土壤学里常说的"因地制宜"，在这里也换了一层意思：不只是按今天这块地的读数去配，而是按这块地在家谱上站在哪一支去配。同一支里的经验，可以放心地搬；隔了好几代分叉的，就要先小块试一试。

最后，本章要守住一个分寸：上面说的"土壤的数学"，此刻还只是一个研究设计和一组对赌的预测。它可能在土壤上站住，也可能被测全了的今天状态吃掉。可无论输赢，它都让一件事变得清楚：土壤是最容易被回写、最容易沉淀、最不容易抹掉的东西，如果数学要从一种场结构走向场结构的谱系，土壤是最好、也最早可以下手的田。欧阳伯那两块地，同一包种子、同一双手、两样收成，问的就是这件事。

下一章离开田地，回到数学家自己的工具：形式系统。土里要画的家谱，在 Mathlib 那样的形式库里，是否也画得出来？

**带 走 的 话**

1. **两块地今天测出来一样，不等于它们是同一种土；它们各自种过什么、翻过几回、施过什么，可能走的是两条不同的回写路。**
2. **土壤是看"场结构由回写堆成"最好的地方：一块土长期长着什么，它里头的连接和先后就被写成那一路的样子。**
3. **土壤的 g 只从血缘上数：两块地曾是同一块土、分开前一起走过的回写，今天两边都还保有多少；不相连却走过同一路的，是收敛的历史，不算共同祖先。数的时候不看收成。**
4. **和"遗留效应"对赌的那一点是：把今天能测的都测全以后，家谱是否还多说出一截；说不出，本书在土壤上就输了。**
5. **AI 配肥撞出对不上的地方，人回去补家谱、立新的一支；这一圈圈回写，就是土壤数学的发生。**

**小　账**

**本章切开的差异：**今天读数的相似（静态结构亲缘）与回写家谱的共享（历史亲缘）——两块地可以前者相同、后者不同。

**本章的场谱系读数：**统一的分类和通用肥力模型把土当作一种场结构；本章主张土的场结构按回写家谱成谱系，回写落在种过什么、翻过几回、施过什么、何时被一分为二。

◆

13

第 13 章

# 形式系统的谱系：写给陶哲轩的技术篇

> **这一章的问题**
>
> 今天最好的形式化工具，Mathlib 也好，方程理论项目也好，测的都是"对不对""推不推得出"。如果数学之场真有亲缘的程度，形式系统要怎样改，才能连谱系一起验?

上一章在土里画家谱，最后留下一个问题：土里要画的家谱，在 Mathlib 那样的形式库里，是否也画得出来？第 9 章已经给过一个研究设计，说怎样从库的历史里数 g。这一章换一个角度：不是拿库来做一次实验，而是问库本身要长成什么样子，才能天天记下这份家谱、天天拿它来验东西。这一章是写给陶哲轩和做形式化的同行的，技术细节会多一些，但主讲的仍然是日常的事。

## ◆ 13.1　Mathlib 与方程理论项目：一种场结构内的二值测绘

曾晓岚接手一个新班，开学第二周，她做了一件小事。她想知道这四十五个孩子里谁跟谁熟，好排座位、分小组。她给每个孩子发了一张纸，让他们写下"这学期之前就认识的同学"。收上来，她在电脑上做了一张大表：横着四十五个名字，竖着四十五个名字，两个人认识就在交叉的格子里打个勾，不认识就空着。四十五乘四十五，两千多个格子，一个周末填完。

这张表很有用。哪几个孩子谁都不认识，一眼就看出来了；哪几个孩子勾连成一团，也一眼就看出来了。她照着这张表，把互不认识的孩子插进几个熟人圈里，第一个月班里就没有落单的。

可是用到第二个月，她发现这张表有一样东西答不上来。表上，小陈和小李之间打了勾，小陈和小王之间也打了勾。两个勾长得一模一样。可小陈和小李是从幼儿园一路同班上来的，两家大人周末一起去钓鱼；小陈和小王，只是小学五年级在

同一个兴趣班坐过一学期。同样一个勾，一个背后是十年，一个背后是一学期。晓岚想让小陈去带一带新来的转学生，该找小李配合，还是找小王配合？表上看不出来。

这张表，是一张二值的表：每一格只有"认识"和"不认识"两种答案。它把一个班里人和人之间的连法，一格一格测清楚了。它测得很全，也测得很准。它只是不记来路。

现在把目光转到数学。

## 一 方程理论项目做了什么

2024 年秋天，陶哲轩发起了一个网上合作项目，叫方程理论项目（以下项目数据均据项目论文 arXiv　2512.07087）。它研究的对象叫"岩浆"，这是数学里最朴素的一种代数结构：一个集合，加一种把两个元素合成一个元素的运算，别的什么规定都没有。在这样一个光秃秃的东西上，可以写下各种各样的等式律，比如"任何元素和自己运算，还得自己"，比如"先算前两个再算第三个，等于先算后两个"（那就是结合律）。

项目挑出了最简单的 4694 条等式律，问一个看起来笨拙、做起来浩大的问题：这 4694 条里，任取两条，前一条能不能推出后一条？两两配对，去掉自己推自己，大约是两千二百万对。2025 年 4 月，主要目标完成了：每一对都判了"能推出"或"推不出"，并且都在 Lean 里过了机器检查。只把问题限在有限的岩浆上时，还剩极个别配对没有定论，论文如实列了出来。

这件事做成，靠的是人和机器缠在一起。论文署名的有三十多位，参与讨论的人更多；再加上自动定理证明器、在小的有限代数里搜反例的程序、人想出来的各种构造，最后统统交给 Lean 检查。"甲推出乙、乙推出丙，所以甲推出丙"这种传递，也帮着省下了不少活。可就算这样，论文也说，这是一件离不开大量自动化的活，两千多万对，光靠人一对对去证是做不完的。

这就是晓岚那张大表，只是大了一万倍：横着 4694 条律，竖着 4694 条律，每一格写上"能推出"或"推不出"。它是迄今为止人和机器合作、在一块数学地里做得最彻底的一次测绘。

## — Mathlib 做了什么

Mathlib 做的是另一件事，但骨子里是同一种测法。

它是 Lean 上的一个大型数学库，由全世界的志愿者一条一条往里写定义、写定理、写证明。每一条定理进库，都要过 Lean 的检查：过了就是过了，不过就是不过。库里的代数结构搭成一棵继承的大树，群在幺半群上面，环在群和幺半群上面，一层层往上。一条在群里证过的定理，在一切群上都能直接用；在一切环里，它的加法那一半也能直接用。这棵树让成千上万条定理可以层层复用，是库最了不起的设计之一。

这棵树也不是一次搭成的。库的层级设计说明里写着一条门槛：只有当一个新的类真有数学可做，或者把一个公共部分拎出来能明显简化事情时，才加这个类（据 Mathlib 文档 Algebra.HierarchyDesign）。换句话说，树上每一层，都是有人在证明里碰了壁、嫌重复、回头改出来的。库其实天天在回写，只是回写的来由留在提交记录和讨论里，树上只看得见改完的样子。

可是，库问每一条定理的问题，只有一个：在它写明的那个结构里，它对不对。答案是二值的。

## — 二值测绘测到了什么，没测到什么

把两件事放在一起看。

它们都在一种场结构里干活。方程理论项目里，岩浆就是那一种结构，4694 条律都是在同一个底座上写的，每一对之间的问题都是"在这个底座上，能不能推"。Mathlib 里，所有的结构都挂在同一套基础和同一棵继承树上，每一条定理都问"在这棵树的这个位置上，对不对"。

它们都测得极好。两千二百万个"能不能"，一个都不差；成千上万条定理，每一条都经得起机器的检查。陶哲轩说过，2023 年他就预言过，到 2026 年，AI 会成为数学研究中可信的合著者；2026 年初他认为这几乎如期实现了。这份"可信"，地基就是这种二值检查：不管证明是谁写的、是怎么写的，Lean 说过就是过。

可它们都不记来路。

方程理论项目的大表告诉你：律甲推得出律乙，律甲也推得出律丙。两个"能推出"长得一模一样。可是，律甲推出律乙，可能是一步就到；推出律丙，可能要绕过

十几条中间律、动用一个费了几个月才找到的构造。前者像小陈和小李，后者像小陈和小王。表上是同一个勾。项目论文里也画了图，把某一条律能推出的那一串律，画成上下分层的样子（数学上叫哈斯图）——这已经往"远近"那边走了一步。可图上的远近，是今天这张表里推理链的长短，不是这些律在数学史上一回回被改出来的家谱。

Mathlib 也是这样。今天的继承树告诉你：环在群的上面。它不告诉你：环这一层，当初是怎么从哪一处拆出来、为了哪一批证明证不顺而重写过几回。第 9 章说过，今天的继承树是一张截面。截面上两处挨得近，不等于它们的来路近。

这里要替二值测绘说一句最强的话，免得把它写成稻草人。懂行的人会说：方程理论项目的大表，其实已经有程度了。两条律之间，推理链短的，就是近；推理链长的，就是远；整张表画成上下层次以后，谁在谁上面几层，一目了然。这不就是你要的"隔几代"吗？

这个说法有一半是对的。推理链的长短，确实是一种远近，而且是很有用的一种。可是它量的，是今天这张表里，从一条律走到另一条律要走几步。它和第 9 章说的 g_结构 是一路的：看的是此刻的连接方式，不问这些律是怎样一回回被人写出来、改出来的。打个比方，晓岚班上的孩子，可以按"谁通过谁认识谁"排出几层：小陈认识小李，小李认识小赵，那小陈和小赵就隔一层。这也是远近。可它说的是此刻这张关系网里的远近，不是小陈和小赵各自是怎样一路走到这个班上来的。本书要补的那一栏，是后一种。两种远近都要有，而且要分开记，第 9 章那场对赌，正是要看后一种在前一种之外还管不管用。

还有一点也要承认：岩浆上的 4694 条律，是按长短一次挑出来的，它们本来就没有什么"一回回改出来"的家谱可言。在这一块地上，二值测绘加推理链，大概已经是能做的全部。来路这一栏，要等到测绘的对象换成那些真有历史的结构——群、环、模，它们在 Mathlib 里一层层被拆、被并、被重写——才有东西可填。

所以，这不是二值测绘的毛病。晓岚那张表，本来就是为了排座位、不让人落单而做的，它把这件事做好了。方程理论项目和 Mathlib，本来就是为了在一种场结构里把真假测清楚而做的，它们也把这件事做好了。本书要说的只是：这件事做好了，下一件事才露出来。在一种场结构里，二值测绘可以测到头；可是数学之场

若不止一种结构，而是成了谱系，那么在谱系上，光有"能不能"不够，还要有"隔几代"。

用本书的眼光再说一遍：二值测绘把一种场结构里的连接（谁能推出谁）测成了一张完整的网；它还没有测的，是这张网和别的网之间、这张网的这一片和那一片之间，是沿着什么样的回写历史分开的。第 8 章说，今天人机合作的五步闭环里，前两步——AI 在一种结构里推导、撞出果子——已经转得飞快；方程理论项目和 Mathlib 正是让这两步转得又快又准的底座。第三步——把果子回写成分叉——要用到的，正是这份还没有测的东西。

晓岚后来没有扔掉那张表。她在表的旁边又开了一栏，在每个勾后面补一个小字：幼、小、兴，分别表示"幼儿园起""小学起""兴趣班认识"。表还是那张表，勾还是那些勾，只是每一个勾有了来路。这一栏补上以后，她再找人配合，就知道该找谁了。

形式系统要补的，也是这样一栏。可是数学里这一栏怎么补，补了以后谁来查？铁路上有一段老历史，正好讲的就是这件事。

## ◆ 13.2　从二值验证到谱系验证：像高铁安全系统那样建检查系统

罗奶奶去长沙看病，坐的是高铁。这是一个构想的场景。车开出娄底南没多久，在一片田野中间慢下来，停了。窗外什么也没有，铁轨直直地伸向远处，看不见前面有车。过了三四分钟，广播里说：前方区间有列车占用，本车临时停车，请旅客耐心等候。

罗奶奶转头问坐在旁边的外孙女一禾：前面路明明空着，为什么要停？

一禾也说不清。后来她回家查了一下，才知道这是铁路上一条一百多年的老规矩：铁轨被分成一段一段的"区间"，一个区间里同一时刻只许有一列车。前面那列车还没走出下一个区间，后面这列就不许进去，哪怕从窗口看过去路是空的。司机眼睛看见的空，不算数；信号说空，才算数。

这条规矩，有它的来路。

## — 1889 年的阿马

1889 年 6 月 12 日，在今天北爱尔兰的阿马附近，一列满载主日学校师生的游览列车，爬一段长坡时爬不动了。乘务人员决定把列车拆成两截，先拉前一截上坡，后一截留在坡上。后一截车厢的刹车不够用，车厢顺着坡往回溜，撞上了后面开来的一列客车。八十人死亡，约二百六十人受伤，其中很多是孩子（据维基百科 Armagh rail disaster 条所引的公开记述）。

那列车的刹车，虽然一根管子贯通全车，却不是"自动"的那种：车厢一旦和车头分开，刹车不会自己抱死。两截车厢在坡上分了家，刹车的那一份"连着"也就断了。当时的铁路监管部门早就主张用自动的连续制动，只是还没有成为必须照办的规矩。

事故后不到两个月，英国议会通过了《1889 年铁路管理法》（Regulation of Railways Act 1889），授权主管部门要求客运铁路采用三样东西：闭塞信号、连续自动制动，以及道岔和信号之间的联锁。

这三样东西，值得一样一样细看，因为它们恰好是本书说的场的三件事。

**闭塞信号，管的是连接。** 一个区间里有没有车，是一格一格测的，每一格只有"占用"和"空闲"两个答案。罗奶奶车窗外那三四分钟，就是这一格答了"占用"。这是二值的。它把整条线路上"哪一段和哪一列车连着"测得清清楚楚。

**联锁，管的是次序。** 道岔没扳到位，信号就不许开；信号开了，道岔就扳不动。不是"道岔对不对""信号对不对"分开各查一遍，而是规定了它们之间的先后：先有这个，才许有那个。错了先后，两样单独看都对，合起来就出事。

**连续自动制动，管的是结构。** 它不查哪一节车厢的刹车好不好，它查的是一整列车作为一个整体连没连着：刹车管从车头一路连到车尾，哪里一断，整列车的刹车自己就抱死。阿马那一天缺的，正是这一样：车厢分了家，没有任何东西知道它们分了家。

一百多年来，铁路安全系统就是这样一回回长出来的：出一回事，查清楚是哪一处"连接""次序""结构"漏了，回头改规矩，改过的规矩成了后面所有列车的起点。今天的高铁信号系统，背后是一部长长的事故史。事故史不是一份背在身上的包袱，它是这套系统的家谱。

## — 作者的看法：检查系统，而不是签名

本书作者认为，数学家不该签名反对 AI 交果子不交过程。只交果子不交过程，是 AI 往后要发展、也一定会发展的东西；就像高铁的安全，不是靠旅客联名反对列车开快，而是靠一套系统来检查。作者还认为，数学家应当主动参与 AI-数学，去建各种形式系统。第 14 章会从陶哲轩能做什么、公司能做什么的角度讲这件事；这一节只讲技术上的一层：这套检查系统，要查什么。

先说已经有的那一层。

Lean 的检查，就是数学的闭塞信号。一个证明，每一步过没过，是一格一格查的，每一格只有过和不过。它不管证明是人写的还是机器写的，不管写得漂不漂亮，只管这一步和上一步连没连上。Navier–Stokes 那份由 AI 做出的证明，按陶哲轩的转述，有约 165 页、跑了 88 小时，带着 Lean 证书。这就是说，它在闭塞信号这一层，是全绿的。

可是陶哲轩也说，没有一位专家真正理解整个论证。全绿的信号，没有让人放心。

为什么？用阿马的故事来看就明白了。闭塞信号只能告诉你：这一段有没有车。它告诉不了你：这列车的车厢是不是连着的，这一段和下一段之间的道岔扳到了哪一边。一个证明每一步都过了，也只说明每一步和上一步连着；它说明不了这整个论证落在数学的哪一支，用了哪一支的默认，和我们熟悉的那几支隔着几代。论证一长，人就像站在一列看不见车尾的长车旁边：每一节车厢都检过了，可这列车到底挂在哪条线上，看不出来。

## — 谱系验证要多查的两样

所以，从二值验证走到谱系验证，要在闭塞信号之外，再补两样东西。借联锁和连续制动打个比方（只是比方，不另立名目），这两样东西大致是这个样子。

**像联锁那样，查次序：一个结果用到的东西，是在哪一支、按什么先后用的。**一条规律从一种结构搬到另一种结构，像列车从一条线转到另一条线，中间要过道岔。今天的形式库里，这个转线常常是不出声的：一条引理在甲结构里证过，库里有一条桥，把乙看成甲的一种，引理就自动用到了乙上。大多数时候这没问题。可要是这座桥本身是后来回写出来的，甲和乙在来路上早就分了家，那么这一次转线

就该亮一盏灯：你跨了支。联锁要做的，不是禁止转线，而是让每一次跨支都被记下来、被看见。

**像连续制动那样，查结构：整个论证作为一个整体，连在谱系的哪一处。** 一个长证明，用到了几十条引理，这几十条引理各自挂在谱系的哪一支？如果它们大多来自同一支，这个论证在谱系上是"连着的"；如果它一会儿借这一支、一会儿借那一支，而这几支在家谱上隔得很远，那么这个论证就像一列由几种不同轨距的车厢拼起来的车。每一节单独检过都没事，拼在一起，哪一处一断，就没有东西知道。这一样要做的，是给整个论证算一算它跨了多远：用到的那几支，彼此在家谱上隔得最远的是多远。跨得太远，超过某个门槛，就自动"抱闸"，请人来看。

注意，这两样都不改二值检查本身。Lean 的内核仍然只说过和不过，一步也不让。谱系验证是加在这一层上面的另一层，就像连续制动没有取代闭塞信号，是和它一起用。数学家常担心：说"真有程度"，会不会把数学的严格弄松了？不会。单条定理在它自己的支里，对就是对。谱系验证查的，是这些对的东西挂在哪里、隔着几代、跨了几支。

## — 为什么今天会走到这一步

铁路的那三样东西，不是哪位工程师坐在桌前想出来的。阿马之前，英国铁路已经出过不少事，监管部门也早就主张自动制动，可是一直没有成为必须照办的规矩。列车越开越多、越开越快（这一头在往前冲），线路和车辆的那一套老配合却跟不上（那一头没有变）——两头之间的顶撞，一回回事故在积累。积累到阿马那一天，八十条人命把这份顶撞推到了头，规矩一下子变了形。变了形的规矩，又回头改写了此后每一列车出站的起点。

数学今天站在相似的地方。AI 撞出的果子越来越多、越来越快，一次就是七百多道题；共同体消化这些果子的路数，却还是按一种场结构来的：对不对、谁先做出来。果子和消化的路数相顶，顶撞正在积累：读不过来的证明，被抹掉的年轻人的课题，"有毒废料"和"处理过的废料"之间的改口。本书的看法是：这份顶撞推动的，是数学之场本身——从一种结构走向结构的谱系。检查系统从二值走向谱系，是这一推在形式系统上落下的那一处。推成了，新的检查规矩回头改写此后每一个果子落地的起点；推不成，七百道题之后还有七千道，每一回都只被当成废料清掉，就是轮回。

这个看法也可能是错的。如果有一天，二值检查加上更好的论文写作规范，就让专家对 AI 的长证明重新放了心，谁也不需要知道它挂在哪一支、跨了多远，那么谱系验证就是多余的，本书在这一节的判断就错了。

### — 检查系统自己也要有家谱

还有一点，是阿马的故事教给我们的最后一件事。

铁路的检查系统，不是一次设计好的。它是一回回事故回写出来的。数学的谱系验证也一样，不会有人一次就把门槛、灯、闸都设计对。设计里要留一个口子：每一次谱系验证"亮了灯"而人看过以后说"不用管"，或者"没亮灯"却后来出了问题，都要记下来，回头改门槛。检查系统本身，也要有它自己的回写派生树。

罗奶奶那趟车，停了四分钟又开了。到了长沙，一禾跟她说起这条规矩的来历，她想了一会儿，说：原来是拿人命换来的规矩。

数学里的检查系统，不必拿什么去换，因为它的"事故"不伤人，只是一次次搬不过去的引理、一回回读不懂的证明。这些"事故"今天正大量发生——第 1 章那 722 道题，就是一次涌来的一大批。它们若只被当成废料清掉，就是轮回；若被当成一回回的事故记录，回头改出一套联锁和制动，就是回写。

可是，这套系统里，AI 站在哪里?

## ◆ 13.3　AI 支内推导、支间测 g

罗奶奶的老家在娄底乡下。前年村里要把田里的水渠画进手机地图，好安排放水。这是一个构想的场景。村里的水，几十年来都从上游一座老坝引下来，一条大渠分出几条小渠，小渠再分出更小的沟，一直通到各家田头。这些渠哪年挖的、哪年改的道，从来没有人画成图，全在几位管水的老人脑子里。

村里请了两个在城里上班的年轻人帮忙。两人拿着手机，沿着每一条渠走，边走边打点。哪条沟通哪几丘田、哪个口子朝哪边开，一段段录进去。全村几十条大大小小的渠，两个多礼拜就录完了。录完以后，手机能一键画出任何一条渠往下的所有分枝，清清楚楚。

可是画到最后，卡在了一件事上。村东和村西各有一条渠，都说自己的水是从老坝那条大渠里分出来的。可到底在哪一级分开？两条渠中间有一段早被填平种了

菜，地面上什么也看不出。村东的人说，是在大渠上直接分的两个口子；村西的人说，先分出一条老支渠，老支渠走了一段才又一分为二。

两个年轻人没办法。他们能把每一条渠的走向录得又快又准，可两条渠在地底下哪一级分的家，手机判不了。最后还是请来了几位管水的老人，翻出生产队时期的放水记录，在填平的那段地里挖开一处，找到了半截埋着的石头分水闸，再对上老人小时候跟着大人放水的记忆，才定下来：确有一条老支渠，两条渠是在它上面分开的。那条老支渠，是早年一场大水冲垮了旧渠以后改道挖的。

定下来以后，两个年轻人在地图上把这一处补好。从此，村东和村西任何两丘田，手机都能一下子算出它们的水在哪一级分开、一路共走了几段渠。哪天上游水少，先保哪几丘、后放哪几丘，也有了一个依据。

这一场画水渠，正好是本章要说的分工。第 7 章 7.6 拿族谱讲过"分叉要标在哪一代"；这里要看的是另一半：分叉标好以后，谁来数、怎么数。

### — 支内：AI 的主场

那两个年轻人做的，是"一条渠之内"的活：在已经认定的这一条渠上，照着规矩，一段段往下走、往下录。这件事，量大、规矩清楚、对错分明，正是机器最拿手的。

数学里，"一支之内"就是一种场结构之内：公理定了，连接和次序定了，剩下的是从这里往下推。作者认为，数学的基础公理系统，也就是一种典范，一旦给定，剩下的推导交给 AI，效率是一般科学家的上千倍。First Proof 测评里，十道全新的研究级问题，有七道被至少一支 AI 团队解到可发表的水准，每题算力成本从十美元到一千美元。这是"支内推导"已经达到的样子。当然，也要老实说：陶哲轩估计 AI 在埃尔德什问题上的成功率只有百分之五六，约九成五的重要问题还在 AI 能力之外。千倍是一个趋势，不是今天每一支里都已经如此。可方向是清楚的：在一支之内，机器会越推越快。

### — 支间：要人来定分叉，要 AI 来数代数

两条渠在哪一级分开，这件事分成两半。

前一半，是"定分叉"：被填平的那一段，到底在哪一级分的家。这要翻放水记录、挖开地看、问老人，要懂这一片水的来路。数学里，这就是第 7 章讲的那件事：一颗反面果子落地以后，共同体收窄了某条规律的适用范围，收窄以后是"另立一支"还是"加一条假设"？第 7 章给了几条检验：去掉新条件以后旧推导还能不能照抄，后续推导的先后有没有变，要不要新的概念，在派生树上新结果的后代经不经过旧节点。这几条检验，有的机器能帮着查，比如派生树上的依赖链；有的要懂行的人判断，比如"先后有没有变"在数学上是什么意思。所以定分叉，是人在前面拿主意、AI 在旁边帮着查。

后一半，是"数代数"：分叉一旦定下，任何两丘田的水在哪一级分开、共走了几段，一键就算出来。数学里，这就是 g。g 的定义是两个场结构在回写派生树上的共同祖先深度，沿回写代际计数它们共享的连接、次序、结构，不看任何规律的迁移结果。一旦派生树上每一处分叉都标好了，数 g 是一件机械的活：沿树往回找、比对、计数。这种一条条比对定义与引理来历的活，正是机器又快又准的地方。第 8 章也说过这个意思。

所以，人和 AI 在支间的分工是：人定分叉，AI 数代数。画水渠时，老人定下了"在老支渠上分的家"，年轻人就能在手机上一键算出全村任何两丘田的远近。数学里，人把一颗反面果子判成"这里另立一支"，AI 就能把这一支和库里每一支的 g 全部算出来，填进一张大表。

### — 有了 g，支内推导怎样变

g 算出来，不是放在那里好看的。它会反过来改变 AI 在支内推导的方式。

第一，搬运排队。AI 一夜之间能证出成百上千条新引理。每一条引理，能不能搬到别的支去用？要是每一条都拿到每一支去试一遍，算力再便宜也是白费。有了 g，可以先排个队：亲缘近的支先试，亲缘远的后试，远到某个程度的，先不试，交给人看一看是不是该另立一支。第 5 章已经指出这一层用处的来处。这一节只补一句：这是一种可以被检验的排队法——如果按 g 排队，试搬的成功率并不比随便排队高，那就说明 g 没用，本书的命题在这里就错了。

第二，报警。AI 在一支里推导，有时会不知不觉地借用另一支的东西，因为库里那座"把乙看成甲"的桥是不出声的。有了 g，每一次跨支都可以算出跨了多远。跨得近，照常走；跨得远，亮一盏灯。这盏灯，就是 13.2 里那个像联锁一样的东西。

第三，找反面果子。AI 千倍推导的副产品，是大量"搬不过去"的记录。这些记录，以前被当作失败丢掉。有了 g，它们可以被分成两类：g 高却搬不过去的，和 g 低搬不过去的。后者不稀奇，两支本来就远。前者才是要紧的：按家谱，这两支应当很亲，规律却搬不过去。这正是一颗反面果子可能藏着的地方——某一处默认的连接和次序，到这里不成立了。AI 把这一类挑出来，交给人去判是不是该另立一支。判了，派生树上就多一处分叉，g 跟着更新；更新以后，AI 在新的一支里接着推。

这就是第 8 章说的五步闭环：AI 在一种结构里推导，撞出果子，人把果子回写成分叉，AI 在新的一支里推导，再撞出新果子。今天前两步已经转得飞快，第三步才冒头。g 的作用，是让第三步有一个抓手：不靠运气碰上反面果子，而是按家谱去找"该顺而不顺"的地方。

### — "AI 支内推导"里也站满了人

说"AI 支内推导、人定分叉"，很容易让人以为这是两个独立的角色：一边是机器，一边是人。第 8 章已经说过，没有独立的 AI。画水渠那两个年轻人，看上去是在"用手机打点"，可手机里每一段渠，背后是几代人挖出来、改过道的沟，是管水老人记了几十年的放水规矩，是做地图软件的人定下的格式。手机录得快，是因为这一大片人和物事先都在那里缠好了。

数学里也是这样。AI 在一支里推导得快，是因为这一支的公理、定义、成千上万条已经进库的引理，都是一代代数学家一条条写下来、改过来的；跑在上面的模型，是公司的工程师训出来的；它推导的题目，是某个人挑出来、写成形式语言喂进去的。支内推导，是一个人和机器缠在一起的复合主体在推。支间测 g 也一样：人定分叉，可人定分叉时手里握着 AI 查出来的依赖链；AI 数代数，可它数的那棵树，是人一处一处判出来的。

所以，这一节的分工不是"人这一块、机器那一块"，而是复合主体里两种不同的位置：一个位置靠速度和量，一个位置靠对来路的判断。这两个位置今天都已经有

人在坐。方程理论项目里，自动证明器和搜反例的程序在一张大表上跑，几十位参与者在旁边啃剩下的难配对、把结果写进 Lean。它缺的，只是"来路"那一栏。本书的一个预测是：下一阶段最稳定的人机合作，会出现在用 AI 测绘场谱系的团队里；方程理论项目的二值测绘，是它的前身。

这个预测怎样才算错？如果往后几年，最稳定、最长久的人机合作，出现在那些只在一种结构里抢解名题的团队，而那些试着画谱系的团队一个个散了，那这个预测就错了。

### — 防一种新的单一栽培

最后要说一个风险。陶哲轩警惕过"AI 单一栽培"：大家都用同样的模型、同样的方法，数学的路越走越窄。

谱系验证若做得不好，也会落进同一个坑。如果只有一家公司、一个库、一套算 g 的办法，那么"谱系"就会被做成一种新的统一：所有人都按同一本家谱判远近，家谱本身的偏差没人查得出来。这就像全村只有一张水渠图，画图的人认错了一处分水，全村的放水次序都跟着错，而且没人知道。

所以，支间测 g 这件事，最好不止一家做，不止一种算法，不止一个库。第 9 章的设计里，已经把"换一个库照做一遍"列为待做。放到形式系统的长远建设上，就是：家谱要能并排放几本，彼此对照；哪里对不上，哪里就是要回头查的地方。不同的谱并排放着、彼此对照，本身也是一种回写。

画水渠那件事，后来还有一个小尾巴。画好的图，村里决定不只存一份：村东、村西各存一份，再给镇上的水利站送一份。以后谁发现哪一处画错了，三份一对，就知道是哪一份出了问题。

那么，数学里这几份"家谱"，在形式系统里到底长什么样子？下一节给一个草图。

## ◆ 13.4　程度验证的形式化草图

先说一件家里的事。曾晓岚家的冰箱门上，贴着一张一禾小时候画的身高表：门框边上用铅笔划了一道道横线，每道线旁边写着日期。后来搬了家，这张"门框"没法带走，晓岚就用手机把每道线拍下来，抄进一个表格：哪一天，多高。抄完她发

现，表格丢了一样东西——门框上有几道线旁边，一禾当年用蜡笔歪歪扭扭写了字："生病那周""去外婆家回来"。那是每一次长高或不长高的来由。表格只记了数，来由没地方放。晓岚想了想，在表格最后加了一栏"那一阵发生了什么"，把蜡笔字一条条抄进去。

一份记录，要是只留结果、不留来由，搬一次家就丢一层。形式库也一样：今天的库里，定义和定理都在，可它们是怎么一回回改出来的，散落在提交记录和讨论帖里，没有一栏专门放它。这一节给的，就是这样一栏的草图。

先说清楚：**下面是一个草图，不是一个已经写好、已经跑过的系统。** 它的用处是让做形式化的同行看清楚，本书说的"程度验证"落到形式系统里大概长什么样子，哪些地方是现成的，哪些地方要新建，哪些地方还没想好。数据结构和流程用接近程序的写法给出，名字都是临时起的，不对应任何现有库里的真实名称。

## 一、要多记的三样东西

在今天形式库已有的东西之上——定义、定理、证明、依赖关系、二值的检查——草图只要求多记三样。

**第一样：回写事件。** 每当一个定义被改（拆开、合并、加中间层、换写法、收窄、放宽），记下一条事件：改了哪个定义的哪一版，改成了哪一版，改的是连接、次序还是结构，为什么改（哪一批证明碰了壁、哪一个反例逼的），是数学起因还是工程起因，有没有在后来被撤回。这就是第 9 章 9.2 说的"枝"。

**第二样：分叉判定。** 每当一颗反面果子落地、共同体判定"这里另立一支"，记下一条判定：从哪一版定义分出来，依据第 7 章的哪几条检验，谁判的，判定的状态（已定、待定、后来改判）。这是人来定的那一半。

**第三样：跨支记录。** 每当一条引理通过一座桥被用到另一支上，记下这一次跨支：从哪一支到哪一支，当时算出的 g 是多少，搬运落进了第 9 章说的哪一档（原样成立、小改即成、要另证、不成立，或未决）。这是 d 的原始材料。

## 二、数据结构草图

```
// 草图，非实现。名字均为临时。
定义版本 { 标识, 所属支, 字段签名, 父版本们(可多个) }
回写事件 { 从, 到, 改了{连接|次序|结构}, 起因{数学|工程|两者},
           起因说明, 记录日期, 是否已撤回 } // 撤回者不计为一代
分叉判定 { 分出点, 新支, 四条检验各自 过/不过/未查, 状态{已定|待定|改判}, 判定人们 }
跨支记录 { 引理, 从支, 到支, 翻译表版本, 当时的g, 档位 }
```

这四种记录里，"定义版本"在今天的库里其实已经隐含着——每一次提交都改了某些定义——只是没有被单独拎出来、标上类别和起因。"分叉判定"今天完全没有地方放。"跨支记录"今天也没有：桥是不出声的，用过就过去了。

## 三、算 g 的草图

```
// 草图，非实现。
函数 g(甲, 乙, 截止日):
  树 = 截止日前已记录、未撤回的回写事件连成的派生图
  共同祖先 = 甲、乙在树上往回都能走到的版本
  若 没有共同祖先：返回 0
  返回 从共同祖先一代代传下、甲乙今天都还保有的
       连接、次序、结构条目数（分三类各报一个数）
  // 快速近似：只数共同经历了几代回写；正式对赌不用
```

几条规矩写在函数外面，因为它们比函数本身要紧：

其一，**g 不许读跨支记录。** 函数的输入里只有回写事件，没有任何"哪条引理搬过去成没成"。这是第 5 章、第 9 章反复说的防循环。写进代码里，就是一条权限：算 g 的程序读不到跨支记录那张表。

其二，**g 按截止日封存。** 每算一次 g，把截止日、算法版本、结果一起签名存档。以后拿 d 来对照时，只许用截止日之后的跨支记录。

其三，**祖先节点只增不改。** 一个老定义多年后被改了措辞、换了讲法，在树上记成新长出的一代，不回头涂改原来那个节点；算 g 只认截止日那天已经记录在案的历史。

其四，**趋同不进 g**。　两支各自独立写出了同一个结构，派生图上追不到同一个来源，这份相像不算共享条目，归到静态的结构相似那一边去。

## 四、谱系验证的流程草图

有了这些，13.2 里那两样像联锁、像连续制动的东西，就可以写成一个加在二值检查上面的流程：

```
// 草图，非实现。
过程 谱系验证(证明 P):
  1 二值检查；不过就停。 // 闭塞信号，原样保留
  2 列出 P 用到的引理及各自所在的支。
  3 每一次跨支使用算当时的 g；低于门槛甲，标"远跨"，记入跨支记录。 // 亮灯，不拦
  4 P 用到的各支两两 g 取最小，看 P 跨了多远；低于门槛乙，标"需人看"。 // 抱闸
  5 输出谱系单：主要落在哪一支、跨了哪几支、最远隔几代、哪几处远跨。
```

这个流程有三点要说明。

第一，它不拦任何证明。二值检查过了的证明，谱系验证不会把它判成"错"。它做的只是亮灯和请人看。数学的严格，仍然全由第一步守着。

第二，门槛甲和门槛乙从哪里来？草图不给数。它们要从实际的跨支记录里一回回调出来：亮了灯、人看了说不用管的，门槛可能定严了；没亮灯、后来搬过去才发现不对的，门槛可能定松了。这就是 13.2 末尾说的，检查系统自己也要有家谱。门槛每改一次，也记一条回写事件。

第三，第五步那张谱系单，是给人读的。回到 Navier–Stokes 那份 165 页的证明：如果当时有这样一张单子，陶哲轩手上就不只是一张"全绿"的证书，还有一张图：这份证明主要落在哪一支，从哪几支借了东西，最远隔着几代，哪几处跨得最远。专家不一定因此就读懂了全部，但他至少知道该先读哪几处。这就是从"交了过程"到"交了位置"。

## 五、第一步不必动库

读到这里，做形式化的同行多半会担心：要往库里加这么多栏，评审、维护都要跟着变，谁来干？

其实第一步不必动库。回到晓岚那张身高表：她没有重画门框，只是在表格边上加了一栏。形式库也可以这样起步：库本身一行不改，在库的旁边另开一张"边账"，由一个小组从已有的提交记录和讨论帖里，把过去的改动一条条整理成回写事件，打上连接、次序、结构的标签，标明是数学起因还是工程起因。第 9 章的对赌，用的正是这张边账。对赌赢了，说明这一栏值得进库，再去和库的维护者商量；对赌输了，边账照样是一份"库是怎么长成今天这样的"记录，有人用得上。

这张边账也不是哪一方单独记得出来的。整理提交记录、比对字段签名，机器又快又准；判断一次改动是不是"后面推导碰了壁"，要懂行的人看。所以草图里"判定人"一栏，人与工具都要署上：哪一条是程序粗筛出来的，哪一条是两位标注者一致认定的，哪一条至今还有争议。这份署名本身，就是复合主体的一张分工单。

## — 六、拓扑斯与程度：一个还没想好的地方

第 6 章说过，拓扑斯和 Ω-集给了"程度化的相等"一套严谨的语言，将来要把 g 写进形式系统，很可能要借它。草图到这里只用了最朴素的东西：一个数，从一张图上数出来。能不能把"两支隔几代"写成一个真值对象里的值，让"甲和乙同一到什么程度"本身成为可以在系统里推理的命题？这是一个诱人的方向。

但要小心本书和拓扑斯的分界。在拓扑斯里，真值对象是事先给定的，程度由它统一安排；本书的程度是由回写历史一回回生成的，派生树每多一处分叉，刻度本身就变一次。若要借拓扑斯的语言，就得让那个真值对象随着回写事件一起长——这在数学上意味着什么，草图不敢说，只能列为待做，留给比作者更懂这一行的人。

## — 七、哪些现成，哪些要新建

最后，把草图和今天的东西对一对。

现成的：二值检查，定理之间的依赖关系，库的提交历史，库里的结构继承树，方程理论项目那样的大规模"能不能推出"的表，以及能自动搜证明、搜反例的工具。

要新建的：把提交历史整理成带类别、带起因的回写事件；给分叉判定一个正式的位置；让每一次过桥都留下记录；算 g 的程序和它的封存规矩；谱系验证的流程和它的门槛。

还没想好的：工程起因的改动怎么算；纸上数学的百年历史怎么接进来；几个库的家谱怎么对照；程度能不能写进逻辑本身。

晓岚那张身高表，加了一栏以后，并没有变得更难用，只是多了一个地方放蜡笔字。形式库也一样：二值的那一层一点不动，只是给每一次改动、每一次分叉、每一次过桥，留一栏写"那一阵发生了什么"。这一栏，就是数学之场的家谱。有了它，AI 撞出的每一颗果子，才知道该挂在哪一支上；有了它，陶哲轩和大模型公司，才有了一张不必抢、可以分着干的地图。

下一章，我们就拿着这张地图，去画和解与合作的路线。

**带 走 的 话**

- **方程理论项目和 Mathlib，是人和机器在一种场结构里做得最彻底的二值测绘：每一格只答"能不能""对不对"，测得极好，只是不记来路。**
- **阿马事故后的铁路安全系统，同时管连接（闭塞）、次序（联锁）、结构（连续制动）；数学的检查系统也要在二值检查之上，补上"跨支亮灯"和"跨得太远就抱闸"。**
- **AI 的主场在支内推导；支间要人定分叉、AI 数代数；有了 g，AI 的试搬可以排队，"该顺而不顺"的地方可以被挑出来交给人判反面果子。**
- **程度验证的草图只多记三样：回写事件、分叉判定、跨支记录；算 g 的程序读不到跨支记录，并按截止日封存。**
- **二值检查一点不松；谱系验证不拦证明，只交"位置"。**

**小　账**

**本章切开的差异：**把"验证"切成二值验证（这一步对不对）和谱系验证（这个结果挂在哪一支、跨了多远）；把人机分工切成支内推导与支间测 g。

**本章的场谱系读数：**今天的形式系统仍是一种场结构内的二值测绘，回写散落在提交历史与讨论帖里，没有一栏专门承接；回写应当落进"回写事件、分叉判定、跨支记录"三张表，成为形式库自己的家谱。

◆



终　编

# 和解与合作的路线图

## 编　序

最后一编回答一个朴素的问题：陶哲轩和大模型公司，明天各自可以动手做哪几件事。数学家从签名走向织谱，与公司订分工：公司撞果子，数学家织谱；公司转向场谱系的市场，把反面果子当产品；优先权改按谱系计，走出囚徒困境；再培养先手算、后交机器的织谱者。

14

第 14 章

# 和解与合作的路线图

**这一章的问题**

前面十三章说的都是"为什么"和"是什么"。到了这里，要回答一个更朴素的问题：陶哲轩和大模型公司，明天早上起来，各自可以动手做哪几件事?

## ◆ 14.1　陶哲轩可以做的：从签名到织谱

这是一个构想的场景。

娄底城东有一家开了二十年的老超市。去年秋天，超市装了六台自助收银机，人工收银台从五个减到一个。小区里的老人不高兴了：排队的时候没人搭话，扫错了码没人管，有个老太太一盒鸡蛋被扫了两遍，回家才发现。几位老人凑在一起，写了一封联名信，贴在超市门口，题目叫《请还我们收银员》，签了四十多个名字。

信贴了一个月，超市照旧。自助机一台没撤，反倒又添了两台。

后来事情起了变化，变化是从一位退休的老会计开始的。她没有再签第二封信，而是去找了超市经理，说了三句话：机器我不反对，可扫错了没人发现，这是漏洞；你们缺的不是收银员，是一个查账的口子；我可以帮你们设计这个口子。她在自助机旁边设了一张小桌子，每隔一阵随手抽一位顾客的小票，当场核一遍；又让机器在识别出同一件商品被连扫两次时自己亮灯。三个月后，扫错的事少了一大半，老人们也不再说"还我们收银员"了。他们发现，真正让人心里不踏实的，从来不是机器本身，而是机器交出一张小票、却不交出这张小票是怎么算出来的。

这位老会计做的事，和那封联名信，方向是同一个——都在乎"算得对不对"。可两者走的路不一样。联名信站在机器外面，说"不要"；老会计走进机器里面，说"我来帮你建一个查的系统"。前者把矛盾压在门口，矛盾一个月后原样还在；后者给矛盾开了一个出口，超市收银这件事本身变了形，第二个月的起点就不一样了。

回到2026年9月那份宣言。前面第1章说过，二十五位菲尔兹奖得主联署的《A Severe Misalignment of AI in Mathematics》并没有呼吁禁止AI，也没有提出具体机制。它承认大模型的数学能力大幅提升，它担心的是：AI公司把解题当成基准，仓促宣布结果，带来署名与剽窃的混乱；没有数学家照料，AI构想的想法不会真正活起来。作者认为，这份宣言被许多人读成"抗AI"，其实它抗的是"果子"——只交结果、不交过程。

那么，问题就来了：抗"只交果子不交过程"，最好的办法是签名吗？

作者的看法很直接：数学家不该靠签名去反对AI交果子不交过程。这件事恰恰是AI往后要发展的方向，就像高铁的安全，不是靠乘客联名反对高速，而是靠一整套系统来检查——第13章已借1889年阿马事故后的铁路立法细讲过这一点：列车没有停，变的是车与轨之间多了一层检查。

数学里的情形，和这个有相通的地方，也有一点要紧的不同。

相通的地方是：AI交出来的果子越来越多，人工一篇一篇去读，是读不过来的。第1章讲过的那七百多道题，陶哲轩这样勤奋的数学家也只读了十来篇。这时候签名，就像老人们在超市门口贴信：机器不会因此停，果子只会越堆越多。

不同的地方是：高铁的信号系统只回答一个问题——这段轨道上有没有车，是或否。数学里现在已有的检查系统，也大体停在这一层。Lean形式化检查一个证明，回答的是"这一步对不对"，对或错。由陶哲轩发起的方程理论项目，用自动定理证明器处理4694条等式律之间约两千二百万对蕴含关系（据项目报告），回答的也是"这一条能不能推出那一条"，能或不能。这是二值的检查（只有"是"和"否"两种答案的检查）。二值检查很要紧，它是今天一切人机合作的底座；可它只回答真假，不回答亲缘。一个结果在Lean里全部通过，我们仍然不知道它落在哪一支场结构上，离共同体熟悉的那一支有多远，它要不要另立一支。

这里要先把一个容易混的地方说清楚。有人会说：既然AI交果子不交过程，那就要求它把过程交出来，一切不就解决了？第1章讲过的那份Navier–Stokes证明就是反例：带着Lean证书，过程是交了，每一步机器都核过；可据陶哲轩说，没有一位专家真正理解整个论证。可见缺的不只是"过程"这张纸，缺的是一个能把这张纸挂到已知数学某一处的位置：它延伸了哪一支，推翻了哪一支的哪个默认，和我们熟悉的那些结果隔着几代。没有这个位置，一份长证明对数学家来说，就像超市那卷长长的小票，每一笔都对，合起来却看不出哪一笔是怎么来的。

所以，作者主张陶哲轩可以做的第一件事，不是写第二封信，而是像那位老会计一样，走进去，帮着建一个"查"的系统——而且这个系统要比二值检查多走一步：不只查真假，还查谱系。

这里说的"织谱"，用一句白话讲，就是把每一个新果子安放进它所属的那一支，并标出它和别的分支共享了多少代来历。前面第 5 章把这个"多少代来历"叫作 g：两个场结构在回写派生树上的共同祖先深度——沿着回写的代际，数它们共享了多少连接、次序和结构，而不看任何规律迁移的结果。织谱，就是一次次把新果子挂上这棵树，并把 g 数出来。

陶哲轩其实已经站在织谱的门口了。2026 年 7 月雅可比猜想被 AI 构造的反例推翻，他用了两天，和聊天机器人一起消化这个反例：亲自推代数，用工具一步一步核对，去查文献。这两天里他做的事，不是"判断反例对不对"那么简单——判断对错，Lean 也能做。他做的是把这个反例放回几十年的研究里，看它推翻了什么、没推翻什么、哪一片默认的地方要收窄。这正是织谱的雏形，只是还没有被当成一门可以分工、可以计量的活。他在 Math 2.0 讲座里提议的开放阐释问题、消融研究、探索定理邻域，也都朝着同一个方向：不再只问"这道题解没解出来"，而去问"这个结果周围是什么样子"。

从签名到织谱，具体可以落成三步。

第一步，换一个问法。面对每一个 AI 果子，不先问"是谁做的、该不该算数"，而先问"它落在哪一支、是同向还是反面"。前面第 7 章分过：一个结果落地以后，若共同体只是多了一个例证，原来的默认照旧，这是同向果子；若共同体必须收窄某条规律默认的适用范围，而且收窄后要另立一支才能继续推导，这是反面果子。问法一换，那七百多道题就不再是一堆需要逐篇审阅的"可疑稿件"，而是一堆等着分拣的材料：大多数是同向的，挂在已知枝上；少数是反面的，要开新枝。

第二步，带头建一个测绘的团队，而不是一个评审的团队。评审团队的工作是挑错和打分，测绘团队的工作是画树和数代。本书的预测之一说：下一阶段最稳定的人机合作，会出现在用 AI 测绘场谱系的团队里，方程理论项目的二值测绘是它的前身。方程理论项目正是由陶哲轩发起的，他手里已经有一张两千多万对蕴含关系的地图。下一步，是在这张"能不能推出"的地图上，再叠一层"共享多少代来历"的地图。

第三步，主动参与 AI-数学，去建各种形式系统。作者认为，数学家应该主动参与进去，而不是在外面看。这里的"各种"是要紧的字眼。今天的形式库，大体是在一

种场结构里一条一条往上码定理；织谱需要的，是能把一个反面果子当作新枝记下来的形式系统——它要能记录"这条规律在哪一支成立、在哪一支被收窄、新枝从哪一代分出来"。这样的系统，没有数学家亲手参与是建不起来的，因为只有做了几十年研究的人，才知道哪一次收窄是真正的分叉，哪一次只是加了一条小假设。

回到超市。老会计那张小桌子上，后来多了一个本子。她发现，光核"这张小票对不对"还不够：同样是扫错，有的是顾客手快、一件商品晃了两次，有的是某一台机器的扫码头偏了，有的是某一类包装的条码印得太浅。她把每一次扫错记下来：哪一台机器，什么时候，什么商品，怎么错的。记了两个月，错处开始分出几路来——三号机老是在晚上出错，原来是灯光照到扫码头上反光；带塑料膜的蔬菜总是扫不上，原来是膜皱了条码就花。每分出一路，超市就改一回：给三号机挪了位置，给蔬菜区换了标签。改过以后，下个月的错又少了一截，剩下的错也换了样子，她再接着记、接着分。

这个本子做的事，比核对一张小票多走了一步：它不只回答"对不对"，还回答"错在哪一路、这一路从哪里来"。数学里织谱要做的，正是这一步。

老会计的那张小桌子，后来超市自己保留下来了，还让收银员轮流去坐。老人们没有赢下那封联名信，却赢下了更要紧的东西：机器交出的每一张小票，都有人、有办法去查它是怎么来的。

数学家也是一样。签名能表明立场，表明了立场以后，还要有人走进去。可是走进去之后，人和公司怎样分活？这是下一节的事。

## ◆ 14.2　与公司订分工：公司撞果子，数学家织谱

这是一个构想的场景。

娄底城东一个老小区，去年在一楼腾出一间空房，办了个图书角，请居民捐书。头一个月，几个大学生志愿者干劲足，扫楼、发群、上门去搬，一下子收来了上千本。书收得又快又多，可堆在屋里，谁也找不到要的那本：同一本书收了七八本，上下册分在两个箱子里，还有一些既不像小说、也不像教辅的东西，不知道该往哪里放。

第二个月，事情换了做法。志愿者继续收，收得越多越好；楼里两位退休的图书管理员坐下来，一本一本往架子上归：这本归文学，那本归生活，这几本是同一套、要挨着放。收来的东西里，有一些归不进去——比如一位老住户送来的三本手抄本，记的是娄底老辈人唱的山歌和讲的古话，没有书号，也没有出版社。图书角

原来定的规矩是"只收正式出版的书"，按规矩，这三本不该收。两位管理员没有把它们退回去，而是在最里头单立了一格，贴一张纸："本地手写，待整理。"后来别的住户看见了，陆续又送来了老账本、家书、手抄的药方，这一格慢慢长成了一个架子。"只收正式出版的书"这条默认，就此收窄了：它只管外头那几架，里头另有一支。

这件事里，志愿者和管理员谁也没替代谁。志愿者撞来材料，越快越好；管理员把材料归进架子，越准越好。最有分量的，恰恰是那几本"归不进去"的东西——它们逼着图书角改了一条默认，屋里多出了一支。（第 7 章 7.6 讲过修族谱时怎样给"对不上"的一支另立一行，道理相通，这里不再重复。）

回到数学。

作者认为，数学典范——也就是一套基础公理系统——一旦给定，剩下的推导交给 AI，效率是一般科学家的上千倍；数学家若一直留在里面跟机器比推导，就是内卷，必须走出来，去做新的数学典范发生。这个判断，放到人和公司怎样分活上，就落成本节的标题：公司撞果子，数学家织谱。

"撞果子"是什么意思？就是在一种场结构里，让 AI 大量地、快速地推导，撞出一个又一个结果。2026 年 5 月的 First Proof 测评，十道全新的研究级问题，有七道被至少一支 AI 团队解到可发表的水准，每题算力成本在十到一千美元之间。10 月初 OpenAI 一次释出七百多道题的 AI 证明。这就是撞果子的能力：像那些拿手机的年轻人，一个月收来上千个名字。这件事公司做得比任何数学系都快，没有必要去和它抢。

"织谱"是什么意思？上一节说了：把每一个果子挂到它所属的那一支上，标出它和别的分支共享多少代来历，遇到反面果子就另开一枝。这件事，今天的大模型自己做不了，不是因为它算得不够快，而是因为织谱要用到的东西，大半不在一种场结构的推导里。哪一次收窄算真正的分叉，哪一次只是加一条小假设；一个反例推翻的是一个猜想，还是一整片默认；这些判断，缠着几十年的研究史、缠着一个领域里人们默认什么、不默认什么。就像那两位管理员，知道"只收正式出版的书"是图书角的一条默认，才看得出那三本手抄本的分量。志愿者收来同样的东西，只会觉得"这个不合规矩，退回去"。

这里有两点要说清，免得分工变成一句好听的口号。

第一点，分工不是"AI 做常规、人做典范"那句老话的翻版。第 3 章说过，那个共识早已有了，它停在一个地方：它把数学当成一种不变的描述语言，没有回答人

去做的是哪一种典范。本书讲的分工，落点很具体：人做的不是"更高级的推导"，而是另一种活——测绘场结构之间的亲缘，把单一种场结构变成场结构的谱系。人从推导的赛道上出来，不是退到一边，而是进到另一条赛道。这条赛道上，人和机器又是缠在一起干的：AI 在一支之内推导，人在支与支之间测 g、标分叉，标出新枝以后，AI 又在新枝里接着推，推出新的果子来。第 8 章把这五步叫作一个闭环：AI 在一种结构内推导，撞出果子，人把反面果子回写成分叉，AI 在新支内推导，再撞出新果子。

第二点，分工要写进做事的规矩里，而不只是挂在嘴上。陶哲轩批评 OpenAI 的释出事先没有与数学家协调，抹掉了一些年轻人的课题。这句批评，放在分工的眼光下看，指向的不是"公司不该发"，而是"公司发的时候，缺了织谱的那一道工序"。志愿者收书收得再多，一股脑堆进屋里，只会让人乱；先交给管理员归架，再开门借阅，才有用。

为什么这样分工能动起来，而不是一纸空文？不妨把图书角那两个月对照着看。第一个月，书越收越多，架子却一格没长，收来的东西和原来的规矩顶着——规矩默认"只收正式出版的书"，手抄本偏偏送上门来。这股顶撞在第一个月里只是越积越多，箱子越堆越乱，大家越来越烦。到了第二个月，管理员没有把顶撞压下去，也没有把"归不进去"的东西退掉，而是给了它一个出口：单立一格，写"待整理"。这一格一立，屋里的样子就变了——从几排按同一套分类排好的架子，变成了多出一支的架子。等到老账本、家书陆续送来，这一支又写回了图书角的规矩，"只收正式出版的书"改成了"外架收出版物、里架收本地手写"，下一回再有人捐东西，起点就不同了。

数学里的情形是一样的道理。AI 撞出来的结果，和共同体熟悉的那一种场结构顶着；顶得越多，像那七百多道题，人越觉得乱，越想说"有毒"。把它压下去，或者全盘照收，都不会让数学长出新东西。给它一个出口——由人判定哪些是分叉，在谱上另起一枝——数学之场的样子才会从"一种结构"变成"成谱系的结构"；新枝再写回派生树，下一轮 AI 推导的起点也就换了。分工之所以动得起来，靠的不是双方的好意，而是这一顶、一改、一回写的连环。

那么，人和公司之间可以订哪几条分工？下面这张表，是一个构想的分工单，供双方商量时参照，不是定稿。

| 环节 | 公司（AI）多担的 | 数学家多担的 | 双方共同交出的 |
|---|---|---|---|
| 推导 | 在给定的一支场结构里大量推导，撞出结果 | 选哪一支值得撞 | 结果连同机器可检查的证书 |
| 分拣 | 初筛：标出与已知结果冲突的地方 | 判定同向还是反面，反面是否须另立一支 | 一份分拣清单 |
| 织谱 | 按人定下的分叉，在新枝里继续推导 | 测 g，标分叉的代际，写清收窄了哪一条默认 | 回写派生树上的新一节 |
| 释出 | 先挂谱，再发布 | 在谱上署分叉的名 | 带谱系位置的公开记录 |

这张表最要紧的是最后一行："先挂谱，再发布。"这一句，就是那次七百多道题释出时缺掉的那一步。果子不经过织谱就整筐倒出来，年轻人的课题被抹掉，读的人读不过来，大家只能吵"这是不是有毒废料"。经过织谱再发布，同样七百多道题，大部分会被挂在已知的枝上，一眼看出是延伸；那一两篇真正有新想法的，会被标在分叉处，人人都看得见它的分量；那些压了年轻人课题的，也能在谱上看出：这个年轻人在做的那一支，被机器撞了一个果子，可这一支往下怎么长，还要靠人去织。

公司为什么愿意接受这样的分工？不是因为它们突然变得谦让，而是因为这样分对它们自己也有利。整筐倒出去的果子，读的人读不过来，换来的是"有毒废料"的名声和七千多人的加签；经过织谱的果子，每一颗都有位置、有分量，那几颗真正新的会被人看见、被人接着用。对公司来说，这是让自己的产出被数学共同体真正接住的唯一办法。被接住的果子才有人用，有人用的东西才有市场。

分工也不是一订就死的。头几轮，数学家判分叉，多半要逐条读、逐条争；判得多了，哪些"不合"总是小修补、哪些"不合"多半要另立一支，会慢慢显出一些门道来。这些门道又可以回头交给机器做初筛，机器的初筛越来越准，人就能把力气放到更难判的那几条上。分工的边界本身，也是在一轮轮的回写里挪动的。

有人会担心：织谱这件事这么慢，公司等得了吗？答案在第 2 章讲的那个囚徒困境里。陶哲轩说，AI 公司陷入了囚徒困境：谁都不想跑这么快，可谁都觉得没得选。困境的根子是：大家都在同一条赛道上抢同一颗果子，谁慢一步，果子就是别人的。织谱把赛道改了——一个果子值多少，不再只看它是不是第一个落地，还看它在谱上开了几枝、接通了几支。这件事 14.4 节再细说。在这里只先说一句：分工本身，就是走出困境的第一步。

图书角后来开门借阅了。来的人最爱翻的，不是书最多的那几架，而是最里头那一架"本地手写"。送手抄本的那位老住户也常来，坐在那一架前面看别人翻。那三本东西，原来不是规矩外的一处麻烦，而是规矩没写到的一支。

AI 撞出的那些"对不上"的果子，也应当有这样一个架子。可它们在公司那里，目前多半被当成了需要压下去的麻烦。这就是下一节要说的事。

## ◆ 14.3　大模型公司可以做的：转向场谱系市场，反面果子当产品

这是一个构想的场景。

城郊有一个小陶坊，主人姓贺，烧日用的碗碟。每一窑开出来，总有那么几件颜色不对：有的釉流下来积成一道蓝，有的本该是白的，烧出了一片红晕。头几年，贺师傅把这些都当次品，敲碎了倒进后山的废料坑。

有一年，一位来买碗的老师傅在废料坑边蹲了半天，捡起半只带红晕的碗，问他：这一窑你是怎么烧的？贺师傅想了想，说那天风大，窑里的火有一阵抽得特别急。老师傅说，那你记下来。

贺师傅从此多了一个本子。每一件"不对"的碗，他都记下那一窑的柴、那一天的风、那一层摆的位置。记了两年，他发现，红晕不是乱出的，它总出在火急、窑后排、釉厚的那一角。他照着这个，专门留出一层，故意那样烧。后来，那一层出的碗成了陶坊卖得最好的一路。他原先那一套"火要匀、釉要薄"的规矩没有错，可它只在一片地方成立；出了那片地方，另有一路烧法。陶坊的规矩，就这样从一种分出了两支。

废料坑还在，可往里倒的东西少多了。真正的废品——裂的、塌的——照样敲碎；可"颜色不对"的那些，从此不再是废料，是另一支的头一件。

2026 年 10 月，陶哲轩先称 OpenAI 释出的那批结果为"有毒废料"，后来改口说"也许是处理过的废料"。这一改口很值得琢磨。"有毒"和"处理过"之间的差别，就是贺师傅那个本子的差别。同一堆东西，没有人去记它是怎么烧出来的、它和规矩差在哪里，它就只是一坑碎瓷；有人记、有人分，里面就可能有新的一支。

作者认为，数学革命需要果子，而且必须是"反面的果子"。第 7 章把反面果子说得很具体：结果落地以后，共同体必须收窄某条规律默认的适用范围，而且收窄后要另立一支才能继续推导。2026 年 7 月雅可比猜想被 AI 构造的反例推翻，就是这样的果子——共同体默认了几十年的一条路，被告知走到某处就不通了。另一头是 OpenAI 那份 Navier–Stokes 爆破证明。陶哲轩说过，此前的共识是 Navier–

Stokes 的正则性大概会失败；爆破被证出来，印证了共识，不需要收窄什么，第 7 章把它归为同向的果子。（同年 9 月 Alpöge 与 Buckmaster 关于三维 Euler 方程有限时间爆破的结果，只能算旁例：Euler 与 Navier–Stokes 不是同一个方程，把它也算作同向，依据的是"流体方程会爆破"这一预期，属本书的判断。）两种果子都有价值，可它们的价值不在同一处：同向果子让一支长得更粗，反面果子让树多出一枝。

今天的大模型公司，把大部分力气花在同向果子上，而且是同一条赛道上最显眼的那几颗——千禧年难题、著名猜想。第 1 章讲过的那场 Navier–Stokes 之争，就是最显眼的一例。这样的投入，像是所有陶坊都在抢烧同一种白碗，比谁的白更白。至于那些"颜色不对"的结果——推着推着推出一个反例、推出一处与默认不合的地方——它们在公司的公告里不是重点，有时干脆被当作失败的尝试，丢在一边。

作者主张公司可以做的事，是把方向转过来：把反面果子当产品，而不是当废料；把场谱系当市场，而不是只盯着一种场结构里的那几颗大果子。

先说"反面果子当产品"。这句话落到做事上，是三件事。

第一件，记下来。像贺师傅的本子一样，AI 在推导中每一次撞到与默认不合的地方——一个反例、一处推不下去、一条在某种情形下失效的引理——都完整地留下来：在哪一支、用了哪些前提、在哪一步与默认分开。今天的做法常常只留下"成功"的证明，失败的路径被扔掉。可第 7 章说过，规律被推出它所属场谱系的地方，正是反面果子长出来的地方。扔掉推不下去的路，等于把废料坑里的红晕碗一并敲碎。

第二件，分出来。不是每一处"不合"都是反面果子。有的只是机器自己犯了错，那是真的废品；有的只要加一条小假设就补上了，那是同一支里的修补；只有那些逼着共同体收窄默认、而且收窄后要另起一套连接与次序才能往下推的，才是反面果子。这一步分拣，要和上一节说的数学家织谱接在一起做。公司出初筛，数学家定分叉。

第三件，卖出去。这里的"卖"，不是把一个反例标个价钱。一个反面果子，它真正的价值在于它开出的那一枝：新枝上要有人去推导、去接通、去应用。新枝刚开出来的时候，里面几乎是空的——这正是 AI 撞果子能力最派得上用场的地方。公司可以把"开枝"连同"开枝以后的推导服务"一起当作产品：一个团队拿到一个反面果子，同时拿到一支在新枝里推导的 AI 能力，以及一张标明这一枝和老枝隔着几代的谱。

再说"场谱系市场"。作者认为，数学要从统一性革命进入同一性谱系，整个数学界和 AI 界目前都还没醒悟；细胞的数学、精神世界的数学、创造力的数学、土壤的数学、教育学的数学、学习的数学，都是同一性谱系数学，而这恰恰是 AI-数学作为基础工具的应用市场。

为什么这片市场今天还荒着？前面第 10–12 章各自讲过：同一种药，邻居吃好了你吃不好；同一包种子，两块地两样收成；同样学骑车，有人先练平衡、有人先冲坡。在这些地方，统一性的数学——一种场结构、一条规律对一切对象成立——一用就要打折扣。研究者只好在一个统一模型上不断加修正项，或者干脆说"个体差异太大，没法用数学"。这片地方缺的，正是一种能讲"同一性有程度"的数学：两块地、两个病人、两个孩子，不是"一样"或"不一样"，而是沿着各自的来历，共享了多少代连接与次序。

这种数学一旦能做，它要的计算量是巨大的：每一个对象都有自己的来历，每一对对象之间都要数共同祖先深度，每一支里都要单独推导。这正是 AI 的长处。公司若把力气从"抢同一颗大果子"挪一部分到这里，面对的不是一个七千四百多位研究者加签的场面，而是一大片还没有人织过谱的田。

还可以拿账本算一算。抢同一颗大果子，投入的是数千万美元和上万个智能体，换来的若是同向果子，账面上是一个"第一"，谱上是一支多了一节；若没抢到，账面上是零。转向场谱系，每一处反面果子都开一枝，每一枝都要有人去推、去接通、去用，后面跟着的是一串活，而不是一个奖杯。贺师傅后来说，那一路带红晕的碗，他头一年只烧出了十几只能卖的，可从那以后，每一窑都有那一层，每一层都有人等着要。前一种账是一锤子买卖，后一种账是一块田。

这个看法也是可以落空的。假如公司真把反面果子一件件记下、分好、做成产品，过上几年，这些新枝里几乎没有人去推、没有一块田用得上，数学仍旧只有那一种场结构在长，那就说明"反面果子当产品"只是一厢情愿，本节的主张就站不住。本书愿意把这一条摆在明处。

转向场谱系市场，公司的产品说明书也得换一种写法。今天发布一个数学结果，说明书上写的是一件事：它对不对，经没经过机器检查。按谱系的眼光，至少要把两件事分开写：一件是"真"，这个结果在哪一支里成立、成立到什么程度、出了这一支还剩多少；另一件是"善"，它对哪一块田有用、用上以后那块田长出了什么。这两件事不是一回事。贺师傅那一路红晕碗，"真"的一面是：火急、窑后排、釉厚，就出红晕，出了这一角就不出；"善"的一面是：这一路碗卖给谁、谁用得上。一件碗

在后一面上再好，也不能拿来冒充前一面已经弄清楚了。把真和善混在一笔里算，一个"对的"结果会被当成"有用的"，一个"有用的"结果也会被当成"处处都对"——这正是统一性数学过去在细胞、学习、土壤这些地方吃的亏。不过要老实说，真和善分开记账，今天还没有人做起来；本书附录二的九格表也把它列为一格尚未发生的事。为什么没发生？因为在一种场结构里，"对"就是到处都对，用不着再问"在哪一支对"；只有当反面果子多到逼着人一再收窄、一再另立一支的时候，"在哪一支对"和"对哪块田有用"之间的那道缝，才会顶得人非分开记不可。AI 撞果子的速度，恰恰可能让这一天来得比预想的早。

这里要提醒一句：转向不等于放弃大题。千禧年难题仍然值得攻。只是，攻下一道大题若是同向果子，它的价值是让一支更粗；若在攻的过程中撞出了反面果子，那些"顺带"的东西，可能比题目本身更值钱。公司现在的账本，只记前一种。

贺师傅的陶坊后来定了一个规矩：每一窑开出来，先分三堆——好的，碎的，"不对的"。第三堆不许直接倒，要先上本子。这个规矩没有让他的白碗少卖一个，却让他多了一路别人烧不出的碗。

可是，第三堆里的那件碗，算谁的？是那一天的风，是摆坯的徒弟，还是记本子的贺师傅？数学里的同一个问题，眼下吵得更凶——那就是优先权。

## ◆ 14.4　优先权改按谱系计，走出囚徒困境

这是一个构想的场景。

娄底的一条老街上，有三家米粉店挨着开。前些年，三家比的是早：谁五点开门，另一家就四点半开；谁四点半，另一家就四点。比到后来，三家老板都是凌晨三点起来熬汤，熬得人瘦了一圈，客人还是那么些客人——五点以前本来就没几个人吃粉。谁都知道这么比下去不划算，可谁也不敢先晚开，怕老客转去了隔壁。

后来变化不是因为三家坐下来签了一个"统一六点开门"的约——签过一次，没两个月就有人偷偷提前了。变化是从其中一家的女儿接手开始的。她没有跟着比早，而是把店里那锅汤分成了两路：一路是老街人吃了几十年的骨头汤，一路是她外婆那边山里的酸汤。她在墙上贴了一张小图，画着这两路汤各自从哪里来、哪几样料是两路共有的、哪几样只有一路才有。来吃的人看了图，有的专门来吃酸汤，有的说"原来骨头汤和酸汤有三样料是一样的"。另外两家看着，一家也琢磨出一路自己的汤，另一家干脆专做早上的骨头汤，不再和人比别的。三家的开门时间，慢慢都退回了五点半。

这条街的事说明一个朴素的道理：只有一条赛道的时候，约定是守不住的；赛道一分开，抢先就自己松了。

回到数学。

14.2 引过陶哲轩的囚徒困境之说。他还说过，未解的问题像一种不可再生的资源，用的是"海边缺淡水"的比方：四面都是水，能喝的却少。第 2 章已经把这两句话连起来讲过：在统一性的赛道上，所有人盯着同一张题单、同一种场结构里同一批没解的题；一道题一旦被谁先解出来，别人就再没有这道题可解。谁慢一步，果子就是别人的。这是囚徒困境的根。

困境之中，大家自然想到的第一个办法，是立规矩：发布前先协调，署名要写清，某些题给年轻人留着。这些规矩都有用，也都应当做。可第 2 章也说过，只靠规则修补，就像给学生发一道减负令：比的东西没变，只是规定每天少比一个小时，大家照旧在暗地里比。米粉街上那份"统一六点开门"的约，就是这样破的。本书的证伪里也写了这一条：若仅凭规则协议就终结了抢题、带来长期合作，而数学仍只有一种场结构，本书的命题就错了。

所以，优先权这件事，作者主张从根上换一个计法：不只按"谁先解出这一题"计，而按"谁在谱上开了哪一枝、接通了哪几支"计。

今天的优先权，大体是一种场结构里的计法。一道题像一颗果子，挂在树上，谁先摘到就是谁的。这个计法在只有一棵树、一条枝的时候没有问题。麻烦是：AI 摘果子的速度是人的上千倍，树上的果子很快就被摘光；被摘光以后，人和公司就只剩下在一些边角上抢。陶哲轩批评的"抹掉一些年轻人的课题"，就是这样发生的：年轻人正在爬的那根枝上的果子，被机器一夜之间摘走了。

按谱系计，优先权就分成了好几样东西，不再只有"第一个解出"这一样。

第一样，开枝之功。一个反面果子落地，共同体收窄了一条默认，另立了一支。谁撞出了这个果子，谁判定了它要另立一支，谁把新枝和老枝隔着几代标了出来——这三样，在谱上各记一笔。AI 撞出的，记在复合主体那一笔里；人判定分叉、标出代际的，记在织谱那一笔里。这样一来，第 8 章说的"复合主体"就落到了账上：没有独立的 AI，每一个"AI 的结果"背后都站着出题的人、搭系统的人、出算力的公司；按谱系记账，正好可以把这一串人和机器的份各自写清，而不是笼统写成"某某公司的 AI 证明了"。

第二样，接通之功。两支看起来不相干的场结构，谁测出它们共享了多少代来历，并把一支上的规律成功迁移到另一支，谁就有接通之功。这一功，今天几乎没有人记。可按本书的看法，它恰恰是同一性谱系数学里最要紧的活：规律能迁移多远，不只看两支的结构像不像，还看两支沿回写的历史共享了多深的祖先。

第三样，养田之功。一支场结构开出来以后，被多少块"田"用上了——学习的数学、细胞的数学、土壤的数学，哪一块用了这一支，用得怎样。这一功要慢慢地记，一年两年看不出，十年二十年才看得出。

接通之功说起来抽象，回想第 4、5 章那勺收汁前的醋就明白：放到来历相近的那一锅多半一试就灵，放到做法单一样、来历却远的那一锅未必灵。谁把这一点试清楚了、标出来了，谁就做了一件今天没人记账的事：他告诉别人，一条窍门能走多远，不只看两家菜谱像不像，还看两家共享了多深的来历。数学里两支场结构之间的接通，也是这样一件事。

这三样一分开，抢先就不再是唯一的计法。一位年轻人的课题被 AI 撞了一个果子，他并不就此一无所有：那颗果子落在哪一支、这一支往下怎样长、和哪一支接通，都还空着，都还记得上功。一家公司抢先解出一道大题，它在"第一个解出"那一栏记一笔，可若这道题是同向果子，它在开枝那一栏是空的；另一家公司撞出了一个不起眼的反例，却开出了新的一枝，它在开枝那一栏就重。赛道一变多，大家抢的东西就不再是同一颗。

囚徒困境之所以是困境，是因为两个人面对的是同一张收益表，而表上只有"先走"和"后走"两格。按谱系计，表上多出了好几格，而且有些格子是只有合作才填得上的：开枝要有人撞、有人判；接通要两支的人各自出力；养田要数学家和田里的人一起用。米粉街的女儿没有赢下"谁最早开门"，她把汤分成了两路，比赛就换了样子。

不妨设想一条谱上的记录大概长什么样。它不只写"某年某月某人证明了某题"，还写：这个结果落在哪一支；它是延伸了这一支，还是收窄了这一支的哪一条默认；若另立了一支，新枝从哪一代分出，和老枝共享到第几代；是谁撞出的，是谁判定的分叉，又是谁在新枝里接着推的；后来哪几块田用上了它。这样一条记录读下来，像一页修好的族谱，人人看得见自己的那一笔在哪里。一位年轻人哪怕只做了"判定分叉"这一小步，他的名字也在谱上，不会被一夜之间抹掉。

当然，这样记账，要先有一张谱。没有谱，"开了哪一枝""接通了哪几支"都说不清。这就回到了 14.1 和 14.2：数学家走进去建谱系的检查系统，和公司订下"先交谱、再张榜"的分工。优先权的新计法，是建在这两件事之上的。

这里还要说一句：本书只说这样计可以让抢先自己松下来，并不主张由谁来强制推行；记什么、怎么记，是数学共同体和公司之间自己商量的事。而且，这些记下来的功，只是为了看清谁在谱上做了什么，不拿去给人排名次、定考核。一旦拿去排名，它又会变成一条新的独木桥，大家又回到同一条赛道上去抢——那就前功尽弃了。

可是，谱是要有人来织的。织谱的人从哪里来？

## ◆ 14.5　培养织谱者：先手算、后交机器

傍晚，娄底一个小区的楼下，罗秀英奶奶（本书的构想人物，七十一岁，做了五十年红烧肉）在教外孙女谭一禾（构想人物，十六岁，高一）称菜。

一禾手里拿着手机，手机上有计算器，也有一个能直接说出"这道菜放多少盐"的 AI。罗奶奶不让她用。她让一禾把一斤五花肉托在手心，掂一掂，再拿一块八两的掂一掂。一禾掂了三回，说："差两两，我手上感觉得出来，可是说不准。"罗奶奶笑了，说："说不准没关系，你先有个底。"

接着罗奶奶让她用笔算：一斤肉放多少糖，八两的该放多少，按比例往下减。一禾算得很快，说这有什么，手机一按就出来了。罗奶奶说："按出来的数，你得知道它对不对。你手上掂过，笔上算过，下回手机给你一个数，你心里一过就知道它离谱不离谱。"

后来一禾自己做红烧肉，倒是常用手机。可有一回，手机上的 AI 给了她一个糖量，她一看就觉得多了——按她手上掂过的分量，那数大了快一倍。她回头一查，原来是自己把"克"输成了"两"。

把一禾掂肉那一下放慢了看。手往上一托，先是一沉；换一块，又是一沉，可沉得不一样——差两两，这是一串很小的差别，一回接一回地排着。就在这一回回的掂里，"一斤是多少"在她手上一层层显出样子来：头一回只是"挺沉"，第二回是"比那块沉"，第三回是"差不多差两两"。而这个"两两"，是她的手、外婆的秤、这块五花肉和外婆在一旁的那句"说不准没关系"缠在一起长出来的；换一个从没进过厨房的人来掂，同样两块肉，手上显不出这个"两两"。手上的底子，就是这样一掂、一

显、一缠，同时发生的。第 4 章讲触觉时说过，摸东西的时候手和物贴在一起，人最难假装自己站在外面——底子之所以要亲手掂出来，道理就在这里。

这个场景想说的是一件朴素的事：一个人能不能放心地把活交给机器，要看他自己有没有过手的底子。有底子，机器给出的数，他一眼看得出离谱不离谱；没有底子，机器说多少就是多少。

陶哲轩对这件事有过很细的区分。他把摩擦分成两种：一种是"人为摩擦"，像繁琐的计算，可以交给工具，前提是人能抽查；一种是"自然摩擦"，是真正的概念难点，把它抹平，就夺走了学习者的收获。他还用过一个"认知饮食"的比方：食物从稀缺变得充裕，带来了肥胖和体能的退化；认知也正从处处是摩擦变得充裕；教下一代保持有意识的认知饮食，会成为教育的一项重大的新使命。

这两层意思，放到织谱者的培养上，就落成本节的标题：先手算，后交机器。

为什么织谱者尤其要先手算?

上面几节反复说了，织谱的活，核心是判断：这个果子是同向还是反面，这一处收窄是真正的分叉还是加一条小假设，两支场结构共享了多少代来历。这些判断，Lean 帮不上——Lean 只答对错；AI 也帮不全——它可以初筛冲突，可以在新枝里推导，可"这一处算不算另立一支"，要缠着一个领域几十年默认什么、不默认什么来判。这份判断力从哪里来？不是从读一份关于谱系的说明书来，而是从亲手在一支里推过、在推不下去的地方卡过、卡住以后亲手把默认收窄过——这一次次的过手里长出来的。

罗奶奶手上那个"差两两"，不是天生的，是五十年里掂过成千上万块肉，一次掂错、一次称准、一次又掂，回写进手里的。一禾掂了三回，"有个底"，这个底是一个起点；往后她每用一次手机、每一次心里一过，这个底又被改一回。织谱者的判断，也是这样一层层显露出来的，不是背熟了一套规则就在那里。

这里有一个容易走偏的地方：先手算，不是说一辈子都手算，也不是拿手算去跟机器比快。比快，那又回到推导的赛道上去了，是内卷。先手算的意思，是让手算成为织谱者身上的一种"底"：手上过过，心里才有那一支场结构的连接与先后，才认得出一个果子哪里不合。有了底，再把繁琐的推导交给机器，人腾出手来去判、去标、去接。手算是为了能交，不是为了不交。

陶哲轩自己在雅可比反例那件事上，就是这样做的：两天里，他和聊天机器人一起消化反例，可代数是亲手推的，每一步用工具核对，再去查文献。机器是在场的，手也是在场的。这就是一个织谱者干活的样子。

那么，织谱者可以怎样培养？这里只说做法上的几点想法，供数学老师、研究生导师、形式化项目的组织者参考，不涉及任何考核和评比。

一是在教的时候，把"哪些是人为摩擦、哪些是自然摩擦"分出来。繁琐的计算，可以尽早交给工具，前提是学生会抽查；真正的概念难点，留给学生自己卡、自己过。曾晓岚（构想人物，罗奶奶的女儿，初中数学老师）在课上可以这样做：学生解方程，最后的数可以让软件算，可"这个根大概落在哪一段"，要学生自己先估、先代两个数进去试，再让软件算出来对照。估错了的地方，就是他自己的那一处"反面果子"。

二是让学生亲手经历一次"收窄"。不只做"证明这个对"的题，也做"这个说法在哪里不成立"的题。一个初中生发现"两个负数相乘还是负数"不对，一个大学生发现某个定理在某一类对象上失效，规模不同，滋味是一样的：原来的默认被收窄了，要另起一个说法才能往下走。经历过这种滋味的人，日后看到 AI 撞出的反例，才认得出它的分量。

三是在形式化项目里，给年轻人留出"织谱"的位置。今天的形式化工作，年轻人多半被分去"把一条已知定理码进库里"。这件事有用，也是一种手算。可还可以多分一样活：请他们给一批结果标出所属的支、写下它收窄了哪一条默认、它与另一支共享哪些概念。林知远（构想人物，曾晓岚的表弟，在外地做 Lean 形式化的博士后）这样的人，每天和形式库打交道，正是最早一批能被培养成织谱者的人。

四是承认织谱者的功。上一节说的开枝、接通、养田三样功，若只记给撞果子的人，年轻人就没有理由去学织谱。

五是让织谱者和公司坐在同一张桌子上。织谱的人若只在大学里，撞果子的机器只在公司里，两边隔着一道墙，果子就仍旧是整筐倒过来。像 14.2 那张分工单所设想的那样，分拣和织谱最好在果子释出之前就做，这就要求双方的人在同一个项目里共事：公司的工程师看得懂一处分叉为什么要紧，数学家也知道机器在哪一步最容易撞出"对不上"的东西。这样的共事本身，又是织谱者成长的地方。

这些想法也有可能落空。假如过上一些年，人们发现，从来没有亲手推导过、一上来就全交给机器的年轻人，判断"这一处算不算另立一支"判断得和有底子的人一

样准，那么"先手算、后交机器"就只是老一辈的习惯，算不上织谱者的必经之路，本节的看法就要改。本书把这一条也摆在明处。

罗奶奶说过一句很平常的话："先有个底。"这句话放在 AI 的时代，分量更重了。机器越能干，人越要有底；有底的人，才敢放心地交，也才交得出好东西。织谱者，就是在数学里先有了底、再把推导交给机器、腾出手来画树的人。

**带 走 的 话**

- **签名表明了立场，可"只交果子不交过程"要靠一个检查系统来管，就像高铁的安全靠信号与制动，不靠乘客联名；而数学的检查系统，要比"对或错"多查一样东西：这个果子落在哪一支。**
- **公司撞果子，数学家织谱。分工不是谁让着谁，而是两条赛道：一条在一种场结构里推导，一条在场结构之间画树、数代。**
- **反面果子不是废料，是新一枝的头一件；公司可以把它当产品，把同一性谱系数学当市场——细胞、学习、土壤、教育，这些田都还没人织过谱。**
- **优先权只按"谁先解出"计，赛道只有一条，囚徒困境就解不开；按"开枝、接通、养田"计，赛道变多，抢先自己就松了。**
- **织谱者要先有手上的底子：先手算、后交机器，手算是为了能交，不是为了不交。**

**小　账**

**本章切开的差异：**签名与织谱；同一种场结构里的抢先与场结构谱系里的分工；废料与新枝的头一件。

**本章的场谱系读数：**本章讨论的数学之场，眼下仍是一种场结构加二值检查；回写落在织谱环节——反面果子被人判为分叉、写进回写派生树、改变 g，AI 再在新枝里推导，这个环目前只在雅可比反例、方程理论项目等处零星出现，尚未成为分工的常规。

◆

# 结语

和解不是谈判，是赛道变多

> **这一章的问题**
>
> 读到这里，"陶哲轩如何才能与大模型公司和解与合作"这个问题，答案落在哪里？本书说过的话，哪些将来可以被验证，什么样的局面出现，就说明本书错了？

## ◆ 一、从一张截图回来

这本书是从一张短视频截图开始的。前言里说过，那条短视频把陶哲轩说成在警告"大脑肥胖症"，又说"优渥长大的孩子已有苗头"。我们去核对了：陶哲轩讲过的是"认知饮食"的类比——食物从稀缺变得充裕，带来了肥胖和体能退化；认知从处处是"摩擦"变得充裕，教下一代保持有意识的认知饮食，会成为教育的一项重大新使命。而"大脑肥胖症""进食障碍"那几句，没有找到原话，是中文编辑的概括。

这件小事本身就是全书的一个缩影。一句话从英文到中文、从讲座到短视频，一路被剪、被加、被换了说法，最后传到我们手机上的，是一个"果子"：结论很响，来路不见了。陶哲轩那句类比的上下文——他区分"人为摩擦"和"自然摩擦"，主张繁琐计算可以交给工具、但要能抽查，真正的概念难点不能抹平——在短视频里都被削掉了。

菲尔兹奖得主们联署担心的，说到底也是这件事。作者认为，那份宣言被普遍读成了"抗 AI"，其实它抗的是"果子"：只交结果，不交过程（第 1 章）。七百多道题的证明一次性释出，陶哲轩读了大约十篇，剩下的连读都读不过来；没人读过的路，也就没人能顺着往下走。

可是本书走了十四章，得出的并不是"所以要把过程补上，大家就和好了"。过程当然要补，补过程的事 AI 以后会发展出来，像高铁安全有一整套系统来检查一样

（作者认为，第 13、14 章）。真正让双方吵不完的，是另一件事：大家都挤在同一条赛道上。

## ◆ 二、四个承重概念，收在一处

全书搭在四根柱子上，这里把它们收拢。

**第一根：数学是 E2 之场。** 数学不是站在万物外面、自己不变的一套描述语言；它是特征纠缠之间的连接、次序与结构——一种场（第 4、5 章）。罗奶奶的红烧肉，一口锅、一双手、一种口味，先炒糖色后下肉，这些连接与先后就是一个场；娄底话和长沙话，声调怎样排、词怎样连，也是一个场。数学把这样的场做到了最干净、最统一的程度，所以它是"最大程度的 E 统一性"。

**第二根：同一性谱系源于场结构的谱系化。** 同一性不只有"是"与"不是"两档，也不只是几套系统并列、各自内部统一（那叫多元化的统一性）。场结构在一代代回写中沉淀，分出枝杈；两种场结构在回写派生树上的共同祖先越深——沿回写代际数，共同祖先传下、两边今天都还保有的连接、次序与结构越多——同一性的程度越高。这个深度记作 g，只看历史，不看任何规律搬过去成没成（第 4、5 章）。同村的红烧肉相近，同省的相似，全国同名差别很大——这就是谱系，不是多元。欧阳伯的两块菜地，今天读数一样，回写家谱一远一近，也是谱系（第 12 章）。

**第三根：反面果子是规律被推出其所属场谱系之处。** 果子不是坏东西，数学革命需要果子，而且需要"反面的果子"（作者认为，第 7 章）。同向的果子印证共识，像 OpenAI 那份 Navier–Stokes 爆破证明——据陶哲轩说，此前的共识本来就是正则性大概会失败；反面的果子逼共同体收窄一条规律的适用范围，并且收窄后要另立一支场结构才能往下推，像 2026 年 7 月 AI 构造出的雅可比猜想反例。本书比拉卡托斯多走的一步，是给分叉计量：反面果子进入回写派生树，改变 g。

**第四根：复合主体是回写的生成者。** 没有独立的 AI。哪怕只说一句"AI，去解决哥德巴赫猜想吧"，这句话里也站满了人：出题的人、造模型的人、喂数据的人、审结果的人、付电费的公司（作者认为，第 8 章）。回写的每一代，都是人与 AI 合在一起撞果子、织谱的一代。AI 撞果子，人织谱。

四根柱子连起来，就是一句话：数学这个场，一直被当作只有一种结构；一旦它被看作会在回写中分枝、成谱，AI 就有了无穷多的果子可撞，人就有了无穷多的谱可织，两边不必再抢同一颗果子。

## ◆ 三、逐条验收：本书押了什么，怎样会输

一本书说了这么多，要是说不出"什么情况下我错了"，那就只是一番好听的话。下面把本书的预测和证伪条件一条一条摆出来。证伪只按粗层级写：说得出什么大局面出现，本书就错了，不要求今天就有现成的检验办法。

**预测一（承重预测）：结构相同、历史不同，迁移不同。** 两支场结构，静态结构相似度（g_结构）相同，而回写历史的共同祖先深度（g）不同，那么一条规律在它们之间迁移的成立程度（d）也不同。制度论、结构映射、可迁移性的结构模型，都会预测"结构一样，迁移就一样"。本书押的是相反的一边。**怎样会输**：在许多对场结构上，把静态结构控制住以后，d 和 g 毫无关系。还有一条退路要老实写出：如果将来出现一种不借历史、又能事先算出的静态度量，把 g 分出的差别全部吸收掉，"程度由回写历史生成"这个强说法就要退为"历史是找到结构的捷径"（第 5 章 5.4）。

**预测二：数学内部可以先测。** 用几种代数结构在形式库里的概念派生史算 g，用引理跨结构复用的成功率当 d（第 9 章）。这是研究设计，不是已有结果，本书没有任何一个数字。**怎样会输**：把 g_结构 拉平以后，形式库派生史算出来的 g 对引理复用毫无预测力，这是全输；有关系，但一控制"作者出身"就消失，算半输——历史有用，却只是同一家人写的东西顺手。若库里压根挑不出 g_结构 打平而 g 差得开的配对，本局作废，不算赢也不算输（第 9 章 9.4）。

**预测三：同一性由连接结构决定，而不由表面距离决定。** 普适类是证人（第 6 章）；学习、细胞、土壤三章（第 10–12 章）把这一点推到回写之物上：连接结构是回写史沉淀的。**怎样会输**：学骑车、吃药、种地这三类对象里，把今天能测的读数都控制住以后，家谱远近说不出任何多出来的东西。每一块田各赌一局（第 10–12 章各自写明了输法）：三类里输掉一类，本书就在那一类上收窄，不再说那一类是

同一性谱系数学；只在某一类规律上有用（如土壤里只对次序类规律有用），就收窄到那一类规律；三类全输，本书的"应用市场"一说就站不住。

**预测四：下一阶段最稳定的人机合作，出现在用 AI 测绘场谱系的团队。** 方程理论项目把 4694 条等式律之间约 2200 万对蕴含关系一条条测成"成立"或"不成立"，是这种测绘的二值前身（第 13 章）。**怎样会输**：几年之后，最稳定、最长久的人机数学合作，全都出现在"AI 解题、人审核"的单一赛道上，而测绘场谱系的团队要么没出现，要么散了。

**还有一条总的证伪**：如果仅凭规则和协议——比如事先协调、署名规范、题目登记——就终结了抢题，让数学家与大模型公司长期合作，而数学仍然只有一种场结构，那么本书说的"只有走向场结构的谱系才能和解"，就是错的。作者认为，只要停在统一性数学，双方永远无法和解，这是数学研究内卷的问题（第 2 章）；这条证伪，就是专门给这句话准备的。

本书愿意把这几条写在最后，是因为一个关于"程度"的命题，最怕的是说得太圆。说得圆，什么局面都能解释，也就什么都没说。

## ◆ 四、落点：和解不是谈判

现在可以回答书名了。

陶哲轩讲过一个让人心里一紧的比喻：未解的问题像一种不可再生的资源，像海边缺淡水。他也说过，AI 公司陷入了囚徒困境，没人想跑这么快，但每个人都觉得别无选择。这两句话放在一起，正是一条独木桥上的情形：桥只有一座，题只有那么多，谁先到谁拿走。在这条桥上谈判，能谈的只有"谁先过、怎样排队、过了算谁的"。谈得再好，也只是一份减负令（第 2 章）——桥还是那座桥，挤还是那样挤。

本书的回答是：**和解不是谈判，是赛道由一种场结构变成场结构的谱系。**

数学只有一种场结构的时候，题目像井里的水，舀一瓢少一瓢；AI 舀得快，人就只能眼看着井干。数学成了场结构的谱系以后，每一个反面果子都会分出一支新的场结构，每一支新的场结构里又有一整片还没人推过的规律。这时候题目不再是井水，而像土地上的收成：一块地种熟了，规律在家谱近的地上可以搬，在家谱远

的地上要重新试，每多认出一支，就多出一片可以种的地。AI 撞果子，撞出的反面果子不再是"抢走了谁的课题"，而是"标出了一处新的分叉"；人织谱，把分叉认领下来、立成新的一支，再交给 AI 在支内推导。抢同一颗果子，变成了分工。

在这个意义上，陶哲轩可以做的，不是从签名走向另一份签名，而是从签名走向织谱：主动参与 AI-数学，建立各种形式系统（作者认为，第 13、14 章）；大模型公司可以做的，是把反面果子当产品，转向场谱系的市场——学习、细胞、精神世界、创造力、土壤、教育，这些本来就是同一性谱系的数学，正是 AI-数学作为基础工具最大的应用市场（作者认为，第 10–12、14 章）。优先权按谱系计，你标出的分叉记在你名下，我织成的一支记在我名下，囚徒困境里的那座独木桥，就变成了一片有许多条路的田。

这里要防一个误会。"赛道变多"不是说让数学散成一盘沙，各做各的、互不相认；那是多元化的统一性，几条跑道并排，跑道之间不讲亲缘，抢题会在每一条跑道里照样发生。谱系的意思恰恰相反：每一支新的场结构都记得自己从哪一代分出来，和旧的那一支共享多少连接与次序，规律可以在亲近的枝杈之间搬，在远的枝杈之间要重新验。正因为有亲缘，分出来的新支才不是一块无主的荒地，而是一块有家谱可查、有前人可依的田；也正因为有程度，人与 AI 才知道下一步该往哪一支去测、去织。

这也是为什么本书一再说，统一性数学不是错的。ZFC 和朗兰兹纲领那样的大统一，是数学之场最了不起的成就，它是这张谱里最粗、最老的那根主干。本书要说的只是：主干之外，还有枝。

## ◆ 五、回到罗奶奶的灶台

最后，回到罗奶奶的红烧肉。

罗奶奶做了五十年红烧肉。她的女儿曾晓岚学会了，外孙女谭一禾也在学。三代人做出来的味道相近，又不完全一样：曾晓岚把冰糖减了一半，改成开盖小火慢收；谭一禾嫌肥，又换成了五花偏瘦的那一层。没有人把这当成"背叛了外婆的菜谱"，也没有人因此吵起来说"到底谁的才是正宗"。一家人的红烧肉，本来就是一个谱：同一口锅传下来的连接与先后，在每一代手里回写一点，分出一点。

这是一个构想的场景。假如有一天，一台做菜机器人一夜之间做出了七百种红烧肉，一碗碗摆满了罗奶奶的灶台。难处不在机器人做得好不好——它做得又快又整齐，里头一定有好的；难处在于，罗奶奶一个晚上只尝得过来十来碗。剩下的那些，没人尝，就分不出哪碗只是换了个牌子的酱油，哪碗做坏了，哪碗走出了一条家里从没走过的路。七百碗堆在那里，最先冷掉的，不是机器人的热情，也不是罗奶奶的手艺，而是那些没人来得及尝的好东西。2026 年秋天那七百多道证明，难处也在这里：不是谁对谁错，是成批的果子落下来，没有一团人和工具接得住。

如果只有一种红烧肉算"对"，罗奶奶能做的只有一件事：一碗碗打勾打叉，打完了，灶台上剩下一堆叉，外孙女正在学的那一道也许已经被"做过了"。可如果红烧肉本来就是一个谱，她尝的时候问的就不是"对不对"，而是：这一碗，和我家的隔了几代？那一碗用了湖北的做法却配了娄底的辣，是不是一根新枝，能不能在谭一禾手里接着往下长？机器人也不必只管端菜——它可以帮她把七百碗先按做法分一分，把来历相近的放在一起，让她先尝最可能是新枝的那几碗。

这件事，机器人一个做不完，罗奶奶一个人也做不完。她不必去学怎样造机器人，机器人也不必学会五十年的手感；一个守着那口锅、那份五十年的回写，一个替她把七百碗排好队，合在一起，才能在七百碗里把谱认出来。

这就是本书想留给陶哲轩、也想留给每一位读者的话。抢一颗果子，永远只能谈判；认出一张谱，才能分工。前言里那张短视频截图，让许多人以为数学家在怕 AI；也有人以为 AI 公司只顾抢跑。读完这本书，我们希望你看见的是另一件事：数学家和 AI 都还挤在一条太窄的路上。路变多了，和解自己就发生了。

**带 走 的 话**

1. **宣言抗的是只交结果、不交过程的果子，不是 AI 本身；可补上过程，仍解不开抢题。**
2. **只要数学只有一种场结构，题目就是井水，抢就停不下来；谈判只能排队，不能多出水来。**
3. **数学之场在回写中分枝成谱，反面果子标出分叉，AI 撞果子、人织谱，抢同一颗果子变成分工。**
4. **本书押的是：结构相同、历史不同，迁移就不同；若控制结构后历史毫无作用，本书就错了。**
5. **和解不是谈判，是赛道由一种场结构变成场结构的谱系。**

**小　账**

**本章切开的差异：**在同一条赛道上谈判，与把赛道本身变成谱系。

**本章的场谱系读数：**全书从"数学是一种场结构"出发，落到"数学是场结构的谱系"；回写落在人与 AI 组成的复合主体一次次撞果子、织谱的代际里。

# 附录

本书附录四件：附录一 2026 年 AI 数学事件时间线与出处；附录二　九格表；附录三 近邻文献；附录四 引文核验总表。附录四末附“本书最弱处”，读者可先看。

# 附录一

## 2026 年 AI 数学事件时间线与出处

说明：本时间线只收本书正文用到、且已核对出处的事件。日期以报道或讲座所载为准；只写到月份的，表示原始出处只确认到月份。转述陶哲轩的话一律是转述，不是原文。

**2023 年（前史）** 陶哲轩预言：到 2026 年，那一代 AI 会成为数学研究中可信的合著者。2026 年初，他认为这一预言几乎如期实现。出处：微软《AI Anthology》所收陶哲轩文章 Embracing change and resetting expectations（2023-06）；2026 年初的回顾见《大西洋月刊》（2026-02）。

**2026 年 5 月** First Proof 测评。十道全新的研究级问题，七道被至少一支 AI 团队解到可发表水准，每题算力成本约十到一千美元。同一时期，陶哲轩估计 AI 在埃尔德什问题上的成功率约为百分之五到六，约百分之九十五的重要问题仍在 AI 能力之外。出处：First Proof 测评（1stproof.org，第二批，2026-05）；百分之五到六的估计见 New Scientist 视频 Inside AI's Brutal Race to Solve a Famous Math Problem（2026-10-28）。

**2026 年 6 月** 陶哲轩在欧洲数学会讲座中提出"认知饮食"的类比：食物从稀缺到充裕带来肥胖与体能退化，认知也正从处处是摩擦变得充裕；教下一代保持有意识的认知饮食，会成为教育的一项重大新使命。7 月的书面访谈中再次阐述。出处：欧洲数学会讲座（2026-06-12）；书面访谈（2026-07）。附注：中文短视频里流传的"大脑肥胖症""进食障碍""优渥长大的孩子已有苗头"等说法，未见陶哲轩原话，是中文编辑的概括。

**2026 年 2 月起** 陶哲轩区分"人为摩擦"（繁琐计算，可交给工具，前提是能抽查）与"自然摩擦"（真正的概念难点，抹平它会夺走学习者的收获）。出处：陶哲轩 Mastodon 帖文（2026-02-22）；欧洲数学会讲座（2026-06-12）。

**2026 年 7 月** 雅可比猜想被 AI 构造的反例推翻。陶哲轩用两天与聊天机器人一起消化这一反例：亲自推代数，用工具逐步核对，并查阅文献。出处：陶哲轩博客文章 A digestion of the Jacobian conjecture counterexample（2026-07-21）。

**2026 年 9 月** 陶哲轩在 Mastodon 上把未解问题比作一种不可再生的资源，并用"海边缺淡水"作比。出处：陶哲轩 Mastodon 帖文（2026-09）。

**2026 年 9 月** Alpöge 与 Buckmaster 宣布：带光滑外力项的三维不可压 Euler 方程出现有限时间爆破，论证经 Lean 形式化。陶哲轩说过，此前的共识是 Navier–Stokes 的正则性大概会失败。Euler 与 Navier–Stokes 不是同一个方程，本书把 Euler 爆破列为同向旁例，属本书判断；同向主例是下文 OpenAI 的 Navier–Stokes 证明。出处：陶哲轩 Mastodon 帖文（2026-09-08，Euler 爆破；2026-09-03，此前共识）。

**2026 年 9 月 11 日** 二十五位菲尔兹奖得主联署《A Severe Misalignment of AI in Mathematics》，发布于 mathandai.org，DOI 10.5281/zenodo.22737750。要点：承认大模型数学能力大幅提升；AI 公司把解题当基准，有害于数学与共同体；解题只是概念理解的工具与代理；仓促宣布导致署名与剽窃问题；没有数学家照料，AI 构想的想法不会真正活起来。宣言未呼吁禁止 AI，也未提出具体机制。签名者包括陶哲轩、Scholze、Deligne、Kontsevich、Viazovska、Maynard、邓煜等。出处：宣言原文（mathandai.org；Zenodo）。

**2026 年 9 月（宣言后数日）** 据 Quanta 报道，宣言发布后数日内，七千四百余位研究者加签。出处：Quanta Magazine 相关报道。

**2026 年 10 月初** OpenAI 一次性释出 722 道题的 AI 证明（三百五十余项发现）。陶哲轩读了约十篇：有的延伸既有工作，一两篇有真正的新想法，许多难以理解，一两篇已因错误撤回。他批评这次释出事先未与数学家协调，抹掉了一些年轻人的课题。出处：《纽约时报》2026-10-16 专访；《观察家报》2026-10-23。

**2026 年 10 月（与上条相关）** 陶哲轩转述这场竞赛的起因之一：传言 Anthropic 接近一个千禧年难题，OpenAI 遂将其列为最高优先级，投入数千万美元、约一万个智能体攻 Navier–Stokes；该证明约一百六十五页、运行八十八小时，附 Lean 证书，但他说没有专家真正理解整个论证。出处：同上两篇报道中的陶哲轩转述。

**2026 年 10 月 9 日** 陶哲轩在 AIM 公共讲座讲 Math 2.0：解题只是更有价值目标的代理，在证明充裕的时代已经错位；要拓展前沿，同时让解题去中心化；建议开放阐释问题、消融研究、探索定理邻域等；瓶颈是想象力。他也提出过人机分工与"工业化数学"，并警惕"AI 单一栽培"。出处：AIM 公共讲座（2026-10-09）；"工业化数学""AI 单一栽培"两说见 IEEE Spectrum（2026-06）与 ICM 2026 圆桌（2026-07-25）。

**2026 年 10 月 16 日**　《纽约时报》专访，陶哲轩以"战时状态"形容当前局面，并先称 OpenAI 那批结果为"有毒废料"。出处：《纽约时报》2026-10-16。

**2026 年 10 月 23 日**　《观察家报》报道中，陶哲轩改口为"也许是处理过的废料"。出处：《观察家报》2026-10-23。

**2026 年 10 月 28 日**　陶哲轩接受新科学家采访，称 AI 公司陷入囚徒困境：没人想跑这么快，但每个人都觉得别无选择（转述）。出处：New Scientist（2026-10-28），据自动字幕转述。

**2024 年秋起**　方程理论项目由陶哲轩发起：用自动定理证明器处理 4694 条等式律之间约两千二百万对蕴含关系。出处：项目报告 arXiv 2512.07087。

**历史参照（非 2026 年）**　1889 年英国阿马（Armagh）铁路事故后，英国立法要求采用闭塞信号与连续自动制动。该法还要求道岔与信号联锁。出处：《1889 年铁路管理法》（Regulation of Railways Act 1889）。

## 本书没有采用的说法

2026 年下半年，围绕陶哲轩和 AI 数学，中文网络上流传着不少短视频与转帖。本书只用上面列出的、能对上出处的事件与转述。以下几类说法，本书一律没有采用，读者遇到时也不妨多留一个心眼：

一是把陶哲轩的类比当成诊断的说法。"认知饮食"是他用来讲教育新使命的一个比方；"大脑肥胖症""进食障碍"这类词，未见他的原话，是转述者的概括，本书不把它们当成他的观点，更不当成任何医学判断。

二是把宣言说成"抗 AI"的说法。宣言原文承认大模型数学能力大幅提升，没有呼吁禁止，也没有提出具体机制。本书第 1 章专门讲过这一误读为什么流行。

三是没有出处的数字。凡是说某某公司"已经证明了"某个大猜想、某个团队"花了多少钱"而找不到报道或讲座出处的，本书一概不用。上文 Navier–Stokes 那一条里的金额、智能体数量、页数与时长，都是陶哲轩在采访中的转述，本书照转述记，不把它当作公司的正式公告。

四是把陶哲轩的个别措辞当成他的定论。"有毒废料"一词他自己很快改了口；本书两种说法一并记下，并注明先后。

## 怎样读这条时间线

把上面的事件按本书的眼光分一分，可以看出三条线索缠在一起往前走。

第一条是果子越撞越多、越撞越快。5 月 First Proof 测评里，十道研究级新题被解出七道；10 月初，一次释出七百多道题的证明。撞果子的能力，在半年里从"能解几道"走到了"成筐地交"。

第二条是果子里出现了两种不同的分量。7 月的雅可比反例，逼着共同体收窄了一条默认了很久的路，按本书的判据是反面果子；那份约一百六十五页的 Navier–Stokes 爆破证明，印证了此前"正则性大概会失败"的共识，是同向果子（9 月的 Euler 爆破只作旁例）。可它又是难消化的：机器检查通过了，专家却说没人真正理解整个论证——难消化不等于反面，它卡在"真"已核过、"位置"却没人能标的地方。这正是本书第 13、14 章说的，二值检查与谱系检查之间的那道缝。

第三条是数学家的回应从"立场"走向"做法"。9 月的宣言表明立场；10 月 9 日的 Math 2.0 讲座已经在提开放阐释问题、消融研究、探索定理邻域这些具体做法；陶哲轩的措辞从"有毒废料"改为"也许是处理过的废料"，也透出态度在挪动。本书第 14 章的路线图，就是顺着这第三条线索往前推的一步：从签名到织谱。

时间线只记到 2026 年 10 月底。这三条线索往后怎样走，是本书的预测要接受检验的地方。

# 附录二

## 九格表

说明：本书的判断落在纠缠（E）之内——数学这一信息之场（E2），与理念·现实·自我三界（E1）、内能·动能·势能三态（E3）缠在一起时，场结构是一种，还是成了谱系。条件由显露（S 行三层）与差异序列（D 行三层）两两组合而成，九种全扫。"已发生"格写现况，"半发生"格写已有的那一半和缺的那一半，"未发生"格不硬填内容，只写为什么至今没发生、什么矛盾会让它发生。

| 条件 | 状态 | 现况，或为何未发生与触发矛盾 |
| --- | --- | --- |
| S1 规范 × D1 意义目标 | 半发生 | 创造场结构的新一支：历史上非欧几何、多面体定义的分化都是新枝，但多为个别天才偶发，没有成为可分工、可计量的常规。 |
| S1 规范 × D2 路径组织 | 半发生 | AI 在一种结构内推导→撞出果子→人回写成分叉→AI 支内推导：前三步已零星出现（雅可比反例），"回写成分叉后再交回机器推导"的环尚未闭合。 |
| S1 规范 × D3 优化约束 | 未发生 | 把"误差"读作一个结果越出其场谱系的程度。未发生是因为：在一种场结构里，误差只有对与错两值，用不着问"越出多远"。触发矛盾：反面果子多到二值检查分不清"错了"与"在另一支里对"，两者的顶撞会逼出程度化的误差。 |
| S2 模态 × D1 意义目标 | 零星 | 把数学之场当作有半径、有纠缠范围的"场态"来看：伞模型做了非局域化处理，引入半径与纠缠范围，是零星的尝试。 |
| S2 模态 × D2 路径组织 | 半发生 | 人机一起扫描场谱系的边界：消融研究、探索定理邻域、方程理论项目的二值测绘已在做；缺的是从"能否推出"走到"共享多少代来历"的计量。 |
| S2 模态 × D3 优化约束 | 未发生 | 保留谱系冗余——有意留下看似重复的分支，不急于统一。未发生是因为：统一性数学把冗余当损耗，见到并列分支就要归并。触发矛盾：归并后的统一模型在细胞、学习、土壤等处一再失灵，被删掉的分支反而能用，冗余与损耗的顶撞会让"留谱"变成值得付的代价。 |

| 条件 | 状态 | 现况，或为何未发生与触发矛盾 |
| --- | --- | --- |
| S3 价值 × D1 意义目标 | 未发生 | 真在谱系内有程度，善是对哪块田有用，二者分开记。未发生是因为：在一种场结构里，"对"即处处都对，真与善无须分账。触发矛盾：AI 产出大量"真而无用"与"有用而只在一支里真"的结果，混记一笔的代价越来越高。 |
| S3 价值 × D2 路径组织 | 未发生 | 从价值起手组织数学路径——先问一支场结构能养活哪块田，再决定往哪里推。未发生是因为：现行激励以解题与优先权为先，价值只在事后追认。触发矛盾：撞果子的速度远超用果子的速度，果子堆积而无人用，推导路径与价值落点之间的顶撞会倒逼路径改从价值起手。 |
| S3 价值 × D3 优化约束 | 未发生 | 一支谱系展开多远、养活几块田，作为约束来计。未发生是因为：既无谱可记，也无"养田之功"的账。触发矛盾：公司转向同一性谱系的应用市场后，算力投向哪一支需要有依据，投入的损耗与收获的分布不均会逼出这本账。 |

## 怎样读这张表

为什么只扫"显露 × 差异序列"这九种组合，而把判断放在纠缠一行里？因为本书要问的只有一件事：数学这个信息之场，是一种结构，还是成了谱系。这件事本身落在纠缠（E）里，它在怎样的显露与怎样的差异序列下会发生、会卡住，就是九格要扫的条件。九格分开列，只是为了看得清；实际发生时，一格的推进总会牵动别的格——比如 S1·D2 那个"回写成分叉再交回机器"的环一旦闭合，S1·D3 的"程度化误差"就有了用处，S3·D1 的"真善分账"也就有了材料。

表里五格是"未发生"，比"已发生"多。这不是要证明什么，而是如实记下今天的样子：同一性谱系数学还在门口。未发生格里写的"触发矛盾"，读法都一样——两样东西在顶着，顶得越来越厉害，第三样东西就要变形。比如 S2·D3：统一性数学的习惯是见到并列的分支就归并，把冗余当损耗；可归并以后的模型在细胞、学习、土壤上一再失灵，冗余与损耗的这股顶撞积累到一定程度，"有意留谱"才会从一种浪费变成一种值得付的代价。

还要说一句：这些"触发矛盾"本身也是可以落空的。假如 AI 的果子越撞越多，二值检查却一直够用，没有人觉得非要分清"错了"与"在另一支里对"，那么 S1·D3 这一格就不会因为本书写的这股矛盾而发生，本书对它的判断就要改。价值一行的三格也一样：假如果子越来越多，却始终有人接得住、用得上，从没出现"真而无用"的堆积，S3·D1 与 S3·D2 两格也就不会被逼出来。

各格在正文中的主要落点：S1·D1 见第 7 章 7.4；S1·D2 见第 7 章 7.6、第 8 章 8.4 与第 14 章 14.2；S1·D3 见第 7 章 7.6 与第 13 章 13.2；S2·D1 见第 5 章 5.5；S2·D2 见第 8 章 8.5 与第 13 章 13.1；S2·D3 见第 12 章 12.5；S3·D1 见第 14 章 14.3；S3·D2 见第 14 章 14.3（从抢大果子转向哪块田用得上）；S3·D3 见第 14 章 14.4（养田之功），田的样子见第 10–12 章。

# 附录三

近邻文献

说明：以下为本书第 6 章等处交手的近邻学说的代表著作，按正文出现的组别排列。书目信息凭可靠知识列出；拿不准的卷期、页码、年份或对应人名，标〔待核〕。本书对这些学说的转述，只取其核心主张，不引原话。

为什么要把这么多邻居列出来？因为本书主张的东西，有一大半别人早已说过，只是说在别处、说到半路。如实列出他们，一是对他们公道，二是让读者自己去查：本书多出来的那一步，到底是不是真的多出来了，还是只换了一套说法。每组书目之后附一段"本组读法"，交代这一组走到了哪里、停在了哪里。读法是本书的概括，不代表各位作者本人的表述；书目之外的细节，以原著为准。

## 一、科学变革与数学发现

- Thomas S. Kuhn. The Structure of Scientific Revolutions. Chicago: University of Chicago Press, 1962.
- Imre Lakatos. Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery. Ed. J. Worrall & E. Zahar. Cambridge: Cambridge University Press, 1976.
- William P. Thurston. "On Proof and Progress in Mathematics." Bulletin of the American Mathematical Society 30(2), 1994: 161–177.
- W. T. Gowers. "The Two Cultures of Mathematics." In V. Arnold et al. (eds.), Mathematics: Frontiers and Perspectives. Providence: American Mathematical Society, 2000.
- Alexander Grothendieck. Récoltes et Semailles（手稿 1985–1986 年流传；Gallimard 2022 年正式出版）。
- Wolf、Loukides 关于 AI 与数学分工的论述（2025）〔具体篇目、出版信息待核〕。

· Alex Kontorovich. "The Shape of Math To Come." arXiv:2510.15924, 2025.

本组读法：库恩讲常规科学与范式转换，但不分新结果是顺着共同体默认走（同向），还是逼它收窄（反面）；拉卡托斯在多面体的例子里展示了反例迫使定义收窄、概念分化，这与本书的"反面果子"最相近，本书须如实承认这一点，多出的只是把分叉计入回写派生树、改变 g 这一步的计量。瑟斯顿与高尔斯讲数学里"理解"与"两种文化"的分野，格罗滕迪克的回忆录讲他那种"让问题自己化开"的做法；孔托罗维奇设想数学家今后直接在形式系统里工作，让 AI 帮着把形式库长得足够快。Wolf、Loukides、Kontorovich 与陶哲轩的分工论，构成"AI 做常规、人做典范"的第一组共识。本书不靠这组共识立论，只交代它停在哪里：它把数学当成不变的描述语言，没回答人去做哪一种典范。

### — 二、多元宇宙、逻辑多元与程度化的真值

· Joel David Hamkins. "The Set-Theoretic Multiverse." The Review of Symbolic Logic 5(3), 2012: 416–449.（正文"汉金斯"即指此人）

· JC Beall & Greg Restall. Logical Pluralism. Oxford: Oxford University Press, 2006.

· M. P. Fourman & D. S. Scott. "Sheaves and Logic." In Applications of Sheaves, Lecture Notes in Mathematics 753. Berlin: Springer, 1979: 302–401.（拓扑斯与 Ω-集）

· Radu Mardare, Prakash Panangaden & Gordon Plotkin. "Quantitative Algebraic Reasoning." Proceedings of LICS 2016. IEEE, 2016.（量化等式逻辑）

本组读法：汉金斯的集合论多元宇宙、比尔与雷斯托尔的逻辑多元论，主张不止一个合法的集合论宇宙、不止一种合法的逻辑后承；拓扑斯内部逻辑与 Ω-集让"相等"可以取多个真值，量化等式逻辑让等式带上一个距离。这些工作都让"同一"有了程度，必须如实承认，不能写成"只有 0 和 1"。本书指出的停点在于：程度由一个事先给定的真值对象或度量统一安排，属于"多元化的统一性"，而不由场结构的回写历史生成。

## 三、制度论、理论图与数学结构主义


- Joseph A. Goguen & Rod M. Burstall. "Institutions: Abstract Model Theory for Specification and Programming." Journal of the ACM 39(1), 1992: 95–146.
- Florian Rabe & Michael Kohlhase. "A Scalable Module System." Information and Computation 230, 2013: 1–54.（MMT 理论图）
- Nicolas Bourbaki. "The Architecture of Mathematics." The American Mathematical Monthly 57(4), 1950: 221–232.
- Stewart Shapiro. Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology. New York: Oxford University Press, 1997.


本组读法：制度论用一套抽象框架把许多逻辑系统放在一起，用态射连接；MMT 把理论组织成一张理论图，定理沿视图搬运；布尔巴基以母结构组织全部数学；结构主义主张数学对象就是结构中的位置。它们都讲到理论之间的结构亲缘，是本书最需要尊重的邻居。本书指出的停点在于：这种亲缘是同时的、按定义给定的——态射在或不在，与这两支理论各自是怎样一代代长出来的无关。本书的承重预测正是要在这种结构亲缘相同的条件下，看历史亲缘还起不起作用。

## 四、类比、可迁移性与迁移学习


- Dedre Gentner. "Structure-Mapping: A Theoretical Framework for Analogy." Cognitive Science 7(2), 1983: 155–170.
- Judea Pearl & Elias Bareinboim. "External Validity: From Do-Calculus to Transportability Across Populations." Statistical Science 29(4), 2014: 579–595.
- Shai Ben-David et al. "A Theory of Learning from Different Domains." Machine Learning 79, 2010: 151–175.
- Amir R. Zamir et al. "Taskonomy: Disentangling Task Transfer Learning." Proceedings of CVPR 2018. IEEE, 2018.


本组读法：根特纳的结构映射理论说，类比靠关系结构而非表面特征来迁移；珀尔与巴雷因博伊姆的可迁移性理论用选择图判断一个因果结论能否从一个人群搬到另一个人群——选择图本身就是结构，本书不把它写成"静态距离"的稻草人；本-戴维等人给出跨领域学习误差的界；Taskonomy 测出视觉任务之间的迁移关系。它

们共同说明迁移跟着结构走。本书指出的停点在于：这些框架里，迁移与对象的历史无关；本书主张控制结构以后，历史亲缘仍决定迁移的程度。

### — 五、规律的程度与概念的拼贴


- Sandra D. Mitchell. "Dimensions of Scientific Law." Philosophy of Science 67(2), 2000: 242–265.
- Sandra D. Mitchell. Biological Complexity and Integrative Pluralism. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- James Woodward. Making Things Happen: A Theory of Causal Explanation. New York: Oxford University Press, 2003.
- Nancy Cartwright. The Dappled World: A Study of the Boundaries of Science. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- Mark Wilson. Wandering Significance: An Essay on Conceptual Behavior. Oxford: Oxford University Press, 2006.


本组读法：米切尔把规律的稳定度看成有程度的，伍德沃德讲因果关系的不变性程度，卡特赖特说科学规律只在一片片受控的地方成立、世界是"斑驳的"，马克·威尔逊说一个概念在不同应用域里一片片拼贴、由历史上的补丁衔接起来——威尔逊是本书最近的邻居之一，须正面交手。本书指出的停点在于：他们讲的程度属于经验规律或概念的使用，没有把程度立为一个可测的历史亲缘量，也没有把它与静态结构相似度分开。

### — 六、历史生成的程度：分层模型、系统发育与普适类


- Joseph Felsenstein. "Phylogenies and the Comparative Method." The American Naturalist 125(1), 1985: 1–15.
- Andrew Gelman & Jennifer Hill. Data Analysis Using Regression and Multilevel/Hierarchical Models. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- Kenneth G. Wilson. "Renormalization Group and Critical Phenomena. I." Physical Review B 4(9), 1971: 3174–3183.（普适类）
- Leo P. Kadanoff. "Scaling Laws for Ising Models Near Tc." Physics 2(6), 1966: 263–272〔卷期页码待核〕.（普适类）

本组读法：费尔森斯坦的系统发育比较方法指出，物种不是彼此独立的样本，它们共享的祖先历史会影响性状之间的相关；分层模型让各组参数在一个共同的上层分布里互相借力。这两者都让"历史"生成"程度"，可只用于参数估计与生物性状，没有用到数学之场本身。威尔逊与卡丹诺夫的重整化群与普适类说明：微观细节差别很大的系统，只要连接结构相同，临界行为就落入同一类——这是本书的证人，说明同一性由连接结构而非表面距离决定。

## 七、本书引用的 2026 年原始材料

- 二十五位菲尔兹奖得主. A Severe Misalignment of AI in Mathematics. mathandai.org, 2026-09-11. DOI: 10.5281/zenodo.22737750.
- 其余报道与讲座（《纽约时报》2026-10-16；《观察家报》2026-10-23；New Scientist 2026-10-28；AIM 公共讲座 2026-10-09；Quanta 报道）见附录一。

本组读法：宣言原文是本书讨论的起点；正文对宣言内容的转述，以附录一所列要点为准。

**附录三的总结**：把上面六组邻居排在一起看，它们各自走到了本书要走的路上的某一段。有的让同一有了程度（第二组），有的让理论之间有了结构亲缘（第三组），有的让迁移跟着结构走（第四组），有的让规律的成立有了程度与拼贴（第五组），有的让历史生成程度（第六组）。本书多走的一步，是把"结构亲缘"与"历史亲缘"分开，主张控制前者以后，后者仍决定规律迁移的程度，并把这一点用到数学之场本身与人机分工上。若在控制静态结构相似度以后，迁移程度与回写历史无关，这一步就是多余的，本书的命题就错了。

# 附录四

## 引文核验总表

说明：下表按章列出全书正文与附录中仍标〔待核〕的条目，一行一条，标记在正文原位保留。这些条目多是学说的通俗转述、史实细节或书目信息，本书没有凭印象补全，等行家与原始文献核对后再定。

### 第 3 章

- 库恩"常规科学"与"典范转移"的原书具体表述（3.2）。
- 高尔斯"两种文化"的原文具体表述（3.2）。
- 瑟斯顿论数学进步在于理解的文章大意（3.2）。
- 格罗滕迪克"上涨的海"比喻的出处与原意（3.2）。
- Wolf、Loukides 2025 年关于人机分工的具体论点（3.2）。

### 第 4 章

- ZFC 外延公理的具体表述（4.2）。
- 朗兰兹纲领的通俗表述（4.2）。
- 汉金斯集合论多元宇宙观的具体表述（4.3）。
- 逻辑多元主义的代表表述（4.3）。
- Mardare–Panangaden–Plotkin 量化等式逻辑的具体形式（4.3）。
- 娄底话与长沙话在湘语内部的分片归属（4.4）。
- 汉语方言谱系研究的具体做法（4.4）。

### 第 6 章

- 马克·威尔逊是否在别处提出过可测的量化说法（6.4）。

### 第 7 章

- OpenAI 那份 Navier–Stokes 证明所针对的方程具体形式与结论的确切表述，以原始公告为准（7.3）。

- 雅可比猜想各项化归与等价结果（含与狄克斯米尔猜想的关系）的确切条件（7.3）。
- 雅可比反例所在的维数、次数与系数域（7.3）。
- 库恩对数学是否同样适用的具体说法（7.4）。
- 欧拉示性数这一推广在拉卡托斯书中的呈现程度（7.4）。
- 用"另立一支"四检验判定雅可比反例的各项结论，均需专业文献核对（7.5）。

**第 9 章**

- Mathlib 从 Lean 3 旧库整体迁移时的名称对照记录今天是否完整可查（9.2）。

**第 12 章**

- 美国土壤系统分类、联合国粮农组织世界土壤资源参比基础、中国土壤系统分类的具体层级与命名（12.1）。
- 李比希最小养分律的表述与归属（12.1）。
- 米切利希方程等产量—施肥曲线（12.1）。
- 田间试验统计中地块随机效应的通行处理（12.1）。
- 詹尼成土因素方程的具体表述与年代（12.4）。
- 植物—土壤反馈研究的代表学者与基本结论，如 Bever 等人的工作（12.4）。
- 农业试验中多层随机效应模型的通行做法（12.4）。

**附录三**

- 书目中拿不准的卷期、页码、年份或对应人名（总说明）。
- Wolf、Loukides 2025 年论述的具体篇目与出版信息。
- Kadanoff 1966 年论文的卷期页码。

## — 本书最弱处

如实说，本书有几处最经不起推敲，读者应当先看这里。

第一，雅可比反例的四检验判定待行家核对。第 7 章把雅可比反例当作反面果子的主例，并用本书提议的四条检验演示它为何算"另立一支"。可反例的具体维数、次数与系数域，它与已有化归、等价结果的确切关系，本书都没有核实；四条检验

各判成什么，只是演示判法，不是结论。若行家核对后发现那一片的推导先后并没有翻过来，这颗果子就要改记为"加一条假设"，第 7 章的主例需要更换。

第二，g 的计数尚是研究设计，未经实测。第 5 章给了 g 的定义和细数法，第 9–12 章给了在形式库、学骑车、细胞、土壤上先测 g、再测 d 的设计。可本书没有任何一个实测数字；承重预测"控制 g_结构　相同时，d 随 g 变化"是一个押注，不是已得的结果。配对挑不挑得出来、传承边记不记得全、工程起因的改动怎么剔除，都还只停在设计里。

第三，部分学说为转述。库恩、拉卡托斯、汉金斯、威尔逊、卡特赖特、米切尔、伍德沃德、根特纳、制度论、MMT 等近邻学说，本书只按可靠知识转述其核心主张，不引原话；转述难免有粗细不当之处，以原著为准。

第四，伞模型只按作者原意转述，没有展开成可计算的形式；"程度能不能写进逻辑本身"（第 13 章 13.4）也还没想好。

第五，书中的红烧肉、骑车、吃药、种地等日常例子都是构想的场景，用来演示计数和预测，不是证据。

# 版本说明

本版字数、版本与交付

本版为 2026 年 11 月第 1 版，是研究性专著的初稿，不是定稿。前言、十四章、结语与附录的正文实计 192,728 个汉字，合约 19.3 万字；章题、节题、表格不计入。

书稿的形成经过：2026 年 11 月 1 日，王德生在一次对话中由菲尔兹奖得主联署宣言之谈提出本书母题——只要数学停在统一性上，数学家与大模型公司就无法真正和解；出路是数学走向场结构的同一性谱系，AI 撞果子，人织谱。由此定出细化大纲（四编十四章）；随后按统一任务书由 10 位 AI 写手分章执笔，再由独立质检按口径、人物、引文、文风逐章审读，按审读意见回改，补写结语与附录，统稿合成。

本版的边界：陪读人物与日常场景是构想；第 9–12 章的测量是研究设计，没有实测数据，承重预测与各条证伪条件尚未检验；附录二九格表里的“未发生”格只写为什么至今没发生、什么矛盾会让它发生，不硬填内容；正文中标〔待核〕的条目由附录四列表，附录四末尾的“本书最弱处”写明了全书最经不起推敲的几处。副题暂按推荐项“从统一性数学到同一性谱系数学”，日后可改。待核条目经行家与原始文献核对后，再版回改。

本书同时是一个出版单元：全文阅读（在线翻页、全文网页、PDF 与 Word）、学习包、专属智能体的问对。三者入口见书籍详情页。勘误与意见，请在书籍详情页留言。

核 心 问 题

## 和解不是谈判，
## 是赛道变多。

——本书结语

2026 年秋天，菲尔兹奖得主们发出联名宣言，陶哲轩把一次放出的七百多道 AI 证明说成“有毒废料”，许多人把这读成“数学家反 AI”。核对原话以后，问题反而更清楚：陶哲轩不反对 AI，大模型公司也不反对数学；双方谈不拢，是因为挤在统一性数学的同一条跑道上，抢同一颗果子。

本书用 SDE 发生学换一个眼光：数学是 E2 之场，是特征纠缠之间的连接、次序与结构；场结构在一代代回写中分枝成谱，同一性因此有了程度，可以沿回写派生树数出共同祖先的深度 g，在搬一条规律之前先量。AI 在一支里千倍推导，撞出反面果子；人把果子接住，织成谱系的新分叉。

全书前言、四编十四章、结语与四个附录：从宣言与内卷讲起，立起三种同一性、回写派生树与反面果子，设计在形式库、学骑车、细胞、土壤上先测 g 再测 d 的对赌，最后画出陶哲轩与大模型公司各自可走的路线图。

这是一部研究性专著：核心问题、SDE 框架与全书母题由王德生提出，正文由 AI（Claude）协作撰写，经分章质检与统稿；书中人物与场景是构想，第 9–12 章的测量是研究设计，没有实测数据，没有独立学术评审。

**AI 撞果子，人织谱。**

**德麦国际出版社** · Demai International Press
德麦国际专著第 552 号 · 前言、四编十四章、结语、附录 · 约 19 万字
ISBN 979-8-90690-554-3 · 定价 US$22.00

ISBN 979-8-90690-554-3
9 798906 905543