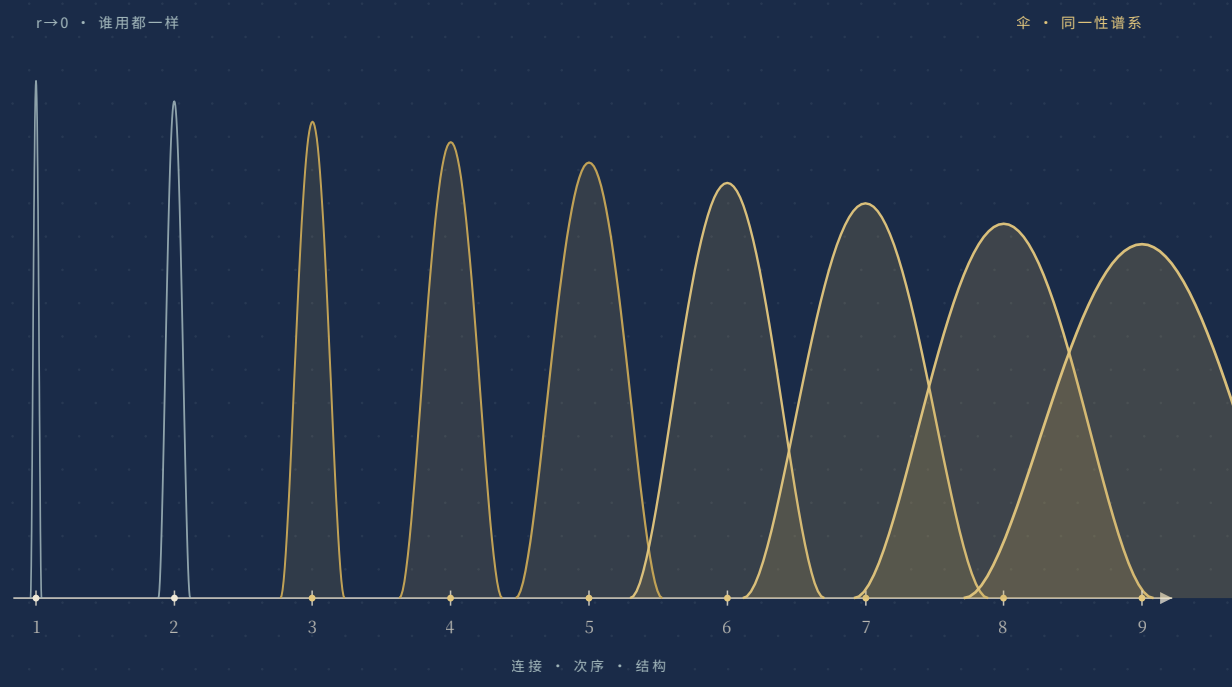
SDE UNIVERSES
德麦国际专著 · 第 554 号

标准化的典范重生

数学标准的典范重生

从统一性到同一性谱系



阳涌　著

德麦国际出版社
Demai International Press

德麦国际专著 · 第 554 号

数学标准的典范重生

从统一性到同一性谱系

阳涌　著

德麦国际出版社
Demai International Press · Singapore

出　版　信　息

书名	《数学标准的典范重生》
副题	从统一性到同一性谱系
英文书名	The Paradigm Rebirth of Mathematical Standardization: From Unity to the Genealogy of Identity
著者	阳涌
出版	德麦国际出版社（Demai International Press）· 新加坡
编号	德麦国际专著第 554 号
ISBN	979-8-90690-559-8
定价	US$20.00
开本	170 mm × 240 mm
字数	约 19.7 万字（前言、导论、十八章、结语与附录正文 196,607 个汉字）
版次	2026 年 11 月第 1 版

全书结构：前言；导论；五编十八章；结语；附录一至四；版本说明。

版权所有　侵权必究

统一性，是谱系在 $r \to 0$ 处的退化端。

—本书结语

作者介绍

阳涌，教育研究者、一线教育实践者，英语语言文学硕士。拥有十六年基础教育教学、课程研发与学校管理经验，长期致力于数学、语言、思维、学习科学与人工智能教育的跨学科研究与实践。

自 2019 年起跟随王德生博士持续学习，系统研修“三视角”“321 智慧”、SIO 及 SDE 本体论，逐步形成以整体生成、差异推进、关系纠缠为核心的教育观；近年专注于生成式学习、数学底层结构、创新阅读与教育智能体研发。已发表教育类论文 40 余篇、原创学科教材 16 本，在德麦国际出版专著多部，包括《课堂的智慧》《答案之后》《学习发生学导论》《学习兴趣发生学导论》《天文学思想史》《为什么人人都想重开？》等。

成书说明

这是一部研究性学术专著，请按它实际做到的范围来读。

谁写的。全书的母题与核心命题由王德生口述提出：数学在 E2，是特征纠缠的场；数学的作用是对连接、次序、结构的三化；标准化是数学形成的评估标准；统一性标准化使意义三律亏缺运行，并在社会上带来人的技术性异化；标准化的典范重生，是从统一性走向同一性谱系；三种感觉模态上的谱系不同；伞模型是同一性谱系标准化的数学形态。阳涌据此成书，王德生指导。正文由 AI（Claude）协作撰写：按统一任务书由十个写手分章执笔，经两轮统稿（核对事实、补厚）与三审（内容、编辑、校对）。执笔者与审稿者同属一个底座，不能互作独立证据；本书没有经过独立学术评审，也没有实测数据。

哪些是已证数学，哪些是主张。书中引用的数学定理与史实均按通行文献写出；伞模型的退化极限只在特定情形下已证，一般情形是猜想，书中分栏写明；统一性标准化与意义三律亏缺的关系、三模态谱系、技术性异化的来源，是本书的判断，第十八章给出五条判决预测与撤回条件。两处由作者定的设计参数保留原样：圆柱模型的形态待作者核定；判决预测的数值阈值待定。

哪些是设想。前言中的两个课堂是为说明问题设想的场景，不是课堂实录。

正文字数。前言、导论、十八章、结语与附录的正文实计 196,607 个汉字；章题、节题、表格不计入。

前言

◆ 红叉底下的那一步

习题册的末页印着答案。十六年的教学里，我翻过的答案页，大概比翻过的教案还多。

先设想一个课堂（这是为说明问题设想的场景，不是某一次课的实录）。分数加法刚讲完，一个孩子在作业本上写下 1/2 + 1/3 = 2/5，红笔画上叉，旁边批注：分子加分子，分母加分母，错误。把孩子叫来问，他的理由往往是现成的：上周的投篮，第一场投两个中一个，第二场投三个中一个，两场合起来，投五个中两个，不就是五分之二吗？

这个理由在数学上站得住。(1+1)/(2+3) 是把两场的命中数与出手数分别相加，得到的是合并后的命中率，它恰好落在 1/3 与 1/2 之间。这种分子加分子、分母加分母的合并，数学上叫中位分数，在法里数列里正是用来生成相邻两项之间新项的办法。孩子做的是另一种运算，用在另一类对象上。红叉判错的，是他把这种运算写在了“分数加法”的位置上。作业批改的标准是对的：在分数作为数的那一套规定里，1/2 + 1/3 = 5/6，谁来算都是 5/6。可是在这个标准里，孩子那一步没有位置，只叫错误。

我并不想借这个例子批评批改。恰恰相反，我愿意先把话说在前头：标准答案是文明里最好用的东西之一。度量衡、记数、货币、考试、工程图纸、通信协议，没有一处离得开“谁来算都一样”。一张图纸能从一个工厂寄到另一个工厂，一道题能由几十万人同时作答而被同一把尺子衡量，靠的就是这个。我在课堂上向孩子们讲授的，大部分正是这样的东西，也应当如此讲授。

麻烦出在另一个地方。标准答案对谁都一样，它也就可以脱离做题的那个人而存在：可以被印在末页，可以被背下来，可以被一台机器在一秒钟内生成。一个学生交上全对的卷子，却说不出某一步为什么可以这样走，这样的情形，教过书的人都见过。答案在，人不在。今天，生成答案的成本接近于零，这件事变得格外清

楚：凡是“谁用都一样”的东西，都可以被搬走，被搬到不需要任何人在场的地方。

孩子的 2/5 和全对而无人在场的卷子，是同一个问题的两头。前者是标准把差异只叫作错误，后者是标准把发生它的人搬空了。我花了很长时间，才分清楚这里要问的不是“要不要标准”，而是“以什么方式标准化”。

◆ 从《标准如何生成数学》到这本书

这本书有一部前身，原稿名为《标准如何生成数学》。它问的是：当数学的标准体系发生变换，哪些东西被保留，哪些对象与问题得以产生，哪些操作受到排除，我们凭什么承认这种变化有效。为了回答，原稿比较了负数与复数的扩展、微积分的严格化、集合论悖论与公理化、非欧几何、范畴论等一批案例，并附上有限计算与教学任务的设计。那份工作的数学部分与史料部分经过逐条核对，本书凡取用之处，仍以核对后的版本为准。

写到后面，我渐渐觉得原稿的问题还留着一层没有问到。它把“标准”当作可以变换的研究对象，追问的是变换发生时有什么得失。但不论怎样变换，原稿里的标准始终以同一种方式存在：对谁都一样，不因人、因地、因来历而异。变换的是标准的内容，没有变的是标准的方式。当我把数学史上那些标准的更替并排摆开，发现它们大多是一个统一性换成另一个统一性，或者把一个统一性扩成几个并列的统一性。方式没有动。

再设想一个低年级的课堂。数一堆积木，孩子可以一眼看完，可以一块一块摸过去，也可以跟着拍手数“一、二、三”。三种数法落在三种不同的感觉通道上，规矩却很不一样。眼睛看到的东西，可以一一对应，可以回头再看，可以几个人同时看，所以最容易被写成“谁来数都一样”。声音随时间流走，抓不住，也难以几个人在同一刻共有同一段。手上的数最依赖路径和身体：捏一个桃子判熟不熟，一手一地地传，教不出统一的刻度。这样看来，今天教科书里“对谁都一样”的数学，其实是视觉这一条通道上的标准化，被推广成了全部数学的标准化。这个观察来得很晚，却解释了我在课堂上为什么总觉得有些东西被挡在了标准之外。

这就把问题改成了另一个：标准化的方式本身，能不能重生？若能，它在不同的感觉通道上，应当有不同的样子。这一点，本书从导论 0.1 就开始交代。

本书的回答分五步。第一步，数学是信息的一个维度，它的作用之一是标准化，而标准化使文明的组织与连接成为可能；本书不反对标准化。第二步，两千年来数学的标准化以统一性化解差异的张力，这种方式使意义的三条运行规律在源头处亏缺，走出数学进入社会，则表现为人的技术性异化。第三步，数学界今天设想的出路，多元、分层、多宇宙，仍是统一性，只是写成了复数。第四步，站内已有的伞模型给出了另一种标准化的数学形态：构造同一，配置成谱，现有数学是伞在特定参数下显露的稳定态。第五步，是这种标准化应当被怎样检验，包括它在什么条件下输。

原稿的数学与史料，在本书中作为材料取用，核对过的部分保持原样；它的论点则由本书从头重新建立。书名随之改为《数学标准的典范重生——从统一性到同一性谱系》。

◆ 关于这本书的几点交代

本书是一部学术专著，用来提出一个母题并为它建立论证。母题里有已经证明的部分，有史料可查的部分，有我的判断，也有至今只是猜想的部分。这几类材料的身份，在导论 0.6 一次交代清楚，后面各章不再重复。读者如果只想检查数学，可以直接去看那一节，再按章核对。全书的数学与史料，凡经核对者都已写明条件与年份。每章之末附有本章结论与本章参考，参考分原始文献、研究文献、站内著作三组，便于回到出处。各章章首有提要，章末有结论，匆忙的读者可以先读这两处，再回头找论证。站内著作一律写作“第 N 号《书名》”，可以到站内按号查阅。

全书由导论、五编十八章、结语和四个附录（附录一至附录四）组成。第一编说明数学为什么是一个“场”，标准化为什么只是它的一化，以及怎样评判一种标准化；第二编考察单数的统一性在几何、分析、基础和结构理论里达到的顶点，以及它沿途留下的例外清单；第三编检查数学界今天设想的出路，即强度阶梯、多宇宙、宽容原则与“相同”的扩张，看它们为什么仍属统一性；第四编建立伞模型这一数学形态，并把它放回意义三律里读；第五编把枯竭写到社会一侧，再写下本书输的条件。读者可以按兴趣选入口，但导论 0.3 的三个定义是后面各编共用的，建议先读。

写作中我遵守三条纪律。其一，不替任何人立“决定了标准”的主语。数学家们写下了定理、公理、教材，这些著作是实在的；但标准如何在运行中显影、凝成、退化与重生，是一个过程，本书用运行态来写它。其二，凡数学命题，条件与量词写准，拿不准的地方逐条核过再写。其三，凡是别人的原话，宁可只述大意，也不凭记忆添字。

对于教师与家长，我希望这本书能带来一点具体的东西：当你下次在作业本上画叉之前，先看一眼叉底下的那一步，问它在哪一套规定里是对的。拿 2/5 来说，在合并命中率的规定里它是对的，在分数加法的规定里它是错的；两个问题的回答不同，是因为问的本是两套规定。这样问，并不是要取消叉；多数时候叉仍然该画。只是我们会知道，叉所代表的是一把尺子，而不是数学本身。

对于研究数学和数学哲学的读者，我希望这本书提供的是一个可以被反驳的东西。第 18 章写了五条判决预测（预测零至预测四），并写明它们各自在什么读数下会让本书的主张撤回。一本书若不敢写下自己输的条件，就还没有进入学术讨论。

还要交代一件事：这本书的出发点是课堂，论证却不靠课堂。教学里的观察给了我问题，也给了我对“标准答案”的体会，但这些观察没有被当作证据使用。凡要作为证据的，都放在数学、史料或预先写明读数的判决预测里。一位教师的十六年，可以让他看见一个问题；这个问题是否成立，要由别人用别的材料来判。我把这两件事分开，是想让本书经得起不认同我的人的检查。

最后说一句关于文体。前言里写了课堂，导论里写了黑板，那是因为这个问题是从那里长出来的。进入正文之后，我尽量让每一章从一个具体的数学场景或历史场景开始，让读者先看到一件东西，再听到关于它的论证。若有读者因此觉得本书不够“抽象”，我愿意接受这个批评；但我相信，标准化是一件具体的事，要讲它，就得先讲一件具体的东西。

◆ 致谢

本书在王德生博士指导下完成。自 2019 年起，我持续跟随王德生博士学习，从“三视角”、“321 智慧”、SIO，到 SDE 本体论，这一路学习逐步改变了我提出教育问题的方式：一个结果怎样在具体条件中显露，差异怎样推进，已有的结果又怎样进入后续的发生。将这些追问带进数学，才有了本书对标准化方式的提问。书

中所用的意义三律、D1、D2、D3、E2 等术语，以及伞模型、SDE 数，均出自这一体系，具体见站内第 53 号《SDE数学导论》与第 344 号《意义数学的诞生》；本书读它们为标准化的重生，由此引出的判断与猜想，责任在我。

感谢课堂上的学生与他们的家庭。许多问题是在孩子们“为什么不能这样算”的追问里先出现的，我是后来才有了一个说法。感谢同事们在教研与课程研发中的讨论，感谢家人在这些年里给我留出写作的时间。

2019 年以来七年，我把课堂当作观察标准如何运行的地方。这本书是这些观察的一次整理，它还会有错，我欢迎被指出。

阳涌

2026 年 11 月

目 录

作者介绍 iv

成书说明 v

前言 vi

导论 “谁用都一样” 1

第一编 数学是场，标准化是它的一化 **15**

第 1 章 数学在 E2：连接、次序、结构 16

第 2 章 三化：标准化、简化、优化 30

第 3 章 透镜 S3·D1·E2：为什么只有美与幸福律能重新定义一个“化” 44

第 4 章 亏缺性运行的机制 58

第二编 单数的统一性：顶点与例外清单 **73**

第 5 章 一个几何，一套公理 74

第 6 章 一种收敛，一张病态清单 87

第 7 章 单一基础与“独立” 102

第 8 章 结构之母：布尔巴基与统一之美的顶点 116

第三编 复数的统一性：数学界误以为的出路 **131**

第 9 章 强度阶梯 132

第 10 章 多宇宙与宽容 147

第 11 章 “相同”的统一 163

第 12 章 为什么复数的统一性仍然枯竭 177

第四编 伞模型：同一性谱系标准化的数学形态 **191**

第 13 章 相容性公理：统一性标准化的隐蔽预设 192

第 14 章 一个数的模型谱 207

第 15 章 SDE 数与退化极限 223

第 16 章 伞下的三律 239

第五编 枯竭、丰满与输的条件 **255**

第 17 章 枯竭与技术性异化：人成为社会大机器的零件 256

第 18 章 输的条件与判决设计 270

结语　统一性是谱系在 r→0 处的退化端 284
附录 292
附录一　九格表：三化 × 三元素 293
附录二　三个定义的判别清单：如何判断一个“多元”仍是统一性 295
附录三　判决预测的编码手册 299
附录四　参考书目 302
版本说明　本版字数、版本与交付 306

导论

“谁用都一样”

本章提要　数学的标准化使文明得以组织与连接，问题在标准化的方式。本导论从最小的样本“一个 3”入手，立下全书的三个定义：统一性不等于单一性，多元化的统一性，同一性谱系；再给出三化、透镜与评判标准化的尺子，说明本书与站内四部著作的和谐与分界，最后一次性声明全书各类陈述的证据身份。

◆ 0.1　一个 3

黑板上写着一个 3。

今天的通用数学里，这个 3 是数轴上的一个点。它排在 2 与 4 之间，等于 2 加 1，也等于任何三个对象所组成的集合的个数。湖南的木匠量出三尺，新加坡的商人数出三箱货，一位工程师在图纸上标出三个孔位，用的是同一个 3。这个 3 与谁在用它无关，与它是在什么场合、凭哪一种感觉被数出来的也无关。它可以被抄在任何一页纸上，被任何一台机器读出，被运到任何一个需要它的地方而不走样。

这是标准化的成就。记数、度量衡、历法、货币、图纸、协议，一层一层垒起来，才有了这样一个到处通用的 3。秦统一六国之后颁行统一度量衡的诏令，1875 年十七个国家在巴黎签署《米制公约》，都是这一条长路上的节点。没有这条路，工程接不起来，贸易接不起来，分工协作也接不起来。本书不反对标准化。本书要追问的，是它的方式。

细想一下，标准化给文明带来的是三样东西，恰好与本书第 1 章要谈的连接、次序、结构相应。度量衡使远隔千里的两处能够“接得上”：一处量出的三尺，在另一处还是三尺，这是连接。历法使事情有了公共的先后：某年某月某日，谁说起来都是同一个时刻，这是次序。货币、图纸、协议使一个大系统能由许多部分合成而部分之间互不过问：一枚硬币能进任何一个钱包，一个螺丝能拧进任何一台机器，这是结构。三样东西靠的都是同一个办法，即把场合抽走，留下一个谁用都一样的

数。所以标准化的文明功能是真实的，也是巨大的，本书不会在任何一处把它写成一个错误。

先看这个 3 的方式。

把自然数排成一列：0、1、2、3、4……每个数只与前一个、后一个相接。这是一条链。拿这条链当作一个小小的模型，可以问三件事。其一，各数之间怎样相连：在这里，连接只有通与不通两种，没有“通到什么程度”。其二，各数之间怎样排次序：只有前和后，一个方向，线性的。其三，整体长成什么样子：一条固定的链，没有分叉，也没有环。连接是二值的，次序是线性的，结构是固定的，三件事都处在最简单的状态。

站内第 53 号《SDE数学导论》和第 344 号《意义数学的诞生》给出了一个比这条链更大的模型，叫伞。一把伞有伞心、半径和核函数，伞与伞之间可以重叠；整个伞场有三个旋钮，半径 r、重叠度 ω、传播速度 v。当伞收成一个点（r→0）、彼此不重叠（ω=1）、信号瞬间传到（v→∞），伞就退化了：连接变成通与不通，次序变成线性前后，结构变成一条链。在这一特定的三重退化情形下，伞场上的计数与自然数同构，这一点在第 53 号与第 344 号中已作限定情形的证明。本书对退化极限的引用，到此为止；一般情形是猜想，第 15 章会把已证的和未证的分开写。

于是，通用模型里的那个 3，就是三重退化的伞。它是统一性标准化的最小样本：谁的 3 都一样。

同一个 3，在伞的模型里还有别的样子。它可以是一把伞，伞心落在三的位置上，有自己的半径和核函数，并且可以与 2 的伞、4 的伞重叠。它也可以是作者举出的又一种构造，一根圆柱〔形态待定〕，本书只在此提名，不在此定义它。把它们并排，就得到一张关于“3”的模型谱，点模型位于谱的一端，是各模型共同的退化端。

模型谱并不只是数学上的设想，它在人的感觉里有现成的对应。第 344 号举过一个例子：同一只杯子，看是一眼的一，摸是一圈的一，听是一声的一。数的基本单位是在差异中划出来的，划法里已经有“我”。对 3 也是这样：三块石子，一眼望去，是同时在场的三；一块一块摸过去，是随着手的路径逐次累积的三；三声钟响，是第三声落下之后才成的三。视觉数、触觉数、听觉数共用同一个构造，分在

配置上：视觉的半径近零而且不动，触觉的半径沿路径变化，听觉的半径随时间移动。构造是同一个，配置各不相同。

配置不同，数学在谱系上的位置也不同。这里是本书的一个基本判断，导论先写在这里，后文处处用到。

视觉数学的统一性可以很强。眼睛所见的东西，能一一对应，能回头重看，能几个人同时看，这三条使它的规范力积累得最快：一个视觉对象一旦被写成图形或符号，谁来核对都得到同一个结果。听觉数学的统一性非常差。声音随时间流走，既不能几个人在同一刻共有同一段，也难以原样重来；同一段旋律，在不同的耳朵里划出的单位并不相同。触觉数学则非常部落谱系化：它随路径与身体而变，捏一个桃子判熟，靠的是手上的经验，只在一手一地之间传，教不出一把全球通用的刻度。把三者摆在谱系上，视觉端近于统一，听觉端居中，触觉端是部落谱系。

从教学的经验看，这三个端点各有一个熟悉的样子。视觉端是课本上的图和式子，谁翻开都是同一页。听觉端是口诀、节奏与课堂上一遍遍的齐读：同一句“三七二十一”，北方的孩子和南方的孩子念得不同，每一代老师念得也不同，它传下来的不是一个标准的声音，而是一种熟悉。触觉端是手上的活，量米、称盐、判熟、量体裁衣，学的人要自己去摸，教的人只能在旁边看着，说一句“对了，就是这个劲”。三者在课堂上都存在，只有第一种被写进了“数学”的定义。

由此得出一个判断：今天所说的“统一性标准化”，实际是视觉模态的标准化，被推广成了全部数学的标准化。视觉数成为“唯一的数”，是因为它的规范力积累最快，并不是因为构造唯一；这是第 344 号的读法，本书沿用。点模型的 3 是视觉端的 3，它在谱系上属于最粗、最老、退化的那一端。

那么同一性谱系标准化要做的，就是按模态给出不同的谱系位置：视觉端尽可以保留它强的统一，听觉端与触觉端则不必强行写成同一把尺子。这时标准化仍然在，数学仍然能连接文明，只是连接的方式从“可替换”换成了“有亲缘”。

还可以把这个对比说得更具体一些。“3 克”与“一小撮”是描述同一份盐的两种说法。前者划在重量的轴上，借天平和砝码，谁称都是 3 克；后者划在手感的轴上，凭一只手的经验，捏起来多少，要看是谁的手、哪一种盐、做的是哪一道菜。两种说法不是在同一根尺上比精确不精确，它们属于数的不同配置。一位厨师把“一小撮”教给徒弟，要在灶边带上几年；一位药剂师把“3 克”教给学徒，一张

说明书就够了。后者传得远，前者传得深。第 16 章会把这两个说法写成同一谱系上的两个位置：它们并不互相取代，而是在同一把伞下各占一处。

这一节讲的是一个 3，但着眼点不在 3。任何一个被标准化的数学对象，从一个函数到一类空间，都可以作同样的检查：它在通用模型里是三重退化的哪一端？它在别的配置里有没有别的样子？它的统一，来自构造的统一，还是来自配置被固定？后面各章的案例，大多是在不同对象上重复这三个问题。

一个 3，由此成了全书的入口。构造同一，配置不同；点只是这张模型谱上退化的一端。

◆ 0.2　一道题的标准答案

“5 除以 2 等于几？”

这是一道标准的题，标准答案是 2.5。答案之所以标准，是因为它被设计成无论谁来算、无论在哪里算、无论算它做什么用，都得到同一个数。批改的人不必认识答题的人，机器也能批改。这种设计使大规模的考试、评分、选拔成为可能，其价值不应当被低估。

不过，换几个问法看看。五个人坐车，每辆车坐两个人，要几辆车？答案是 3。五颗糖分给两个孩子，每人分得整数颗，各得几颗，余几颗？答案是各得 2 颗，余 1 颗。五米长的绳子对折，每段多长？2.5 米。同一个算式，在四个场合里，各自有各自的“对”。标准答案 2.5 对其中一个场合是对的，对另外几个则是错的，或者说是不相干的。

标准答案之所以能够对谁都一样，是因为它把这些场合全部抽走了。抽走场合，是标准化最基本的一步，也是它力量的来源：一个已经不带场合的 2.5，才可以被搬到任何一个场合里去使用。但抽走场合也有代价。当一个答案与谁都无关，它与谁的关系也就只能由使用者另外补上。补得上的时候，标准是工具；补不上的时候，标准就成了一堵墙：墙这边是“对”，墙那边的所有差异，只叫错误或例外。

教室里常见这面墙。一个孩子说“要三辆车”，被告知“五除以二不是三”，这个孩子得到的信息是：他的理由不属于数学。他也许因此学会背答案，也许因此不再说自己的理由。无论哪一种，被丢掉的都是同一样东西，即数学发生时的那一步。

再看分数的另一面。一次考试给每份卷子一个总分，总分是各道题得分之和。从数学上看，求和是一个多对一的映射：许多种不同的答题情形，可以落在同一个总分上。一份卷子几何题全对、代数题大半失分，另一份恰好反过来，总分却相同；于是在“总分”这一把尺子看来，这两个人是同一个位置，他们之间的差异被收走了。接着，总分被排成名次，名次是一个线性的次序：前一名与后一名之间只有“先”和“后”，没有“怎样的先、怎样的后”。连接、次序、结构三样东西，在这里都被收成了最简单的形态：可替换（总分相同即可替换）、线性（名次）、固定（一个标量）。这和导论 0.1 里那条自然数链，是同一种形状。

标准答案的另一个特点，是它可以被预先写出来。出题的人在没有见到任何答卷时，已经知道正确答案是什么，并且可以保证它不依赖于答卷的作者。这使“评分”可以与“思考”分家：思考发生在答卷上，评分发生在答案上，二者在时间上、地点上、人员上都可以不同。这是一个很大的制度发明，没有它就没有今天的大规模教育和资格认证。它也同时意味着，答案与思考的联系，是被刻意切断的。切断得越干净，评分越公平，也越与那个具体的人无关。

这一点在今天看得更加清楚。一台语言模型生成“5 除以 2 等于 2.5”不需要知道五个人和两辆车，也不需要有人在场。凡是“谁用都一样”的东西，都能被机器生成，这是统一性的定义的直接推论，而不是模型的某种缺陷。倘若数学教育的目标只是产出标准答案，那么它的大部分内容迟早会被机器接管；倘若数学的目标还包括使意义在人那里发生，问题就换了：标准化的方式，要容得下“这个人在这里这样算”。

考试只是最近的例子。把眼光放远，度量衡之外的许多制度，像评分、排名、绩效，也采取同一种做法：把场合抽走，留下一个对谁都一样的数，然后让每个人去对这个数负责。这是第 17 章要写的事。在这里，先把话说清楚：标准答案对谁都一样，它也就与谁都无关。这不是批评答案出错，而是在描述答案怎样成为标准。

◆ 0.3　三个定义

全书依赖三个定义。它们在这里立住，后面各章不再改动。

定义一：统一性 ≠ 单一性。统一性的要害是“谁用都一样”：可脱离发生过程被搬走、被机器生成；它可以只有一把尺，也可以有许多把。

单一性说的是数量：只有一个。统一性说的是性质：一个标准一旦写成，它的内容与使用者无关，与它从哪里来无关，与它怎样被造出来无关。这样的标准可以只有一套，比如欧几里得几何曾是几何的唯一背景；也可以有许多套，比如今天并存的各种几何、各种集合论、各种逻辑。两种情形下，只要每一套标准在被使用时都是“谁用都一样”，它就属于统一性。因此本书批评统一性，不是批评“只有一个”。把统一性读作单一性，会使整个论证滑向一个容易驳倒的靶子，即“数学不应当只有一个”，而这并不是本书的主张。

数学里的例子随处可取。欧几里得的几何在很长时间里是几何的唯一背景，它是单数的统一性：全体几何学家共用一套公理，谁用都一样。后来非欧几何出现，几套几何并存，每一套内部仍是谁用都一样，这是复数的统一性。再往后，多宇宙的集合论观点把许多个集合论宇宙并排，同样如此。这三个阶段的数量不同，方式相同。

可以用三项检验来判断一个标准是否属于统一性。其一，搬走检验：把它从它被发现、被造出的那段历史里取出来，放进另一个领域或另一个时代，它的内容是否不变。其二，生成检验：一台不知道这段历史的机器，能否依据定义生成它的全部结论。其三，亲疏检验：两套标准之间若有远近，这远近是否事先由定义给出；根本无远近可言的，也算作“是”。三项检验都答“是”的，是统一性。

不妨把三项检验用在三个对象上试一试。欧几里得几何：搬走检验，它可以从古希腊搬到任何一间教室，内容不变；生成检验，给定公理，一台证明辅助程序可以生成它的定理；亲疏检验，它是唯一的背景，无所谓亲疏。三项皆是，单数的统一性。逆数学的五大系统：搬走与生成都是，系统之间的强弱由定理先后排定，位置由定义给出，所以是复数的统一性。再看一门手艺，比如一家人世代相传的腌制方子：它的做法只在这家人的灶间才是这样，搬到别处，用料、气候、手势都变了，这个方子就变成另一个方子；机器可以生成一份配方，却生成不了“这家人的方子”；而它与邻家方子之间的远近，是世代里一次次改动留下的。三项皆否，这是谱系的样子。数学里当然没有这样纯的例子，但手艺让我们看清检验的方向。

定义二：多元化的统一性。几本菜谱并排：每个系统内部尺子统一，系统之间没有亲缘尺子；程度即使有，也由事先给定的定义安排。多宇宙、逻辑多元论、宽容原则、强度阶梯都在这里。判别一个多元是否仍属统一性，另有一组三问（内

部、系统之间、改写），以第 12 章 12.8 节与附录二为准，上面的三项检验是它在单个标准上的一种前置用法。

多元化的统一性是统一性的复数形式。几本菜谱各自写得清楚：这本讲川菜，那本讲粤菜，每一本内部，用料多少、火候几分，都是“谁照着做都一样”。可是两本菜谱之间有没有远近？有时有，比如某本说“与另一本的差别在于少放辣”，但这个“少放辣”是菜谱作者事先写进去的。它是一个定义出来的程度，不是两本菜谱各自被做过、被改过、被传过之后留下的亲缘。数学里的对应物是强度阶梯：一致性强度可以排序，逆数学的五大系统可以排序，这些排序刻得很细，位置却是由定义给出的。因此复数的统一性仍是统一性，本书不称它为谱系。

定义三：同一性谱系。同一性的程度由回写历史生成——“这里才这样”；只能发生，不能应用。谱系标准化，是让标准的位置、亲疏与适用范围由它被回写的历史给出，而不由定义事先给出。

这里先说明“回写”。一次发生走完之后，它的结果被写回它此后发生的条件之中，使后来的发生有所不同，这叫回写。一个手艺传了三代，每一代都在前一代的做法上改了几处，改的原因记在这个手艺的用法里，这个手艺今天的样子，就是它被回写的历史给出的。同一性的程度，说的是两个东西在多大程度上算同一个：“这里才这样”，意思是这个标准只在这样的历史里才是这样，换一段历史，就是另一个位置。

说谱系“只能发生，不能应用”，是指它的位置不能被取出来当现成的工具带到别处套用。统一性可以应用：一把尺子拿到任何地方都能量。谱系不行：它的亲疏是在发生中生成的，要知道一个标准在谱系里的位置，就得追问它是怎样被回写成这样的。由此也能区分谱系与漂泊。若只有系统的增殖而没有回写，各系统之间没有亲缘可言，那是多元化的统一性，而不是谱系。

数学符号的历史提供一个小而具体的谱系例子。微积分的创立者之间有过一场谁先谁后的争执，此后一段时间里，英国与欧洲大陆各自沿用不同的记号，一边用牛顿的点记法，一边用莱布尼茨的微分记法。1812 年，剑桥的三位本科生巴贝奇、赫歇尔与皮科克发起分析学会，主张引进大陆的分析方法；1816 年，学会出版了拉克鲁瓦微积分小册子的英译本；1817 年，皮科克任剑桥的考官，当年的试题率先采用了微分记法。此后英国的教科书与考试陆续改了写法。今天人们写 dy/dx，是因为这段争执、这些推动和之后一批教材一起，把它写成了现在这个样子。若问 dy/dx

为什么是通用的，答案只能是回到这段历史去讲。这是“这里才这样”的一个雏形：一个记号在谱系里的位置，由它被回写的过程给出。至于记号后来被标准化成了谁用都一样的东西，那是同一个谱系的退化端，不是它的全部。

最后补一个容易混淆之处。谱系里的“位置”不是等级。视觉端近统一，不意味着它优于其他端；触觉端是部落谱系，不意味着它落后。位置只回答：这一处的同一性由什么生成，亲疏怎样给出，适用范围到哪里为止。哪一处的数学在哪个任务里有用，是另一个问题，要看任务。

三个定义合起来，把一个常被混为一谈的问题拆开了：统一性对多元，是数量的问题；统一性对谱系，是方式的问题。本书的主张属于后一种。

◆ 0.4　三化与透镜

数学对文明的作用，可以归结为三个“化”：标准化、简化、优化。

标准化，是把差异收到一把共同的尺子上，使不同的人、不同的场合可以用同一个说法。简化，是去掉不影响结论的细节。优化，是在给定目标和约束下找最好。三者在数学的日常工作里互相交织，一道应用题常常三者齐用：先统一单位（标准化），再抽出关键量（简化），最后求最小用料（优化）。

这里需要先说明，标准化并非只有“压缩差异”这一种可能。把几个人量出的数据收到同一把尺子上，是标准化；让几个不同行当的记法有办法互相翻译，也是标准化。两者的区别在于连接的办法。前者以可替换连接：只要你和我的数一样，我们就接得上，你换成别人也接得上，所以每一个人都可以被换掉。后者以亲缘连接：你和我的做法有多近，由我们各自被改过、传过的历史说了算，两个做法接不接得上、怎样接，不能脱离这段历史去回答。统一性标准化走前一条路，连接得越紧，参与的人越成了零件；同一性谱系标准化走后一条路，连接得越紧，三律越丰满。这是全书贯穿的区分，第 2 章专门展开。

本书在这三化中取标准化。理由有两层。第一，标准化是数学形成的评估标准：什么叫证明了，什么叫等价，什么叫收敛，都是标准化的产物，其他两化要靠它给出评估。第二，在三化之内，标准化只能被精进，不能被改写：简化和优化都以一个既定的标准为前提，它们能让标准用得更好，却问不出标准本身化解的是什么。

三化虽然写成三个词，每一化在数学里都带着自己的连接、次序与结构。标准化所连接的，是不同的人和不同的场合，它的次序是公共的先后，它的结构是共同的格式。简化决定哪些细节被留下，优化在目标与约束下排出更好的先后。“三化×三元素”的九格关系，列在附录一，作为全书的查检表。

那么，由谁来问?

SDE 体系里有一张九宫：S（显露）、D（差异序列）、E（特征纠缠）三维各分三格，共九格（站内第 513 号《SDE九宫格透镜问题分析法》）。每维各取一格、且三个下标之和能被 3 整除，得到九组三角套：三组正位，六组异位。数学在 E2（信息）这一格；E2 所在的三组三角套，是正位 S2·D2·E2、甲组 S1·D3·E2 与乙组 S3·D1·E2。九宫里，一个“化”落在不同的格上，可以问不同的问题。正位 S2·D2·E2 是在标准之内走路：它采用现成的标准，把路径走通。甲组 S1·D3·E2 用优化约束去改标准，这等于用一个“化”去改另一个“化”，仍在三化之内。只有 D1（为了什么）与 S3（好不好、美不美）能追问：这一化到底化解了什么，又以什么为好。所以本书取乙组异位，即 S3·D1·E2：美，乘以意义三律中的幸福律，乘以数学。这个透镜在第 3 章展开。

这里有一个朴素的道理：尺子量不了自己。用长度单位去量“长度单位为什么取这么长”，量不出结果，要回到使用长度单位的目的上去问。同样，用标准去评判标准，只会在标准内部循环，无非是“这一步符合标准”，或者“这一步不符合”。要追问标准化化解什么，要有一个不属于“化”的位置：它得站在“为了什么”（D1）和“好不好”（S3）上。这并非要求读者先接受 SDE 的整套体系，而是要求本书的论证给出自己的立足点，并且让这个立足点可被检查：三律是否丰满，是可以按案例逐项读数的。

透镜之下，评判标准化的尺子随之而定：看意义三律是否丰满运行。三律各管一件“从 0 到 1”的发生：特征律管目标的发生，自由律管路径的发生，幸福律管动力的发生。D1 是意义目标，它的发生逻辑就是这三条律；D 的目标不是任何静态结构，而是三律的成功运行本身。下表是全书反复使用的读数。

意义律	跑法	统一性标准化拿掉了什么	结果	同一性谱系标准化下
特征律	混沌碰撞→自组织→涌现	混沌碰撞（定义须无歧义；尺外差异即例外）	死亡	差异在谱系间碰撞，凝成新特征

意义律	跑法	统一性标准化拿掉了什么	结果	同一性谱系标准化下
自由律	矛盾纠缠触发→路径裁剪→新模式	纠缠（无矛盾、独立、解耦、正交）	死亡	纠缠被保留并标注亲疏，裁出新路
幸福律	张力积累→模式转换→释放	新张力的来源，只剩“消除差异”一种释放	枯竭	安排差异以释放，每次释放生产新特征；真善美三重齐全

统一性标准化为什么拿掉这些？定义须无歧义，所以混沌碰撞无处发生，尺外的差异只能叫例外。论证要求无矛盾、独立、解耦、正交，所以纠缠被排除，新路没有从哪里裁出。差异一旦被视为错误，幸福律就只剩“消除差异”一种释放，既不再有新的张力来源，也就逐渐枯竭。这三者合起来，叫作意义三律的亏缺性运行。它的数学形态，是三律在相容退化下分别退成固定点收敛、唯一合法路径、误差最小化；第 4 章与第 13 章会逐项对照。

这种亏缺走出数学，进入社会，就是人的技术性异化：人成了社会大机器上一个按统一标准运行的零件。这一祸害的来源，是数学的统一性标准化，因为它提供了度量可替换性的那把尺。本书第 17 章专门写这件事。

与之相对，同一性谱系标准化让差异在谱系间碰撞，让纠缠被保留并标注亲疏，让释放生产新特征。这时数学这一信息维度，才全面系统地服务 D1，使三律丰满运行。

这里需要预防一种读法：不要以为本书主张“增加差异”。统一性过度则枯竭；谱系失去回写、只剩无亲缘的增殖，则漂泊，那实际是多元化的统一性。两端都失衡，所以本书的尺子是三律是否丰满，而不是差异多不多。

两端失衡的说法值得多讲一句。统一性一端，标准越来越严，例外越来越多，被命名为病态的对象清单越来越长，每一次修补都把标准再收紧一点，直到收不动，才发生一次模式转换。漂泊一端，没有回写，系统一套套增生，各自把门关上，彼此之间没有亲疏可言，看上去热闹，其实每一套内部仍是谁用都一样。两端都是三律不丰满，只是表现不同：前者是三律被拿掉，后者是三律没有地方落脚。同一性谱系标准化走在两者之间，靠的是回写：每一次发生都写回条件，使亲疏有了来历，使新路有地方裁出。

最后一点关于方法。本书的案例，大多取自数学史上业已成型的节点，而不是正在发生的前沿。这样选，是因为统一性标准化的运行，要等它走完一圈才看得清：先是差异出现，再是被命名为例外，再是被修补、被吸收，最后凝成一个新的统一的写法。走完一圈的案例，才有完整的读数。前沿的工作留给第 18 章的预测。

◆ 0.5　与站内著作的和谐与分界

本书是站内数学之场系列里的一部，邻近有四部著作。

第 402 号《新文明诞生——同一性谱系化》讲的是文明整体向同一性谱系的转化。本书与它的关系是局部与整体：本书只取标准化这一化，不讨论文明的其他方面。凡涉及文明一般转型之处，本书引第 402 号，不另起炉灶。

第 344 号《意义数学的诞生》讲的是撑开伞。它建立了伞模型，给出视觉数、触觉数、听觉数的统一构造，推导了三律在相容退化下的数学形态，并给出恢复旧数学的分级。本书不重新推导伞模型，把它读作标准化的重生：伞的哪些参数对应标准化的哪些预设，由本书追问。第 344 号以数学与可观察入口为主，不涉及社会一侧的异化；第 17 章补上这一侧。

第 552 号《陶哲轩如何才能与大模型公司和解与合作呢？》讲数学之场的谱系与迁移，即数学作为场，在不同人群、不同模态、不同行当之间怎样形成谱系并且迁移。本书与它共享“谱系”一词，分界在于：第 552 号讲整个数学场，本书只讲标准化这一化，并且把重点放在统一性与谱系的方式之分上。

第 457 号《AI对科研的冲击为何首先表现在数学上？》讲统一性的退位：统一性不再是知识的最终依据，而退居基础性的位置。本书与它的和谐在于都主张统一性不是谱系的反面，而是谱系的一端；分界在于，第 457 号从知识的统一性出发，本书从数学标准化出发，并以数学史上的具体案例为主要材料。

另有一处术语要点明。第 53 号第 13 章谈伞模型“统一”了传统数学的各分支，那里的“统一”指构造的统一：不同分支是同一个伞场的不同观察角度。本书所说的“统一性”是另一回事，指“谁用都一样”的标准化。伞模型统一的是构造，不是配置：构造同一，配置成谱。这正是同一性谱系标准化，而不是统一性标准化。凡涉及这两个“统一”之处，本书都会点明。

读者不必按这一份清单去想象本书是一部对数学的“清算”。后面的案例里，欧几里得、希尔伯特、魏尔斯特拉斯、哥德尔、布尔巴基，都是以他们著作的成就出现的：这些著作把一类东西写成了谁用都一样，从而使这类东西能够进入文明的公共工程。本书读到的，是这种写法在意义三律上的读数，以及它在什么条件下显影、凝成、退化。

全书按五编推进。第一编立场：数学是场，标准化是它的一化。第二编看单数的统一性在几何、分析、基础与结构理论里达到的顶点与它留下的例外清单。第三编检查复数的统一性，即数学界设想的出路。第四编建立伞模型这一数学形态。第五编写枯竭与丰满，并写下本书输的条件。

全书的行文次序是：先立定义，再看顶点，再看出路，再建模型，最后写输的条件。这样排的好处是每一编的论断都能回到前面已立的东西去核对，不必到后面才知道前面在说什么。

◆ 0.6　证据身份的集中声明

全书各类陈述的证据身份，在此一次声明，各章不再重复。全书分四类。

第一类，已证数学。凡本书引用的定理、命题及其证明，其成立由数学条件承担，不依赖本书的任何解释。包括欧几里得到希尔伯特的公理化，魏尔斯特拉斯函数处处连续而处处不可微，哥德尔不完备性定理与科恩的独立性结果，根岑对算术一致性的证明，逆数学的五大系统，以及第 53 号与第 344 号中已作证明的限定情形。凡定义、量词、条件，都按原结果写出。

第二类，史料。凡人物、年代、著作，据原始文献或可核对的研究文献；引文只述大意，除非确知原文。史料判断与数学重构、哲学解释分别展开：后来的符号可以帮助解释早期方法，但不能当作历史人物已经拥有的完整理论。史料细节在统稿中已逐条对照原始文献或研究文献核过；查不到可靠来源的细节，改成了不依赖它的写法。

第三类，本书的判断与猜想。包括：统一性标准化是意义三律亏缺性运行的来源；多元化的统一性与单数的统一性对三律的亏缺方式相同；技术性异化的来源是数学的统一性标准化；伞模型是同一性谱系标准化的数学形态；今天的统一性标准化是视觉模态标准化的推广；三个定义的判别在各个案例上的适用。这些是本书要为之辩护的论题，不是已证命题。它们的输法，写在第 18 章的判决预测里。

第四类，退化极限的证明状态。现有数学是伞在 r→0、ω=1、v→∞ 时显露的稳定态，这一命题只在特定情形下已证：在一维、伞心等距等条件下，非局部算子的极限为 lim ℒ = c·Δ，收敛率为 O(r²)；在三重退化下，伞场上的计数与自然数同构。一般情形仍是猜想。全书不把“现有数学是退化极限”当作已完成的定理使用；凡用到它之处，写作“若退化极限成立”，或限定在已证情形。

第三类陈述是本书可以输的部分，所以第 18 章给出五条判决预测，每条写明读数与撤回条件。第零条针对伞模型：若出现一类问题，固定 r→0 的点模型与固定视界的非局部模型都表现更好，而按场的发生调节伞半径与权重的伞模型并无优势，则“伞模型是谱系标准化的数学形态”降为“一种建模选择”。第一条针对多元与谱系之分：两个子领域形式标准相同、回写历史不同，同一新证明技术在二者中的被采纳与改写程度若无差异，母题撤回。第二条针对复数的统一性：系统数量增加的方向上，非原作者开出的新路与长期问题的解决数若随系统数同升，第三编撤回。第三条针对张力复发：统一性标准化完成后，被命名为例外、病态的对象清单若不再增长，则这一条不成立。第四条针对三种感觉模态：同一数学内容在视觉、听觉、触觉三种呈现下，跨人一致性应为视觉高于听觉、听觉高于触觉，而同一师承、同一地方之内的亲缘一致性应为触觉高于听觉、听觉高于视觉；两条顺序有一条不成立，三模态谱系的判断撤回。把这些写在前面，是为了让读者在读论证之前就知道，本书把什么押在了哪里。

读者在翻阅各章时会遇到两类方括号记号。〔形态待定〕标在圆柱模型上：本书只提名这一构造，不替它下定义。〔阈值待核〕标在第 18 章判决预测的数值阈值上：阈值是检验设计的参数，须在登记检验时由实施者按样本与领域定下，书中给出的是建议值。这两类记号都不是修辞上的谦辞，读者遇到时，可以把那一句当作待定的设计，不要据以引申。

另有三点附带。其一，SDE 术语的用法，以站内原定义为准：S 指显露，意义三律指特征律、自由律、幸福律。其二，本书中的“应当”都是说，在三律丰满运行这把尺子下应当，而不是说在别的尺子下也应当。其三，凡是判决预测的读数，取自互不重叠的数据源，编码者与判定者分离，具体见附录三。

至此，全书的入口已经交代完毕。接下来第 1 章回到最基本的问题：数学是什么样的场，它的三个元素是什么，标准化在这三个元素上各做了什么。

◆ 本章结论

1. 通用数学里的 3 是三重退化的伞，是统一性标准化的最小样本；同一个 3 在伞与圆柱〔形态待定〕里是别的配置，构造同一，配置成谱。
2. 视觉数学的统一性强，听觉数学的统一性差，触觉数学是部落谱系；今天的统一性标准化，是视觉模态标准化的推广。
3. 统一性不等于单一性；多元化的统一性仍是统一性；同一性谱系由回写历史生成，只能发生，不能应用。
4. 评判标准化的尺子，是意义三律运行得是否丰满，不是差异的多少。
5. 全书的证据分四类，只在 0.6 声明一次。

◆ 本章参考

— 原始文献与研究文献

· Euclid, Elements；Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, 1899.
· Gödel, K.，“Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I”, 1931.
· Cohen, P. J.，“The independence of the continuum hypothesis”, 1963.
· Gentzen, G.，“Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie”, 1936.

— 站内著作

· 第 53 号《SDE数学导论》。
· 第 344 号《意义数学的诞生》。
· 第 402 号《新文明诞生——同一性谱系化》；第 457 号《AI对科研的冲击为何首先表现在数学上？——从知识的统一性到同一性谱系》；第 552 号《陶哲轩如何才能与大模型公司和解与合作呢？——从统一性数学到同一性谱系数学》。



第　一　编

数学是场，标准化是它的一化

编　序

这一编（第 1—4 章）立起全书的框架：数学在 E2，是特征纠缠的场，三元素为连接、次序、结构；数学的作用是三化——标准化、简化、优化；以九宫透镜 S3·D1·E2 说明，只有美与幸福律能重新定义标准化这一「化」；最后写出统一性标准化使意义三律亏缺运行的机制。

01

第 1 章

数学在 E2：连接、次序、结构

本章提要　从欧拉解哥尼斯堡七桥出发，看一道题里同时出现的三种事实。E2 是信息的一维，由符号、逻辑、数学三个元素构成；数学是特征纠缠的场，场的三个元素是连接、次序、结构。拓扑与范畴偏连接，序与证明论偏次序，代数与几何偏结构。在相容条件下，三者各自独立地研究，分支由此而来。本章为全书立下这三个元素，第四编再回来把它们撑开。

◆ 1.1　七座桥上的三件事

十八世纪的哥尼斯堡，普雷格尔河把城市隔成四块陆地：河中的一座岛、河北岸、河南岸和东边的一块。七座桥把这四块地连起来。当地人有一个消遣：能不能找一条路线，从某处出发，把每座桥恰好走一遍。大家试了很久，没有人走成，也没有人说得清为什么。

1735 年，欧拉在圣彼得堡科学院报告了这道题，论文于 1741 年刊出，题为《与位置几何有关的一个问题的解》。他在开头就做了一个姿态鲜明的判断：这道题与量无关，与计算也无关，它属于莱布尼茨曾经设想过的“位置几何”。桥有多长，岛有多大，河有多宽，都不要紧；要紧的只是哪块陆地与哪块陆地由几座桥相连。

欧拉的做法，是把每块陆地看成一个点，每座桥看成连接两点的一条线。这样，四块陆地成了四个点，七座桥成了七条线。接着他数每个点上连着几条线：岛上五条，其余三块陆地各三条，四个点的线数全是奇数。然后他证明：一条恰好走遍每条线一次的路线，除起点和终点之外，路线经过的每个点都是“进一条、出一条”，所以那些点上的线数一定是偶数；因此，能走通的图至多只有两个点的线数是奇数。哥尼斯堡有四个奇点，所以不可能。顺带可以核一下：四个线数相加是 5+3+3+3=14，恰为桥数 7 的两倍，因为每座桥有两个端点，各被数了一次；由此可知任何图里奇点的个数必为偶数，四个奇点不是偶然凑出来的数；换句话说，奇点只会成对地出现，要么没有，要么两个、四个，如此类推。他同时断言，反过来，只要图是连通的，而且奇点不超过两个，路线就存在。这个反方向的结论欧拉只作

了断言，完整的证明由希尔霍尔策在 1873 年给出。他的思路是：当每个点的线数都是偶数时，从任一点出发沿未走过的线前行，总能回到起点；再把这样走出的若干回路拼接起来，就走遍了全图。奇点数为 0 时可以回到起点，为 2 时则必须从一个奇点出发、在另一个奇点结束。

这道题里有三种事实，它们是分开的，却总是同时出现。

第一种是连接。哪块陆地与哪块陆地相连，相连的路径有几条，整个图是否连成一片。欧拉把桥的长短、岛的形状全部丢掉，剩下的只是“谁与谁相接”。这个“相接”，与度量无关，换一张拉伸变形的地图仍然成立。

第二种是次序。一次走遍的路线，是一串先后排列的步骤：先过这座桥，再过那座桥。题目问的是存在不存在这样一个次序。欧拉的论证里，“进”和“出”的区别是方向，“经过”的前后是次序，没有这个先后，路线就无从谈起。

第三种是结构。四个点的线数分别是 5、3、3、3，这四个数能不能排成一条路线，取决于它们的奇偶。线数是一种计数，奇偶是一种代数性质，二者合成“奇点的个数”这个整体不变量。路线存在与否，被一个整数的奇偶性判定。这是部分怎样合成整体、又在变形下保持不变的问题，属于结构。

通常的教科书把这道题归入图论，说它是拓扑学的先声。但从题目本身看，这样的归类只说出了第一种事实。要解它，三种事实都不可少：没有连接，题目不成立；没有次序，路线不成立；没有结构，答案没有判据。一个看起来只属于某个分支的问题，在源头处并不属于任何一个分支。

欧拉这一步本身值得停一下。他把岛、河岸、桥统统换成点和线，是一次漂亮的抽象，也是一次典型的标准化：场合被抽走了，桥的长短、河的宽窄、城里人走路的习惯都不见了，留下的是一张谁来看都一样的图。正因如此，同一个论证可以原样搬到别的城市、别的河，甚至搬到与桥毫无关系的问题上，比如一笔画问题、电路的回路问题。这是标准化的力量，本书在后面会反复承认它。同时也请注意，图一旦画成，三种事实就同时被收进了最简的形态：连接是“有边或没有边”，次序是“经过的先后”，结构是“线数的奇偶”。这与导论 0.1 里那条自然数链，是同一种形状。

本章要做的，就是把这三件事从一道题里拎出来，看它们为什么是数学这个场的三个元素，以及为什么后来的数学把它们分开研究。

◆ 1.2　E2：信息的三个元素

SDE 体系里，E 是特征纠缠，分三个维度。E1 是三界，即理念、现实、自我这三个世界；E2 是信息；E3 是能量。数学属于信息，所以本书说“数学在 E2”。

E2 又分三个元素：符号、逻辑、数学。站内有两种说法描述它们的区分，一种按“态”，一种按“功能”。

按态的说法：符号是粒子态，逻辑是波态，数学是场态。第 53 号在论计算数学时用过这种说法，符号是标签，逻辑是 if-then 的判断，数学则是变分原理这类整体的东西。第 344 号提醒了一件事：这一组对应应读作对应，不是等同。比如逻辑之“波”与听觉之“波”，可以用移除检验分开，两者之间没有互相代替的关系。本书沿用这个提醒，下面说“粒子、波、场”时，都是在说对应。

按功能的说法：符号是对经验的一次划分。写下“3 克”，是在重量这根轴上划了一刀；说“一小撮”，是在手感这根轴上划了一刀。划线的轴不同，所以第 344 号指出，二者不能按“精确不精确”的一根尺子来比。符号一旦划好，就可以被抄、被传、被存，这是它作为“粒子”的一面。

逻辑要“粘”。要在若干符号之间建立“由此得彼”的关系，需要一种把它们粘在一起的东西。布尔逻辑是最干脆的一种粘法：命题要么成立要么不成立，没有程度，没有条件，没有时间。第 344 号的说法是，布尔逻辑抽走了程度、条件与时间，换来的是不在场也能检查。这是一种了不起的交易：我可以不在场，另一个人拿着同样的规则，照样能判定我的推理是否合格。它是逻辑层面的标准化。第 344 号还提出，更一般的“粘性逻辑”要守四条：可审计，能退化回布尔，诚实地写出阈值，先找条件再下“和”。这四条不属于本书的论证，只用来提示：逻辑的“粘”有程度，布尔是粘得最简的一端。

数学是场。符号划出一个个点，逻辑在点与点之间拉出一道道推出关系，数学则是这些点与关系铺开之后的整体：在这个整体里，一个符号的意思取决于它所在的位置，一条推出关系的力量取决于它连着多少别的关系。换句话说，数学不是符号的堆，也不是推理链的堆，而是一张所有关系互相牵动的网，改动一处，别处会受到影响。

这三个元素在本书中分别承担什么，可以用一个简单的比方说清。设想一座城市的地图。符号是地图上的图例与名称：这里写“桥”，那里写“医院”。逻辑是路线规则：从甲到乙必须经过丙，过桥不得逆行。数学则是整张地图所体现的空间关系本身：甲乙丙之间怎样连着、相隔怎样、能围出什么形状。同一座城市可以只

有图例没有规则，也可以有规则而图例杂乱，但只有把图例、规则和空间关系放在一起，才能回答“从这里出发，怎样走最顺”。信息的三个元素，就是这样互相配合的。

为什么要这样分？因为 E2 这一维上，有一个朴素的事实：同一个信息，可以被只当作符号来用，也可以被当作推理的前提来用，还可以被当作整体网络中的一个结点来用。三种用法对应三种“化”的难度：符号的标准化最容易，只要规定写法；逻辑的标准化次之，要规定推出的规则；数学的标准化最难，因为要规定的是整张网上的位置。这是后文要不断回到的一个观察。

◆ 1.3　数学是特征纠缠的场

“场”在物理里指一个量铺在空间每一处，邻近处的值彼此牵连。把这个词借来说数学，要交代清楚借的是什么。

借的是两样。一是每一处都有状态，二是邻近处的状态互相牵连。数学里的“处”，是一个对象在整张关系网中的位置；“状态”，是这个对象身上的特征；“牵连”，是这些特征互相决定的关系。特征纠缠，说的就是这种牵连：一个对象的某个特征，不是孤立的标签，而是与别的特征互相纠缠在一起。

拿 3 来看。3 是奇数，3 是素数，3 是 2 的平方减去 1，3 是不共线的三点所需的点数，经过这样三个点有且仅有一个圆。把这几条特征平摊开来，似乎是一串互不相关的标签。但往下追一步，它们牵连起来：3 是素数，由拉格朗日定理，阶为 3 的群必是循环群，而且在同构意义下唯一，这是一个关于结构的结论，却从“素”这个关于整除与次序的特征推出。再如，三个元素的集合共有 6 种排列，这 6 种排列构成对称群 S_3，S_3 是阶数最小的非交换群，这又把“3”的计数特征与群的结构特征连起来。再如，三个不共线的点确定一个圆，把“3”与平面的几何联系了起来。

这些特征分属数论、群论、几何三个分支，却在同一个 3 上纠缠。孤立的点模型里，3 只是“数轴上的一个点”，这些牵连在其中被收走，只留下它在数轴上的位置。场的看法则把这些牵连留着：3 不是一个点，而是这张网上若干线头交汇的地方。

还有一个更一般的说法可以支撑这种看法，那就是范畴论里的米田引理。它说，在一个范畴里，一个对象在同构意义下，完全被它与所有对象之间的态射所决定。换句话说，一个对象是什么，等于它与其余一切的关系。这是一个已证的数学命题，不是 SDE 的发明；但它说的东西与“场”的看法一致：数学对象的身份，来自它在关系网中的位置。

再举一例，说明纠缠不止在一个对象之内。看“素数”和“圆的面积”，似乎毫不相干。欧拉 1737 年给出的乘积公式把所有素数上的乘积与整数的和连成一条等式：对 $s > 1$，$\zeta(s)$ 等于对全体素数 p 的 $1/(1 - p^{-s})$ 的乘积；而取 $s = 2$ 时，$\zeta(2) = \pi^2/6$，圆周率就出现在了素数的分布之中。这一类事实无法在单个分支里读出来，它们是场中远处的牵连。数学的“深”，往往指的就是这样的牵连被发现。

“场”的看法也有一个直接的后果：当我们说一个数学对象“被标准化了”，我们说的是它在关系网中的位置被固定了。固定可以有不同的方式。可以把它在网中的所有牵连都写成定义，让任何人看了定义就知道它是什么，这是统一性标准化；也可以让它的牵连随使用的历史而定，不同的使用有不同的牵连，这是同一性谱系标准化的方向。这个区分，到第四编才有数学形态。

特征纠缠的场，还有一点要说明：它是一个“发生”的场，而不是一个“存在”的场。意思是，数学对象的特征并不预先摆在那里等我们发现，而是在一次次使用、证明、推广之中逐渐显露、稳定下来。比如 3 的“素数”特征，是在人们把整数分解成因子、发现有些数分不开之后才显露的；“循环群”的特征，是在人们研究方程根的置换之后才成为一个可以指向的东西。在这个意义上，一个特征被稳定下来，需要差异先发生，再经反复使用而凝成。这是 SDE 的基本图景：差异出稳定性，稳定了就成了可以指向的特征。本书把这个图景用在数学上，并不是要否定已证的定理，而是要问：定理所显露的稳定态，是在怎样的标准化方式下凝成的。

◆ 1.4　场的三个元素：连接、次序、结构

七桥给了三种事实，现在把它们定义清楚。

连接：什么与什么在一起。它回答的问题是：这两个东西是否相邻、可达、可映射到一起；这个整体是否连成一片；这样的变形是否保持了“靠近”。数学里的对应物很多：图的边与连通性，拓扑空间中的邻域与开集，函数的连续性，范畴中对象之间的箭头。连接的特点是不需要度量：只问“在不在一起”，不问“隔多远”。1914 年豪斯多夫在《集合论基础》中用邻域公理来定义拓扑空间，正是把“靠近”这件事从距离里抽出来，作为一个独立的东西立起来。

次序：什么在什么之前、之上、之先。它回答的问题是：这两个东西谁先谁后、谁大谁小、谁依赖谁；一个结论是否由另一个推出；一个过程的步骤怎样排列。数学里的对应物同样很多：自然数与实数的大小次序，一般的偏序与格，良序与序数，推导中的前提与结论。次序的特点是方向：从 a 到 b 与从 b 到 a 不同。严格地说，偏序满足自反、反对称、传递三条；线性序再加一条，任意两个元素可

比。举一个不可比的例子：取 12 的全体正因数 1、2、3、4、6、12，以整除为序，它是偏序而不是线性序：2 与 3 互不整除，4 与 6 也互不整除，都不可比；1 在最底，12 在最顶。后文说到“不可比较的差异”，数学上的原型就是这样的偏序。

结构：部分怎样合成整体，合成时保持什么。它回答的问题是：两个东西合起来得到什么；整体在变换下哪些东西不变；形状有什么特征。数学里的对应物是代数运算与它所满足的律（群、环、域），几何里的形状、对称与不变量，测度与度量。结构的特点是合成与保持：运算把部分合成整体，同构、对称与不变量刻画合成之后保持的东西。1872 年克莱因在埃尔朗根纲领中把几何定义为一个变换群下的不变量，是把“结构”这一元素立到最前面的一次表述。

这三个元素有几点需要点明。

第一，它们是一个场的三个元素，不是三个对象。数学里没有一块地方只放连接，另一块地方只放次序。任何一个数学事实，都可以对它提三个问题：它把什么连在一起？它在什么次序上成立？它合成出什么？一个定理往往三个问题都有答案。比如“有界的单调实数列必收敛”：单调与有界讲的是次序，收敛讲的是靠近，也就是连接，而这个结论之所以成立，依赖实数是完备的有序域，这是结构。三个元素在一个定理里同时出现，彼此扣着。

第二，“结构”这个词在本书里有两个用法，需要分开。在布尔巴基的用法里，“结构”是一个总名，下面有三种母结构：代数结构、序结构、拓扑结构。1948 年布尔巴基在《数学的建筑》里提出这一点，后文第 8 章详述。本章的“结构”是一个更窄的元素：部分怎样合成整体，保持什么。粗略说，布尔巴基的代数母结构对应本章的结构，序母结构对应次序，拓扑母结构对应连接。所以，两个“结构”的关系是总名与分项，读到时按上下文分辨。

第三，与 SDE 里的 S（显露）无关。S 是显露，不是“结构”，这是 SDE 的术语纪律。本章的“结构”是数学里的一个元素，与 S 是两回事。读到“结构”二字，须先问它是布尔巴基式的总名还是这个窄义的元素，再问它与显露有无关系，答案是后者无关。

第四，三个元素在三个感觉模态上的分量不同，这是一个尝试性的读法，留待第四编检验。眼睛看见的东西，一眼就是整体，对应的是结构：形状、对称、比例，都是同看之下才有的。声音随时间展开，先后是它的命脉，对应的是次序：旋律、节奏、数拍子，换了次序就是另一段声音。手摸到的东西，靠接触和路径，对应的是连接：摸过一圈才知道哪里与哪里接得上，没有接触就没有数。这个对应对数学的意义在于：视觉模态偏结构，所以视觉模态的标准化最容易把结构写成谁用

都一样；听觉模态偏次序，所以难以同看、难以重看；触觉模态偏连接，所以随路径与身体而变，难以脱离一手一地。这一读法是本书的判断，不是已证命题，见导论 0.6。

三个元素还可以用一个思想实验来区分。给定一个只有元素、没有任何关系的集合。第一步，加上“邻近”的规定（一个拓扑），集合有了连接，可以谈连续、连通、紧致。第二步，加上“先后”的规定（一个序），集合有了次序，可以谈上界、极大元、良序。第三步，加上“合成”的规定（一个运算），集合有了结构，可以谈单位元、逆、对称。三步可以单独加，也可以合着加。比如实数集 $\mathbb{R}$ 同时带着拓扑、序与域运算，并且三者以相容的方式扣在一起：序拓扑与度量拓扑一致，加法与乘法对这个拓扑连续，序与运算相容。这就是一个“拓扑有序域”，$\mathbb{R}$ 的魅力很大程度上来自这三者的扣合。

◆ 1.5　数学分支的偏重

数学有许多分支。把它们放到三个元素上看，每个分支都有自己偏重的一个元素。

元素	偏重的分支	它们主要追问
连接	拓扑、范畴	什么与什么靠近、可达；对象之间有什么箭头
次序	序理论、证明论	谁先谁后、谁强谁弱；一个结论由什么按什么次序推出
结构	代数、几何	部分怎样合成整体；变换下什么不变

这张表需要逐项说明。

拓扑偏重连接，理由已经讲了：邻域、开集、连续性、连通性，都是“在不在一起”的数学。庞加莱 1895 年的《位置分析》引入基本群，把拓扑空间的连接性质转化为群的代数性质，这是连接与结构第一次系统地扣合在一起，后来叫作代数拓扑。范畴论同样偏重连接：一个范畴由对象与对象之间的箭头构成，箭头可以复合，复合满足结合律。艾伦伯格与麦克莱恩 1945 年的《自然等价的一般理论》提出了范畴、函子与自然变换，把“对象之间怎样连、连的方式之间又怎样连”当作研究对象。范畴论也谈结构，但它谈结构的方式，是通过箭头来谈：一个对象具有什么结构，看的是它与别的对象之间有什么保持结构的箭头。所以说它偏连接，并非说它不涉及别的。

序理论偏重次序：偏序集、格、完备格、序数，研究的是“先后与强弱”这个关系本身。伯克霍夫 1940 年出版《格论》，把格当作一类独立的代数-序结构来研究。证明论同样偏重次序：一个证明是一个有限的推导序列，每一步由前面的步骤得出；根岑 1936 年证明算术的一致性时，用到了到 ε_0 的超穷归纳，把证明的复杂度挂在序数的次序上。这条路，到第 9 章谈强度阶梯时再展开。

代数偏重结构：群、环、域，研究的是运算与它所满足的律。几何偏重结构，这里的“几何”取克莱因的意思：形状与变换群下的不变量。黎曼 1854 年的就职演讲把几何推广到带度量的流形，度量这一结构决定了局部的形状，也是几何偏重结构的一例。

“偏重”这个词是有意选的。它的意思是：一个分支把某个元素当作主要的追问对象，而另外两个元素以较弱的方式出现。拓扑里有代数的一面（同调与同伦群），代数里有序的一面（有序域、偏序群），几何里有连接的一面（流形是局部像欧氏空间的拓扑空间），证明论里有结构的一面（证明的代数）。所以分支之间没有泾渭分明的界线，只有重心不同。

表里没有的分支，如分析、数论、概率、组合，也不是没有位置，而是它们本来就坐落在三者的交叠处。分析中的极限，要用到实数的序、邻近的概念和域的运算，三个元素缺一不可。数论研究整数的整除与同余，次序（整除是偏序）与结构（环）并重。本书不为这些分支另外派位。需要的时候，会在具体案例里说明它们在三个元素上的读数。附录一的九格表，是三化与三元素的相乘，不是分支的分类表。

这样排布的好处，是提供一个检查的角度。当我们读到数学史上的一次标准化，比如欧几里得到希尔伯特的公理化，或者魏尔斯特拉斯的 ε-δ 语言，可以问：这一次主要在哪个元素上做了标准化？做了什么？另外两个元素的状态是什么？这样，一页数学史就变成了一张可以填的读数表。后面第二编的四章，大致各偏重一个元素：几何公理偏结构，收敛偏连接，基础与独立偏次序，布尔巴基则是三者的汇总。

按这个读法，教科书里常见的“先学代数，再学分析，最后学拓扑”这样的课程次序，也有了一层别的意思。它既是难易的安排，也是三元素逐个被固定下来的次序：先学会在结构上用统一的写法，再学会在连接上用统一的写法，最后才把两者合起来看。学生在每一阶段学到的，都是一种谁用都一样的写法；他们在阶段之间遇到的困难，常常正是三个元素在对象上并没有真的分开，而课程把它们分开了。教过这类课程的人，对此大概都有体会。

◆ 1.6　相容条件下的解耦

既然三个元素同属一个场，为什么现代数学把它们分成了互相独立的分支？第 53 号第 13 章给出一个解释：在相容条件下，三个层次解耦了。本节转述这个解释，加上本书的限定，然后说明它在全书里的用处。

先说“相容条件”。第 53 号第 1 章把计算数学的相容性公理写成六个约束：相容网格（相邻单元共享完整的边或面，不重叠，不留缝隙，每个点属于且只属于一个单元）、合法中间态、质量单调性、确定性、可审计性、固定点收敛。后来在伞模型里，这些约束被读成伞参数的条件：$r\to 0$，$\omega=1$，$v\to\infty$，三者合起来 $N = r\omega/(vT_c) \to 0$。六个约束本是计算数学的约束，本书第 13 章会专门讨论它们怎样在整个数学的定义里不被说出地运行。这里只取其中最简单的一条：伞不重叠，$\omega=1$，每个点只属于一把伞。

再说“解耦”。第 53 号第 13 章的论证是这样的。伞有三个层次，即连接、次序、结构。当伞不重叠时，一个层次的性质不会通过重叠区传到另一个层次：连接层的性质不依赖次序层，次序层的性质不依赖结构层，结构层的动力学不受连接层约束。没有传导，就没有相互依赖，每个层次就可以独立研究。独立研究产生了各自的语言、工具和传统，分支由此而来。这是第 53 号对“数学为什么有分支”的回答。

第 53 号第 13 章补论又把这个解耦追到了自然数。自然数是三重退化的伞：连接只有通与不通，次序只有前后，结构只是一条链。在这种极简状态下，三个层次相互之间几乎没有可以抓住的牵连，所以各自可以单独走。

对这个解释，本书有三点限定。

第一，它是一个关于研究的解耦，不是关于对象的解耦。自然数的次序、拓扑与运算在对象上并没有断开：加法可以定义次序，$a \leqslant b$ 当且仅当存在 c 使得 $a + c = b$；自然数上的序拓扑是离散拓扑，每个点都是孤立点。这些耦合是存在的。但这些耦合是固定的，一次定义完毕，没有可调的配置，研究者不必在研究中不断协调三者。所谓解耦，指的是这种“不必协调”，而不是三者互不相干。这一点是本书对第 53 号论证的读法，第 53 号原文的措辞更强。

第二，第 53 号补论里举了三个例子：集合论（连接）可以独立于序数理论（次序）发展，组合学（次序）可以独立于代数（结构）发展，代数（结构）可以独立于拓扑学（连接）发展。这三个例子是示意性的，逐条核对会遇到反例。序数本来就是集合论的对象，康托尔创立集合论时序数是核心概念；代数组合学是一个成熟

的方向；代数拓扑与拓扑群，则是代数与拓扑反复交织的领域。所以这几句话只能读作对趋势的描述，不能当作分支关系的定理。

第三，关于“深层联系”的解释。朗兰兹纲领、阿蒂亚-辛格指标定理、镜像对称，都是数学史上连接分支的大事。第 53 号把它们解释为解耦失效的信号：数学家走得足够深，碰到了伞参数接近或超过相容边界的区域，在那里三个层次重新耦合。这个解释本身带着第 53 号自己的限定，它说明这是一个纲领性的预期，其实现取决于伞场理论的严格化。本书把它当作一个假说，在第四编里对照伞模型讨论；它的检验取决于伞场理论的严格化，第 18 章的五条预测不覆盖它，本书不把它当作结论。

用一个小例子看“固定的耦合”是什么意思。自然数上，次序可以由加法定义，这是一个耦合；但这个耦合在整个自然数的理论中不变，不论研究者做组合还是做数论，都用同一个定义，不需要在两个层次之间来回调整。换到实数，情形就不同了：实数的完备性把次序、拓扑和域运算扣在一起，分析里大量的论证要同时调用三者，一个估计往往要在“靠近”（连接）、“大小”（次序）、“加乘”（结构）之间来回换位。实数上的分析之所以难，一部分来自这种来回。在这个意义上，$\mathbb{R}$ 已不是三重退化的对象，它是一个三元素强耦合、但耦合方式被一次写定的对象。伞模型要问的是：耦合方式如果不被一次写定，而是随配置变化，会怎样？

有了这三点限定，解耦的说法仍然有用，用在三处。

其一，它解释了一个事实：为什么在今天的数学教育和研究的组织里，分支的边界是如此清晰。拓扑、代数、分析各有各的教材、期刊、课程和资格，学生进入数学，先要选一个方向。这是一种标准化的组织方式，每个分支内部是谁用都一样的，分支之间靠“翻译”相连。

其二，它给出一个读法：分支之间的壁，在多大程度上是对象本身的，在多大程度上是标准化的方式造成的？在相容条件下，壁是容易竖起来的；条件一松，壁会变薄。第四编把这个读法用到伞模型上。

其三，它预告一个对照。在伞不重叠的条件下，三个元素各走各的；在伞重叠、半径有限、传播有延迟的条件下，三个元素被撑开后重新牵连：连接的模式取决于次序（哪些牵连先释放，决定哪些通道先建立），次序的展开取决于结构（整体的形态决定信号的传播路径），结构的形态取决于连接（有哪些通道，决定可能涌现什么结构）。这是第 53 号的表述，本书到第 14 章与第 16 章再取用，本章不展开伞模型，只作预告。

用一句话归拢：解耦是相容条件下研究组织的结果，分支是解耦的产物，而相容条件本身是统一性标准化的一种写法。这一连串的因果，目前是一个读法，其中每一环都要在后文逐环检验。

还要补一句关于符号与逻辑的话。统一性标准化并不只发生在数学这个“场”的层面，它在符号层面表现为规定写法与记号，在逻辑层面表现为布尔式的真值判定。三层的标准化叠在一起，才有了“谁用都一样”的完整形态：符号规定了写成什么，逻辑规定了怎样推，数学规定了整体上是什么。本书的论证主要落在数学这一层，因为只有在场的层面，亲缘与回写才有位置；符号与逻辑层面的相应问题，留给后续研究。

◆ 1.7　标准化在三个元素上留下什么

最后，回到本书的主题：标准化。三个元素既然是数学这个场的三个元素，标准化作为数学的一化，也就要在三个元素上各做一件事。统一性标准化在每个元素上的做法，可以先粗略写成下面的样子。

在连接上，统一性标准化的做法是以相同连接。把许多看起来不同的东西，通过等价关系归为一类，类内的成员互相可以替换。同构、同伦等价、范畴等价，都属于这一类：只要两个对象之间存在一个保持结构的可逆对应，就把它们看作“同一个”。这样，连接的网络就被收成了等价类的网络，每个类里只有一个代表，其余都是可替换的拷贝。这是第 11 章的主题。

在次序上，统一性标准化的做法是线性化。把部分有序的东西尽量排成一条线，把复杂的比较收成一个“大”和“小”。强度阶梯是一个例子：一致性强度、证明论序数、逆数学的系统，被刻在一根近乎线性的刻度上。排名与评分是社会里的对应物。线性之所以是极致，因为在线性序里任意两点可比，不会出现“不可比较”这种差异。这是第 9 章的主题。

在结构上，统一性标准化的做法是唯一模型。把一类对象的结构，用一组公理钉住，使得满足公理的模型在同构意义下只有一个。这样的性质叫范畴性。戴德金 1888 年证明，二阶皮亚诺公理的任意两个模型同构，自然数的结构因此被钉成唯一的一个（证明用到递归定理，以及归纳公理对全体子集的量化，“二阶”的所指就在这里）；完备有序域在同构意义下唯一，实数的结构同样被钉住。这是统一性标准化在结构上最干脆的一步：谁来建一个自然数，建出来的都同构。这里的“唯一”，指一套公理之下模型在同构意义下唯一，并不是只许有一套公理；公理系统可以有许多套，各套之内各自唯一，这仍是统一性，而不是单一性。需要补充的

是，范畴性依赖逻辑的选择：在一阶逻辑下，自然数的公理有非标准模型，斯科伦 1934 年给出了构造。这说明“唯一模型”不是逻辑上必然的，而是在二阶逻辑的前提下才有。这是第 4 章与第 7 章要用到的一个细节。

三者合起来，就是统一性标准化在场上的三种读数：连接上的可替换，次序上的线性，结构上的唯一。这三种读数与导论 0.1 里的三重退化的伞是同一个形状：连接是二值的（同或不同），次序是线性的，结构是固定的。这不是巧合：三重退化的伞，本来就是统一性标准化的数学写法。

同一性谱系标准化与之相对的三种读数，也可以先写下，到第四编再给出数学形态。在连接上，以亲缘连接，等价被亲疏取代，“同一”有了程度，程度由回写历史给出。在次序上，是偏序的保留，不可比较的东西不被强行排队，它们之间的关系以谱系的位置标注。在结构上，是构造同一而配置成谱，同一个构造在不同的配置下有不同的位置，不被钉成唯一的模型。

最后，再把三个模态放回来。视觉端的数学，结构偏重，统一性强，所以它最容易走到“唯一模型”；听觉端的数学，次序偏重，统一性差，难以被钉成线性的刻度；触觉端的数学，连接偏重，随路径与身体而变，是部落谱系。今天通行的“统一性标准化”，是把视觉端的做法，即在连接上等价、在次序上线性、在结构上唯一，推广成对全部数学的要求。这个判断，在本书里不断被用来读案例。

至此，数学这个场的三个元素立住了。下一章要问的是：标准化作为数学的三化之一，它使文明的组织与连接成为可能的方式是什么；为什么在三化之内写不出标准化的创新；统一性与谱系这两种连接，各自怎样把三个元素连起来。

带着这三个元素进入后面各章，读者会发现每一章都在回答同一类问题：某一次标准化，在连接上做了什么，在次序上做了什么，在结构上做了什么，三者的读数合起来，三律是升还是降。这是全书的读法，也是附录一九格表的用法。

◆ 本章结论

1. 一道哥尼斯堡七桥的题里同时有三种事实：连接、次序、结构，缺一则题不成立。
2. E2 是信息，由符号、逻辑、数学三个元素构成；数学是特征纠缠的场，对象的身份来自它在关系网中的位置。
3. 场的三个元素是连接、次序、结构；拓扑与范畴偏连接，序理论与证明论偏次序，代数与几何偏结构，偏重不是划界。

4. 相容条件下三个元素在研究上解耦，分支由此而来；这是第 53 号的解释，本书读为研究组织的结果，其“深层联系”一环作为假说在第四编检验。
5. 统一性标准化在三个元素上的读数是可替换、线性、唯一，与三重退化的伞同形；它是视觉模态标准化的推广。

◆ 本章参考

— 原始文献

· 欧拉（Euler, L.），《与位置几何有关的一个问题的解》（Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis），1735 年报告，1741 年刊出。
· Hierholzer, C.，“Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren”，1873.
· Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, 1914.
· Poincaré, H.，“Analysis situs”，1895.
· Klein, F., Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen（埃尔朗根纲领），1872.
· Riemann, B.，《论作为几何学基础的假设》，1854 年演讲，1868 年刊出。
· Dedekind, R., Was sind und was sollen die Zahlen?, 1888.
· Skolem, T.，“Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlvariablen”，1934.
· Gentzen, G.，“Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie”，1936.
· Eilenberg, S. & Mac Lane, S.，“General Theory of Natural Equivalences”，1945.
· Birkhoff, G., Lattice Theory, 1940.
· Bourbaki, N.，“L’architecture des mathématiques”，1948.

— 研究文献

· Mac Lane, S., Categories for the Working Mathematician（米田引理一节）.

一 站内著作

- 第 53 号《SDE数学导论》（第 1 章、第 13 章）。
- 第 344 号《意义数学的诞生》。

◆

02

第 2 章

三化：标准化、简化、优化

本章提要 本章从一部历法跳过的十天进入，说明数学对文明的作用可以归为三化——标准化、简化、优化；三化各自作用于连接、次序、结构，得九格。标准化是数学形成的评估标准，也是度量衡、历法、货币、工程与通信协议得以把文明连起来的前提。简化与优化都以标准为参照，因此在三化之内只有标准化的精进，写不出标准化本身的创新，本章给出这一点的形式表述。最后提出两种连接方式：以可替换连接（统一性），以亲缘连接（同一性谱系）。

◆ 2.1 跳过的十天

1582 年 10 月，罗马教廷颁行新历。依诏书安排，当年 10 月 4 日的次日记为 10 月 15 日，中间十天从日历上消失。意大利的多数邦国、西班牙与葡萄牙当月即照办；英格兰及其北美殖民地迟至 1752 年才改历，9 月 2 日的次日记为 9 月 14 日，要略去的已是十一天。在两种历法并行的年月里，往来的契约与书信常须并记两个日期，一个照旧历，一个照新历。

一个日期，是一个连接。它把一桩契约、一次收租、一场斋戒与一个共同的“今天”连在一起；两地的人只要说出同一个日期，就能约定同一个时刻。历法于是同时安排了三件事。其一是连接：这里的这一天与那里的这一天是否同一天。其二是次序：哪一天先，哪一天后，两个日期之间隔几天。其三是结构：一年有几个月，闰日插在何处。格里高利历的闰年规则，便是一条写得极短的模算术：能被 4 整除的年份为闰年，但整百的年份须能被 400 整除才算闰年。依此，历年的平均长度是 365.2425 日，与回归年相差甚小，约三千年才积出一日（两者之差约为每年 0.0003 日）。

此前通行的儒略历每四年一闰，平均年长 365.25 日，比回归年长约 0.0078 日，约一百二十八年便多出一日。自公元 325 年前后尼西亚会议所认的春分日期算

起，到 1582 年已累积约十天，这就是被跳过的十天的来历。格里高利历的办法，是每四百年删去三个闰日，即整百的年份里只留能被 400 整除者，把平均年长从 365.25 日降到 365.2425 日。

这条规则还有一个顺手的性质：每四百年里有 97 个闰年，合 146097 日，恰为 7 的 20871 倍，所以格里高利历每四百年，日期与星期的对应整个回到原处。历法的设计者把日、月、年、周这几套周期拧在一起，用余数把它们对齐。

这条规则是数学，这部历法又是文明的组织件：它让收租日、斋期、航期、议会会期落在同一张表上。两件事出于同一个动作，这个动作本章称为标准化。标准化只是数学作用于文明的方式之一，另外还有简化与优化。本章先把三者放在一起看清，再追问一个后面各章都要用到的问题：在这三种动作之内，标准化自身还有没有创新的余地。

值得留意的是，一套标准运行得越顺，越少有人谈起它。人们在 10 月 14 日这一天赴约，很少想到日期背后有一次诏书、一场跳过的十天；螺钉旋进螺母，很少想到曾有过一个年代，二者只认彼此。标准的成功，常以隐形为标志。要重新看见它，需要一个出其不意的场景，比如一次改历，或一次两种制式相遇的错配。本章和下一章的任务，就是把这件隐形的东西重新摆到桌面上。

◆ 2.2　三化与九格

数学是 E2 中特征纠缠的场，三元素为连接、次序、结构（第 1 章）。数学对这三个元素所做的事，归起来是三类，本书称为三化。

标准化，是把一类对象之间的差异收到一种共同的规格之下，使其中任意两个对象在规格所关心的方面可以互相比较、互相替代。它产出的是评估标准，回答“合不合格”。简化，是在标准所承认的等价之下，取更少的连接、更短的次序、更小的结构，回答“能否更少”。优化，是在标准所给的度量之下取极值，使误差、冗余、损耗最小，回答“能否更好”。

三化各自作用于连接、次序、结构，合成九格。下表每格给出一个数学上的例子，并在括号中标出文明中的对应。

	连接	次序	结构
标准化	等价关系与等号，使“相同”成为可传递的连接（螺纹、插头、通信端口）	全序与字典序，运算优先级（公历日序、账簿的记账先后）	公理系统与标准型；复数定义为实数序对（借贷平衡式）
简化	传递约简与哈斯图，删去可由其余连接推出的连接（精简线路图）	交换律与结合律，使顺序与括号可略；约分（省去不影响结果的工序）	商结构与素因子分解，取等价类的代表（取最简分数、取标准零件）
优化	最短路、最小生成树、最大流（铁路与管网的布设）	排序算法的比较次数、任务排程（工序编排）	最佳逼近、最小二乘、极值问题（选材与定型）

三点须说明。

第一，九格是九种动作，不是九个学科。同一个学科里三化交织出现：一部代数教科书先给出群的公理（标准化结构），再证明每个有限生成交换群同构于若干循环群的直和（简化结构），再讨论哪种生成元组最短（优化结构）。

三化还常在同一个创造性的成果里一并出现，十进位值制记数就是一例。它规定每个数位上的符号只在该位上取值，逢十进一（标准化次序与结构）；它只用十个符号即可写出任意自然数（简化结构）；它使加减乘除的竖式演算步骤短、易于机械执行（优化次序）。后人回看，容易把这一整套看成不言自明的“自然”写法，而忽视它是一次三化合一的安排。

第二，三化之间有先后。简化问“在什么意义下算相同”，这个“相同”由标准给出；优化问“什么算好”，这个度量也由标准给出。标准化提供尺，简化与优化用尺。下文 2.5 将看到，这个先后关系是全章的支点。它指的是逻辑上的先后，不是时间上的先后，2.3 的末尾会专门说明。

第三，连接、次序、结构三层，在第 53 号《SDE数学导论》第 13 章里被读作伞的三个层次，那里说，在相容条件之下三层彼此解耦，所以每一层可以独立发展出自己的语言与传统。九格表中各格可以各自推进，是这一解耦在三化上的表现。相容条件是什么、怎样运行，留给第 13 章。

◆ 2.3　数学对象要站住，先要被标准化

数学史上有一种常见的叙述：先有对象，后有对它的整理。这种叙述把标准化放在了数学的后期。实际的次序多是反过来的：一个对象能不能算数学对象，先要看它能不能通过某种评估，而评估所依据的标准，必须先已存在。

复数是一个清楚的例子。“虚数”这个名字本身就带着怀疑。十六世纪的代数学家在解三次方程时发现，必须经过 $\sqrt{-1}$ 才能走到实根，却长期无法说清这个记号算什么。一次一次的使用并未使它站住。1837 年，哈密顿把复数定义为实数的有序对，并规定其加法与乘法；此后，复数不再是需要辩护的记号，而成为一种由已有对象按规定构造出来的结构。复数站住，不是因为又多算对了几道题，而是因为有了一种规格，使它能与实数对象一样被检验、被比较。

函数概念走过了同一条路。欧拉时代，函数多半指一个解析表达式；狄利克雷 1829 年讨论傅里叶级数的收敛时，给出一个处处不连续的例子（有理数处取一个值，无理数处取另一个值），1837 年又明确表述：函数可以是任意的对应；二十世纪的集合论又把函数定义为有序对的集合。每一步都是把“什么算函数”写得更为一致，使得判断一个对象是不是函数，成为谁都可以照做的检验。

极限的情形更典型。贝克莱在 1734 年写文章，嘲讽流数法中的“消失量”是“逝去量的鬼魂”。微积分的运算在此前此后都一直有效，可是“有效”本身不是评估标准。柯西 1821 年的《分析教程》开始用不等式叙述极限，后来经魏尔斯特拉斯一派的讲授，ε-δ 语言成为通行的写法。此后，一个关于极限的论断对不对，有了可以一行一行核对的格式。到二十世纪六十年代，罗宾逊用模型论给出另一套对无穷小的处理，同一批运算在另一种规格下也站住了。两套规格并存的意义，第 10 章再谈。

基数的比较亦然。康托尔 1878 年前后以一一对应作为比较集合大小的规格，于是“两个无穷集合一样多”第一次成为可以检验的论断，而不再是一句修辞。

连最朴素的等号也在此列。“a 等于 b”这句话看似不言自明，其实包含一整套约定：等号是自反的、对称的、传递的，并且可以代入——等式两边的东西在任何允许的上下文里互换，真假不变。把等号写成等价关系，相当于规定了“相同”的评估规格，此后一切关于“同一个东西”的论断，都有了统一的检验。等号越是不言自明，说明它的标准化越是彻底；越是彻底，它在运行中就越是隐形。

证明本身的格式也属此列：什么样的推导算一步，什么样的引用算有据，都是写定的体例。

标准一旦变动，这类问题立刻显形。1976 年，阿佩尔与哈肯借助计算机完成了四色定理的证明，数学界为此争论了很久：一份无人能够全部通读的计算，算不算证明。争论的实质，是评估标准遇到了新的情形，需要说明什么样的检验才算数。后来形式化证明助手的发展，是在给出一个更严的、可以由机器核对的规格。欧几里得的《原本》以定义、公设、公理、命题、证明的次序组织材料，这个组织方式后来成为数学写作的通行体例。一个论证写成什么样子才算证明，是由这种体例规定的。体例一旦通行，写下的论证就可以被陌生人阅读、核对和引用，数学便有了可积累的公共部分。

所以，标准化是数学形成的评估标准。一个数学对象要站得住，先要被标准化；被标准化之后，才谈得上简化与优化，才有“这个证明更短”“这个估计更紧”这类判断。三化之中，标准化居先。

三化各自带着一个评估问句，问句的先后也印证了这一点。标准化问“合不合格”，简化问“能否更少”，优化问“能否更好”。后两问里的“少”与“好”，都要有一个“合格”做底：不合格的简化是错误的简化，不合格的优化是越界的优化。没有标准，简化与优化找不到自己的起点。

这里有一点须说清：说标准化居先，说的是逻辑上的先后，不是时间上的先后。一套标准常常在多次试用中逐步凝成，凝成之前，人们已在做数学；凝成之后，回头看，才看出哪些做法被留下，哪些被当作不合格而淘汰。标准在运行中显影，在重复中凝固，成为后来者进入这个领域时已经备好的门槛。数学对象之所以显得“客观”，部分原因就在这里：我们见到的总是已通过门槛的那一批。

◆ 2.4　标准化使文明的组织连接成为可能

数学的标准化走出书斋，是文明得以组织的条件。本节依次看五个场合，每个场合都是连接、次序、结构经标准化之后才接得起来的。

度量衡。《史记·秦始皇本纪》记秦并天下后“一法度衡石丈尺”，与“车同轨，书同文字”并列。传世的商鞅方升，器上有两段铭文：一段记秦孝公十八年（公元前 344 年）大良造商鞅监制，一段是始皇二十六年（公元前 221 年）统一度量衡的诏书，同一只量器记着前后两次规制。这里被标准化的，是量器与砝码的结

构，是度、量、衡各级单位之间的进位次序，以及各地之间的连接：一斗粮在咸阳与在蜀地是同一斗，赋税才能折算，军粮才能调拨。十八世纪末的法国走过类似的路。大革命之前，各地的度量名目繁多，同名之物量值各异，同一个“尺”或“斗”在相邻两地可以相差很多。1790 年代，米的定义定为经过巴黎的子午线自北极至赤道长度的一千万分之一，德朗布尔与梅尚丈量了敦刻尔克至巴塞罗那的弧段，1799 年做成铂制的档案米。1875 年十七个国家签订米制公约，此后国际米原器、千克原器相继设立。度量衡的标准化，是把量值的连接、单位的次序与进位的结构一次性安排好。

历法。 前引 1582 年的例子说明历法解决的问题。二十世纪以前，各国的钟点本是各城按太阳来定，铁路出现后，列车时刻表使这种地方时成为麻烦。美国铁路在 1883 年实行了标准时区，1884 年的国际子午线会议又以格林尼治为本初子午线。时区是一种结构，经度每十五度差一小时是一条次序规则，各地的钟点由此连成一张表。

货币与簿记。 铸币的重量与成色是货币标准化最直观的一面。更深一层的是记账：帕乔利 1494 年在威尼斯印行的《算术、几何、比及比例概要》中叙述了复式簿记，每一笔交易同时记入借方与贷方，账目总须借贷相等。借贷平衡是一条结构约束，日记账到总账的过账顺序是次序约束，每个科目与其对手科目的勾连是连接约束。有了这套标准，一家商号的账目可以被陌生的合伙人、债权人、税官检查，信用才能超出熟人圈子而展开。

工程。 十八世纪后期，法国军械制造开始尝试使零件可互换，后来美国的兵工厂继续推进，使一支枪坏了的部件可以由另一支枪上的同型部件替换。螺纹的标准化是典型：惠特沃斯 1841 年向英国土木工程师学会提出一套统一的螺纹制式，在此之前，螺钉与螺母往往由同一家作坊成对做出，换一个就配不上。统一螺纹之后，螺钉只需满足规格，不必认识它的螺母。这是互换性的实现，以及随之而来的大规模协作分工：造螺钉的工厂与造机器的工厂可以互不见面。

通信协议。 1974 年，瑟夫与卡恩发表了关于分组网络互联的协议设计，其后传输控制与互联网协议在 1981 年以 RFC 文件的形式固定下来。1983 年 1 月 1 日，阿帕网全面切换到这一套协议。协议规定的是分组的格式（结构）、编号与重传的规则（次序）、地址与路由的约定（连接）。因特网工程任务组后来流传一句话，说

他们信奉“粗略共识与可运行的代码”，这句话说明，协议的标准在运行中站住，不必先有一份完整的理论。两台互不相识的机器，只要都遵守协议，就能接通。

这五个场合有一个共同点：连接不再取决于谁与谁相识，而取决于双方是否满足同一份规格。

数学共同体内部的协作，用的也是这种方式。一篇论文可以调用另一篇论文里的引理，调用者与作者不必相识，只要引理的陈述满足规格——条件写明，结论写明，证明经过同行检验。引理于是成了数学里的“可互换零件”：同一条引理，在素不相识的几十篇论文里被同样地使用。期刊的格式、符号的约定、定理编号的体例、参考文献的著录规则，把一个全球分散的共同体连成可以累积的整体。若没有这一层标准化，数学便只能是小圈子里的口传手授。

货币的情形在中国也有对应：秦并天下之后，以圆形方孔的半两钱通行全国，此前各国的刀币、布币、蚁鼻钱各行其是。钱形的统一是结构的标准化，钱重与面值的对应是次序的标准化，各地的钱可以互相折算是连接的标准化，三者一并完成，赋税与市易才有了共同的算术。协作分工，也就是一个人只做整体的一小段，另一人接过去，这种分工的前提是每一段的接口被标准化。没有标准化，上述每一项都接不起来，文明的组织半径便停在熟人所及之处。所以，在本书的论证里，标准化的文明功能是前提，不是论敌。要追问的，是它用什么方式来连接。这一问留到 2.7。

◆ 2.5　三化之内，只能精进标准化

现在回到 2.2 提出的先后关系，把它写成一个可以检验的命题。

先看一个工程上的例子，它说明优化为什么碰不到标准本身。惠特沃斯螺纹的牙型角是 55 度；1864 年美国的塞勒斯提出牙型角 60 度的螺纹，后来发展为美制统一螺纹。两套制式各自内部，工程师可以反复优化：牙高取多少，圆角取多大，公差带如何配，使强度、加工难度与互换性综合最好。这些优化都是在各自制式给定的度量之内做的。两套制式之间孰优孰劣，却无法靠其中任何一套的优化来回答，因为每一套的度量，已经包含了它自己的牙型角。

设　Σ　为某一领域内全体候选标准所成的集合。简化与优化各自使用的“更好”，都要由标准给出：简化的“更少”，是在标准所认的等价类里取更小者；优化的“更优”，是在标准所给的度量下取更小的误差。标准化自身的“更好”，也

有三种常见的说法：更严（歧义更少）、更广（覆盖更多）、更省（规则更少）。三者看上去不同，却都沿着同一条轴：差异被收得更干净。若各化使用各自的评价轴，则把它们合起来，仍得到 Σ 上的一个预序 $\preccurlyeq$：$\tau \preccurlyeq \tau'$ 表示在三化所认可的各条轴上，τ' 都不劣于 τ。多条轴上同时不劣，所成关系是各轴关系的积，积序仍是预序。

命题 2.1（精进不到创新）。 设 $(\Sigma, \preccurlyeq)$ 如上，称 $\sigma \to \sigma'$ 为三化之内的一步，当且仅当 $\sigma \preccurlyeq \sigma'$。则从 σ 出发经任意有限步所得的标准 τ，都满足 $\sigma \preccurlyeq \tau$。因此，凡与 σ 不可比的标准 ρ（既无 $\rho \preccurlyeq \sigma$，也无 $\sigma \preccurlyeq \rho$），都不是 σ 经三化之内的有限步可达的。

证明：对步数归纳，并用 $\preccurlyeq$ 的传递性。∎

这个命题很朴素，要紧的是它的读法。借第 1 章的因数例子可以看清“不可比”：在 12 的因数上以整除为序，从 2 出发沿整除序向上，只能到 4、6、12，永远走不到 3；要让 2 与 3 可比，须换一个序，比如大小序，而这已是换了评价的轴。

不妨把九格逐行过一遍，看精进在每一行里是什么样子。标准化行：连接上的精进，是把“相同”的检验写得更严，如从“看上去一样”到“同构”再到“等价”；次序上的精进，是把先后规则写得更全，使任何两个对象都可比；结构上的精进，是把公理写得更少更独立。简化行：连接上，是删去更多可推出的连接；次序上，是使更多顺序可略；结构上，是把对象归入更少的类型。优化行：连接上，是求得更短的路径；次序上，是求得更少的步数；结构上，是求得更紧的界。九格里没有一个格的“更好”是在改尺，每一个格的“更好”都是在尺内，量得更细。这就是说，在三化之内，对标准的任何改动都是沿着同一个评价序向上走。走到头，是一个关于该序的极大元，也就是一把“最严、最广、最省”的尺；这样的点是固定点：再改，评价序上不再有更好的去处。

这并不是说极大元一定存在；在许多领域，评价序上有无穷上升链，精进可以永远继续。无论极大元存在与否，结论不变：链上的一切，都与出发点可比。第 1 章所说的相容性公理的第六条约束，固定点收敛，是这件事在计算数学里的写法；它与前面五条约束合起来怎样拆掉了创新的发动部件，是第 13 章的任务。

创新要求到达的，是与 σ 不可比的 ρ：它改变的是评价的轴，也就是“什么算好”。对一把尺来说，用它自己去量它自己，量到的永远是它自己的长度。三化之

内的评价轴恰恰是标准给出的，所以三化之内写不出标准化本身的创新，只写得出精进。“写不出”指的是写不进这个框架，不是说世上没有创新。创新是有的，而且常常发生在数学史的关键处；只是当它发生时，驱动它的东西已经不在三化里面，三化只负责事后把它整理成新的标准。整理本身也是精进，所以事后的叙述里，创新总是被写成了又一次合乎逻辑的改进，它的来路因此隐去。

一个历史事件通常既含精进，又含别的东西。ε-δ 语言相对于十八世纪的直观极限，在“严”这条轴上是精进；但随后出现的处处连续而处处不可导的函数，使“什么算函数、什么算病态”的次序出现了原先没有的不可比之处。后一部分，已经不是同一条轴上的移动。这些事件需要分开读数：哪一部分是沿轴精进，哪一部分来自轴之外。本书第二编逐个事例做这项分解。

因此，要给“化”本身下一个新的定义，要追问“标准化化解什么、以什么为好”，需要一个不属于三化的立足点。这个立足点在哪里，是第 3 章的内容。

也许有人会说，命题 2.1 把创新定义得太窄：一次大的改动，难道不是把旧标准推向更高的标准吗？这里的区别在于，更高的标准若与旧标准可比，那么沿旧标准的评价序，它就是精进；若不可比，则它依据的评价轴已经换了。从外面看，两种情形往往都表现为“出现了一个新标准”，要靠追问评价轴有没有换来区分。这一区分有操作上的办法：拿新旧两个标准各自评估同一批对象，如果新标准把旧标准评为好的对象一律评得不差，只是多评出了一些更好的，那是精进；如果出现一批对象，在旧标准下是例外、是病态，在新标准下却成了值得研究的主体，反过来一批旧标准下的典范在新标准下失去了地位，那就是评价轴换了。后一类情形的清单，本书第二编逐一列出。换轴的那一次，总是伴随着一个原先评价序里没有的问题，例如“这把尺量出来的东西，值得量吗”。这类问题在三化之内没有位置，因为三化的每一化，都预设了尺子是好的。

◆ 2.6　精进的三个方向及其天花板

精进有三个方向，每个方向都有自己的天花板。

更严。 欧几里得的《原本》经过两千多年的补缀，到 1899 年希尔伯特的《几何基础》，公理被重新排布，隐含的假设一一明写，平面几何的公理系统在“逻辑上无漏”的意义上达到了新的严格程度。米的定义也是这条路：子午线、原器、光波长、1983 年以真空中光速规定的米，每一次定义都使之更稳、更少依赖某件实物。

2019 年 5 月，千克也改由普朗克常数定义，普朗克常数被取定为一个精确的数值，千克原器从此不再是定义的依据，而只是一件历史文物。更严的天花板，是定义里不再需要任何实物，也不再需要任何特定的使用者，谁用都一样。

更广。 米制从法国推向欧洲，再推向世界；公历从天主教国家推向各国；ASCII、互联网协议逐步覆盖了各类机器。数学里，抽象代数把整数、多项式、矩阵纳入同一套环论语言，范畴论又把各种结构纳入态射的语言。更广的天花板，是一个范围，里面一切都用同一套规格。

更省。 国际单位制现今只用七个基本单位，其余皆由它们导出。公理系统追求独立而且少的公理。更省的天花板，是不可再少的一套规则。

三个方向各有代价，须在此先点到。更严的代价，是例外被推出尺外：定义写得越无歧义，越多的实际情形落到定义之外，成为“不合格”或“病态”。更广的代价，是地方差异被抹去：越多的范围用同一套规格，越多局部的做法失去立足之地。更省的代价，是纠缠被拆开：规则越少，各部分之间越要彼此独立才能保证规则够用。这三种代价，是第 4 章要拆开的机制，本章只记下它们是精进的伴生物，而不是精进的失误。

三个天花板碰在一起，得到一把最严、最广、最省的尺，这是统一性标准化的极限形态，也就是说，“谁用都一样”被推到了底。

这个极限形态在文明里也看得见：国际单位制的目标，是使任何一个实验室、任何一个年代的人，凭同一套常数复现同一个单位，无须任何一件放在某处的实物。这是标准化的辉煌，也是它的边界所在——一把可以被谁都复现的尺，已经与任何具体的使用经历脱开了关系。有两点须记住。其一，天花板并不意味着只有一把尺；可以有许多把尺，各管一方，每一把各自逼近自己的天花板，这仍是统一性（定义二“多元化的统一性”，第三编展开）。其二，精进本身有价值：没有精进，标准就是粗糙的，文明的连接就会出错。本书反对的，是把精进当成标准化的全部，也是把统一性当成连接的唯一方式。

◆ 2.7 两种连接：可替换，与亲缘

2.4 的五个场合里，连接的方式是同一种：只要满足规格，换一个也一样。本书称之为**可替换连接**。螺钉与螺母之间是这样，度量衡的一斗与另一斗之间是这样，数学里同构的两个对象之间也是这样：在同构的意义下，哪一个都行，结论照样成

立。可替换连接不记得谁与谁连过，连接两端的东西可以随时被别的满足规格的东西取代。这正是“谁用都一样”，也就是统一性标准化的连接方式。

可替换连接在三元素上各有表现。就连接而言，是接口的规格：满足规格者皆可接入。就次序而言，是流程的规格：每一步的输入输出被写定，前一步由谁完成无关紧要，只要交出合格的输出。就结构而言，是型式的规格：同一型号的部件在整机里占同一个位置，换哪一件都行。三处合起来，一个系统可以被拆成零件、再装回去，而且零件之间谁也不必认识谁。

与它相对的，是**亲缘连接**。设想一副榫卯。榫头与卯眼是同一位木匠在同一块料上一点一点修出来的，推进去时哪里紧、哪里松，木匠凭手感再削一刀。这副榫卯换一个榫头，便不再严丝合缝，要重新磨合。它的连接记得自己的来历：两端相合到什么程度，是它们互相磨合的历史给出来的。亲缘连接是有程度的，有近有远，而且程度可以随着继续磨合而改变。这对应本书对同一性谱系的定义：同一性的程度由回写历史生成，“这里才这样”。

榫卯容易被误读成对手工时代的怀旧，须当心。螺纹标准化之前，螺钉与螺母成对制作，那是亲缘连接，但它的亲缘局限在一对之内，无法扩展到整个机器工业。标准化的功绩，是把连接的半径放大。本书的主张，不是退回成对制作，而是追问：当连接的半径已被放大，连接的方式能否仍然带着亲缘。

这里有一个容易越界的地方。有人会说，不同规格之间加上换算系数，不就有了亲缘吗？英制与公制并存，1959 年英美等国约定 1 英寸恰为 2.54 厘米，两套尺子之间由此有了一条一次给定的换算。这仍是可替换连接，只是复数了：每套尺子内部谁用都一样，两套之间的“亲疏”由一条事先给定的定义安排。多宇宙、逻辑多元论、宽容原则，格式与此相同，都属于**多元化的统一性**。亲缘连接的程度不能是一张事先写好的亲缘表，因为表一旦写好，查表的人谁用都一样，它又成了可替换连接。亲缘只能在回写中发生，不能被应用。这也是为什么说同一性谱系标准化是难的：它要求标准的位置、亲疏与适用范围由被回写的历史给出，而不由定义事先给出。如何在数学上把这件事写出来，是第四编伞模型的任务；这里先记下一点，伞模型统一的是构造，不是配置，构造同一，配置成谱。

亲缘连接在三元素上也各有表现。就连接而言，是接合处记得磨合的历史，换一端须重新磨合。就次序而言，是先后被记住：先做过什么，使后做的事在这里才这样做。就结构而言，是位置随历史而定：同一件东西，在不同的亲缘网络里占的

位置不同。亲缘连接绝不因此混乱，它的秩序来自回写，而不来自事先的规定。数学里并不缺这类现象：一个技巧在甲领域被反复改写、成为日常工具，在乙领域却始终只是外来的引进，同一个技巧，两处的“熟”的程度，记载着各自的来历。这一点后面作为可检验的预测提出（第 18 章）。

三种感觉模态的差异。 可替换性在三大感觉模态里实现的难易很不一样。视觉的对象可以一一对应，可以重看，可以多人同看，所以一个图形、一个符号串，换一个人来看，看到的大致一样；可替换性在视觉模态中最容易实现，视觉数学的统一性可以很强。听觉的对象沿时间展开，一过即逝，每次听都不是上一次，听者的期待又随反复聆听而变，所以听觉数学的统一性非常差，要把一段节奏或一个音程变成“谁听都一样”，成本极高。触觉的对象要靠手的路径去摸，按压的力度、持续的时间、手的老练程度都进入读数，所以触觉数学非常部落谱系化：掌握它的人，是在一个手把手传递的共同体里磨出来的。第 344 号《意义数学的诞生》说，视觉数成为“唯一的数”，是因为它能一一对应、能重看、能同看，规范力积累得最快，不是因为构造唯一；三种数共用一个构造，分在配置。把这几句话放进本章的语境，便得到一个重要的判断：今天通行的统一性标准化，实为视觉模态的标准化，被推广成了全部数学的标准化。可替换连接之所以看上去是连接的“自然”方式，是因为视觉最容易做到可替换。这个判断在第 14 章和第 16 章里还会回来，那里把视觉数、触觉数、听觉数放在同一把伞下，看它们各自站在谱系的什么位置。

◆ 2.8　小结，并通向第 3 章

三化铺在连接、次序、结构上，得九格。标准化是数学形成的评估标准，也是文明组织连接的前提；简化与优化以标准为参照。命题 2.1 说明，三化之内，对标准的改动只是沿同一个评价序向上，精进可以走得很远，创新却不在其中。

连接有两种方式：可替换的，与亲缘的。五个文明场合里的标准化，用的是第一种。第一种方式的极限，是一把谁用都一样的尺，或许多把这样的尺。

接下来要问：到哪里去找那个不属于“化”的立足点？第 3 章用 SDE 的九宫透镜回答，只有美与幸福律所在的那一组，才有资格追问一个“化”化解什么、以什么为好。

回头看本章，有两条线索会在后面反复出现。其一是标准化居先：因为它给出评估的尺，所以对它的追问不能借用尺。其二是连接方式：可替换连接把连接的半

径放得最大，同时也把连接中每个端点所记得的东西削得最少。下一章要做的，是为第一条线索找到出路，第四编则为第二条线索找到数学形态。两条线索在最后相遇：一个不属于三化的立足点，若能给出以亲缘连接的标准化，那么标准化的创新就有了位置。到那时可以回头看出，第 2 章的三化并没有错，错在把三化当成了标准化的全部。

◆ 本章结论

1. 数学对文明的作用可归为三化，标准化、简化、优化各作用于连接、次序、结构，得九格。
2. 标准化是数学形成的评估标准，一个数学对象要站得住，先要被标准化。
3. 度量衡、历法、货币与簿记、工程、通信协议，都是连接、次序、结构经标准化之后才接得起来的，标准化的文明功能是前提。
4. 简化与优化的参照都由标准给出，故在三化之内只有标准化的精进（更严、更广、更省），没有标准化本身的创新（命题 2.1）。
5. 连接有两种方式：以可替换连接（统一性，多元化的统一性亦属此类），以亲缘连接（同一性谱系）；可替换性最易在视觉模态上实现，统一性标准化实为视觉标准化的推广。

◆ 本章参考

— 原始文献

· 欧几里得：《原本》。
· 司马迁：《史记·秦始皇本纪》。
· 贝克莱：《分析学者》（The Analyst），1734。
· 柯西：《分析教程》（Cours d'analyse），1821。
· 狄利克雷：《关于用正弦余弦级数表示完全任意的函数》，1837。
· 哈密顿：《共轭函数论，或代数偶》，1837。
· 康托尔：《对流形论的贡献》（Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre），1878。
· 希尔伯特：《几何基础》（Grundlagen der Geometrie），1899。

· 帕乔利：《算术、几何、比及比例概要》（Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità），1494。
· 惠特沃斯：《论统一的螺纹制式》（On an Uniform System of Screw Threads），《土木工程师学会会议录》第 1 卷，1841，157–160 页。
· 瑟夫、卡恩：《分组网络互联协议》（A Protocol for Packet Network Intercommunication），IEEE Transactions on Communications, 1974。
· 互联网协议与传输控制协议规范，RFC 791、RFC 793，1981。
· 格里高利十三世：改历诏书 Inter gravissimas，1582。
· 罗宾逊：《非标准分析》，1966。

— 研究文献

· Alder, K.: The Measure of All Things, 2002。
· Kula, W.: Measures and Men, 英译本 1986。
· Porter, T.: Trust in Numbers, 1995。
· Hounshell, D.: From the American System to Mass Production, 1800–1932, 1984。
· Bowker, G. & Star, S. L.: Sorting Things Out, 1999。

— 站内著作

· 第 53 号《SDE数学导论》，第 13 章。
· 第 344 号《意义数学的诞生》。
· 第 402 号《新文明诞生——同一性谱系化》。

◆

03

第 3 章

透镜 S3·D1·E2：为什么只有美与幸福律能重新定义一个“化”

本章提要　本章从国际千克原器的退役进入，提出一个问题：改写一把尺的定义，凭什么说改得好。章中先列出九宫透镜的三维九格，再按“下标之和被 3 整除”得九组三角套，三组正位、六组异位。数学所在的 E2 共有三组：正位 S2·D2·E2 在标准之内走路；甲组 S1·D3·E2 以优化约束改标准，是用“化”改“化”，只会加固；乙组 S3·D1·E2 以“为了什么”和“好不好、美不美”追问标准，是唯一的出路。本章写出三方程在乙组的具体化，指明本书补的是第三式，并给出评判标准化的尺子：意义三律运行得是否丰满。

◆ 3.1　一只放了一百三十年的圆柱

2019 年 5 月 20 日，国际单位制修订生效。千克不再由一只实物定义，改由普朗克常数的固定数值定义。那只自 1889 年起保存在巴黎近郊塞夫尔国际计量局的铂铱合金圆柱，国际千克原器，在这一天退役。它被锁在三重钟罩之下，一百三十年里，每隔多年取出来，与各国分得的副本比对。比对记录显示，原器与副本之间有微小的漂移。漂移是相对的：到底是原器变轻了，还是副本变重了，没有一个更高的实物可以裁判。

这个故事通常被讲成一个精进的故事：定义越来越稳，对实物的依赖越来越少，终于全部交给了自然常数。这样讲没有错，它符合第 2 章 2.6 所说的“更严”。但退役的这一天，还可以问另一个问题：为什么要有这样一把无须任何实物的、谁在任何时候都能复现的千克？这一问不关乎千克的定义写得严不严，它关乎千克为了什么，以及什么样的千克算好。

问题在数学里同样存在。第 2 章已指出，三化之内只能精进标准化，所以“千克为了什么”不能在“化”的内部回答。需要的是一个不属于“化”的立足点，而且这个立足点必须有资格对“化”说话。本章要找的就是它。找的办法，是把 SDE

的九宫透镜摆到数学上，逐组审视：哪一组在标准之内，哪一组在用“化”改“化”，哪一组站在标准之外。

这里的难处，在于任何一个提出来的立足点，都容易被收编。若把“为了什么”写成一条技术指标，它就成了新的标准；若把“好不好”写成一个评分，它就成了新的度量。立足点要保持在“化”的外面，就得是一种不能被折算成尺的东西。九宫透镜的好处，是它事先把格子分开：哪些格是执行，哪些格是约束，哪些格是方向与显露，不会在论证中途被偷换。

千克只是一个例子，米的定义史排得更整齐：子午线的千万分之一，铂制的档案米，铂铱的国际米原器，氪原子辐射的波长，真空中光在一定时间内走过的距离。每一次换定义，都有一个技术上的理由：旧的更难复现，或者更不稳。这些理由全属“更严”。可是子午线那一次与后面几次有一点不同：那一次的出发点，是想要一把“属于一切人”的尺，不属于任何一个王国，这个想法决定了此后所有技术理由的方向。方向先于技术。技术理由可以说明怎样走得更好，却说明不了为什么朝这边走。

◆ 3.2　九宫：三维各三格

SDE 把一个对象的显露放在三个维度里看：S 是显露的视角，D 是差异序列的组织，E 是特征纠缠的场。每个维度再分三格，共九格。

维度	第 1 格	第 2 格	第 3 格
S 显露	S1　对比·变化·分布	S2　粒子·波·场	S3　真·善·美
D 差异序列	D1　意义三律（特征律、自由律、幸福律）	D2　路径（六步法：猜想、执行、评估、反馈、修正、迭代）	D3　误差·冗余·损耗
E 特征纠缠	E1　三界	E2　符号·逻辑·数学	E3　内能·动能·势能

对其中几格略作说明。S1 是三种看法：把对象与别的对象对比，看它怎样变化，看它的分布。S2 把显露的形态分为粒子态、波态、场态；第 344 号把符号读作粒子态，逻辑读作波态，数学读作场态，并说明这是对应，不是等同。S3 是显露的价值面：真、善、美。D1 是差异序列的方向引擎，其发生逻辑即意义三律：特征律管目标的发生，自由律管路径的发生，幸福律管动力的发生，三律各自的跑法，已列在导论的三律表里，本章 3.8 再引。D2 是路径的组织，六步法是其中一种写法；

D2 另有三态相位，秩序态、混沌态、介生态。D3 是优化约束，把误差、冗余、损耗压小。E1 是三界，E2 是信息的三种模态，符号、逻辑、数学，E3 是能量的三种状态，内能、动能、势能，在能量的意义上对应真、善、美。

数学所在的格是 E2。本书的对象是数学，所以 E 维固定在第 2 格；变动的是 S 与 D 各落在哪一格。

把九格各自放回数学里，会看得更具体。S1 的对比，是两个定理之间谁强谁弱，两个算法谁快谁慢；变化，是一个量随参数的变动，一个函数随变量的升降；分布，是素数在整数中的疏密，误差在区域上的起伏。S2 把符号当作粒子，一个个可以指认；把逻辑当作波，推演沿着次序传播；把数学当作场，连接、次序、结构铺成一片。S3 的真、善、美，在数学家的日常语言里各有对应：定理为真，证明无误；方法好用，算法高效；证明漂亮，结果对称简洁。D1 的三律，在数学家的工作里表现为：一个新概念怎样凝成，一条新路怎样被裁出，一次证明走通时的松动与喜悦。D2 是那条猜想到迭代的路。D3 是对证明的压缩、对误差的收紧。E1 的三界，E3 的三种能量，本章不涉及。

注意 S3 的第二种读法。上面列出的“方法好用”“证明漂亮”是数学家日常的口径，它们大多可以在 S1 与 D3 里度量，也就是统一性标准化之下的真善美。3.6 将说明，这不是乙组所取的读法。

◆ 3.3　三角套：下标之和被 3 整除

九宫透镜不是把九格排成九个孤立的点，而是把三个维度各取一格，凑成一个三角套：(S_i，D_j，E_k)，其中 i，j，k 各取 1、2、3。全部取法有 27 种。SDE 取其中下标之和被 3 整除的那些，这是九宫透镜在 SDE 体系中既有的构造规则，本书取用而不另行推导，只检验它用在数学上的效果。这样取的结果是，三个维度的层次互相错开，每组都由三个不同角度构成，可以彼此校正。

这样的组共九个。i + j + k 可取 3、6、9 三个值：

- 和为 3：(1,1,1)，只有一种。
- 和为 9：(3,3,3)，只有一种。
- 和为 6：(2,2,2)，以及 (1,2,3) 的六种排列。

于是共有 1 + 1 + 1 + 6 = 9 组。下标三个相同的，即 S1·D1·E1、S2·D2·E2、S3·D3·E3，称**正位**，共三组；下标互不相同的六组，称**异位**。

正位的三个格同在一层，彼此顺手，好像一条路上的三个路标；异位的三个格各处不同的层，彼此之间有落差，像三个高度不同的看台。同层的组合适合描述一个对象怎样运转，跨层的组合适合让一层去审视另一层。这个区分在下面三节里会用到。六个异位依 E 所在的格分：E1 所在两组（S2·D3·E1、S3·D2·E1），E2 所在两组（S1·D3·E2、S3·D1·E2），E3 所在两组（S1·D2·E3、S2·D1·E3）。

E 固定为第 2 格时，满足和被 3 整除的 (i, j) 只有三种：$i + j \equiv 1 \pmod 3$，即 (2,2)、(1,3)、(3,1)。于是数学所在的三组为：

组别	构成	位置
正位	S2·D2·E2（粒子·波·场；路径；数学）	正位
甲组	S1·D3·E2（对比·变化·分布；误差·冗余·损耗；数学）	异位
乙组	S3·D1·E2（真·善·美；意义三律；数学）	异位

九组还可以分成三类，每类三组，各自把九格恰好用一次：正位三组；甲类为 S1·D3·E2、S2·D1·E3、S3·D2·E1；乙类为 S1·D2·E3、S2·D3·E1、S3·D1·E2。所以九格中的每一格，恰落在三组里，一个正位、一个甲、一个乙。E2 这一格所在的三组，就是上表的三组；下文说“甲组”“乙组”，指 E2 所在的甲类之组与乙类之组。

三组各给出一种看数学的方式。下面三节依次审视，问同一个问题：这一组里，有没有立足点可以对一个“化”重新下定义。

◆ 3.4　正位：在标准之内走路

正位 S2·D2·E2，是三个维度都取第 2 格。S2 把数学看作场，D2 把数学的发展看作路径，E2 是数学本身。

数学作为场，有粒子态的符号、波态的逻辑、场态的数学三层（第 344 号）；这是描述数学“是什么”的一层。

符号是划分，逻辑要粘，数学成场：一组符号划出单位，推演把单位连成次序，连接、次序、结构合起来铺成一片。这片场在标准之下呈现为一个稳定的整体，每一处与相邻处的关系都有规矩。正位的 S2 看到的，正是这种稳定。路径则是数学“怎么走”：猜想、执行、评估、反馈、修正、迭代。六步法里有一步是“评估”，评估需要一把尺；D2 在混沌态下，评估之所以空转，正是因为没有稳定的标

准。反过来，D2 在秩序态下运行顺畅，是因为标准已经站住，每一步的评估都有明确的凭据。

这就是正位的特征：它描述数学怎样在已有的标准之内运转，它自己不提供批评标准的位置。数学家猜想一个命题，执行证明，由同行评估，据反馈修正，再迭代，这条路径的每一步都预设了“什么算证明”“什么算正确”。正位里的数学做得越好，标准越是隐形，我们在 2.1 看到的现象，在此处是路径的顺畅运行。

所以正位适合回答“数学家怎样工作”，却没有立足点回答“数学家所依的标准好不好”。这是三组中最安全的一组，也是最无力的一组。

正位还有一个特点：它容易被误当作全部。一个领域长期处在秩序态，从业者每天做的都是正位的事，久而久之，“数学就是在标准之内把路走好”成了默认的数学观。这种默认，本身是标准化成功之后留下的印象，不是数学的定义。读到这一点，才有理由去看另外两组。

举十九世纪分析学的教科书为例。一本按 ε-δ 写成的教程，从实数的完备性出发，依次讲极限、连续、导数、积分。读者的路径，是照着定义、定理、证明的次序往前走，每走一步，都有现成的标准告诉他走得对不对。这样的教科书是正位的典型成果，它让一代代学生走上同一条路，几乎没有人迷路。而它没有给出的东西，是一个问题：为什么走这条路，而不走别的？答案在教科书之外，在这条路被开出来时那些没有被写进标准的东西里。

◆ 3.5　甲组：用“化”改“化”

甲组 S1·D3·E2，由 S1（对比·变化·分布）、D3（误差·冗余·损耗）与 E2 构成。这一组很有力量，数学中许多重要的工作住在这里：对两个对象做对比，看一个量随参数怎样变，看误差在域上怎样分布，再在误差、冗余、损耗的约束下求最小。前面 2.2 的“优化”一行，在这里得到最完整的位置。

按第 344 号的说法，今天的数学，是伞收成一个点时显露的那一种，服务的是 D3 的第一层：在目标已定时，把误差、冗余、亏损压小。甲组正是这一层的住处。

第 344 号还指出，三律在相容退化下分别退成固定点收敛（特征律）、唯一合法路径（自由律）、误差最小化（幸福律）。第三个退化结果，误差最小化，恰是 D3 第一层的内容。换言之，甲组不只是数学中的一块地方，它是三律被压缩到极限以后留下的那一格：特征律的收敛、自由律的路径，也都被折算进 D3 的度量里。在

甲组中追问，追问的问题会自动被改写成“误差能否更小”。这是甲组无法重新定义“化”的另一重理由。

假如有人想用甲组去改标准，会怎样？比如嫌某一套标准误差太大，于是以 D3 为约束，把标准改得误差更小；嫌冗余太多，改得更省；嫌损耗太大，改得更紧。这类改动很常见，也很有效，2.6 所说的“更严、更省”，大多是这样做出来的。一部教科书的再版，常常就是这样的工作：删去可由其余推出的命题，改写含混的定义，把几处证明压短。读者拿到新版，感到更清爽，这种清爽是真实的收益。问题只在于，它收到的是同一个方向上的收益，重复多次以后，教科书越来越像，章节越来越固定，可以被问的问题越来越少。

可是看一看这里的三个量是怎样被定义的。误差，是与标准之差；冗余，是相对于最简标准多出的部分；损耗，是相对于完整保真丢掉的部分。三个量的原点，都在标准上。所以以 D3 为约束去改标准，等于以标准的尺去量标准、以“化”去改“化”。第 2 章命题 2.1 已经说明这样做的轨迹：沿着同一个评价序一路上行，终点是固定点。第 1 章引过的相容性公理，其第六条约束便是固定点收敛：算法的终态是不再变化的固定点。甲组用 D3 把标准推向固定点，同时也就把标准加固在那个点上，它的每一个成果，都使下一次追问更没有立足之处。

还要看到，甲组里的 S1 也在尺内。对比、变化、分布都是已有的度量在读数；一个量在标准之下的对比、变化、分布，不会告诉我们标准本身该不该如此。所以甲组可以使标准更好用，却无法使标准成为另一种东西。

这样说并不贬低甲组。第 344 号把现有数学放在 D3 的第一层，这一层的工作是文明大量依赖的：桥梁的计算、药物的剂量、通信的纠错，都在这一格里完成。甲组的成就是真实的，它的边界也是真实的；边界的意思，是它的成就不能向上转写成对标准本身的裁决。

用一个数学例子把这一点看得更清楚。函数逼近中，常见的做法是选定范数，在范数下求最佳逼近。取 L^2 范数，得到最小二乘解；取一致范数，得到切比雪夫意义下的最佳逼近。同一个函数，在两种范数下的最优逼近往往不同。每一个范数之内，优化是严格的，最优解是明确的。可是“取哪一个范数”，在任何一个范数之内都没有答案：用 L^2 去衡量“哪个范数好”，得到的是 L^2 的偏爱；用一致范数去衡量，得到的是一致范数的偏爱。这时若硬要把范数的选择也变成一个优化问题，只能再引入一个更高的度量，而更高的度量同样需要被选定。选范数是标准化，在范数内求最优是优化，两件事不在一个层次，优化无法回头给标准化定向。

◆ 3.6　乙组：谁来问“为了什么”

乙组 S3·D1·E2，由 S3（真·善·美）、D1（意义三律）与 E2 构成。这一组不在“化”里面。D1 不是路径的一步，也不是约束，它是差异序列的方向，问的是“为了什么”；S3 不是一个度量，它是显露的价值面，问的是“好不好、美不美”。二者都不对 E2 的连接、次序、结构做任何操作，却对这些操作的意义说话。

先看 D1。第 2 章反复说，标准化是一个“化”，三化的每一化都预设尺子是好的。D1 恰好是预设尺子“好”的那一层的来源：意义三律各管一件从 0 到 1 的发生，特征律管目标的发生，自由律管路径的发生，幸福律管动力的发生。按 SDE 的核心判断，D 的目标不是任何静态结构，而是三大意义律的成功运行本身。把一把尺当作目标，是把“果”错当“因”；尺子好不好，要看用它的时候三律跑得怎么样。这就给了“标准化化解什么”一个可以作答的位置：它化解的是差异的张力，而三律怎样对待这种张力，是它好坏的凭据。

再看 S3。真善美在 S 维度里是显露的价值面，在 E3 里对应内能、动能、势能。幸福律的三重结构，也与此对应：心满足（真）、身快乐（善）、灵喜悦（美）。这里取美来说，是因为美对应势能，也就是张力。第 344 号说，张力是“该连上的还没连上”，幸福律是张力经转换、以释放回落，落在连接更紧、仍然活着的新和谐上。本书把美读作这种新和谐的显露：张力在释放时露出来的那一面。因此，美不是装饰，它是幸福律走通时在 S3 上的可读读数。

有一个顾虑须正面对待：好不好、美不美，听上去是主观的，用主观的东西去评客观的标准，是否倒置？回答分两层。第一层，客观与主观的这个二分，本身预设了主体与客体先于互动而在，而本书的写法把显露当作互动的结果，不先设二者。第二层，更为具体：第 344 号对“我的数学”提出三关，有适用条件，可检验，能纠错；个人的手感要过这三关才算数。美的读数遵循同样的纪律：它必须落在可以对照的记录上，如特征是否凝成并经回写，新路是否裁出，释放是否使连接更紧。通不过三关的“美”，只是一时的好恶，不进读数。

要注意区分美的两种读法。统一性标准化有它自己的美，是对称、简洁、整齐、统一之美，第 8 章会写它在布尔巴基那里的顶点。这种美可以被度量：对称有群，简洁有长度，整齐有规则，所以它在 S1 与 D3 里就能读出，属于甲组。与此不同的，是谱系之美：连接更紧而仍然活着的和谐，它需要张力的积累与释放，需要差异被保留，所以只在乙组里读得出来。本章所说的美，取后一种。取前一种，乙组就坍缩成了甲组，因为“美”已被写成一个可优化的量。

数学史里有一件事，可以用来看乙组式的追问是什么样子。欧几里得的第五公设，两千年里一直被怀疑是冗余的，许多数学家尝试把它从其余公设推出来。这类工作，是甲组式的：去冗余，使公理系统更省。尝试一再失败之后，十九世纪二十年代末起，罗巴切夫斯基与鲍耶各自转向另一个问题：如果取第五公设的否定，会得到什么样的几何？他们各自发展出一套不含第五公设的几何，推演下去未见矛盾；这套几何是否一致，要等到十九世纪后半叶的模型（如贝尔特拉米 1868 年的构造）才得到相对的回答，非欧几何才算真正站住。起点上的这一转向，不是去冗余的又一次成功，它改变了追问的对象：从“这条公设能否省去”，变为“几何要描述的是什么，容许几种描述”。追问对象的这一改变，在三化之内没有位置，它来自对“几何为了什么”的重新回答。

为什么是 S3 与 D1 这一对，而不是别的？理由有四。

其一，要求。在 D1 的三律里，对“化”最有裁决力的，是自由律与特征律对标准化提出的两个要求。自由律的量度是发生新路径的能力，不是选项的数目：一种标准化若只在现成选项里提供选择，哪怕选项极多，也算不上自由；若它在约束中容许裁出原本不存在的新路，才算。特征律则要求，目标不先在，而在纠缠中即时发生：一种标准化若事先写定了“什么算好的数学对象”，目标就成了先在的，特征律便无从跑起。这两个要求，都是对标准化的方式提出的，不是对某一个具体标准提出的，所以它们能够站在“化”的上面。

其二，位置。在 E2 所在的三组里，只有乙组既不含 D2，也不含 D3。D2 是走路，D3 是约束，二者都属于“化”的执行层，而乙组的 D1 与 S3 都不是执行。

其三，对子。D1 里幸福律的释放，在 S3 上显露为美；美的读数，又反过来是幸福律运行状态的指示。二者互为条件，不是各说各话。把这一对放在一起，“为了什么”与“好不好”才能互相校正：只问为了什么而不问显露，会流于空谈；只问好不好而不问方向，会流于趣味。

其四，反身性。一个“化”要被重新定义，那个重新定义它的格，本身不能是另一个“化”。S3 与 D1 都不是“化”：S3 是显露，D1 是方向。这是本章标题所说“只有美与幸福律”的由来。换个说法：一个“化”要被重新定义，需要的是对它的目的与好坏说话的格；目的归 D1，好坏归 S3，别处没有。

也许有人问，E2 之外的组怎么办，E1 所在的两组与 E3 所在的两组，是否也有资格重新定义一个“化”？这些组的 E 是三界与三种能量，对象不是数学。本书只谈数学这一化，所以固定 E2。不过 E3 里势能对应美、内能对应真、动能对应善，

其中的美与乙组的 S3 是相呼应的，这一呼应在 3.7 和第 16 章里会被用到。需要说明，这个说法并不排斥特征律与自由律，它们同属 D1；幸福律被突出，是因为在标准化的亏缺运行里，特征律与自由律的失去往往无声，幸福律的枯竭却最先被感知：越是达标，越是觉得干。美作为幸福律的显露，使这种枯竭有了可以读数的位置。

◆ 3.7　三方程在乙组

SDE 的三大方程写作：S = F(D, E)，D = G(S, E)，E = H(S, D)。三式机会均等，每一式都可以回答“是什么”，只是回答的角度不同。落到乙组，三式具体化为：

S3 = F(D1, E2)。真善美的显露，由意义三律的运行与数学的组织共同给出。这一式读成：给定三律的运行状态和数学的构成，会显露出怎样的美与好。统一性标准化下，数学显露为整齐的统一之美；三律亏缺的运行，使这种美成了唯一可读的美。

D1 = G(S3, E2)。意义三律的运行强度，由真善美的显露与数学的组织共同给出。这一式读成：数学以什么方式组织，加上它显露出来的美与好，决定了特征律、自由律、幸福律各自跑得怎样。统一性标准化把混沌碰撞与纠缠拿掉，三律的发动部件缺失，这是第 4 章的内容。

E2 = H(S3, D1)。数学的组织，也就是连接、次序、结构怎样被标准化，由真善美的显露与意义三律的运行共同给出。这一式读成：给定想要的美与三律的丰满运行，数学应当被怎样标准化。

三式在本书中的地位不同。前两式描述的是“既有的标准化如何作用于美与三律”。第 4 章的亏缺性机制，是 G 的一个读数：无歧义禁止了混沌碰撞，无矛盾与独立减少了纠缠，唯一的标准模型使差异即错误，三律由此亏缺。第 17 章的技术性异化，是 F 与 G 的一个后果。这些读数都有具体的内容可写。

以一道标准答案的题为例，三式的读数大致如下。F 的读数：S3 上显露的是整齐的“对”，答案只有一个，对与错之间没有第三种位置，美被压成了规整。G 的读数：D1 里，特征律没有什么可凝成的，因为定义已事先写定；自由律没有什么可裁剪的，因为路径唯一合法；幸福律只剩“做对了”这一种释放，做对之后张力即归零，下一次需要另一道题来重新积累。H 在这里没有读数：标准答案的世界不问“数学应当怎样标准化”，它只问“答案是否与标准一致”。

第三式 H 是本书的缺式。它问的是反向的问题：不是标准化怎样影响三律，而是以三律的丰满为目的，标准化应当怎样安排。这一问在现有数学里没有位置，因为现有的数学把标准化当作出发点，不当作被追问的对象。H 的输入是美的显露与三律的读数，输出是标准化的方式。本书第四编给出 H 的值域的数学形态：伞模型。标准化的方式以伞的配置为坐标，半径 r、重叠度 ω、传播速度 v 三个旋钮合成 SDE 数 N = rω/(vT_c)，现有数学是 r→0、ω=1、v→∞ 时的退化端。这就是说，H 的值域是一个谱系，统一性是它的一个端点。H 的函数形态本身，书中不作闭合表述，它是一个待补的缺口，第 18 章的判决预测，是检验它的办法。

对 H 的形状，现在可以提出几条要求，作为后面各章的路标。其一，H 的输入是三律的三个读数，分开记，所以 H 不是先加总再取值的标量函数。其二，H 的输出是标准化的方式，它在谱系上占有一个位置，而不是一把固定的尺。其三，H 必须容纳退化：当伞收成一点，H 的输出应当回到现有数学，这使得统一性成为 H 值域的一个端点，不被推翻。其四，H 的取值需要随回写历史而变，所以它是一个随历史更新的关系，不是一张事先写好的映射。这四条要求合起来，已经把统一性与多元化的统一性排除在 H 的取法之外：二者各自是一把事先给定的尺，而不是随回写历史更新的关系。它们作为 H 的某个输出，仍然站在值域的端点上，只是不能充当 H 本身。

还须点明本书补这一式的方式。H 不是靠一次推导补上的，它沿着本书的五编逐步显露：第一编说明数学是场、标准化是它的一化，以及为什么要问 H；第二、三编读出统一性（单数的与复数的）在 F、G 上的读数，从反面框出 H 不应是什么；第四编给出 H 的值域的数学形态；第五编写出 H 的后果与失败的条件。到结语处，H 并不会成为一个闭合的公式，它会成为一个有位置、有读法、可以出错的关系。这是一个诚实的完成度，也是同一性谱系的题中应有之义：谱系标准化本身，不是一份可以一次交付的规格。

需要点明，乙组里 E2 一直固定。它不是缺席，而是被追问的对象：S3 与 D1 对 E2 说话。这个关系是不对称的，E2 不能替自己说话，说话的是另外两格。

三式同时成立，各自回答“是什么”，没有哪一式居先。第 53 号第 13 章把数学读作伞的三个层次，三式在每一层上都可以重写一遍。

三式的机会均等有一个方法上的好处：同一个问题，可以从三个入口进去。要问统一性标准化好不好，可以从显露进（它显出怎样的美），可以从方向进（它让三律怎样跑），也可以从组织进（它怎样安排连接、次序、结构）。三个入口读出

的结论若彼此吻合，论证更牢；若彼此冲突，冲突处就是该继续追的地方。后面各章在需要时都会换入口。把它们摆在一起，是为了避免一种常见的误读：以为美与三律是数学之外的、附加的“人文关怀”，数学则是不受它们影响的独立之物。三式的写法说明，数学的组织 E2 与美、意义三律互为变量，任何一个变了，另外两个的取值也随之改变。数学没有一个脱离美与意义的“中立”状态；所谓中立，是某一种取值的隐形，也就是统一性标准化的取值。

◆ 3.8　评判标准化的尺子

到此可以写出尺子。评判一种标准化的好坏，凭据是意义三律运行得是否丰满。导论 0.4 的三律表在这里再列一次（统一性标准化拿掉了什么，与同一性谱系标准化下三律怎样跑）：

意义律	跑法	统一性标准化拿掉了什么	结果	同一性谱系标准化下
特征律	混沌碰撞→自组织→涌现	混沌碰撞（定义须无歧义；尺外差异即例外）	死亡	差异在谱系间碰撞，凝成新特征
自由律	矛盾纠缠触发→路径裁剪→新模式	纠缠（无矛盾、独立、解耦、正交）	死亡	纠缠被保留并标注亲疏，裁出新路
幸福律	张力积累→模式转换→释放	新张力的来源，只剩“消除差异”一种释放	枯竭	安排差异以释放，每次释放生产新特征；真善美三重齐全

用这把尺子读一种标准化，有三个问。这三个问是尺子读三律的三问，与第 12 章 12.8 节、附录二里判别一个多元是否仍属统一性的三问用途不同，不可混作一组。其一，混沌碰撞还在不在：尺外的差异，是被当作例外清掉，还是留作碰撞的材料。其二，纠缠还保留不保留：对象之间的矛盾与相互依赖，是被拆开、独立化，还是被带着亲疏标注留下。其三，释放是否生产新特征：张力的释放，是只剩消除差异这一种，还是每一次释放都使连接更紧而仍然活着。

三个问对应三律，读数分开记，不压成一个总分。三问并列而无先后，任何一问读数偏低，都足以提示这一种标准化在该处亏缺，不必等三问同时报警。

拿第 2 章的五个场合来试读，可以看到这把尺子并非只有否定。度量衡、历法、货币、工程、通信协议，在连接的半径上有不容抹杀的功绩，这是它们读数良好的一面。再看三个问：在米制推行的过程中，各地多样的度量被当作无差别的杂

乱而清除，混沌碰撞在这一步被拿掉了，这一问读数偏低。互联网协议则不同，它在运行中留有扩展的空间，不同的实现之间相互试探、相互适应，“粗略共识与可运行的代码”这句在互联网工程任务组里流传的口号，说的是标准在试跑中凝成；这一问读数较好。这些试读只是示范读法，各场合的读数需要各自的历史记录来支撑，此处不作定论；上面说到的只是史实层面的几件事（米制取代各地旧制、互联网协议以公开征求意见的方式迭代、复式簿记的借贷两面），读数则是本书的读法。复式簿记把每笔交易勾连成借贷两面，纠缠被保留下来，但科目的设置却被固定为一套，这一问读数居中。由此可见，同一种“化”在不同的场合读数不同，它们并不全在统一性的一端，这给后面的论证留出了余地：统一性与谱系不是两类对象，而是一条谱上的两个位置。第 344 号强调，三律量纲不同，彼此不能替代，所以分开记；读数也不进考核。这一点同样适用于本尺：它是一把读运行态的尺，不是一把给对象排名的尺。

格里高利历可以补充第四个场合。它的闰年规则与周期对齐已在 2.1 讲过：日、月、年、周几套周期被一条极短的模算术拧在一起，连接的半径极大，这是它读数良好的一面。把这条规则放到三问之下，还可以多看一层：规则一经写定，任何一年是不是闰年，不需要知道这一年发生过什么，只需做除法；这正是可替换连接，也是它能通行各国的缘故。1582 年跳过的十天，则是把儒略历多年积累的偏差一次清算：偏差被当作错误扣掉，没有留作碰撞的材料。这一问同样读数偏低，却与米制的情形不同，因为日历的目的就是让各地同日同时，清算在这里有它的理由。读数偏低不等于这一步做错了，它只记下在这一步，三律中的哪一律没有跑。同一部历法，在闰年规则处读数不同于在清算处。

还有一个问题须正面回答：这把尺子本身，是不是又一把“谁用都一样”的尺？回答是不一定，取决于它怎样被使用。如果有人为三律各规定一个事先的阈值，达标就算丰满，那它就是一把统一性的尺，而且恰好落回甲组，成了又一个 D3 约束。本书的用法与此相反：尺子读的是三律在回写历史中的运行，丰满与否不是一个事先给定的数，而是看在这个领域的这段历史里，特征是否在凝成，新路是否在裁出，释放是否在生产新特征。所以这把尺子用于一种标准化时，读数只能在它的历史里取得，这符合同一性谱系的定义：只能发生，不能应用。

这也说明为什么尺子放在本书的第一编，而判决放在最后一编。尺子给出读法，判决给出失败的条件。读法若没有失败的条件，就会滑向修辞；失败的条件若

没有读法，就没有可以检验的对象。两者相互咬合，才使“丰满”这个词有了可以被反驳的内容。

这把尺子有几种容易发生的误读，先行指出。一种误读，是把丰满当作繁多，以为系统越多、定义越多、模型越多，三律就越丰满。第三编要论证的正是这一点：系统数量的增加，并不带来三律读数的同升。丰满看的是碰撞、纠缠、释放是否在发生，不看数量。另一种误读，是把尺子当作对统一性的审判，以为统一性标准化一无是处。尺子读的是运行态，统一性标准化在它能胜任的范围里读数良好，连接的半径放得大，正是它的功绩；只有当它被推广为全部数学的标准化，三律才开始亏缺。第三种误读，是把美当作趣味，以为尺子最终归于个人偏好。三律的读法有各自的跑法和可观察的步骤，特征是否凝成、新路是否裁出、释放是否生产新特征，都有可以对照的记录，不是一句“我觉得美”。第 18 章把它们写成可以失败的判决预测。

本章的结论因此是：标准化可以由数学给出，但标准化的好坏，要由不属于“化”的格来评。把评判交给三化自身，得到的是精进；交给乙组，得到的是方向。第 4 章接着看，统一性标准化是怎样具体地使三律亏缺的。在那里，尺子的三问将被逐一落实为机制：无歧义对应第一问，无矛盾与独立对应第二问，唯一的标准模型对应第三问。

最后补一个与上一章呼应的观察。第 2 章 2.7 节提到，视觉模态最容易实现可替换性，统一性标准化实为视觉标准化被推广成了全部数学的标准化。放在九宫里看，这是一个 S 维度上的偏置：视觉数学的统一性很强，听觉数学的统一性非常差，触觉数学非常部落谱系化，三种模态在同一把尺子下读数不同。若只用甲组的度量，听觉与触觉的数学会被判作“不够严”“不够统一”，其实它们的位置在谱系的另外两处。乙组的尺子则不预设哪个模态的读数是标准，它问的是三律在各自的模态里跑得如何。这一点由第 14 章与第 16 章用伞的配置来展开。

◆ 本章结论

1. 九宫透镜由三维各三格构成，按下标之和被 3 整除得九组三角套，三正位、六异位；E2 所在的三组是正位 S2·D2·E2、甲组 S1·D3·E2、乙组 S3·D1·E2。
2. 正位在标准之内走路，描述数学怎样工作，没有批评标准的位置。
3. 甲组以 D3 的误差、冗余、损耗为约束，三个量的原点都在标准上，用它改标准是用“化”改“化”，只会把标准推向固定点而加固。

4. 乙组的 D1 问“为了什么”，S3 问“好不好、美不美”，二者都不是“化”，是唯一能重新定义一个“化”的立足点；此处的美取谱系之美，不取统一之美。
5. 三方程在乙组为 S3 = F(D1, E2)、D1 = G(S3, E2)、E2 = H(S3, D1)，本书的缺式在第三式；评判标准化的尺子，是意义三律运行得是否丰满，三律分开读数，不压总分。

◆ 本章参考

— 原始文献

· 国际计量局：《国际单位制（SI）手册》，2019 年修订版（SI Brochure, 9th edition）。

· 国际计量大会：1889 年第一届会议关于国际米原器与千克原器的决议。

— 研究文献

· Kuhn, T. S.: “The Function of Measurement in Modern Physical Science”, Isis, 1961。

· Alder, K.: The Measure of All Things, 2002。

· Bowker, G. & Star, S. L.: Sorting Things Out, 1999。

— 站内著作

· 第 53 号《SDE数学导论》，第 1 章（相容性公理六约束）。

· 第 344 号《意义数学的诞生》（D3 两层、三律在相容退化下的退化、张力与幸福律）。

· 第 402 号《新文明诞生——同一性谱系化》。

◆

04

第 4 章

亏缺性运行的机制

本章提要 统一性标准化靠三条操作纪律运行：定义须无歧义，命题须无矛盾且彼此独立，模型只认唯一的标准。三条纪律依次拆去特征律的混沌碰撞、自由律的矛盾纠缠、幸福律的张力来源；三律在相容退化下分别退成固定点收敛、唯一合法路径和误差最小化，这是亏缺性运行的数学形态。三条纪律在数学内部以美德之名被教授，后果是张力复发：例外、病态的清单持续增长。

◆ 4.1 良定义的第一课

代数学的第一门课里，有一个人人做过的小练习。在整数模 n 的剩余类 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上，规定 $[a]+[b]=[a+b]$。规定写完，课本紧接着做的第一件事不是用它，而是核对：若 $a\equiv a'$，$b\equiv b'\pmod{n}$，则 $a+b\equiv a'+b'\pmod{n}$。核对只需一行：$a-a'=nk$，$b-b'=nl$，于是 $(a+b)-(a'+b')=n(k+l)$。这一行写完，加法才算“良定义”。

反例同样简单。规定 $\varphi([a])=a$，把剩余类送到它的某个代表元。取 $n\geqslant 2$，$[1]$ 与 $[1+n]$ 是同一个类，φ 却给出 1 和 $1+n$ 两个值。一个类，两个值：规则的输出依赖了代表元的选取，而代表元是描述这个类的一种说法，不是类本身。课本对此的处理是统一的——这样的规则不算定义，须收窄（只取与代表元无关的量，如模 n 的余数本身）或者作废。

这个练习值得放在第 4 章开头，因为它是整套纪律的缩影。良定义的判据是：谁来取代表元，结果都一样。把“代表元”换成“读者”“计算者”“证明的审阅者”“机器”，这句话就是本书导论里的那个短语——谁用都一样。输出对描述方式不敏感，是这个判据的全部内容；它也因此成为一种可以脱离发生过程被搬走的东西：定义写在纸上，交给任何人、任何程序，核对一行即可放行。

放行之前被挡在门外的，是什么？是两种描述撞在一起、给出两个结果的那个瞬间。在 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的小例子里，这个瞬间微不足道，修补也很容易。但它的形状在数学史上反复出现：两种看似同一对象的说法一经撞上，就产生不一致的读数。本书把

这个瞬间读作混沌碰撞的最小形态。意义三律中，特征律的发动部件正是混沌碰撞：差异撞出稳定性，稳定处凝成可指向的特征，不同模态的特征聚成特征纠缠聚合体（意义三律的原定义）。良定义核对的功能，是在特征凝成之前，把碰撞判为定义的缺陷并加以消除。

本章要把这个缩影放大成三条操作纪律，并逐条追踪它们对三律的作用。

第一条：**定义须无歧义**。任何记号、运算、映射，其输出只依赖被定义的对象，不依赖对它的描述。这条纪律禁止混沌碰撞出现在已完成的文本里。

第二条：**命题须无矛盾，公理须相互独立，对象宜解耦、可正交分解**。这条纪律减少纠缠：矛盾是两个命题的纠缠带来的紧张，独立与解耦是把相互牵连的部分拆开分别处理。

第三条：**模型唯一，差异即错误**。凡与标准模型不同的，要么同构于它（差异被商掉），要么被命名为非标准、病态、例外（差异被标记为偏离）。

本书采用运行态的写法：这三条纪律是统一性标准化在运行中凝成的操作形态，教科书的体例、期刊的审稿清单、证明助手的内核检查，都是它的凝固处；它们并非哪位数学家或哪个共同体的决定，是长期运行留下的沉积。历史人物在本章里作为著作的作者出现，他们写下了什么、没有写什么，是读数的来源。

所谓**亏缺性运行**，是指在这样的纪律下，意义三律每条律的发动部件被拆去，只剩下可以在纪律之内完成的那一小段。拆去之后三律没有立刻消失，它们退成三种看上去很正当的形态——固定点收敛、唯一合法路径、误差最小化。4.5 节给出这三种形态；先看三条纪律各自怎样动手。

◆ 4.2　纪律一：定义须无歧义，混沌碰撞被禁

4.2.1　定义理论里的两条判据　逻辑学教科书对“什么算一个合格的定义”有成熟的说法。其中两条判据最为人熟知：可消除性与非创造性。可消除性要求，定义引入的新记号在任何出现处都可以用旧记号改写掉；非创造性要求，加入定义之后，关于旧词汇的定理一个也不会多出来。后一条常用“保守扩张”一词表达：新理论对旧语言的片段保守，不添一句旧语言里原先证不出的话。这套说法见于苏佩斯（1957）的逻辑教材，贝尔纳普（1993）对它作过系统的检讨。

把这两条判据放在特征律面前，读起来有些惊人。特征律又称创造律，说的是：差异出稳定性，稳定处凝成特征，聚合体层级涌现，新的目标与新的对象在纠缠中发生。而定义理论对一个合格定义的要求，恰是它不得创造任何关于旧对象的新事实。创造被写成了合格性的反面。这里没有谁错了：定义在这套理论里的职能

是缩写与命名，对它提出非创造性要求完全合理。要点是，当“定义”被赋予这个职能之后，数学里凡是新特征凝成的地方，都得换一个名目登记——叫公理，叫定理，叫猜想，叫新理论——而不能叫定义。定义这一格被留给了不会创造的东西。

4.2.2　适定性：问题也要无歧义　纪律一不止管记号，也管问题。阿达马在1902年讨论偏微分方程与物理的关系时，提出一个后来以他的名字命名的要求：一个问题称为适定的，若解存在、唯一，且连续依赖于数据。三条里，第二条（唯一）与第三条（连续依赖）正是无歧义在问题层面的写法：同样的数据，不得给出两个解；数据的微小差异，不得被放大成解的巨大差异。阿达马自己举的例子是拉普拉斯方程的柯西问题，初值的极小扰动会让解失控，他据此判断这类问题不描述物理事实。

适定性后来大大推进了偏微分方程的理论，这一点毋庸置疑。同时它也划出了一条线：线内是数学家交付的问题，线外是被称为“不适定”的问题。反问题、数据同化、图像去模糊这些后来变得极其重要的领域，原本都在线外，其中许多问题随后靠正则化被拉回线内——吉洪诺夫的正则化（吉洪诺夫1963年发表，菲利普斯1962年也独立给出了类似的做法）就是把不适定问题改写成适定问题的办法。拉回的方式是附加条件、收窄问题，直到输出对数据的依赖变得稳定、无歧义。以最常见的形式为例：求解 $Ax=y$ 时，不去最小化 $\|Ax-y\|^2$，而是最小化 $\|Ax-y\|^2+\alpha\|x\|^2$（$\alpha>0$），解为 $x_\alpha=(A^TA+\alpha I)^{-1}A^Ty$。$A^TA$ 半正定，其最小特征值可以是0，不适定问题里更常是任意接近0，加上 αI 之后最小特征值至少为 α，矩阵可逆且逆的范数不超过 $1/\alpha$，输出对数据的依赖于是有了界。代价也写在式子里：解被拉向范数小的方向，偏向由 α 与范数的选择事先给出。这是一个典型的轨迹：线外的混沌（多解、不稳定）先被承认存在，然后被改写成线内的秩序。

4.2.3　混沌在历史上并未缺席，它被安排在文本之外　纪律一禁止的是混沌碰撞出现在已完成的文本里，并非禁止它发生。数学史上有大量先用后定义的例子，狄拉克的 δ 函数最为著名。狄拉克在1930年的《量子力学原理》中大量使用这个满足 $\delta(x)=0$（$x\neq0$）且积分为1的对象。按当时的分析学，这样的“函数”不存在：一个除一点外处处为零的函数，其勒贝格积分必为零。冯·诺依曼对它的批评尽人皆知。δ 却照样在物理里用了近二十年，算得出可检验的数。直到施瓦茨在1940年代中期起着手建立分布理论，并于1950—1951年出版两卷本《分布论》，δ 才作为连续线性泛函获得良定义，并带出一整套推广微分的工具（索伯列夫1936年已用广义导数处理过偏微分方程，是这条线上更早的一站）。

这条轨迹呈现为三段：先是用法的混沌（物理学家的运算与分析学的定义相撞）；中间是各种说法并行的介生期（亥维赛的算符演算、各种正则化序列、广义函数的早期构造）；最后是施瓦茨的定义把它收成秩序。三段对应三态。特征凝成了，而且凝成得很漂亮——分布理论后来成为偏微分方程的基本语言。要看的是它凝成之后的登记方式：在分布理论的教科书里，δ 是一个“定义好的对象”，前二十年的用法被归入“启发式”“形式运算”“历史背景”。凝成的结果被保留，凝成的过程被写成了前史。

这就是纪律一对特征律的作用方式。碰撞没有消失，它被迁出了合法文本；涌现也没有被禁止，它被允许在文本之外发生，并在凝成之后以“定义”的名义迁入。特征律的前两段（混沌碰撞、自组织）因此不属于标准内部的运行，标准内部只接收涌现的结果。接收的方式是**事后追认**：标准看到的永远是已经凝成的东西。这一点在第 2 章讲三化时已有预告——在标准化之内只能精进标准化，新特征要靠标准之外的地方供给。

4.2.4　读数：谁来承担碰撞　纪律一执行之后，碰撞的成本被转移了。一个定义若有歧义，其代价由写定义的人承担：他须收窄、补条件、证明与代表元无关。对读者而言，这是最大的便利——读者可以安心地信赖每个定义。对整个运行态而言，是碰撞被集中到定义的撰写阶段，读者阶段只剩核对。这种分工本身是高效的，它使数学可以被大规模搬运。同时它也解释了为什么数学教育把“核对良定义”当作基本功：教的是如何在自己手里把碰撞消化干净，再把无歧义的成品交出去。

◆ 4.3　纪律二：无矛盾与独立性，纠缠被减

4.3.1　无矛盾：矛盾成为停机信号　希尔伯特 1899 年的《几何基础》把欧几里得几何重新公理化，同时做了两件事：用解析模型把几何的相容性归约到实数算术的相容性，又对多组公理分别造出满足其余公理而违反该组的模型，以此证明它们彼此独立。次年他在巴黎国际数学家大会上列出的二十三个问题，第二个就是证明算术公理的相容性。相容性与独立性，从此成了检验公理系统的两项标准动作。

无矛盾之所以成为入场券，有一条清楚的逻辑理由：在经典逻辑里，从矛盾可以推出任何命题（爆炸原理）。一个含有矛盾的系统，证明了一切，也就区分不了任何东西。这条理由十分有力，它同样说明了为什么矛盾在标准内部不受欢迎——矛盾不是一个可以带着走的紧张，只是一个使系统失去区分能力的故障。次协调逻辑（达科斯塔与普里斯特等人的工作）另辟蹊径，限制爆炸，让矛盾可以局部存

在，这条路将在第 10 章讨论逻辑多元论时再谈。就本章所关心的运行而言，要看的是：在经典的标准化纪律下，矛盾一旦出现，处理路线只有一条——找到它，改掉它。

自由律的启动条件是矛盾纠缠触发：两个都有道理的取向撞在一起、互相牵制，路径空间随之被裁剪，新的模式从裁剪处激发。数学史上这样的触发并不少。1901 年前后罗素发现朴素集合论中的悖论，1902 年他写信告知弗雷格；策梅洛在 1908 年给出集合论的公理化，用分离公理取代无限制的概括原则；罗素与怀特海在 1910 至 1913 年的《数学原理》里走了类型论的路。这是自由律运行的典型一幕：矛盾触发，路径被裁，新的模式（公理集合论、类型论）从中长出，可达的数学因此变宽。

这一幕值得细看它的收尾。策梅洛的公理系统修复了悖论，办法是**排除**那个构造：无限制概括不再是合法的。此后的教科书把悖论写成“历史背景”，把公理系统写成“基础”。触发自由律的那个张力——概括原则看上去如此自然，康托尔的对角线又如此有力——在新的系统里没有对应物，它被封存了。一次危机，一次修补，修补完成时系统重回无矛盾。自由律在这里运行了一次，却没有成为常规：标准化的默认状态是无矛盾，触发条件在合法文本里默认不出现，每出现一次都是一场事故。拉卡托斯在《证明与反驳》中把这类修补的一种典型策略称为“怪物排除”：遇到反例，就修改定义，使反例不再属于被定义的类。他把它视为数学实践中常见的、有时是贫乏的策略，也同时记录了另一种策略“引理并入”，即把反例所揭示的条件并入定理，使概念本身生长。两种策略并存于同一部史料中，本书的读法是：标准化纪律偏爱前者，因为前者保持了文本的无矛盾。

4.3.2　独立性：纠缠的两种降级　公理的独立性要求每条公理都不可由其余公理推出，它既是节约（多余的公理不必写），也是一种审美——希尔伯特为之造模型的工夫，今天读来仍令人叹服。概率论里有一个同名的概念，用法却更为普遍：柯尔莫哥洛夫在 1933 年的《概率论基础》中，把事件的独立定义为联合概率等于边缘概率之积，随后的大数定律与中心极限定理，最先、最干净的版本都建立在独立同分布的假设上。初学者几乎一进入统计学，就被告知：样本是独立同分布的。

这个假设并不总是成立，数学随即发展出一整套**受控的依赖**来处理它：马尔可夫性质规定当前状态足以决定未来的条件分布，依赖被压缩成相邻一步；鞅规定条件期望等于当前值，依赖被压缩成一条次序；混合条件规定远处的随机变量近似独立，依赖随距离衰减；马尔可夫随机场与哈默斯利—克利福德定理（哈默斯利与克利福德 1971 年的未刊手稿，正式的证明见格里梅特、普雷斯顿、舍曼与贝萨格的

1973—1974 年论文）规定依赖只发生在图上相邻的点之间。这几种处理的共同点值得一提：它们都把依赖限制在**局域**或**有序**的形态里，得到的仍是一个可以逐步展开、逐步核对的结构。依赖被允许，条件是它足够乖。

于是纠缠有两种降级。一种是消灭——假设独立，把问题拆成互不相干的小块。另一种是驯服——容许依赖，但要求它局域、有序、衰减。降级之后留下的纠缠，是特征律与自由律用不上的那种：它不带紧张。

4.3.3　解耦与正交分解：把牵连拆成互不牵连　傅里叶在 1822 年的《热的解析理论》里提出：任意函数可以展开为正弦函数的叠加，热方程在每个正弦模式上各自独立地衰减。这是把耦合问题化为独立模式的范本：拉普拉斯算子在这组基上是对角的，一个偏微分方程于是化为无限多个互不相干的常微分方程。此后的谱定理、奇异值分解、主成分分析（皮尔逊 1901，霍特林 1933），以及分离变量法、算子分裂法，都是同一类动作：找到一组坐标，使牵连的部分各归各位。

这一类动作的成就无需辩护，数学和工程的大半个世纪都依赖它。要追踪的是它在运行中做了什么。第一，它使问题的解对路径不敏感：在保守场里，线积分只依赖端点；在可分的目标函数里，各坐标独立取最优，不存在“先动哪一个”的问题。第 344 号《意义数学的诞生》提醒过，意义更像热量，是路径量，只看终态的评分是状态函数。解耦与正交分解的效果，正是把问题化为状态函数——路径信息被商掉了。第二，它在线性问题上彻底有效，在非线性项处停住：纳维—斯托克斯方程的对流项 $v\cdot\nabla v$ 在傅里叶空间里把波数满足 $k+p+q=0$ 的三个模式耦在一起，对角化失效。第 53 号《SDE数学导论》1.6 节把这一项读作流体对自身的纠缠，并指出三维全局正则性的千禧问题正落在这里。解耦的纪律在最难的地方留下了最硬的问题，这个事实留到 4.8 节再论。

把无矛盾、独立、解耦、正交合在一起看，三种动作的方向一致：让每一部分的合法性可以**单独**核对。一个独立的公理可以单独验证；一个独立同分布的样本可以逐个处理；一个正交分量可以逐个求解。单独核对是可审计性与可搬运性的前提，也是第 13 章要写成公理的东西。它的代价是：凡要靠部分之间的牵连才能发生的事，在纪律之内没有位置。自由律的运行恰恰要靠牵连——裁剪是对一组互相牵制的取向的裁剪，被拆开的取向无需裁剪，只需各自取优。纪律二执行之后，自由律的发动部件（矛盾纠缠）被拆去，路径选择退化成每一步在合法集合里取优，这就是 4.5 节要说的“唯一合法路径”。

◆ 4.4 纪律三：唯一标准模型，差异即错误

4.4.1 范畴性：差异被同构商掉 戴德金在 1888 年的《数是什么，应是什么》里证明：满足他的公理（二阶皮亚诺公理，含完整的归纳公理）的系统，在同构意义下唯一。后来的实数公理化（完备有序域）有同样的性质。范畴性是统一性标准化的理想成品：只有一个对象，所有“看上去不同”的实现都同构于它，换言之，谁用哪一个都一样。同构的定义本身就是“谁用都一样”的精确化——两个结构间存在保持全部结构的双射，在该结构的语言里它们不可区分。

差异在这里的待遇是被商掉：两个实现若同构，差异属于“表示的不同”，不进入结论；若不同构，则其中至少一个不满足公理，不属于被研究的类。凡进入论证的差异，要么是同构类内部的表示差异（无关紧要），要么是类与类之间的差异（出局）。这就是第三条纪律的精确内容：差异只有两个去处。

4.4.2 非标准模型的命名 一阶逻辑不具备范畴性。勒文海姆与斯科伦的定理（1915、1920 年前后）说明，具有无穷模型的一阶理论必有不同基数的模型；斯科伦在 1934 年进一步指出，皮亚诺算术存在不同构于自然数的模型——非标准模型。从紧致性定理出发，只需在语言里加一个新常元 c，要求 c 大于每个具体的自然数，就得到这样的模型。一阶理论说不出“有穷”是什么意思。

数学共同体对这件事的命名史本身就是读数。人们把自然数称作**标准**模型，把其余的称作**非标准**模型。“非标准”三字，今天已成为中性术语，罗宾逊在 1960 年前后以它为基础建立了非标准分析，赋予莱布尼茨的无穷小以严格的身份，取得了实质性的数学成果。但就词义而言，“标准”一词带来的偏向仍在：标准是被意图指向的那个，非标准是偶然得到的那个。教科书的写法是：我们想要研究自然数，于是要问公理是否把它“钉住”；钉不住，就说公理系统有“意外的模型”。差异被写成了公理的缺陷。

类似的命名遍布数学：病态（pathological）、怪物（monster）、反常（anomalous）、野的（wild，如拓扑里的野结与野嵌入）。个别词在语义上中性或带赞赏（米尔诺 1956 年发现的怪球面叫“怪球”〔exotic〕，其后成为整个领域的名字），多数词的词义轴线仍是正常与偏离。偏离的东西被收进清单，清单上的东西或者被排除，或者被改造成正常。

4.4.3 差异的第二个去处：被分类，然后被消化 完全拒斥差异并不是唯一的处理，更常见的是**分类定理**：把差异整理成一张有限或可数的清单，每一项各给一个标准形。有限单群的分类、紧曲面的分类、复方阵的若尔当标准形，都是这一类

成就。分类定理的美，在于它把不同之处全部收进一张表，使得“谁用都一样”的范围覆盖了差异本身——差异也被标准化了。

幸福律的跑法是：张力积累，模式转换，能量释放；其势能来自差异所蓄的张力，每次完整的释放生产新的特征。把这一律放在分类定理面前，读数有点特殊：分类是一种释放，它把一族对象之间的差异一次性地释放掉了，释放之后表上每一项都是标准形，彼此之间不再有未结算的差异。完成之后，那个方向上的张力清零。如果一个领域长期只有这一种释放，也就是消除差异这一种，那么它的势能池是有限的：差异一经分类，便不再产生张力。幸福律由此被切断了新张力的来源——这是 4.5 节“误差最小化”的由来。

4.4.4　小结：三条纪律的接口　三条纪律互相咬合。无歧义使对象可以被唯一指称；无矛盾与独立使指称之间不起冲突；唯一模型使指称的终点只有一个。反过来，唯一模型使无歧义有了判据（歧义即同一指称对应不同对象），无矛盾使唯一模型存在（有模型的前提是相容，哥德尔的完全性定理给出了其精确形态）。三者构成一个自洽的整体，第 53 号《SDE数学导论》在讲计算数学的相容性公理时，用“拿掉任何一个，其余的都会动摇”来描述同类的互锁结构，第 13 章将把这种互锁写成六条约束。

◆ 4.5　三律拆除之后：三种退化形态

把三条纪律对三律的作用并列起来，得到下表。

意义律	发动部件	拆除它的纪律	相容退化下的形态	数学中的典型
特征律	混沌碰撞→自组织→涌现	纪律一（无歧义，禁碰撞）	固定点收敛	压缩映射迭代、牛顿法
自由律	矛盾纠缠触发→路径裁剪→新模式	纪律二（无矛盾、独立、解耦）	唯一合法路径	形式证明、确定性算法
幸福律	张力积累→模式转换→释放	纪律三（唯一模型，差异即错误）	误差最小化	最小二乘、变分极小

退化形态一栏出自第 344 号《意义数学的诞生》：三律在相容退化下分别退成固定点收敛、唯一合法路径、误差最小化（该书标〔B〕级）。本书读它为亏缺性运行的数学形态，逐条对应如下。

特征律退成固定点收敛。巴拿赫在 1922 年证明：完备度量空间上的压缩映射有唯一不动点，且从任何初值出发的迭代都收敛到它。这是一个漂亮的定理，它同时

也是特征律被压缩后的样子：初值之间的一切差异在迭代中被抹平，终点只有一个，过程中没有任何东西需要凝成——凝成的东西早在映射的定义里写好了。混沌碰撞若存在，也只是初值的差异，它的全部作用就是被消去。

自由律退成唯一合法路径。形式证明是一串由推理规则逐步导出的公式，每一步都必须合法；确定性算法是一串由指令逐步执行的状态，每一步都由前一步唯一决定。可以走的路只有合乎规则的那一条或几条，裁剪变成了检查：不合规则的步子一律不予通过。自由的量度原是发生新路径的能力（意义三律的原定义），在这里换成了在合法集合内找路的能力。第 344 号对此给了一个更尖的说法：好去处在“每步合格”下走不到，叫做断路；第 13 章用桑托斯的结果把它落在几何上。

幸福律退成误差最小化。最小二乘从勒让德（1805）与高斯起，是数学里最成功的一类释放：给定模型和数据，把残差压到最小。第 344 号把 D3 分成两层，第一层在目标已定时把误差、冗余、亏损压小，第二层是最优释放，要有新特征显露、稳成活的稳定、打开下一轮。纪律三之下，目标已由唯一的标准模型给定，第二层缺了落脚点，剩下的只有第一层。

三种退化形态单看都是正当的数学。亏缺在于**三者同时成为唯一的形态**：特征律只剩收敛，自由律只剩合法，幸福律只剩消差。退化极限在一维、伞心等距等特定情形下已有证明，一般情形仍是猜想；本节所列的对应是本书的读法，逐格可查，不借助一般情形的退化定理。

三律在原定义里是互相生成的循环：目标在纠缠中发生，目标催生路径，路径走通释放动力，动力又激发新的目标。亏缺性运行的另一重后果，是这个循环被截成了三段互不接榫的直线。固定点收敛给出终点，终点是一个对象，不是一个会催生新路的目标；唯一合法路径给出过程，过程走完只产生一个已知的结论，没有留下可以改写纠缠的东西；误差最小化给出释放，释放的幅度由残差决定，残差为零时就没有势能可释放。循环里的每一环都在，但环与环之间没有传递：收敛的终点不触发新路，合法的路径不蓄积新张力，最小化的结果不提出新目标。读数上，一个三律都已退化的领域看起来井然有序、成果累累，却越来越依赖外部送来问题——因为它自己不再生产问题。

◆ 4.6　三条纪律是怎样成为美德的

纪律在运行中凝固，最后的凝固处是教学。数学教育里有一批人人熟悉的用语，每一个都是纪律的口令：“验证良定义”“不失一般性”“易见”“平凡”“与代表元的选取无关”“设 $X_1, X_2, \ldots$ 独立同分布”“取一组正交基”“在标

准模型中”。这些用语的流通，等于一套价值观的流通：什么算干净，什么算优雅，什么算已经解决。

追溯这套体例的形成，可以看到一条清楚的线。柯西在 1821 年为巴黎综合理工学院编写的《分析教程》，是以教学为目的重写分析学基础的典范；魏尔斯特拉斯的柏林讲义把 ε–δ 语言带进课堂；希尔伯特 1899 年的公理化把“相容、独立”写进几何的开篇；朗道在 1930 年的《分析基础》里把定义—定理—证明的节奏推到近乎苛刻；布尔巴基的《数学原本》自 1939 年起，把整个数学写成一座逐层搭建的结构。每一步都是同一种选择压力的结果：文本越是能被逐条核对，越容易被搬运到更多的课堂、更多的读者手里。

被选中的是**可核对性**。可核对的东西不依赖作者在场，不依赖读者曾经历过发现的过程。教材的典型句式“由定义直接可得”，说的就是读者可以不经过发生而到达结论。这种选择的效果之一，是美的标准发生了迁移：数学的美开始更多地意味着“没有多余的东西”“没有例外”“一步一步都站得住”。第 3 章讲的透镜 S3·D1·E2，追问的恰是这种美是否同时也是好——一个按“无碰撞、无牵连、无差异”打分的美，对意义三律中的哪一律友好？答案在本章已经写出：对哪一律都不友好，除了第一层的误差最小化。

这个体例的收益是巨大的，它使数学得以进入工程、金融、通信，成为文明组织的底座，这一点本书从不否认。问题在于**只有这一种体例**：当可核对性成为数学美德的唯一来源时，凡需要经过混沌、牵连与差异才能发生的东西，在体例之内都没有位置，它们要么被排到前史，要么被排到别的学科。

◆ 4.7　棘轮：每一次修补都只往收紧的方向走

把 4.2 至 4.4 的三段史料连起来，可以看到一个方向：欧几里得的定义里有“点是没有部分的东西”这类无法核对的说法；柯西与魏尔斯特拉斯以 ε–δ 取代了无穷小的直观；希尔伯特以公理与模型取代了图形的直观；集合论悖论之后有策梅洛的公理、类型论；20 世纪以来，形式系统与机器可检查的证明把每一步都变成可以由程序核对的合法步骤。每一次危机的修补都沿着同一个方向：更少的歧义，更少的牵连，更少的可选模型。

这个方向有棘轮的特征：松的方向走不通，紧的方向走得通。原因出在运行态上。一个歧义被发现，修补它的办法有两种：把歧义收紧，或者把歧义留下并给它一个位置（比如标注亲疏）。在以可核对性为选择压力的环境里，前一种办法的成本是一次性的，后一种办法的成本是永久的——每个读者都得带着这个标注读下

去。选择压力因此偏向前一种。几代之后，数学的文本整体上变得更紧，更少歧义，更少牵连，更接近唯一。

棘轮的极限是**固定点**：一个所有步骤都可以机器核对、所有定义都无歧义、所有模型都被钉住的数学。它是否可达，是一个开放的问题；这里的要点是它的方向。第 13 章将指出，这个方向的数学形态就是相容性公理中的“质量单调性”与“固定点收敛”两条：只许往好的方向走，终点是不再变化。

这个棘轮没有掌棘轮的人，也没有哪一个共同体拍板过它的转向。收紧不是谁决定的，是它在运行中显影、凝成的。证据在于，持不同立场的著作者都在同一方向上用力——直觉主义者与形式主义者在基础问题上争得面红耳赤，但对于“定义要无歧义”“证明要可核对”，两边的要求同样苛刻，各自的分歧只在于哪一种核对才算数。分歧是在纪律之内的分歧，没有一方提出把歧义留下来、给它一个位置。另一方面，棘轮一旦转过一格，退回便要付出代价：已经建立在收紧之上的定理、教材、软件库都以它为地基，松开一格，等于让依赖它的一切重新受审。这样，收紧的方向越走越稳，松的方向越走越贵。

◆ 4.8　张力复发律

纪律把差异消去，差异并未因此消失，它换了地方出现。**张力复发律**是本书对这一现象的表述：统一性标准化完成一轮之后，被命名为例外、病态的对象清单（按文献量归一）持续增长，直到下一次模式转换。

数学史给出一条可资排列的线索，每一项都是在某一轮标准化完成之后，从标准自身的操作里冒出来的：1872 年魏尔斯特拉斯向柏林科学院宣读处处连续而处处不可微的函数（1875 年由杜布瓦-雷蒙刊出），分析学刚刚用 ε–δ 把连续与可微定义清楚；1890 年皮亚诺给出填满正方形的连续曲线；1905 年维塔利构造出勒贝格不可测集；1924 年巴拿赫与塔斯基把一个球分解成有限块、重新拼成两个同样大小的球；1931 年哥德尔的不完备性定理，1936 年丘奇与图灵的不可判定性结果，1963 年科恩证明连续统假设独立于 ZFC，1970 年马季亚塞维奇完成希尔伯特第十问题的否定解答。体裁上，这条线索后来凝成了专门的文类：盖尔鲍姆与奥尔姆斯特德的《分析中的反例》（1964）、斯廷与西巴赫的《拓扑中的反例》（1970），都是例外的汇编。

每一项都在其出现的年代被当作对标准的挑战，随后被吸收：新的分支、新的公理、新的分类。吸收的方式一贯，即把它登记为一类新对象，附上新的条件，使

标准保持无歧义、无矛盾、唯一。吸收完成的同时，标准的边界向外移动了一格，边界之外又冒出下一批。

机制的解释并不复杂，且恰好是三律的账。幸福律的势能来自差异蓄积的张力；纪律把差异在合法文本里消去，消去的只是读数，张力仍在系统里积累，它的出口不再通过释放，只有通过“冒出例外”。清单增长就是积累的读数。这样看，例外与病态是未被结算的差异，它们在标准内部没有位置，因此以清单的形式存在于标准的边界上。

本章只给机制与上述个案，没有给趋势的测量。上面这条线索是挑选出来的，它不能支持“清单在持续增长”的统计断言，这样的断言需要按文献量归一后的计数才能成立。这一断言在第 18 章被写成判决预测三，读数取自互不重叠的数据源，由编码者与判定者分离地执行。预测若不成立，张力复发律就要撤回。

吸收本身还有一个值得记下的后果：每吸收一项例外，标准就多一条限制条件，而新的条件又划出新的边界，边界两侧又可能生出新的例外。可测性之于勒贝格积分，适定性之于偏微分方程，收敛条件之于级数，都是这样添上去的。标准变得更加精细，也变得更加依赖条件清单；清单越长，“谁用都一样”所覆盖的范围里需要附注的地方越多。纳维—斯托克斯方程的全局正则性之所以成为千禧问题，正是因为在对流项处，解耦与正交分解的老办法一并停住，积累下来的张力没有出口。这是一个尚在等待模式转换的例子，本书不对它的答案作任何预测，只把它记作清单上最醒目的一项。

第 5 至 8 章将沿着单数的统一性走一遍顶点与例外清单：欧几里得到希尔伯特的几何，魏尔斯特拉斯的收敛，哥德尔与科恩的独立，布尔巴基的结构之母。第 13 章则换到伞模型的语言，把本章的三条纪律写成一组公理。

◆ 本章结论

1. 统一性标准化的三条操作纪律是：定义须无歧义，命题须无矛盾且彼此独立，模型唯一而差异即错误。
2. 三条纪律分别拆去特征律的混沌碰撞、自由律的矛盾纠缠、幸福律的新张力来源。
3. 三律在相容退化下分别退成固定点收敛、唯一合法路径、误差最小化，三者同时成为唯一形态，就是亏缺性运行的数学形态。
4. 三条纪律在数学内部以可核对性为选择压力凝固成教学体例，修补沿收紧的方向单向走，呈棘轮状。

5. 差异被消去后以例外、病态的清单复发（哥德尔、图灵的不可判定结果也在此列），这是张力复发律；其趋势须由第 18 章的判决预测三检验。

◆ 本章参考

— 原始文献

- Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. Fundamenta Mathematicae 3.
- Banach, S., Tarski, A. (1924). Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. Fundamenta Mathematicae 6.
- Cauchy, A.-L. (1821). Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique.
- Cohen, P. J. (1963). The independence of the continuum hypothesis. Proceedings of the National Academy of Sciences 50.
- Dedekind, R. (1888). Was sind und was sollen die Zahlen?
- Dirac, P. A. M. (1930). The Principles of Quantum Mechanics.
- Fourier, J. (1822). Théorie analytique de la chaleur.
- Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik und Physik 38.
- Hadamard, J. (1902). Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. Princeton University Bulletin 13.
- Hilbert, D. (1899). Grundlagen der Geometrie.
- Hilbert, D. (1900). Mathematische Probleme. Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
- Kolmogorov, A. N. (1933). Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.
- Landau, E. (1930). Grundlagen der Analysis.
- Matiyasevich, Y. (1970). Диофантовость перечислимых множеств. Doklady Akademii Nauk SSSR 191.

- Russell, B., Whitehead, A. N. (1910–1913). Principia Mathematica.
- Schwartz, L. (1950–1951). Théorie des distributions.
- Skolem, T. (1934). Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlvariablen. Fundamenta Mathematicae 23.
- Turing, A. M. (1936–1937). On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. Proceedings of the London Mathematical Society (2) 42.
- Zermelo, E. (1908). Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. Mathematische Annalen 65.

— 研究文献

- Belnap, N. (1993). On rigorous definitions. Philosophical Studies 72.
- Gelbaum, B. R., Olmsted, J. M. H. (1964). Counterexamples in Analysis.
- Lakatos, I. (1976). Proofs and Refutations. Cambridge University Press.
- Priest, G. (1987). In Contradiction.
- Robinson, A. (1966). Non-standard Analysis.
- Steen, L. A., Seebach, J. A. (1970). Counterexamples in Topology.
- Suppes, P. (1957). Introduction to Logic.

— 站内著作

- 第 53 号《SDE数学导论》：第 1 章（相容性公理）、第 5 至 6 章（伞模型与 SDE 数）。
- 第 344 号《意义数学的诞生》：三律在相容退化下的退化形态；D3 两层；意义是路径量。

◆



第　二　编

单数的统一性：顶点与例外清单

编　序

这一编（第 5—8 章）看单数的统一性走到顶点：一个几何、一种收敛、一个基础、一种结构之母。每一次统一完成，都同时登记出一张例外、病态与「独立」的清单——张力复发。

05

第 5 章

一个几何，一套公理

本章提要 欧几里得第五公设在《几何原本》中占据一个醒目的位置，此后两千年里，对它的证明尝试既是几何学的主线，也是“唯一的几何”这一统一之美的守护。本章从萨凯里 1733 年的四边形出发，沿平行公设的研究史走到希尔伯特 1899 年的《几何基础》，读它为统一性标准化的完成形态；同一部书又以模型证明公理彼此独立，统一性内部由此出现复数。非欧几何长期以“错误”之名列在例外清单上；这段历史中特征律与自由律如何被压住，本章逐项读数。

◆ 5.1 一个四边形和三种假设

1733 年，萨凯里的《欧几里得无任何瑕疵》在米兰刊行。书名已经说明了企图：为《几何原本》洗去唯一的污点，也就是第五公设看上去不够“自明”的那一点。他的办法是归谬。在线段 AB 的两端各作一条垂线，在垂线上截取相等的两段 AD 与 BC，连接 D、C，得到一个四边形。依据前面的命题，顶边 DC 上的两个角 D 与 C 相等。这两个“顶角”只有三种可能：都是直角，都是钝角，都是锐角。萨凯里称之为直角假设、钝角假设、锐角假设。

直角假设与第五公设等价（在其余公设成立的背景下），这是他要得到的结局。钝角假设很快导出矛盾：在他所用的背景里，直线可以无限延长，而钝角假设迫使直线长度有限。剩下锐角假设。他一路推演，得到的命题一条接一条，彼此协调，没有出现矛盾。推到后来，他写下一个判语：锐角假设与直线的本性相悖。这个判语依靠的是关于无穷远点的一段论证，后世的评注者认为其中并未完成归谬。

一个旨在摧毁某个假设的人，反而把这个假设的后果推演了几十条命题，每一条都严整无缺。这一幕值得停下来看。萨凯里的命题今天读来，正是双曲几何的最初一批定理，其中包括：存在互相渐近而不相交的直线，三角形的内角和小于两直角。他当时站在一座尚无名字的几何的门槛上，手里的标准却只给他两个选项：证出第五公设，或者找到矛盾。门槛里面的东西被登记为“待驳倒者”。

与萨凯里相隔数十年，兰贝特在1766年前后写成《平行线理论》（1786年刊出），沿着类似的路径走得更远。他在锐角假设下发现，三角形的面积与其内角和的亏量成比例；他还注意到，这一组公式与半径为虚数的球面上的公式相仿，并据此作出猜测：锐角假设所对应的，或许是某个虚半径球面上的几何。这是一个极有预见性的猜想，但兰贝特没有把它当作一个与欧氏几何并列的几何来宣布，他的文稿在生前也未刊出。

萨凯里四边形的几何含义，今天可以在上半平面里直接看到。其要点是这样的：在欧氏平面里，从底边两端作等长垂线，顶边与底边平行，顶角必为直角；在双曲平面里，同样的作图给出的顶边比底边更长，顶角为锐角，而且两个顶角相等，这正是萨凯里先行证明的对称性。在上半平面模型里，这一点可以逐步算出：底边取在一段半圆弧上，两端作垂直于它的双曲直线，在垂线上截取等距点，顶边的两个顶角果然相等且小于直角。换句话说，他推导的每一条命题都与后来的模型相合，他的“不矛盾”是对的，他没有找到矛盾，是因为矛盾不在那里。把他的失败读成方法上的失败，是后见之明；读成标准运行的结果，才与史实贴合：标准规定了成功的唯一形式是矛盾，而矛盾不出现，成功就不出现。

两位作者的经历给出本章的起点。平行公设研究的两千年里，大量精良的数学是在“要把某物驳倒”的标准下做出来的；做出来的东西，部分已经是后来被称为非欧几何的内容，却以“中间结果”“通往矛盾的阶梯”的名义存放。标准给出了问题的形状：几何只有一个，第五公设必有证明，凡与之相悖者必有矛盾。这是统一性标准化在几何领域里最醒目的一次运行。

本章把这段历史读成一个整体：它从一个公设的张力开始，经过一个几何的统一之美，到一部书里统一性的完成与内部分叉。叙述的顺序是：第五公设的形状（5.2），非欧几何被登记为错误的过程与模型的出现（5.3），希尔伯特的完成形态（5.4），同一部书里出现的复数（5.5），三律读数（5.6），以及这一段对全书例外清单的贡献（5.7）。

◆ 5.2　第五公设的形状与“唯一的几何”

《几何原本》第一卷列出五条公设。前四条短而平直：任意两点可以连一条直线，有限直线可以不断延长，以任意中心与距离可以作圆，所有直角彼此相等。第五条的篇幅却是前四条的数倍：若一条直线与另外两条直线相交，且在同一侧所成的两个内角之和小于两直角，那么这两条直线无限延长之后，必在该侧相交。

这条公设的形状与它的邻居不同。它说的是一个关于无限延长的断言，其检验需要走到视野之外。欧几里得本人似乎也意识到了它的特殊：第一卷的前二十八个命题没有使用它，到第 29 命题（平行线被截所成的内错角相等）才首次动用。这个事实常被后世引来说明他的审慎：能不用就不用，用时才亮出。

此后的两千年里，对它的处理形成了一条清晰的谱线。古代的评注家如普罗克洛斯，指出它更像一条应当被证明的定理，并给出自己的证明，其中暗用了平行线之间距离有界的假设。中世纪伊斯兰世界的伊本·海塞姆、奥马尔·海亚姆、纳西尔丁·图西，各自提出过替代的前提，并在其上推演。十七世纪沃利斯以相似三角形的存在（存在两个相似而不全等的三角形）替代第五公设；十八世纪末普莱费尔表述的那个今天通行的版本——过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线不相交——成为教科书里的标准形式。勒让德在十八、十九世纪之交的多次尝试，先后用到三角形内角和、无穷大面积等假设，每次都发现新增的前提与第五公设等价。

这里有一个值得注意的现象：这些“证明”几乎全部在暗中引入了一个与第五公设等价的命题。三角形内角和等于两直角、存在相似而不全等的三角形、存在任意大的等边三角形、过角内一点必有直线交角的两边……每一条都可以代替第五公设而成为出发点。一族命题互相等价，构成一个等价类；两千年的工作，就是在这个等价类里反复转圈，每一次转到一个更“自明”的成员，便宣布平行公设已被证明。

不妨把其中几条等价命题摆在一起，看看它们各自把什么当作了不言自明。普莱费尔公理把唯一性放在平行线的数目上；三角形内角和公理把整个平面的信息压进一个三角形里；相似三角形公理说，大小的改变可以不改变形状，也就是尺度与形状可以分离；矩形存在公理说，直角四边形是一件可以造出来的东西。四件事讲的是同一个空间的四个侧面：直线的数目，角的和，尺度的自由，直角的可造。它们彼此钩连，一处松动，处处松动，这使得“唯一”不是孤立的一条规定，而是整个体系的收口。从萨凯里到勒让德的诸多尝试，实际上都在探测这个收口的接缝，并一次又一次发现缝是没有的：每试图证明其中一条，就会用到另一条。

这一现象本身就是一种统一之美的症状。几何有一个、空间有一个，其中的真命题在这个唯一的空间里彼此钩连：一旦承认一个，其余的等价命题便随之而来。康德对此作出了哲学上的最强表述：空间是感性直观的先天形式，几何学命题是先天综合判断，欧氏几何描述的就是这个唯一的、人人共有的空间。在这个图景里，另一种几何的存在被排除在可想象的范围之外。

“唯一的几何”不只是哲学立场，它首先是一套功能卓著的标准。测量土地、建造神殿、勘察航路、制作地图，都需要一个对所有人一样的几何：甲在此丈量的三角形，乙在彼处重算，结果一致。《几何原本》作为教科书，在欧洲各国的课堂里用了两千年；十九世纪后期，道奇森（刘易斯·卡罗尔的本名）还写了《欧几里得及其现代对手》，为欧氏体系作为教材的位置辩护。这样一套标准，让文明的许多连接得以接通，这是本书第 2 章已经说明的标准化的文明功能，几何是其中最古老的范例。

这套标准的统一性，与它的运行方式分不开。欧氏几何的每一条命题，都可以脱离它被发现的过程而被搬走：学生不需要知道阿基米德怎样想到某个构造，只需要沿着命题的链条走一遍；工匠不需要了解公设的来历，只需要使用结论。这就是“谁用都一样”。它也带来相应的一面：凡是不在这条链上的东西，没有位置。萨凯里的锐角假设后果，一一都在链外。

从三律读数的角度看，这一阶段的数学处于一种高度张弛的状态：第五公设作为张力的来源，持续引发尝试（特征律所需的差异不断供给）；但尝试被限定为同一个目标，即证出它或驳倒它的反面，所有的路径被收窄到一条（自由律的裁剪空间极小）；而释放只有一种形式，那就是证明完成。5.6 将回到这一点。

◆ 5.3　被登记为“错误”的几何，以及模型的到来

十九世纪的头三十年，几个人在相互不知情的状态下走到了同一个地方。高斯从 1790 年代起在私人笔记与书信中讨论过一种不依赖第五公设的几何，他在 1824 年给陶里努斯的信中写到，三角形内角和小于两直角的假设可以导出一种自洽的、奇特的几何，并嘱咐对方保守秘密；他生前没有发表。罗巴切夫斯基于 1829 年在《喀山通报》上刊出了自己的新几何，题为《论几何学原理》，随后以多种文字重述，其中 1840 年的德文小册子《平行线理论的几何研究》流传最广。匈牙利的鲍耶·亚诺什独立发展了同一种几何，1832 年以附录形式随其父法尔卡什的《尝试》刊出。

这三处工作的共同点是：他们都不再把第五公设的否定当作归谬的起点，而当作一个独立的理论前提来推演；差别在于，高斯保持沉默，另外两位公开了。公开者的处境是后来被反复讲述的：罗巴切夫斯基称自己的体系为“想象几何”，并未得到当时同行的多少响应；鲍耶的工作在其生前几乎无人注意。名称里的“想象”二字，透露了当时的分类：它是一种尚未取得对象身份的东西。

“错误”在数学里有两种用法。其一指推导的错误，一步推理不成立；其二指前提的错误，即与已被认定为“真”的东西相悖。罗巴切夫斯基的几何，在第一种意义上无误：他的推演每一步都成立；在第二种意义上被判为错误：因为它与“空间就是欧氏的”这一前提相悖。这第二种错误，是由统一性标准化提供的：凡与唯一的几何不一致的，便是错误，哪怕它内部毫无矛盾。

模型的到来，改变了这一分类。1868 年，贝尔特拉米发表《非欧几何解释的尝试》，指出恒定负曲率曲面（后来以伪球面为典型）上的测地线几何，在局部满足罗巴切夫斯基几何的关系，从而在欧氏空间里给出了一个解释。他的模型只覆盖曲面的一部分，整个双曲平面的模型随后出现：克莱因于 1871 年给出射影模型，庞加莱于 1882 年前后给出圆盘模型与上半平面模型。

本书取上半平面模型作最小展示，所用的计算在现代几何教材中均可核对。令 H 为所有 $y>0$ 的点 (x,y) 的集合，赋予线元 $ds^2=(dx^2+dy^2)/y^2$。此时，竖直线与圆心在 x 轴上的半圆，承担“直线”的角色。取直线 l 为 $x=0$，外点 $P=(1,1)$：竖线 $x=1$ 与半圆 $(x-1)^2+y^2=1$（$y>0$）都过 P，且在 H 内均不与 l 相交——代入 $x=0$，后者只留下 $y=0$，那是被排除在模型之外的边界。过 P 的不相交直线于是不止一条，事实上有无限多条。再取三点 $A=(0,1)$、$B=(0,2)$、$C=(1,1)$，三段最短弧围成的三角形，其内角和为 $4\arctan 2-\pi/2$，约 163.74°，小于两直角。

这个三角形的角亏有一个干净的数值：π 减去内角和，等于 $\pi-(4\arctan 2-\pi/2)$，约 0.2838 弧度。在曲率恒为 -1 的双曲平面上，三角形的面积恰好等于它的角亏，这一关系正是兰贝特在锐角假设下嗅到的面积与角亏成比例的现代形态；而在欧氏平面上，角亏恒为零，面积与角之间不存在这种联系。两个几何因此对“三角形”给出了不同的账本：欧氏的账本里，角是角，面积是面积，二者各记各的；双曲的账本里，面积记在角的亏量上，三角形越大角和越小，相似而不全等的三角形不存在。沃利斯当年用来替代第五公设的命题，即相似而不全等的三角形的存在，在这里恰好失效，与上述等价类的清单吻合。

这套计算的意义，需要在统一性标准化的坐标里读出来。模型把“另一种几何”翻译成了欧氏数学内部的一个对象：若双曲几何含矛盾，则可以借此在以实数与坐标几何为背景的数学里推出矛盾。这是相对一致性的论证，它所证明的，是双曲几何的一致性相对于欧氏背景成立，也使第五公设对其余公设的逻辑独立性得到明确的含义。长达两千年的转圈，以一个形式上无可争辩的方式得到了终结：第五公设不可证。

统一性标准化对这个结局的反应值得细读。它没有放弃自己的做法，而是吸收了新的东西：“几何”由此成了一个复数。欧氏几何与双曲几何在同一个更大的背景（实数与坐标）里并列，各有其公理体系，彼此的关系由模型与翻译明确给出。1854 年黎曼的就职演讲《论作为几何学基础的假设》已把几何的基础推到曲率可以逐点变化的更一般的流形上（演讲稿 1868 年在其身后刊出），1872 年克莱因的埃尔朗根纲领，又用变换群把各种几何排成一个有秩序的家族。唯一的几何，变成了一个家族；家族里的每个成员，仍然是谁用都一样的几何。

于是，这段历史上的“错误”身份得到了一个确切的定位。在模型到来之前，非欧几何位于例外清单上；模型到来之后，它被迁出清单，登记到“另一个公理体系”的名下。迁移的方式是：用一个对所有人都一样的翻译，把它纳入既有的背景。例外清单上的对象，要么被驳倒，要么被翻译；它没有第三条出路：以它自己的来历、自己的实践位置，作为一个有亲缘的、与欧氏几何以某种程度相连的对象而存在。第三条出路，是同一性谱系标准化提供的，本书第四编将回到这里。

◆ 5.4　希尔伯特 1899：统一性标准化的完成形态

1899 年夏，哥廷根为高斯—韦伯纪念碑举行揭幕典礼，希尔伯特的《几何基础》作为纪念文集的一部分刊出。这部篇幅不大的书，是统一性标准化在几何领域的完成形态。它的做法可以概括为三步。

第一步，把几何的出发点改写成一组形式公理，按五个组别排列：关联（点、线、面之间的从属关系），顺序（介于关系），合同，平行，连续。原本的版本在连续性一组中给出阿基米德公理，完备性公理在后来的版本中补入。
对“点”“线”“面”，他不给定义；这些词只是公理里出现的三类对象的名称，其含义完全由公理之间的关系决定。第二步，证明这组公理的一致性与彼此的独立性，一致性借助以实数构造的模型，独立性借助各式各样的模型，逐条检验。第三步，在这组公理上，重新推出欧氏几何的主要定理，并给出此前的证明中暗藏的前提——例如，欧几里得没有明说的“介于”关系，在《原本》的推演里是靠图形直观默认的。

这三步合起来，把几何变成了一座可以被检查的建筑。检查的标准对所有人一样：一个命题，要么能从这组公理按逻辑规则推出，要么不能；检查者是谁、检查在何时何地进行，不改变结论。这一点，是后文把《几何基础》读作统一性标准化一个顶点的根据。后来人们把它形式化到机器可检的程度（例如在证明助手 Isabelle 中对《几何基础》的形式化，Meikle 与 Fleuriot 发表于 2003 年的工

作），也只是这一方向上的自然延伸：“谁用都一样”的极致，是可由机器生成与核验。

这就是本书所说的统一性标准化的完成形态，它在三个点上与第一编的框架吻合。

其一，它落在 E2，连接、次序、结构三元素各得其位。关联公理管连接，顺序公理管次序，合同、平行与连续三组共同规定结构。这种对应是本书的读法，希尔伯特自己未作这样的划分。

其二，它排除了混沌碰撞。公理组必须无歧义，每一条的含义由公理组整体固定；任何依赖图形直观的步骤都要被逐出。这条纪律本身是极大的进步：欧几里得推演里隐含的漏洞，由此一一暴露。同时，它也意味着，一个命题的意义在于它在公理链中的位置，而不在于它与空间经验的纠缠。

其三，它要求公理之间相互独立。每一条公理，不能从其余各条推出；删去它，应当有一个模型使其余成立而它失败。这一要求在本书的读法里，是一种形式化的解耦：公理之间的纠缠被逐条拆开，每条各立其所。第 4 章讨论的“无矛盾、独立、解耦、正交”，在这里取得了它最精美的实例。第四编将把这一整组要求读作相容性公理的一个数学形态；本章只提示，希尔伯特的公理化是该要求在几何中的第一次完整落地。

还要补一笔，说明这种完成形态为何可以被“搬走”。公理组一旦写定，几何的推演便成为一条可以脱离几何学家的流水线：输入是公理与待证命题，输出是证明或无证明。二十世纪中叶，塔斯基证明初等欧氏几何（以一阶语言表述的那一部分）的理论可判定，存在一个算法，对这一语言里的任何语句判定其真假；吴文俊 1970 年代提出的机械化方法，把大量几何定理的证明化为多项式运算。这些结果各有其适用范围与复杂度代价，但方向一致：几何命题的成立，已经与发现它的人、发现它的场合没有关系。这是统一性所能达到的最彻底的形态，也是它的力量所在。

希尔伯特与弗雷格之间 1899 至 1900 年的通信，是这一做法在当时引发的争论。弗雷格坚持，公理应当是关于已经给定的对象的真命题，定义应当给出含义，而不只是约束；希尔伯特则主张，一组公理的一致性便是相关概念存在的条件，公理本身就是对其中概念的隐定义。二人各持其理，通信后来成为数学哲学中的名篇。这场分歧的位置很有意味：弗雷格守护的是“唯一的几何”背后的那个唯一的对象，希尔伯特开启的是“一组公理，许多模型”。统一性的完成形态，从它诞生之日起，就已经在自己内部松开了一个口子。

◆ 5.5　同一部书里的复数

《几何基础》最引人注目的部分，不是它推出了什么，而是它怎样证明某事无法推出。

独立性的证明方式是构造模型：要证明公理 α 不能由其余公理推出，就构造一个满足其余全部公理而 α 失败的模型。《几何基础》用这个办法，给出一批判决性的结果。平行公理独立于其余公理，上半平面或其他非欧模型提供了这一点，反过来，欧氏模型显示其否定同样无法推出。连续性公理组里的阿基米德公理独立：希尔伯特借助一个由“超实”的函数域构造的数系，造出非阿基米德几何，其中存在比任何整数倍的单位线段都要长的线段。德萨格定理（两个三角形若对应顶点连线共点，则对应边的交点共线）在只有平面公理的几何里不可由关联、顺序与合同推出，可以靠一个不满足它的平面几何来说明；比这更简明的例子，后来由莫尔顿在 1902 年给出，这就是以他命名的非德萨格平面。

这一批模型的实际效果是：几何变成了一个由公理增减而生成的家族。去掉平行公理，得到以关联、顺序、合同为基础的绝对几何，欧氏与双曲两支都在其中分出；去掉阿基米德公理，得到非阿基米德几何；放弃合同与度量，退到更粗的关联结构，则是射影几何、仿射几何一类的几何。每一个成员，在其内部同样是谁用都一样；成员之间的关系，则由“哪几条公理被改换”这一事先给定的定义安排。

这就是定义二所说的“几本菜谱并排”的雏形。每个系统内部的尺子统一；系统之间的关系，以公理表上的增删来计量；两个系统相隔多远，只需数一数它们的公理清单差在哪里。亲缘由定义规定，不由回写历史生成：欧氏几何与双曲几何相差“一条公理”，这个差异是一个逻辑事实，与几个世纪里谁在哪里怎样使用它们无关。我们不妨再看一眼独立性论证的逻辑形状，因为它决定了“复数”的性质。独立性的论证写成一个条件句：如果某个背景理论一致，那么“其余公理加上 α 的否定”也一致。这个结论是关于理论之间的逻辑关系，其证据是模型，模型的构造对任何人都一样，检验者可以是学生，可以是机器。它说的是“这一条公理可以被拿掉”，没有说“这一条公理在何处曾被拿掉、拿掉之后谁在其中工作过”。后一类信息属于另一种记录，它记在回写的历史里：欧氏几何的每一条定理在测量、建筑与制图中被调用的次数，双曲几何在复变函数的单值化、在相对论的速度合成里被调用的方式，各自累积出不同的稳定程度。这些使用的历史在公理清单上全无显现：清单上只有公理的增删，没有谁在何处用过它们。独立性论证对这类记录完全中立，这是它能够做到“谁用都一样”的原因，也是它无法给出亲疏的原因。

因此可以说，希尔伯特的书同时做了两件事。它把统一性标准化推到顶点，让几何成为一座可被任何人检查的建筑；它又以独立性的论证，在统一性内部造出了复数。这复数仍是统一性的复数：每一套公理对所有人一样，系统之间的关系由定义事先给定。第三编将把这条线索展开，逐一考察强度阶梯、多宇宙、同构与等价，并在第 12 章检验这些复数的统一性是否改变了三律的亏缺方式。

此处还要点出一个细节，它关系到后面几章的论证。独立性证明所用的模型，多数是以更基本的数学（实数、代数数域、函数域）构造的。换言之，希尔伯特的一致性是相对的：几何的一致性相对于算术的一致性成立。这使“基础”的位置往算术上移了一层——这也是后面第 7 章要讨论的单一基础问题的前奏。几何的统一，以算术的统一为背书；算术的统一，要等到集合论与哥德尔的工作才被进一步追问。

◆ 5.6　三律读数：这段历史里特征律与自由律怎样被压住

按全书的做法，对每一段统一性标准化的历史读三律。这里的读数分成三个层面。

特征律：跑法是混沌碰撞、自组织、涌现。平行公设的两千年里，差异从未缺席：每一次证明尝试，都带来一批新的等价命题、新的辅助构造、新的反例线索。这是混沌碰撞的原料。关键在于，这些碰撞的产物被标准登记为什么。萨凯里推出的锐角假设下的命题、兰贝特得到的面积与角亏的关系，都是新特征的雏形，却因为目标被限定为“驳倒”，这些特征未能在当时凝成。统一性标准的要求是：不允许有“第二个几何”，因此凡是显露出第二个几何的东西，都被归入过渡性的内容，不作为稳定的特征保存。涌现的门被标准关着。门最终是从外面打开的：罗巴切夫斯基与鲍耶把否定的前提当作独立的出发点，贝尔特拉米的曲面解释使之获得对象身份，涌现发生在标准的边缘，由标准之外的位置推动。

自由律：跑法是矛盾纠缠触发、路径裁剪、新模式。在这段历史里，纠缠的部位非常清楚：几何与空间经验的纠缠。第五公设一方面是关于图形的公设，一方面是关于我们生活其中的空间的断言；这两种身份纠缠在一起，才使它令人不安。康德的先天综合判断，把这种纠缠固定为“一个空间，一个几何”；希尔伯特的形式化，则把这种纠缠拆开：公理只约束符号关系，是否描述物理空间不再是几何本身的事。从自由律的角度看，拆开纠缠使一些路径开放（形式化、模型、独立性），同时也使原有的纠缠路径关闭：几何与空间经验的联系，退居几何之外，成了物理学的问题。罗巴切夫斯基曾设想以恒星视差检验空间的几何，关于高斯，流传着他

曾用大地测量的大三角形检验内角和的说法，史学界通行的看法是这多半出于传说：他确实主持过汉诺威的大地测量，其中有一个著名的大三角形，但那是测量任务本身，并非为检验欧氏几何而设。罗巴切夫斯基的努力则有文本可查。这类努力仿佛是被统一性标准化抛出去的纠缠，在标准之外寻找落脚处。它们后来在广义相对论（1915）里找到了落脚处：时空的几何由物质分布决定，黎曼几何成为表述。这个落脚，发生在数学的标准化范围之外。

幸福律：跑法是张力积累、模式转换、释放。平行公设的张力积累了两千年，释放形式在标准内只有一种：给出证明，使公设成为定理。1868 年至 1882 年之间模型的出现，给了一种出乎意料的释放：公设不可证，而且这件事本身被证明了。这一次释放的确生产了新的特征：独立性方法，相对一致性的概念，公理系统作为研究对象的观念，希尔伯特后来的元数学纲领。这是值得记录的一面：统一性标准化并非完全无法释放张力，在它的边缘处，张力释放得极其丰富。然而，这一释放是意外的，它没有成为标准本身的运行方式；从标准的角度看，释放的路径依旧只有“消除差异”一种：把非欧几何译回欧氏背景，登记为一个公理变体。

把三项读数并列如下。

意义律	这段历史里的运行	被压住的部位	释放的出口
特征律	碰撞产物被登记为“待驳倒者”	锐角假设下的命题不凝成稳定特征	标准之外的位置（罗巴切夫斯基、鲍耶、贝尔特拉米）
自由律	几何与空间经验的纠缠被固定、后又被拆开	纠缠路径关闭，几何成为纯符号关系	物理学（广义相对论）而非数学标准
幸福律	张力的释放只许“证明”一种	非欧后果两千年里无处着陆	模型与独立性，出乎标准的预期

这张表给出本章最重要的一个观察：每一律的出口，都在标准运行范围的边缘或之外。亏缺性运行的数学形态，由此显露出来：不是三律全然熄灭，而是它们只在标准漏出的缝隙里找到出路；标准内部的运行，是固定点收敛（证出或驳倒）、唯一合法路径（只许沿公设链推演）、误差最小化（消除与欧氏体系的分歧）。这正是第 344 号《意义数学的诞生》所说的三律在相容退化下的退化形态，第 4 章 4.5 节已逐条读过。

◆ 5.7　例外清单上的位置与张力复发

回到全书的例外清单。非欧几何在清单上的位置经历了三个阶段。

第一阶段，它是“待驳倒者”。在萨凯里与兰贝特的时代，锐角假设下推出的命题处于归谬的过程之中，它们的身份是暂存的。第二阶段，它是“错误”或“想象”。罗巴切夫斯基的几何，在唯一几何的标准下，既无推导之误，却因前提与空间不合而不被承认。这一阶段持续了数十年，期间高斯的沉默、鲍耶的受冷落、罗巴切夫斯基的孤立，是它的外显形式。这里的叙述需要小心主语：不是某个人拒绝了它，而是标准在运行中，为凡不合唯一几何者安排了“错误”这一位置，人物在其中承担的，是著作的作者与读者的角色。第三阶段，它是“另一个公理体系”，由模型的翻译换取。

这三个阶段合起来，构成统一性标准化处理差异的一个完整样本：差异先作为任务（待驳倒者），再作为错误，最后作为变体被译入。每一步都不曾给它“自己的位置”，也就是不曾让它以自己的回写历史确定与欧氏几何的亲缘。变体之间的亲缘，是由公理清单的差异规定的。

还要看清这一段落中的张力复发。统一性标准化在希尔伯特的手里达到完成形态之后，立即出现了新的例外：德萨格定理失效的平面、非阿基米德几何、满足部分公理的各种“奇怪”平面。它们是由独立性证明本身生产出来的。完成形态不是终点，它在完成的同一时刻生产出下一批需要登记的对象。这一规律在下一章会有更清楚的案例：分析的严格化完成之后，病态函数的清单随之增长。这个现象正是 4.8 节的张力复发律：完成一轮之后，例外清单随之增长。几个个案立不起趋势，检验它的办法在第 18 章的判决预测三；这里把它在几何领域的第一个案例记录下来，并补上一条观察：这一批新例外都是由独立性证明这一“按定义检验”的工具造出来的，工具越精，清单越长，这与 4.7 节棘轮的方向一致。

清单的增长还有一个侧面，即教学的侧面。非欧几何进入大学课程以后，它在教科书里的地位是一章“历史上的重要插曲”，附在欧氏几何之后；欧氏几何仍是中小学的标准内容。这一安排本身便是统一性标准化的日常形态：标准答案只有一套，另一套存放在“进阶”的位置，通常的学习者终其一生不会遇到它。这里没有什么人的过错可言，是标准在课程里这样运行：它给每一个对象分配一个位置，位置的高低由与唯一标准的距离决定。距离越远，位置越靠后，进入课堂的机会也越小，这是同一台机器在教学一端的读数。

最后，对本章的叙述作一个定位。欧氏几何与非欧几何在各自的公理体系里都严整无缺，在各自的实践范围里都有用，本章追问的不是二者孰优孰劣，而是标准化的方式：一套公理，一个几何，凡不合者列为错误或例外，待模型到来再译入。这种方式让几何成为一座可以检查、可以搬运、可以机器核验的建筑，这是它巨大

的文明功能；同时，它让差异只有“驳倒”与“译入”两条出路，让特征律与自由律的运行必须到标准之外去寻找出口。

读到这里，下一章的任务也就清楚了。几何是从公理出发的统一，分析则是从极限出发的统一。在分析里，同样的节律将再次出现：一种收敛、一把尺，一旦确立，便生产出一张病态清单。

◆ 本章结论

1. 平行公设的两千年研究，是一组互相等价的命题在等价类内部反复转圈；“唯一的几何”作为统一之美，守护的是这个等价类的封闭。
2. 非欧几何经历了“待驳倒者”“错误”“公理变体”三个位置，每一步都由一个对所有人一样的翻译或判定给出，始终未获得以自己的回写历史确定亲缘的机会。
3. 希尔伯特 1899 年的《几何基础》是统一性标准化的完成形态：形式公理、可检查的推演、公理的相互独立；其对独立性的模型论证同时在统一性内部造出了复数。
4. 复数的统一性中，系统之间的亲缘由公理清单上的增删事先规定，这是“几本菜谱并排”的雏形，留待第三编检验。
5. 这段历史里，特征律、自由律、幸福律的出口都落在标准运行范围的边缘或之外；完成形态一出现，新的例外随即产生，是张力复发律在几何领域的第一个案例。

◆ 本章参考

— 原始文献

· Euclid, Elements, Book I，公设与命题 I.29。
· Saccheri, G., Euclides ab omni naevo vindicatus, 1733.
· Lambert, J. H., Theorie der Parallellinien, 写于 1766 年前后，1786 年刊出。
· Lobachevsky, N., Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, 1840.
· Bolyai, J., Appendix: Scientiam spatii absolute veram exhibens, 1832.

- Beltrami, E., Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea, 1868.
- Riemann, B., Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, 1854 年讲演，1868 年刊出。
- Klein, F., Über die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie, 1871; Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen（埃尔朗根纲领），1872.
- Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, 1899.
- Moulton, F. R., A simple non-Desarguesian plane geometry, Transactions of the American Mathematical Society 3, 1902.

— 研究文献

- Bonola, R., Non-Euclidean Geometry, 英译本，1912.
- Gray, J., Ideas of Space: Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic, 1979.
- Rosenfeld, B. A., A History of Non-Euclidean Geometry, 1988.
- Frege–Hilbert 通信，见 Frege, G., Wissenschaftlicher Briefwechsel, 1976.
- Meikle, L. I., and Fleuriot, J. D.，“Formalizing Hilbert's Grundlagen in Isabelle/Isar”, in Theorem Proving in Higher Order Logics (TPHOLs 2003), LNCS 2758, 2003.
- O'Connor, J. J., and Robertson, E. F.，“Non-Euclidean geometry”, MacTutor History of Mathematics.

— 站内著作

- 第 53 号《SDE数学导论》（相容性公理；伞模型统一的是构造，不是配置）。
- 第 344 号《意义数学的诞生》（三律在相容退化下的形态）。

◆

06

第 6 章

一种收敛，一张病态清单

本章提要　阿贝尔 1826 年指出，由连续函数构成的收敛级数，其和函数可以出现跳跃。此后半个世纪，分析用 ε–δ 语言与一致收敛把极限统一起来，成为一把对所有人一样的尺。魏尔斯特拉斯 1872 年宣读的处处连续而处处不可导的函数，被称为病态；反例随即集成一张清单。本章把这一过程读成统一性标准化的又一次完成与例外的又一次增长，并考察清单上的对象在贝尔纲、维纳测度、分形下转为典型的过程：换的仍是一把对谁都一样的测度。张力复发律在此得到分析中的实例。

◆ 6.1　一列正弦与一次跳跃

取一列正弦函数，把它们的和写出来：

$$\sin x - (1/2)\sin 2x + (1/3)\sin 3x - (1/4)\sin 4x + \cdots\cdots$$

每一项都是连续的，而且是光滑到可以任意次求导的函数。这个级数在整条实轴上收敛，在区间 $(-\pi, \pi)$ 内，和等于 $x/2$。在 $x=\pi$ 处，每一项 $\sin(n\pi)/n$ 都等于零，所以和为 0；而当 x 从左边趋近于 π 时，和趋于 $\pi/2$。于是和函数在 π 处发生了一次跳跃：由 $\pi/2$ 掉到 0，再沿周期延拓重新爬升。

挪威数学家阿贝尔在 1826 年的一封信里指出了这个现象，并说明它与柯西 1821 年《分析教程》中的一个定理有冲突：柯西曾断言，由连续函数构成的收敛级数，其和仍是连续函数。阿贝尔的措辞谨慎，他说这个定理似乎遭遇例外。这个“似乎有例外”的说法，今天读来十分醒目：一个定理在提出五年之后，已被一个初等的例子顶了回来，而这个例子，用的正是分析里最熟悉的对象。

问题出在哪里，需要把“收敛”这个词拆开。柯西时代的用法里，“级数收敛”是指：对每个固定的 x，部分和构成的数列趋向一个极限。这是逐点收敛。逐点收敛意味着对每一个位置分别有一个等待的时段：给定误差要求，对该位置，等过某个项数之后，误差永远低于要求。但是等待的时段可以因位置而异，而且在位置趋近某一点时，时段可以无限增长。上面这个例子里，越靠近　　π，需要的项数越

多，部分和的图形在那里形成越来越陡的坡，极限函数的那道缺口，就是这些坡的极限轮廓。

此后三十年，这个现象被一批人从不同方向看清。1847 年前后，塞德尔与斯托克斯各自指出：收敛的速度如果在整个区间上可以用同一个项数控制，连续性便能传递；斯托克斯称之为“无限缓慢地收敛”的东西，正是差别所在。柯西本人在 1853 年发表了一篇短文，给原定理补上了条件；这篇短文的措辞该如何按现代概念来读，史学界尚有分歧。到十九世纪六十年代，魏尔斯特拉斯在柏林的讲课中，已把这个区分变成了一个明确的、可以独立使用的概念：一致收敛。

“一致”二字，是这一时期分析里最重要的一次标准化。它改变了什么？它没有改变任何一个具体的函数或级数，也没有否认逐点收敛的存在。它做的是：给收敛一个带量词的定义，使得人们谈到收敛时，必须说明等待的时段是否依赖位置。下一节把这个定义写准。

◆ 6.2　ε–δ：一把给谁都一样的尺

设 A 是一个非空实数集合，f_n 与 f 是 A 上的实值函数，n 取正整数。说 f_n 在 A 上逐点收敛于 f，是指：对每一个 x∈A，每一个　ε>0，存在正整数 N，使得一切 n≥N 都有 |f_n(x)−f(x)|<ε。注意量词的顺序：先给 x，再给 ε，然后才选 N，所以 N 一般依赖于 x 与 ε 两者。

说 f_n 在 A 上一致收敛于 f，是指：对每一个　ε>0，存在正整数 N，使得一切 n≥N 与一切 x∈A 同时满足 |f_n(x)−f(x)|<ε。这里 N 的选取先于 x 的出现，只依赖 ε。两个定义用的是同样的字母，同样的不等式，差别全在量词的次序：把“对每个 x”移到“存在 N”的后面，命题就由弱变强。一致收敛必推出逐点收敛，反过来则有反例。

最简单的反例是 f_n(x)＝xⁿ，定义在闭区间 [0,1] 上。对每个 0≤x<1，xⁿ 趋于 0；x＝1 时恒等于 1。逐点极限 f 在　[0,1) 上为 0，在 1 处为 1，是一个有跳跃的函数，而每个 f_n 都是连续的多项式。收敛不是一致的：取　ε＝1/2，无论给定怎样的 N，都可以选 n≥N 并令 x_n＝(3/4)^(1/n)，这时 0<x_n<1，f(x_n)＝0，而 f_n(x_n)＝3/4，误差 3/4 大于　ε。误差最大的位置，随 n 的增大向 1 挤过去，永远逃出任何固定的等待时段。

这个例子还说明一件事：同一列函数，在不同的定义域上，一致性的判断不同。在 [0,a] 上，只要 0≤a<1，就有 |xⁿ|≤aⁿ，而 aⁿ→0，给定 ε 选 N 使 a^N<ε 即

可，收敛是一致的。所以一致收敛是针对（函数列，定义域）这一对的性质，而非针对函数列单独的性质。

下面两个定理刻画了这一概念的用处，也刻画了它的边界。第一个是连续性的保持：若 f_n 在 A 上都连续，且一致收敛于 f，则 f 在 A 上连续。证明是三项估计。固定 c∈A 与 ε>0。由一致收敛选定一个 m，使得对一切 x∈A 有 |f_m(x)−f(x)|<ε/3；再由 f_m 在 c 处连续，选 δ>0，使 x∈A 且 |x−c|<δ 时 |f_m(x)−f_m(c)|<ε/3。于是

$$|f(x)-f(c)| \le |f(x)-f_m(x)| + |f_m(x)-f_m(c)| + |f_m(c)-f(c)| < \varepsilon。$$

证明的关键是 m 在整个过程中保持固定，这依赖一致收敛提供的统一的 N。若只有逐点收敛，则对 c 附近的每一个 x，可能需要换一个 m，而换了 m 又会改变 δ，估计的链条无法闭合。

第二个是迪尼定理，需要精确陈述其条件：设 K 是紧集（在实数轴上即有界闭集），f_n 与 f 都是 K 上的连续函数，对每个 x∈K，数列 f_n(x) 关于 n 单调（统一取非减或统一取非增），并逐点收敛于 f，则收敛是一致的。三个条件——单调、紧致、极限连续——缺一不可。去掉极限连续，[0,1] 上的 x^n 单调下降到有跳跃的函数，不一致收敛；去掉紧致，(0,1) 上的 x^n 单调下降到连续的 0，仍不一致收敛；去掉单调，[0,1] 上的三角尖峰函数列（n≥2，h_n 在 [0,1/n] 上取 nx，在 [1/n,2/n] 上取 2−nx，其余为 0）逐点趋于连续的 0，而 h_n(1/n)＝1，不一致收敛。三个反例各自针对一个缺口，不能互相替代。

还有一个实用的判据，使一致收敛可以在不知道极限的情况下检验。说函数列 f_n 在 A 上一致柯西，是指：对每个 ε>0，存在 N，使一切 m,n≥N 与一切 x∈A 同时有 |f_n(x)−f_m(x)|<ε。对实值函数，一致柯西与一致收敛等价。从前者推后者的证明有一个细节：先对每个固定的 x，由实数的完备性得到极限 f(x)；再用 ε/2 的一致柯西条件，让 m 趋于无穷，得到 |f_n(x)−f(x)|≤ε/2<ε。这里严格不等式变成了非严格不等式，所以预先留了一半的余量。若值域换成有理数，这个推论失败：一列有理数收敛于 $\sqrt{2}$，作为常值函数列满足一致柯西条件，却在有理数里没有极限。可见，同一个收敛判据能否成立，还依赖实数的完备性这一背景；分析的统一，是整个实数基础的统一，而不只是一个定义的统一。

最后需要一个提醒，也是本章后面要用到的：一致收敛保护连续性，却不保护可导性。令 g_n(x)＝sin(nx)/n，则 |g_n(x)|≤1/n，g_n 在整条实轴上一致收敛于 0；但 g_n′(0)＝1 对一切 n 成立，而极限函数 0 的导数在 0 处为 0。“先求导后取极

限”与“先取极限后求导”在这里不可交换。每一种性质需要各自的保持条件，一个标准保护了一种，对另一种不负责任。这个事实在 6.4 节会显出它的分量。

回头看这一节，可以说明本书为何把 ε–δ 与一致收敛读为统一性标准化。这套语言把极限的含义压缩到几行量词里，它不依赖几何直观，不依赖“无穷小”的哲学争论，也不依赖谁在使用它。一个学生、一位教授、一台证明助手，面对同一个 ε–δ 陈述，检验的步骤相同，结论相同。它是“谁用都一样”的典型：可脱离发生过程被搬走。分析因此获得了几何在希尔伯特手里获得的那种可检查性。

◆ 6.3 统一的回报与代价

标准的建立需要代价，也带来报偿，这一节按顺序记下。

先说报偿，它们很大。第一，一批长期悬着的问题得到澄清。积分号与极限号何时可以交换，级数何时可以逐项求积，连续函数的极限何时仍连续，这些在十八世纪靠经验与运气处理的事情，现在有了明确的条件。第二，实数本身得到了奠基：1872 年，戴德金与康托尔各自给出实数的构造（戴德金用有理数的分割，康托尔用有理数的柯西列），分析的对象有了算术的来源。同一年，魏尔斯特拉斯在柏林科学院宣读了本章下一节要讲的函数。这些事不是一个人安排的巧合，它们是标准在那些年的运行里一起显影的东西：有了精确的极限，才有了对实数的精确追问；有了对实数的追问，才有了对处处连续而无处可导的函数的接纳。第三，它给出了定理的库存：魏尔斯特拉斯的逼近定理，海涅—博雷尔的有限覆盖，博尔查诺—魏尔斯特拉斯的聚点原理，都在这一时期取得今天的形态。

这一时期的标准还在继续细化。海涅在 1872 年的论文里陈述了一致连续的概念，并证明闭区间上的连续函数一致连续，为积分理论提供了又一条可检查的支撑；博尔查诺与魏尔斯特拉斯的有界序列必有收敛子列、海涅与博雷尔的有限覆盖，则把“闭区间”这样的几何对象翻译成拓扑性质的语言。紧致性的概念由此在后来的数学里成为一种通用的货币：迪尼定理里用它，极值定理里用它，函数空间里的阿尔泽拉—阿斯科利定理里用它。同一枚货币，到处可以兑换，且兑换率对每个人一样。

再说代价，它同样清晰。分析的直观基础被替换了：此前，函数是曲线，曲线有切线，积分是面积，这些几何图像支撑着整个微积分的学习与使用。严格化之后，这些图像成了待证的命题，有的被证明在更宽的条件下成立，有的被证明不成立。安培在 1806 年曾尝试证明，一个连续函数除了孤立点以外处处有导数，这个命题在当时看起来几乎是定义的一部分。严格化的结果，是这个命题的反面成立。

一把对所有人一样的尺，有这样一种性质：它丈量出什么，什么就成为事实，哪怕与此前的直观背道而驰。这是它的力量，也是它让人不安的地方。直观是个人的、有历史的、带着手感的东西；尺是公共的、对谁都一样的东西。当两者冲突时，标准的运行要求直观让步。

这里需要提到全书的一个概念。第 1 章已经说明，数学在 E2，连接、次序、结构是它的三元素。分析的严格化，是对“连接”与“次序”的一次极大的清理：函数与极限、点与邻域之间的连接，被压缩为量词的次序。在这次清理中，量词的次序成为新的次序，它承担了此前由几何图像承担的作用。按本书的读法，这是统一性标准化的又一次完成：连接得更紧，次序更清楚，结构更明确，而每一处连接都可以由任何人逐字核验。

同时，这次完成有它的另一面。它对“例外”的容忍度极低。在量词语言里，一个函数要么满足定义，要么不满足；一个收敛要么一致，要么不一致；没有“几乎一致”“在某种意义上一致”这类含混的状态（后来出现的几乎一致收敛、依测度收敛，是新增加的、有各自精确定义的概念，不是对含混状态的容忍）。这种非此即彼的清晰，正是对谁都一样的前提；与此相应，凡不符合定义的对象，都有一个现成的位置：反例，或曰病态。

◆ 6.4　魏尔斯特拉斯函数：1872 年宣读，1875 年刊出

1872 年 7 月 18 日，魏尔斯特拉斯在柏林科学院宣读了一篇短文，给出了一个在整条实轴上处处连续，却在每一点都不可导的函数。这篇文章当时并未立即刊出；1875 年，杜布瓦-雷蒙在《纯粹与应用数学杂志》上发表了它，并附上了魏尔斯特拉斯的构造与证明。宣读与刊出之间有三年，这三年里，这个例子在柏林的学生与同行之间流传，一部分人通过讲课笔记与通信知道了它。

函数的定义是：

$$W(x) = \Sigma_{n\geqslant 0} a^n \cos(b^n \pi x),$$

其中 $0<a<1$，b 是正奇数，并且 $ab>1+3\pi/2$。

这个构造的每一句话都有分量。$a<1$ 使得 $\Sigma\, a^n$ 收敛，于是由魏尔斯特拉斯判别法（各项绝对值被收敛的数项级数控制），级数在整条实轴上一致收敛。每一项是连续函数，由 6.2 节的定理，W 处处连续。这一步是一致收敛的胜利。另一方面，b 是大的奇数，$ab>1$，使得逐项求导得到的级数，其各项的大小为 $(ab)^n\,\pi$ 的量级，趋于无穷，求导的级数发散。这一步是 6.2 节最后的那个提醒的放大版：一致收敛保

护了连续性，对可导性没有任何保证，而且这里的情形比 sin(nx)/n 更激烈，因为导数的失控不止出现在某一点，而是出现在每一点。

证明 W 在每一点都不可导，需要一个针对每个 x_0 的精心构造：对每个整数 m，选取与 x_0 相距约 b^{−m} 量级的两个邻点，使得差商可以与第 m 项的贡献比较，其余各项的贡献在条件 ab>1＋3π/2 下被控制住。结论是，差商的绝对值随 m 趋于无穷而无界。关于条件的下界，哈代在 1916 年证明，只要 0<a<1，b>1，ab≥1，函数 $\Sigma\, a^n \cos(b^n \pi x)$ 就处处不可导，魏尔斯特拉斯原来的条件是充分而不必要的。

顺带可以看到，黎曼那个级数 $\Sigma\, \sin(n^2x)/n^2$ 本身是处处连续的函数：它的各项绝对值不超过 $1/n^2$，而 $\Sigma 1/n^2$ 收敛，由魏尔斯特拉斯判别法，级数一致收敛，连续函数的一致极限仍是连续函数。连续这一半有一个干净的证明，可导这一半则要费上一个世纪才弄清。对这一函数还应说明几点史实。其一，魏尔斯特拉斯不是第一个构造这类函数的人：博尔查诺在 1830 年代的手稿中已有一个类似的构造，其手稿后来才为人所知；据魏尔斯特拉斯本人转述，黎曼在 1861 年前后的讲课中提到过函数 $\Sigma\, \sin(n^2x)/n^2$ 无处可导，这一断言后来被证明是错的——格韦尔 1970 年证明，它在形如 π 乘以奇数比奇数的有理点处可导。其二，达布在 1875 年也给出了处处连续而无处可导的例子。其三，在魏尔斯特拉斯之前，无处可导的连续函数是否存在，在数学共同体中是一个悬着的问题，一般的预期倾向于“不存在”或“只是极罕见的例外”，前面提到的安培的尝试即在此列。

魏尔斯特拉斯的动机，史料所见，是要为分析建立完全不依赖直观的基础，因此需要一个反驳直观的例子。他的这个函数，因此是严格化纲领的产物，也是它的一个展示：展示这把尺确有能力量出直观量不出的东西。这一点值得记住，因为它把病态与严格化连在了一起：病态函数不是严格化的意外副产品，它是严格化的成果展示，同时也是被登记到例外清单上的第一批对象。

◆ 6.5 “病态”之名与反例集

一个对象被称为病态，意味着什么？

在医学里，病态指偏离健康的状态；在数学里，这个词的使用带着同样的规范性：存在一个被预设的“健康”的标准形态，对象因偏离它而被命名。魏尔斯特拉斯函数出现后，数学家们对它的反应，在文献中留下了清晰的痕迹。埃尔米特在 1893 年致斯蒂尔杰斯的信中，表达了对这类无导数的连续函数的厌恶，他说自己对这种祸害感到恐惧而转身离开；庞加莱在 1899 年一篇谈逻辑与直觉的文章里，论及

逻辑生产出来的“怪物”，大意是这些对象似乎是为了与前人的直觉作对而造出来的。这些回应的措辞各异，指向相同：新对象是对标准形态的偏离。

拉卡托斯在《证明与反驳》里，为这种反应取了一个名字：排除怪物。面对反例，数学家最先采取的做法是修改定义，把怪物排除出所考察的类；其后是排除例外，把定理的适用范围划出，使怪物落在边外；更晚的，才是把反例吸收为推动概念修订的力量。按这个顺序读，魏尔斯特拉斯函数的接受史是一个标准的样本：先是“怪物”，再是“例外”，然后才有后来对它的重新理解。

反例并非孤立出现，它们成批地涌来。下表列出这一时期分析中最重要的一批，它们共同构成了第一张病态清单。

对象	年份（约）	它否定的直观
狄利克雷函数（有理点取 1、无理点取 0）	1829	函数是一条可画出的曲线
沃尔泰拉的可导函数，其导数有界但不可黎曼积分	1881	导数总可积，微积分基本定理普遍成立
康托尔三分集	1883	无处稠密的集合必然可数或至多是孤立点的聚集
皮亚诺曲线	1890	曲线是一维的，不能充满一个正方形
希尔伯特曲线	1891	同上，给出了更具体的构造
高木函数	1903	无处可导的连续函数只能由复杂的三角级数给出
科赫曲线	1904	连续曲线总有长度

这张表需要说明几处。康托尔三分集在 1883 年由康托尔刊出，更早的 1875 年史密斯已有类似构造，此处依习惯取 1883。沃尔泰拉的例子之所以重要，是因为它显示了黎曼积分的框架里，微积分基本定理有一个洞，后来勒贝格 1902 年的积分理论补上了这个洞。皮亚诺曲线是从闭区间到正方形的连续满射，它使“曲线”“一维”“连续”这三个词的联系松开。

表中每一行的结构相同：一个由现有定义合法地导出的对象，与此前被当作定义的一部分的直观相冲突。它们的出现路径也相同：标准的运行（更精确的函数、连续、积分、集合定义）使得这些对象成为可构造的；标准的完成（它们确实满足所有定义）使得它们无法被驳倒；标准的统一性（对象必须在同一个体系中有位置）使得它们只能被放到“例外”的栏目下。

这里有一个要紧的转折，需要用本书的框架说清楚。表中的对象不是被谁“选定”为病态的，也没有某个共同体作出过一次表决。是标准的运行本身，把它们显影为偏离者：当“连续”“长度”“维数”各有精确的定义之后，不符合直观的那些组合，在定义的交汇处自行暴露出来。命名是这一显影的一部分，不是显影之外的一个动作。

◆ 6.6　换尺之后：贝尔纲、维纳测度与分形

病态清单并未静止。二十世纪上半叶，几次换尺的工作，把清单上的对象重新安置了。

第一次是贝尔纲。贝尔在 1899 年的论文中引入了第一纲集与第二纲集的概念：一个度量空间中的集合，若它是可数个无处稠密集合的并，就称为第一纲集（亦称贫集）；其余为第二纲集；第一纲集的补集称为剩余集。贝尔纲定理说，完备度量空间中的剩余集稠密，特别是，空间本身不是第一纲集。在这个意义上，剩余集是“大”的集合，第一纲集是“小”的集合。

1931 年，巴拿赫与马祖尔凯维奇各自独立证明：在 [0,1] 上连续函数全体 C[0,1]（赋予上确界范数，成为完备度量空间）中，处处不可导的函数构成剩余集。换言之，用贝尔纲这把尺量，“典型”的连续函数是处处不可导的，有导数的连续函数（甚至只在一点有导数的）才是第一纲的小集合。魏尔斯特拉斯 1872 年宣读时被当作怪物的东西，在 1931 年成了常态。

这一论证的骨架可以写出。对正整数 n，令 E_n 为 $C[0,1]$ 中满足下述条件的函数 f 的集合：存在某个 $x\in[0,1-1/n]$，使得对一切 $0<h\leqslant 1/n$ 有 $|f(x+h)-f(x)|\leqslant n\cdot h$。凡在某点有（右）导数的函数，必落入某个 E_n；所以处处不可导的函数全体，包含 $C[0,1]$ 减去所有 E_n 之并。每个 E_n 是闭集，且无处稠密——任何连续函数都可以被分段线性的、斜率远大于 n 的锯齿函数一致逼近，而锯齿函数离开 E_n 一个固定的距离。可数个无处稠密的闭集之并是第一纲集，其补集是剩余集。整个论证用到的，是完备度量空间、可数并、逼近三件工具，没有构造任何一个具体的无处可导函数，这与魏尔斯特拉斯的做法恰成对照：那是一次一个的手工构造，这里是一次全体的计数。

第二次是维纳测度。1923 年维纳给出了布朗运动路径空间上的概率测度（今天称为维纳测度）的严格构造；布朗运动的物理描述可追溯到爱因斯坦 1905 年的理论与佩兰的实验，数学形态上则在更早的 1900 年已由巴舍利耶在金融模型里使用。1933 年，佩利、维纳与齐格蒙德证明：在维纳测度下，几乎每一条路径都是连续

的，并且几乎处处不可导。这里的“典型”，用的是概率测度这把尺：布朗运动的路径，几乎必然地，正是魏尔斯特拉斯式的曲线。

第三次是分形。曼德尔布罗特在1975年造出“分形”一词，1975年出版法文专著《分形对象》，1977年与1982年相继出版英文的专著，把科赫曲线、皮亚诺曲线、魏尔斯特拉斯函数的图像等一类对象合并为一个类型，赋予它们以豪斯多夫维数这把尺。魏尔斯特拉斯函数的图像，在函数取 $\Sigma\ a^n\ \cos(b^n\pi x)$、$0<a<1$、$b>1$、$ab>1$ 的情形下，其盒维数是 $2+\log a/\log b$（豪斯多夫维数是否与之相等，在 b 为整数时已由后来的工作证得，此处不用），介于1与2之间的非整数值。它的维数，是一个可以计算出来的、对谁都一样的数。

三次换尺，一个共同的结果：曾经的怪物变成了典型。那么，应当怎样理解这三次转换？

直接的读法是说，数学终于接纳了它们。这个读法有它的真实性：病态函数从“例外”栏迁到了“研究对象”栏，围绕它们生出了整套的理论：测度论、随机分析、分形几何。这些是新的特征，是有力的涌现。

本书的读法需要补上另一句。每一次换尺，换上的仍是一把对谁都一样的尺。贝尔纲的定义，在 $C[0,1]$ 上对谁都一样；维纳测度对每一个使用它的概率学家一样；豪斯多夫维数的公式对每一位几何学家一样。尺换了，“谁用都一样”没有换。不仅如此，不同的尺之间常常给出相反的判决，而这些判决并无回写历史去裁决：实数轴 $\mathbb{R}$ 可以分解为一个第一纲集与一个勒贝格零测集的并，换句话说，在 $\mathbb{R}$ 里，有一个集合按贝尔纲量是“小”的而按测度量是“全部”，另一个集合则恰好相反。哪个是“典型”，取决于选哪把尺；选哪把尺，则由定义事先给出——读者问“典型”时，需要先说明“按什么尺”。

这就是本书第二个定义所说的“多元化的统一性”在分析中的雏形：几把尺并排，每把内部统一，系统之间没有亲缘，选哪把由约定。第三编将从强度阶梯、多宇宙、宽容原则处，把这一线索作为主题展开。此处只需记下，病态清单的转化，是统一性内部的换尺，并非统一性之外的一次谱系化。

测度这把尺还带来一个新的语汇，“几乎处处”。说一个性质几乎处处成立，是指不成立的点构成一个零测集。这个语汇本身是对例外的一种新的处理方式：不再要求一个定理处处成立，只要求例外集小到测度为零。勒贝格积分里，改变一个零测集上的函数值，积分不变；于是狄利克雷函数的积分为零，它在黎曼意义下的不可积，在勒贝格意义下消失。例外的位置没有被取消，被换算成了一个可以度量的量。

这一处理使分析获得了很大的灵活性，同时也显示了统一性标准化的一个特点：例外可以被容纳，前提是例外能够被同一把尺度量。零测集是一个由尺事先给定的类别，什么算“小”，由测度的定义规定，不由例外自己的来历规定。某个零测集可能是一个构造精巧的康托尔集，也可能只是几个孤立点，两者在测度这把尺下无从区分，尽管它们在动力系统、数论、调和分析中各有各的位置与历史。尺把差异折叠成了一个数。

◆ 6.7　三律读数与张力复发

对这一段历史读三律，结果与第 5 章有同样的结构，而细节不同。

特征律。分析严格化的时期，碰撞是大量的：直观与定义的碰撞，逐点与一致的碰撞，几何图像与量词语言的碰撞。魏尔斯特拉斯函数本身就是一个碰撞点，它把“连续”与“可导”两个原本捆绑的概念撞开。问题在于，这次碰撞的产物如何被登记。在标准的要求下，定义须无歧义，因此碰撞的结果只能是两种之一：修改定义，使怪物落在类外；或者保留定义，把怪物登记为反例。两者都是消除碰撞的做法。碰撞产生的新特征，如连续函数空间的完备性、可导性与连续性的分离、测度的概念，之所以最终凝成，靠的是后来的换尺：新的尺子接纳了原先被排除的东西。涌现发生在换尺的时刻，而不是在碰撞的当下。

自由律。纠缠的部位在这里是分析与几何直观的联系，曲线与切线、积分与面积、连续与光滑之间原本是纠缠在一起的。严格化的逻辑，是把这些纠缠拆成独立的条件，然后逐项提供：连续是一个条件，可导是另一个，一致是第三个。拆开之后，每个概念可以单独研究，这是巨大的进步；同时，原有的纠缠路径关闭了，曲线与切线的联系，成为需要重新证明的定理。自由律所需要的，是在约束中裁出原本不存在的新路；而这一时期被允许的新路，限定在严格化的框架之内：在条件表中增补条件，在反例之间画边界。魏尔斯特拉斯函数、高木函数一类，是在这个框架里裁出的路，它们的价值也在于此。但这些路是在同一把尺上延伸的，没有一条通向另一把尺的亲缘。

幸福律。张力在这里有很清楚的来源：直观与定义的落差、定理与反例的落差。释放有两种形式。第一种是 ε–δ 式的释放：把含混的说法换成精确的陈述，落差消除，张力回落。第二种是 6.6 节所述的换尺式释放：把反例迁成典型，被排斥者得到位置。两种释放都生产了新的东西，后一种尤其丰富。但就标准的运行方式而言，释放的主要形式仍是“消除差异”：病态或被排除，或被迁移，没有哪一次是让它以自己的回写历史与既有的东西建立亲缘。

三项合起来，读数如下。

意义律	这段历史里的运行	被压住的部位	出口
特征律	碰撞产物被登记为反例或被定义排除	新特征当时不凝成	换尺（贝尔纲、维纳测度、分形）
自由律	直观纠缠被拆成独立条件	曲线—切线—面积的联系路径关闭	在同一把尺上增补条件、画边界
幸福律	释放主要是精确化与迁移	反例无处着陆，直至换尺	换尺后的新理论（测度论、随机分析、分形几何）

这张表与第 5 章的读数表平行，平行之处正是本章要点出的：这是统一性标准化在不同领域的同一种运行。几何那里，出口在标准之外（物理）；分析这里，出口在换尺（测度）。差别在于，分析的出口仍然在数学内部，它没有走出统一性。

还有一个值得单列的细节，关于清单上对象的身份转变所需要的东西。从魏尔斯特拉斯函数到“几乎每条布朗路径”，中间隔着的是一次定义域的更换：被考察的对象，由单个函数换成了函数的空间，再配上测度。这一更换需要一整套新的基础设施（测度论、概率空间、函数空间的拓扑），而基础设施一旦就位，原来的怪物无需任何改动，只因所处的尺度不同，就由例外变成典型。身份是尺赋予的，对象本身没有变。这一点对后面的论证很要紧：它表明在统一性之内，对象的位置取决于它所在的尺，而尺的选取在对象之外事先给定。

接着是张力复发律的实例。分析的材料给出了一条清楚的轨迹，可与 4.8 节的陈述逐项对照。柯西的《分析教程》（1821）是第一次大规模的严格化；阿贝尔的反例在五年内到来。魏尔斯特拉斯式的 ε–δ 与一致收敛在 1860 年代成形；1870 至 1910 年间病态函数的清单迅速增长，表中所列七类对象，除狄利克雷函数（1829）外，都落在这个时期。黎曼积分框架在这些对象的压力下出现缝隙，勒贝格 1902 年的积分是下一次模式转换，它重新定义了“可积”。勒贝格积分建立之后，又出现了新一批例外：不可测集（维塔利 1905 年构造，用选择公理），巴拿赫—塔斯基悖论（1924），它们成为新的清单。每一轮里，同样的节律：标准完成，清单增长，换尺，再完成，再增长。

这条轨迹需要两点说明。其一，它是一个历史的整理，不是一次统计检验；文献量归一的计数与编码，要等到第 18 章的判决预测三才能做出。其二，复发并不是标准的过失，也不是某位数学家的疏漏，是标准的统一性在运行中产生的读数（它

是否成立，由预测三检验）：只要标准要求对谁都一样，凡在尺外的差异，就必须被某个词指称；这个词的后面，清单就开始增长。

◆ 6.8　这一章留下的东西

回头看第二编开头的两章，一条共同的轮廓浮现出来。

几何和分析，是现代数学统一性标准化的两个完成形态，分别以公理组与 ε–δ 语言的方式落成。两者都带来了大量的、不可否认的收益：可检查，可搬运，可教学，可由机器核验。这些收益是文明得以组织的一部分，本书对此毫无保留。

两者都生产了例外清单。几何的清单上有非欧几何、非阿基米德几何、非德萨格平面；分析的清单上有处处连续而处处不可导的函数、填满正方形的曲线、不可测集。清单上的对象在后来的历史里都得到了重新安置，有的被译入变体，有的被换尺为典型。每一次重新安置，都是在统一性之内进行的：翻译用的是对谁都一样的翻译，新尺用的是对谁都一样的尺。

魏尔斯特拉斯函数在数学上就是它所是，本章关心的是它被怎样接纳；接纳的方式决定了它在数学共同体里享有什么样的位置，以及这个位置怎样与其他对象相连。同一个函数，在几何式的翻译下是一个变体，在换尺之下是一个典型，在谱系的写法下则是一个带着各路使用历史的节点；三种位置对应三种标准化，而函数本身没有变。

在结束这一章之前，需要把它与第 5 章合起来看一个共同的现象：两章里的反例都是由标准自己生产的。萨凯里的锐角假设后果、阿贝尔的正弦级数和，都不是从标准之外闯进来的异物，而是沿着标准允许的路径一步步走出来的。统一性标准化把差异压到标准之外去登记，但差异的来源恰好在标准之内。标准越严密，它所能构造的对象越丰富，其中偏离直观的那部分也越多。这是一个机制，不是一个偶然。

同一性谱系标准化提出的是另一种接纳方式。设想一个与贝尔纲、维纳测度并列的追问：魏尔斯特拉斯函数在不同的实践谱系里，各自占据怎样的位置，它与手边其他对象的亲疏，是否由它在这些实践里被反复调用、反复改写的历史给出，而不是由“按哪把尺”事先给出。物理学者看它是布朗路径的素描，调和分析者看它是傅里叶级数的一种极端，动力系统学者看它是吸引子的图像。这些位置各有各的回写，各有各的稳定程度。目前的数学不记录这些，也没有这样的标准化语言去记录。第四编将给出一种语言，伞模型，用来写下这种亲疏；第 15 章的 SDE 数（记作 N），则是度量离“相容”有多远的一种尝试。

下一章转到集合论与基础。哥德尔 1931 与科恩 1963 在那里将提出两种“独立”：与算法不可判定相关的独立，与特定公理系统相关的独立。那是单一基础的顶点处，统一性遇到自己的边界的地方。

◆ 本章结论

1. 阿贝尔 1826 年的反例与一致收敛的确立，是分析统一性标准化的起点；ε–δ 语言把极限压缩为对谁都一样、可脱离发生过程搬走的量词陈述。
2. 一致收敛保护连续性而不保护可导性；魏尔斯特拉斯函数既是一致收敛的胜利，也是这一边界的最强展示，1872 年宣读、1875 年刊出之后，它成为病态清单上的首批对象之一。
3. 迪尼定理需要单调、紧致、极限连续三个条件，缺一不可；每个条件都有自己的反例，这说明量词语言下的标准是一套带条件的承诺，而非一个笼统的“更严”。
4. 贝尔纲、维纳测度、分形先后把病态函数迁为典型，换的仍是一把对谁都一样的尺；尺与尺之间可以给出相反判决（$\mathbb{R}$ 分解为一个第一纲集与一个零测集），选哪把由定义事先给出。
5. 三律读数显示，出口都在换尺之后；张力复发律在分析中的轨迹为：严格化、反例集成、换尺（勒贝格积分）、新的例外（不可测集与悖论）。

◆ 本章参考

— 原始文献

- Cauchy, A.-L., Cours d'analyse de l'École royale polytechnique, 1821.
- Abel, N. H., 1826 年致霍尔姆博埃的信，及关于二项级数的论文（Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1826）。
- Stokes, G. G., “On the critical values of the sums of periodic series”, Transactions of the Cambridge Philosophical Society 8（1847 年宣读，1849 年刊出）.
- Seidel, P. L., “Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen”, Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften 5, 1847.

- Cauchy, A.-L., Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues…, 1853.
- Weierstrass, K., 1872 年柏林科学院宣读之文；du Bois-Reymond, P., 发表于 J. reine angew. Math. 79, 1875.
- Dedekind, R., Stetigkeit und irrationale Zahlen, 1872；Cantor, G., 关于三角级数的论文，1872.
- Baire, R., Sur les fonctions de variables réelles, 1899.
- Lebesgue, H., Intégrale, longueur, aire, 1902.
- Wiener, N., Differential space, 1923.
- Banach, S., Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen, Studia Math. 3, 1931；Mazurkiewicz, S., 同卷同题材之文，1931.
- Paley, R., Wiener, N., and Zygmund, A., Notes on random functions, 1933.
- Hardy, G. H., Weierstrass's non-differentiable function, Trans. AMS 17, 1916.

— 研究文献

- Lakatos, I., Proofs and Refutations, 1976.
- Mandelbrot, B., The Fractal Geometry of Nature, 1982.
- Falconer, K., Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications.
- Oxtoby, J. C., Measure and Category, 1971（$\mathbb{R}$ 分解为贫集与零测集之并）.
- Katz, K. U., and Katz, M. G., “Cauchy's continuum”, Perspectives on Science 19(4), 2011.
- Hunter, J. K., An Introduction to Real Analysis, 第 5 章（序列与函数项级数）.

— 站内著作

- 第 53 号《SDE数学导论》（相容性公理；伞模型统一的是构造，不是配置）。
- 第 344 号《意义数学的诞生》（三律在相容退化下的形态；规范力）。

07

第 7 章

单一基础与“独立”

本章提要 1902 年罗素的一封信让弗雷格的集合论在付印前失去根基；1908 年策梅洛以分离公理重建了范围，后来的 ZFC 成了几乎所有数学的隐形背景。哥德尔 1931 年证明形式体系自身有说不尽的句子，1938 年的可构造宇宙与 1963 年科恩的力迫法，又把连续统假设放到了 ZFC 的两侧。本章分清“独立于 ZFC”与“算法不可判定”，说明单一基础如何把独立命题登记为缺口，并读出三律在这里的读数：基础一经固定，混沌碰撞与纠缠便从日常数学里退出。

◆ 7.1 一封信与一条边界

1902 年 6 月，罗素从英国写信给耶拿的弗雷格。弗雷格的《算术的基本规律》第二卷已在排印，全书从一条后来被称为“基本规律 V”的原则出发：每个概念都有一个外延，两个概念外延相同当且仅当它们对同样的对象成立。罗素在信里指出，取概念“不属于自身的集合”，这条原则便给出一个集合 $R=\{x : x\in x\}$。问 R 是否属于自身：若 $R\in R$，按定义 $R\notin R$；若 $R\notin R$，按定义 $R\in R$。弗雷格回信说，这一发现使他惊愕，动摇了他打算用来建造算术的基础；他在 1903 年出版的第二卷末尾附上一篇附录，开头便说，一位科学著作者最不幸的事，莫过于在工作完成之后，发现自己大厦的一块基石动摇了，他正是因罗素先生的一封信陷入这样的处境。附录给出的修补方案此后被证明仍然导致矛盾，没有被接受。

这个场景值得放在本章开头，因为它显示了统一性标准如何第一次碰到自己的边界。基本规律 V 是一条极其顺手的对象形成原则：给出任何明确的性质，就有一个集合收齐所有具有该性质的对象。它对谁都一样，不要求先给定范围，也不要求使用者懂得任何来历。正因为它“对谁都一样”，罗素那一行三个符号的反例就对谁都致命。

1908 年，策梅洛发表《集合论基础研究 I》，给出的回应是改变存在的许可条件。他的公理 III（分离公理）规定：对一个已经给定的集合 M 与一个确定的性质 φ，可以从 M 中分出满足 φ 的元素组成子集。把罗素的构造限制在 M 之内，得到

R_M＝{x∈M ： x∉x}。此时同样的反对角论证给出一个定理：R_M 不属于 M。证明只有三行。若 R_M∈R_M，则由定义 R_M∉R_M，矛盾，故 R_M∉R_M；假如 R_M∈M，那么 R_M 是 M 的元素且不属于自身，按定义应属于 R_M，与刚得到的结论矛盾，故 R_M∉M。

于是，对任何集合 M，都有 M 的一个子集不是 M 的元素，包含一切集合的全集 U 不存在：R_U 若是集合，按 U 的定义应属于 U，又被刚才的定理排除。同一个反对角形式，在无范围的理解原则下产生矛盾，在分离原则下产生一条边界。这里值得注意的是，论证没有用到基础公理，也没有用到选择公理，用到的只是分离与通常的经典逻辑。

分离只能筛选，范围从哪里来，要靠其余原则逐项供给：配对给出{a,b}，并集收集元素的元素，幂集收集全部子集，无限公理给出自然数的集合。有序对可以编码为{{a},{a,b}}，笛卡尔积 A×B 是 P(P(A∪B)) 的一个由分离取出的子集，函数是 A×B 的某些子集。一个对象之所以存在，是因为相应的构造在公理下可以走完，而不是因为这个词足够熟悉。此后，弗伦克尔与斯科伦在 1920 年代初分别提出替换模式，并把“确定的性质”改写为一阶公式；冯·诺依曼 1925 年引入基础公理，策梅洛 1930 年将其纳入体系。1904 年策梅洛为证明良序定理而明确引入的选择公理，加在这个体系上，便是通常所说的 ZFC。

同一时期的另一条回应是罗素与怀特海在 1910 年至 1913 年的《数学原理》里发展的分支类型论，奎因 1937 年的“新基础”NF 又是一种；它们改变的位置不同，这里不细讲，要记住的是 1908 年的这条路线后来在数学界占了上风，并不是因为别的路线出了错，而是它的使用成本较低，数学家的日常构造多数可以在其中完成，这一点在第 9 章与第 10 章还会碰到。

现代的 ZF 因此是不同年代的零件合成的体系，1908 年的原文本与今天教科书中的一阶公理表并不相同。把后来的替换模式与基础公理写回策梅洛 1908 年的论文，会混淆两个历史对象。这一点后文会反复用到：“标准”作为历史产物，在今天的教材里却显得像是一开始就如此。

◆ 7.2　ZFC 如何成为看不见的背景

一个基础要成为基础，最后要变得没人提起。今天一位分析学者证明一个关于函数空间的定理，不会在文中声明自己使用的是 ZFC；一位代数学者构造商群，也不需要在每一页重述有序对的编码。“一切数学对象都是集合”被默认为一种工作约定：自然数是冯·诺依曼序数，整数与有理数是等价类，实数是有理数的戴德金分

割或柯西序列的等价类，函数是有序对的集合。布尔巴基《数学原本》第一卷《集合论》把这种约定写成全书的底盘（下一章详述）。

这种背景的功能，在对比 HF 的小模型时看得清楚。取全体遗传有限集合所成的结构 HF：一个集合、它的元素、元素的元素……每一层都有限，并且只有有限层。HF 对配对、并集、幂集封闭，对分离与替换也封闭：有限集合的任何子集仍是遗传有限的，有限多个遗传有限的输出收成的集合依旧遗传有限。核验到这里，它像是 ZF 的一个模型。但 HF 里没有任何集合包含空集并对后继永远封闭，无限公理在这里失败。一个结构满足大部分公理，并不使它成为整个体系的模型；公理表的每一条都是入场券，缺一条，背景就变成另一个背景。

ZFC 作为背景有三个性质，合起来正是本书导论所说的“谁用都一样”。其一，可搬走：任何一份写在 ZFC 里的证明，换一位读者、换一个国家、换一台机器，检验的结果相同。形式化的证明辅助系统（如 Mizar 与 Metamath 等）把这一点推到极致：证明被写成可由程序逐步核对的序列。Mizar 的背景理论是塔斯基—格罗滕迪克集合论，即 ZF 加上宇宙存在公理的一个变体；Metamath 的主库 set.mm 建立在 ZFC 之上。两者的细节有别，背景却都是单数的：一套集合论，一个域。其二，可审计：每一步都可追溯到公理或前面的步骤，这对应第 53 号《SDE 数学导论》第 1 章六个约束里的“可审计性”。其三，单一：全部数学对象在同一个域里栖身，不同分支之间的对象可以互相取用，数论的对象与拓扑的对象同在一个宇宙。

第三个性质还有一个当代的变体：形式证明一旦写成语法上可核对的序列，生成它的是人还是程序，对核对没有影响。机器可以搜索候选证明，另一台机器可以验证它，来历与过程在验证的那一刻不再被需要。这正是导论所说统一性的要害：成品可以脱离发生过程被搬走。

这三个性质让数学内部的协作成为可能。一位在集合论里造出的反例，另一位在分析里可以直接引用；一个定理的全部前提，可以被陌生人逐条核对。这是统一性标准化的实绩，本书在第 2 章已经把它记在标准化的文明功能之下。接下来要看的，是这种背景付出的代价，它首先在哥德尔那里露出。

◆ 7.3　1931：形式体系说不尽自己

1931 年，哥德尔发表《论〈数学原理〉及有关系统的形式不可判定命题 I》。这篇论文的背景是希尔伯特方案：把数学形式化为公理体系，再用有穷的方法证明体系一致，并期望体系对其语言中的每个句子都能证明其自身或否定。希尔伯特 1930

年 9 月在柯尼斯堡的演讲《自然认识与逻辑》的结尾，驳斥了“不可知”的论调，说出那句后来刻在他墓碑上的话：“我们必须知道，我们必将知道”。哥德尔的结果于一年后把这一期望砍去了一半。

现代的标准表述如下。设 T 是一个一致的、可有效公理化的形式理论，并且足以解释初等算术（例如包含罗宾逊算术 Q）。第一不完备性定理：存在 T 的语言中的一个算术句子 G_T，T 证明不了它；在 T 一致的假设下，哥德尔的原始论证还需要 ω-一致性来排除 T 证明 G_T 的否定，罗瑟 1936 年发表的论文用一个改造过的句子，将这个假设减弱为一致性。第二不完备性定理：若 T 一致，则 T 证明不了表达 T 自身一致性的算术句子 Con(T)。

证明的核心是算术化与对角引理。每个公式与每个证明都被赋予一个自然数编码，“x 是 T 中某个公式的证明”成为一个算术谓词；对角引理保证，对任何一个带一个自由变元的公式 ψ(x)，有一个句子 G，使得 T 证明 G 与 ψ(⌜G⌝) 等价。取 ψ(x) 为“x 在 T 中不可证”，G 就说出了自己的不可证。若 T 证明 G，则 T 也证明了“G 可证”，而 G 说的正是它不可证，T 因此不一致；若 T 一致，则 G 不可证，而这恰是 G 所说的，所以 G 在标准自然数模型中为真。这里的对角形式与康托尔的对角线、罗素的悖论同族。本章 7.1 节的 R_M 论证已经展示了这个家族的一个成员：同一个形式，放在无范围理解的位置上产出矛盾，放在分离的位置上产出边界，放在算术化的位置上产出不可证的真句子。

需要说明的是，哥德尔句子最初显得人为构造：它是为了说出自身不可证而特意编出来的。很长一段时间里，没有人能指着一个“数学家自己会问”的问题说它是独立的。这一局面在 1960 年代的 CH 与 1970 年代的帕里斯—哈灵顿等结果之后改变，独立性从逻辑学家的构造品，变成了数学问题族里的普通成员。

两个定理都是关于理论类的定理，不专指集合论。ZFC 满足条件，所以若 ZFC 一致，则 ZFC 有独立的算术句子，也证明不了 Con(ZFC)。后者的一个直接后果值得记下：相对一致性定理（下一节的 Con(ZF)→Con(ZFC＋GCH) 一类）是在比被考察理论弱得多的背景里证出的蕴含式，它们不给出任何绝对一致性的保证，只把一个理论的一致性问题搬到另一个理论上去。根岑 1936 年用超穷归纳到 ε_0 证明皮亚诺算术一致，正是在这条路上换了一个更强的背景〔此事在第 9 章展开〕。

哥德尔的结果对基础的冲击，在于它把“某个句子在这个体系里没有答案”变成了一个可以严格证明的事实。统一性标准下读它，只有一种读法：基础有缺口，需要填。图灵 1939 年的序数逻辑，是这种读法的早期技术版本：在体系 T 上依次添加 Con(T)，得到 T_1，再添加 Con(T_1)……沿着序数一路向上。每次添加都把旧体系

的不可证句子变成新体系的定理，同时制造出新体系自己的不可证句子。基础没有崩塌，缺口也没有消失，它被推到下一个体系的边上。

◆ 7.4 连续统假设：两个方向上的模型

康托尔 1878 年提出连续统假设（CH）：实数集合的基数是第一个不可数基数，即 $2^{\aleph_0}=\aleph_1$，也就是自然数集与实数集之间没有严格居中的基数。1900 年希尔伯特把它列为 23 个问题的第一个。哥德尔 1938 年的宣告与 1940 年的专著，以及科恩 1963 年到 1964 年的两篇论文，合起来给出了一个完整的回答，回答的形式是两个相对一致性结果，一个向“窄”处走，一个向“宽”处走。

向窄处走：可构造宇宙。 哥德尔定义可构造层级：$L_0=\varnothing$；$L_{\alpha+1}$ 是 L_α 中全体可由一阶公式（带参数）定义的子集所成的集合；极限阶段取并。L 是所有 L_α 的并。他证明了三件事：L 是 ZF 的一个内模型；在 L 中选择公理成立；在 L 中广义连续统假设（GCH，对每个无限基数 κ 有 $2^\kappa=\kappa^+$）成立。因此，若 ZF 一致，则 ZF＋V＝L 一致，从而 ZFC＋GCH 一致。写成压缩形式：Con(ZF)→Con(ZFC＋GCH)。GCH 蕴含 CH，所以这个结果同时说明 ZFC 驳不倒 CH。L 是最瘦的宇宙：只收可以被逐层定义出来的集合，每一层的幂集都是“定义得出的那部分”。

向宽处走：力迫法。 科恩的方法从一个 ZFC 的模型 M 与 M 中的一个偏序集 P 出发，向 M 里添入一个“通用”的滤子 G，得到一个更大的模型 M[G]；M[G] 里成立什么，由 M 与 P 的性质通过“力迫关系”确定。取 P 为有限部分函数的偏序集，其定义域是 $\aleph_2\times\omega$，值域是{0,1}，添入的 G 给出 $\aleph_2$ 个互不相同的新实数。此 P 满足可数链条件，不会压缩基数，因此在 M 满足 GCH 时，M[G] 中 $2^{\aleph_0}=\aleph_2$，CH 在其中为假。写成压缩形式：Con(ZFC)→Con(ZFC＋¬CH)。科恩另用对称模型的变体证明了 Con(ZF)→Con(ZF＋¬AC)。两个方向的结果合起来，若 ZFC 一致，则 ZFC 既证不了 CH（科恩），也证不了 ¬CH（哥德尔）。

两个结果的精确含义须守住前提。其一，每个蕴含式都带着背景，Con 不能从式中删掉。这里有一个细节：哥德尔的结果以 ZF 的一致性为前提而得到 ZFC＋GCH 的一致性，选择公理由 L 一并给出；科恩的结果以 ZFC 的一致性为前提。由于 L 同时说明 ZF 与 ZFC 等一致，两个前提在强度上相同，所以 ZF 与 ZFC 在一致性的问题上不分彼此，但这个等价是一个定理，需要证明，不可以事先默认。其二，上述叙述里“取一个可数传递模型”是教科书里最方便的讲法，但 Con(ZFC) 并不直接给出可数传递模型，严格的相对一致性证明要借助有限片段、反射原理或布尔值模型的语法版本来完成，叙述路线与最终定理的前提需要分开记。其三，独立性的

推理形式很简单：若 T＋¬φ 有模型，则 T 证明不了 φ（由可靠性）；若 T＋φ 有模型，则 T 证明不了 ¬φ。因此“CH 独立于 ZFC”是一个关于证明能力的元数学陈述，它不蕴含 ZFC 矛盾，也不蕴含 CH 没有意义。后一点常被忽略：独立性证明弄清了 CH 与其他命题的蕴含关系，指出它在哪些扩展里成立、在哪些扩展里失败，这些都是明确的数学知识，只是它们的陈述位置在 ZFC 之外，不在 ZFC 之内。

两个模型相对而立，像是把 CH 夹在中间：一侧是只收可定义集合的最瘦宇宙，其中 CH 与 GCH 都成立；另一侧是添入新实数的加宽宇宙，其中 CH 为假。二者都是 ZFC 的模型，二者对“实数有多少”的回答不同。“全体子集”这个说法，在两个宇宙里被兑现为两种不同的东西，而幂集公理只承诺有这样一个集合，没有说明它的大小。

此后，独立性成了集合论的常规产出。苏斯林假设（1971 年前后，Solovay–Tennenbaum 与 Jensen 等）、马丁公理与 ¬CH 的相容性、怀特海群问题（Shelah 1974）都是同一类结果。这些结果表明，ZFC 不能裁决的问题不是一两个怪例。更要紧的是，拓宽公理库也很难用同一个办法收口：莱维与索洛维 1967 年证明，通常的大基数公理（如可测基数）不能决定 CH。

这里还要补一笔，免得“单一基础”被读成静止的基础。ZFC 这个背景自己在增长，而增长的方式仍然是单数的。范畴论需要把“全体群的范畴”这类对象当作整体来谈，格罗滕迪克引入宇宙（对幂集、并集等运算封闭的一类集合，其中不可数的宇宙，其存在等价于强不可达基数的存在）来容纳它们；塔斯基—格罗滕迪克集合论就是在 ZFC 上加上这个存在公理的体系。怀尔斯关于费马大定理的证明，在引用的文献里显式用到了格罗滕迪克宇宙，表面上落在 ZFC 之上；数论学家一向相信宇宙可以消去，麦克拉蒂 2010 年与 2020 年的论文则具体表明，所需的大结构可以奠基在强度相当于有限阶算术的弱得多的理论里。这场讨论的结局是：强假设在那里是写法上的方便，而不是证明的需要。背景自身的行为，却照旧是为了方便而向上加公理，而且每次加公理，都要问加上去的东西相对于旧背景的强度：这条路在第 9 章会走到强度阶梯，那里的位置同样由定义事先给出，不由使用的历史给出。

◆ 7.5 “独立”与“不可判定”是两种东西

“不可判定”这个词在数学文献里同时承担了几种意思，混用它们是读哥德尔与科恩时最常见的偏差。哥德尔 1931 年的论文题目里用的 unentscheidbar，说的是某个句子在某个形式体系里既不可证也不可驳；图灵与丘奇 1936 年之后，“不可

判定”又指一类问题没有一个算法能对所有输入给出答案。两件事同名，数学内容差别很大。

概念	被谈论的对象	问法	典型的证明方式	例
独立于 T	单个句子 φ 与理论 T	T 能否证明 φ，能否证明 ¬φ	构造 T＋φ 与 T＋¬φ 的模型（或相对一致性证明）	CH 之于 ZFC；怀特海问题之于 ZFC；Con(ZFC) 之于 ZFC
算法不可判定	一族无穷多的输入（一个集合或一个判定问题）	是否存在一个算法对每个输入都给出对或错	把停机问题归约到它	停机问题；希尔伯特第十问题（马季亚谢维奇 1970，经戴维斯、普特南、罗宾逊的工作）；有限表示群的字问题（诺维科夫 1955，布恩 1958）
共同体暂未决	一个猜想	目前有无人给出证明	无，属于研究状态的描述	许多开放问题

三者之间有明确的数学关系，也有明确的界线。

其一，单个句子谈不上“算法不可判定”。一个具体的句子 φ 是一个输入，任何固定的答案“是”或“否”都是一个平凡的算法，我们只是不知道该用哪一个。问“CH 是否算法不可判定”没有数学内容。算法不可判定是关于无穷族的性质，独立性是关于单个句子相对于某个理论的性质。

其二，算法不可判定的问题族，会在每个足够好的理论里制造独立的实例。设 T 是可有效公理化且对 Σ_1 句子可靠的理论。若 T 对每个形如“图灵机 M 不停机”的真句子都能证明，那么通过枚举 T 的证明就可以判定停机问题，与图灵定理矛盾。所以总有某个确实不停机的 M，T 证明不了它不停机。这是不可判定性推出独立性的方向：问题族的不可判定，保证了每个固定理论在这个族里有盲区。反方向不成立：某个句子对 T 独立，并不告诉我们有任何不可判定的问题族。

一个具体的例子能把两层的联系看清。对可有效公理化的一致理论 T，设 M_T 是一台逐个枚举 T 的证明、遇到“0＝1”的证明就停机的图灵机。M_T 停机当且仅当 T 不一致。因此“M_T 永不停机”恰是 Con(T) 的一个算术编码。第二不完备性定理说，T 一致时证明不了这个句子。这台机器在现实中永不停机，句子为真，却是独立于 T 的：停机问题的不可判定与哥德尔的独立性在这里是同一件事的两个侧面，而一般情形里两者仍需分开讲。

其三，独立性随理论的选择而移动。Con(ZFC) 独立于 ZFC，但在 ZFC 加上一个不可达基数之后可证；投射集的决定性在 ZFC 里不可证，但在 ZFC 加上无穷多个伍丁基数之后可证（马丁与斯蒂尔，1989 年）。帕里斯与哈灵顿 1977 年给出一个关于有限组合的真句子，在皮亚诺算术里独立，在 ZFC 里可证。独立不是句子身上带着的标签，它登记的是“在哪个基础上”。

其四，ZFC 的定理集本身是一个算法上不可判定的集合（丘奇 1936，一阶逻辑的判定问题）。这是不可判定性的另一个出处，也是单一基础的另一个特征：基础的内容可以被机械枚举，却不可以被机械判定。这与它对任一固定句子的独立性是两层不同的事。

常见的误读因此可以逐条列出：把独立读成“ZFC 矛盾”；把独立读成“CH 没有真值”；把算法不可判定读成“某个具体句子不可知”；把“暂未解决”读成“已证独立”；把一次独立性证明读成“大家被迫选一个新公理”。这些读法每一条都删掉了定理的一部分。

◆ 7.6　在统一性之下，独立被登记为缺口

回到本书的主线。第 5 章已经说过，希尔伯特 1899 年的《几何基础》一边给出一套完备的公理，一边用模型证明这套公理里每一条的独立性：平行公理独立于其余公理，是因为有双曲几何的模型；这类证明是技术上的成功，每一个独立性结果，都配得到一个新模型，也就配得到一块新领地。独立在几何公理的层面上是丰收，因为那里允许多种模型同在。

到了集合论的基础层面，同一个形式换了一种登记方式。哥德尔—科恩的结果证明 CH 在 ZFC 里独立，如果 ZFC 是“唯一的基础”，那么 CH 在这个基础上就没有答案，被登记在“不可判定”名下。这个登记动作本身，已经带上了统一性的判断：基础应当对它语言中的句子给出答案，独立是应当修补的缺口。

数学家的日常做法，也记录着这种登记方式。许多论文的定理陈述里带着前缀，“假设 CH”“假设马丁公理”“在 V＝L 之下”。这是一份条件定理的账本：

每一条结论的使用范围被标在名下，换一个背景，结论是否还在，要重新核对。账本的存在说明独立命题实际制造了分叉，但分叉的处理仍在同一张图纸上完成：背景的名字写在定理前面，读者按名字取用，没有人需要知道为什么这个名字出现在这里。

在这个框架里，对独立命题有三种典型的处理路线，它们的分歧很大，共同点是都保留单一基础。

第一种是完成方案。哥德尔 1947 年在《什么是康托尔的连续统问题》里主张，CH 有一个确定的真值，现有公理不足以决定，应当寻找新的、在内在或外在意义上有说服力的公理去填补。后来的伍丁等人提出“终极 L”之类的方案，试图用一个更强的统一原则判定 CH。其中终极 L 猜想至今既未被证明也未被否证，这些方案仍是数学纲领，没有定论。

第二种是取消方案。形式主义与某些紧缩立场主张，CH 这样的句子没有超出形式体系的真值，独立性证明正说明问题只关乎选哪套形式规则。

第三种是搁置方案。多数工作中的数学家并不触碰 CH，只在需要时写下“假设 CH”或“假设马丁公理与 ¬CH”，把结论标为条件定理。

三种路线对“基础是一个”没有异议：第一种想把它填满，第二种想把它读薄，第三种想绕开它。独立命题在这三种路线里都被当作基础的缺口、例外或待办事项。这就是统一性下的登记方式，与第 6 章里“病态清单”、第 5 章里“例外”同属一个类型，只是现在例外出现在基础本身的边上。

用本书的三个定义检验。ZFC 内部的证明是“谁用都一样”的：换一位读者、一台机器，核对的结果相同。独立命题在这个框架里的地位，由“相对于 ZFC”这一事先给出的定义安排：CH 在 ZFC 中独立，在 ZFC＋V＝L 中为真，在 ZFC＋MA＋¬CH 中为假；这些位置由公理表给定，并不依赖任何一个具体社群的回写历史。因此这套登记属于统一性。

换一种读法，问题的形状会改变。设想同一条独立命题在不同的数学社群里有不同的境遇：在某个以实分析为主的社群里，CH 几乎不出现，在另一个以集合论为业的社群里，它是日常的研究对象，每个分支下的结论有各自的采用史与改写史。这样的读法让命题的位置由它被使用、被回写的经过给出，而不是由“相对于 ZFC”这一句定义给出。这是第四编以后的方向，这里只记下分歧点：统一性下的登记问“相对于哪个公理表”，同一性谱系下的登记问“在哪里被怎样用过”。前一种问法对谁都得到同一个答案，后一种问法的答案带着地点。当有人把 ZFC、ZFC＋大基数、ZFC＋力迫公理并排摆出，让它们各自成一本“菜谱”，登记就转为

多元化的统一性，那是第 10 章的内容；这里的问题是，只要基础以“一个”的身份出现，独立命题就永远处于缺口的位置。

◆ 7.7　语法的一，语义的多，与独立清单的生长

单一基础的“一”，其实只落在语法上。1915 年的勒文海姆与 1920 年的斯科伦证明，任何有无穷模型的一阶可数理论都有可数模型；应用到 ZFC，就是若 ZFC 一致，则它有一个可数模型。斯科伦 1922 年指出这个结果的奇特之处：在这个可数模型里，“存在不可数集合”这个句子为真，而模型从外面看只有可数多个元素。集合论的同一组公理，在不同的模型里对“多大”说出不同的话，没有哪个一阶公理表能把预期的那个模型唯一地钉住。哥德尔 1929 年的完备性定理又说，一致的一阶理论必有模型；放在 ZFC 上，意味着只要 ZFC 一致，它就有无数个彼此不同构的模型，CH 在其中有的真、有的假。

这一点对本书的分析很要紧。统一性标准在语法层面是单数：一张公理表，一套推理规则，一条推导的合法性对谁都一样。语义层面则早已是复数：同一张公理表容纳了许多宇宙。在统一性的框架里，这个复数被处理为“模型论的研究对象”，而不是“数学的另一种做法”；人们谈论的仍是同一个背景理论，它的模型被当作理论的性质来研究。算术里有同样的情形：皮亚诺算术有非标准模型，其中有比所有标准自然数都大的“数”，而标准模型作为唯一预期的解释，靠的是在元语言里对“有限”的默认理解。基础的单一，因此部分依赖着元层面一个不言明的约定。

一个具体的算术可以看出这种登记是怎样做的。在满足广义连续统假设的模型里，用科恩的力迫法添加 $\aleph_2$ 个科恩实数，得到的新模型仍满足 ZFC，其中连续统的大小是 $\aleph_2$，CH 在那里为假；而哥德尔的可构造宇宙 L 满足 CH。两个模型都是 ZFC 的合法居民，背景对 CH 的回答于是被登记为“两种都可以”，登记的方式是一个相对一致性定理，位置由背景事先留好。独立清单在这样的背景下持续生长。帕里斯与哈灵顿 1977 年的组合命题、柯比与帕里斯 1982 年证明的古德斯坦定理，说明独立句子不限于集合论的高处，它们在有限组合与算术的近处也有。弗里德曼自 20 世纪 80 至 90 年代起系统地构造了一批形式上初等、数学上自然的命题，其中布尔关系理论一路的命题，证明需要大基数假设，在 ZFC 里不可证（以相应大基数相容为前提）。独立清单在加长，这在文献里看得见。它是否构成本书第 18 章“判决预测三”所说的张力复发律，要看按文献量归一之后的比例是否持续上升；这个读数要由第 18 章给出的编码手册去取。本章能够指出的是清单的登记方式：在单一

基础之下，清单的每一次加长，都以“例外”的名义被登记，基础本身的相位不因清单的长度而改变；清单越长，基础越像一份附着越来越多备注的文本，而文本的主体仍然纹丝不动。

◆ 7.8　三律读数：基础固定之后，碰撞与纠缠退出日常

意义三律的运行有一个清楚的编年。1900 年到 1930 年代，数学基础处在一次大规模的混沌碰撞里：弗雷格的逻辑主义、罗素与怀特海的类型论、策梅洛的公理化、布劳威尔的直觉主义、希尔伯特的形式主义、外尔的谓词主义、斯科伦对一阶表述的批评，都在同一个场里互相冲撞。这是特征律的第一步：混沌碰撞。碰撞中沉淀下来的是 ZFC 与经典一阶逻辑的组合，它在 1930 年代以后被当作工作背景，这是第二步，自组织；第三步，涌现，是一个可以不再被提起的稳定体系。

基础一旦稳定，日常数学的运行就换了一种相位。三律在相容性公理下的退化形态（第 344 号《意义数学的诞生》，本书第 4.5 节已逐条读过）是：特征律退成固定点收敛，自由律退成唯一合法路径，幸福律退成误差最小化。把这三条读到 ZFC 上，几乎是逐字对应。

特征律：固定点收敛。　今天的研究者在 ZFC 里工作，不必再问“集合是什么”，这个问题在 1930 年代已经收敛到一个固定点。新定理加入已有的定理库，库的边界不动。碰撞在基础层面已经发生过一次，之后它被封存在历史课里。这并非说集合论里没有新特征凝成：力迫法、内模型理论、大基数理论是 20 世纪后半叶集合论里的涌现，它们的活力来自把基础当作研究对象的那个层次：原先充当背景的理论 T，在这里变成被研究的对象。但这些涌现的发生场只在集合论这一子领域，日常数学的使用者不需要经过它。基础是被保护起来的。独立性证明本身还是一个庞大的产业：每一个新的力迫构造，都产出一个新的“相对一致”结果，这些结果以论文的形式不断增加，同时继续保持“CH 独立”这个中心结论不动。产出越多，基础的缺口记录越长，而基础自身的相位没有变化。

自由律：唯一合法路径。　自由律衡量的是发生新路径的能力，不是选项的数目。在 ZFC 里，一个定理的证明是一条从公理到结论的合法序列，合法性由语法判定，换一个证明者不改变合法与否。可选的证明很多，数目可以无穷，但每一条都在同一张路径地图上，地图本身不增删。新路径只能是旧公理的新推论，纠缠被限制成“推导关系”这一种。第 53 号《SDE数学导论》里相容性公理的“合法中间态”约束，在这里是证明里每一步都必须是合法推理；桑托斯定理所示的“每步合

法而终点不可达”，可以作为独立性的类比来读：在一个固定的合法步集合里，存在目标句子不在可达范围内。这是读法，不是同一个定理。

幸福律：误差最小化。 张力积累、模式转换、释放，在单一基础下只剩一种释放：把问题化成定理，或者证明矛盾。统一性下数学家体验到的紧张与松弛，大致都落在这一种事上。独立命题是张力的另一类来源：它在基础内部积累了张力（句子没有答案），却没有基础内部的释放通道，于是被登记为“不可判定”，等候外部的新公理。哥德尔与科恩的结果自身又是一次高质量的释放，这是它们的科学价值所在；但释放发生的层次是元数学，是把基础当对象谈论，日常数学的一侧并没有因此多出新的出口。

日常数学的读数落在三个方向上。其一，定义不再歧义：每个概念在 ZFC 中有唯一的编码，碰撞所需要的“同一个词在不同人那里指不同东西”被抹去了。其二，对象相互独立地存在：自然数、群、拓扑空间各自在集合里有自己的位置，一个对象的构造不依赖另一个对象的来历，这就是第 4 章所说的解耦。其三，结论与来路脱钩：定理被引用时，引用者不再携带它的发现路径。这三条合起来，使一个人要进入数学，只需要接受固定的背景，而不必经过它的发生。

统一性的基础因此带来两件相反的事。它让协作成为可能，也让数学内部多数的碰撞与纠缠退出日常：一位使用者不需要懂历史，就能在一个固定背景里工作，这是标准化的功劳；同时，基础层面的差异只剩下“例外”这一种存在方式，这是亏缺的开始。本章的读数是：碰撞在 1930 年代发生，之后基础被固定；纠缠被压缩成推导关系；释放被压缩成证明。独立命题这个词，在这个读数里是一个病历，登记着单一基础本身的边界。病历的写法也有规矩：只写症状，不写病人的来历。CH 被记作“独立于 ZFC”，至于它曾在康托尔、希尔伯特、哥德尔、科恩手里经历过怎样的碰撞与回写，在登记的那一行里没有位置。标准运行得越顺，历史越是退到登记之外，使用者面对的是一张干净的表，表上没有任何人的名字。

还可以补一条旁证。哥德尔与科恩的两篇论文，在发表之后很快进入教科书，其方法被抽象成一套工具，今天的研究生可以不读原文就学会力迫。工具对谁都一样，使用它的人不需要经过当年的曲折。这正是标准化的力量，也是它的读数：一个当年的碰撞事件，被收成一条可以在课堂上传授的程序，碰撞本身退到了脚注里。

下一章转向统一之美的顶点，从抽象代数的结构名称开始写起。那里的问题与此处相同：一座建筑修得越完整，被它登记为例外的东西越显眼。布尔巴基把单一

基础推进成一座建筑，用三种母结构统摄数学全体；这座建筑规模宏大，可以逐层看它的三律怎样走到尽头。

◆ 本章结论

1. 罗素悖论使无限制理解失去许可，分离公理把同一个反对角形式变成边界定理 R_M∈M，ZF 与 ZFC 是不同年代的零件合成的体系。
2. ZFC 以可搬走、可审计、单一三种性质成为数学的隐形背景，这是统一性标准化的实绩。
3. 哥德尔 1931 年证明可有效公理化的一致算术理论有独立句子且证明不了自身一致性；独立性与不可判定是两层不同的东西，前者属单个句子相对于理论，后者属问题族。
4. Con(ZF)→Con(ZFC＋GCH)（哥德尔）与 Con(ZFC)→Con(ZFC＋¬CH)（科恩）合起来说明，若 ZFC 一致，则 CH 独立于 ZFC。
5. 在单一基础之下，独立命题被登记为缺口；完成、取消、搁置三种路线都保留“基础是一个”；混沌碰撞与纠缠在基础固定之后退出日常数学，三律在这里退成固定点收敛、唯一合法路径、误差最小化，本书把这一读数称为单一基础下的亏缺。

◆ 本章参考

— 原始文献

· Russell, B. 致弗雷格的信，1902 年 6 月；Frege, G. Grundgesetze der Arithmetik, Bd. II, 1903（附录）。

· Zermelo, E. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. Mathematische Annalen 65, 1908, 261–281。

· Zermelo, E. Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann. Mathematische Annalen 59, 1904。

· Gödel, K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik und Physik 38, 1931, 173–198。

· Gödel, K. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis. PNAS 24(12), 1938, 556–557；The Consistency of the Continuum Hypothesis, Princeton, 1940。
· Gödel, K. What is Cantor's continuum problem? American Mathematical Monthly 54, 1947。
· Cohen, P. J. The independence of the continuum hypothesis. PNAS 50(6), 1963, 1143–1148；II, PNAS 51(1), 1964, 105–110。
· Gentzen, G. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. Mathematische Annalen 112, 1936。
· Church, A. An unsolvable problem of elementary number theory. American Journal of Mathematics 58, 1936；Turing, A. On computable numbers. Proc. London Math. Soc. 42, 1936。

— 研究文献

· Maddy, P. Believing the axioms I. Journal of Symbolic Logic 53, 1988。
· Kunen, K. Set Theory: An Introduction to Independence Proofs, North-Holland, 1980。
· Jech, T. Set Theory, 3rd ed., Springer, 2003。
· Levy, A.; Solovay, R. Measurable cardinals and the continuum hypothesis. Israel Journal of Mathematics 5, 1967。
· Shelah, S. Infinite abelian groups, Whitehead problem and some constructions. Israel Journal of Mathematics 18, 1974。
· Paris, J.; Harrington, L. A mathematical incompleteness in Peano arithmetic. 收入 Barwise (ed.), Handbook of Mathematical Logic, 1977。

— 站内著作

· 第 53 号《SDE数学导论》第 1 章（相容性公理的六个约束、桑托斯定理）、第 13 章。
· 第 344 号《意义数学的诞生》（三律在相容退化下的读法）。

◆

08

第 8 章

结构之母：布尔巴基与统一之美的顶点

本章提要 1934 年底几位年轻数学家在巴黎的一次聚会，成了一部匿名的《数学原本》的起点。本章从抽象代数如何把具体计算换成结构的名称讲起，写到布尔巴基以代数、序、拓扑三种母结构统摄数学全体；用“多元化的统一性”的定义检验它，判定这套带着分类之形的体系仍是统一性，因为位置与亲疏由定义事先给出。随后写统一之美的力量与它留下的张力，并读出三律在顶点处的退化：固定点收敛、唯一合法路径、误差最小化。

◆ 8.1 咖啡馆里的一本教科书

1934 年 12 月 10 日中午，巴黎拉丁区卡普拉德咖啡馆（Café A. Capoulade）里，六位三十岁上下的法国数学家碰头：嘉当、舍瓦莱、德尔萨特、迪厄多内、德·波塞尔与韦伊。他们大多在外省的大学教分析，用的是古尔萨的《分析教程》。教学中遇到的麻烦很具体：同一个公式（例如斯托克斯公式）怎样陈述才算严格，不同课本说法不一，学生要靠拼凑才能理解。他们想合写一部新的分析教程，写成之后，所有教这门课的人都可以直接使用。

这个动机在后来的演变中放大了。教程要严格，就要先交代用到的集合、映射与代数运算；要交代这些，就要先规定怎样写一个定义；规定到最后，所要写的变成了整个数学的一部总教程。署名成了问题，于是他们用了一个不存在的人：尼古拉·布尔巴基。《数学原本》自 1939 年起陆续出版，第一卷是《集合论》，其后是代数、一般拓扑、实变函数、拓扑向量空间、积分，再往后是李群与李代数、交换代数、谱理论、微分流形。

这个场景在本章里有一个用处：它显示统一之美不是从抽象的哲学愿望里长出的，起点是一个很朴素的事，教科书里同一个定理不要再有五种说法。“谁来讲，都是这一种”，是它最初也是最后的要求。笔名本身更把这一点推到了字面：作者的位置是空的，文本由一个不存在的人签署，读者拿到的只是结构。

本章要回答三个问题。结构这个名称是怎样从具体计算里长出来的（8.2、8.3）？布尔巴基怎样用三种母结构把全体数学纳入一个框架，这个框架按本书的三个定义属于哪一类（8.4、8.5）？统一之美的力量与限度各在哪里，三律在这一顶点上读出什么（8.6、8.7）？

◆ 8.2　从四个元素到一个名称

先看一个小例子。四个元素可以组成两种不同的群。一种是模 4 整数的加法群 C_4，元素 0、1、2、3：元素 1 连续作用四次才回到单位元 0，元素 3 同样，元素 2 作用两次回到 0。另一种是 V，元素为模 2 数对 (a,b)，分量相加，每个非零元素作用两次就回到零。两个群各有四个元素，甚至可以用同样的四个字母标记，结构却不同：若有保持运算的双射 $f: C_4 \to V$，则 $f(2)=f(1)+f(1)=0=f(0)$，与单射矛盾。不需要列出所有双射逐个尝试，只要找到一个由同构保持、却在两边不同的性质，元素的阶就是这样一个性质。

这个例子里，“结构”是一个关系的集合：谁与谁复合得谁，谁的逆是谁。换了名称不改变它，换了运算表就改变。抽象代数的任务是规定用什么关系来识别差异，以及哪些性质可以跨越材料共同成立。

这种做法有长长的前史。伽罗瓦（1830 年代）研究方程根式可解性时，把根的置换当作对象，哪些量已知、允许怎样表达，决定了问题的结构；这是置换的计算，今天教科书式的群公理是后来的事。凯莱 1854 年发表了有限群的抽象定义的早期形式；戴德金 1871 年在狄利克雷《数论讲义》的补充里引入理想，以回避代数整数分解的唯一性失败；韦伯 1893 年给出群与域的现代式公理定义；施泰尼茨 1910 年对域做了系统的分类；埃米·诺特 1921 年的《环中的理想论》把升链条件作为核心工具；范·德·瓦尔登 1930 至 1931 年的《近世代数》根据阿廷与诺特的讲义，把这一套整理成一部教科书，此后的代数课本几乎都从这里取了章节顺序。

一本教科书在这条前史里占的位置值得单独说一句。《近世代数》把群、环、域、模依次排好，每个概念先给公理，再给定理，最后才举例。此后一代代学生是按这个顺序学会代数的：先学名称，再回头认识材料。名称因此从研究的结果变成了学习的入口，来历由此从前台退到了脚注。这一变化在本章稍后讲到布尔巴基时会放大。

理想的故事最能说明名称怎样从难题里长出来。在环 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 里，$6=2\times3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$，四个因子都不能再分，分解不唯一，算术的基本定理在这里失效。戴德金的办法是不再分解数，改分解数的集合：理想 $(2)=P^2$，$(3)=QQ'$，$(1+$

$\sqrt{-5})=PQ$，$(1-\sqrt{-5})=PQ'$，其中 $P=(2,\ 1+\sqrt{-5})$，$Q=(3,\ 1+\sqrt{-5})$，$Q'=(3,\ 1-\sqrt{-5})$。于是 $(6)=P^2QQ'$ 有唯一的理想分解，两种数的分解只是同一个理想分解的不同分组。分解的唯一性，在更高一层的对象上被救回来了。

这条前史有一个值得记下的特点：每一步都有具体问题的压力。理想是为了挽救分解的唯一性，升链条件是为了让有限生成可以操作，群的抽象定义是为了让置换、几何变换和整数加法不再各讲一遍。在这些问题里，差异一开始是碰撞：同一个词在不同领域指不同东西，同一个现象在不同领域被不同方式处理。抽象的收益是把这些差异收成了一个名称，之后遇到同类情形，只要报出名称。本章把这一过程读作结构名称的凝成。

◆ 8.3　名称带来资格：正规性、商与泛性质

名称的作用，不止于方便。名称同时是资格证书：拥有这个名称的对象，才可以用相应的统一定理。

群的定义要求运算封闭、结合、有单位元、每个元素有逆元。非负整数在加法下有结合律和单位元 0，但 1 没有加法逆元；它因此不是群，不能使用群的全部定理，但这并不使它成为失败的数学，它只是不属于这一类对象。群也不要求交换律：取集合{1,2,3}的全体双射，以复合为运算，得到 S_3。取 $r=(123)$，$s=(12)$，则 $r^3=e$，$s^2=e$，$srs=r^{-1}$。rs 把 1 送到 3，sr 把 1 送到 1，两个结果不同。从数的乘法习惯迁移来的交换律在这里不成立。

拉格朗日定理提供了一个只用群公理的统一约束。设 H 是群 G 的子群，左陪集 gH 把 G 分割为互不相交的块，每块与 H 等势，故有限群里 $|G|=m|H|$。元素的阶整除群的阶，由此而来。这个定理不依赖元素原来是数、图形还是置换，适用范围由群这一名称划定。一个直接的推论是：阶为素数 p 的群必是循环群，因为任取非单位元，其阶整除 p 而大于 1，故等于 p，它一个元素就生成全群。再取模 p 的非零余数在乘法下所成的群，阶为 $p-1$，于是每个非零余数的 $p-1$ 次幂为 1，这就是费马小定理。两个结论都不触及数的具体样子。这个定理给出的是约束，而不是存在：4 整除 V 的阶，V 里却没有阶为 4 的元素。量词的方向在概括时不能互换。

更能说明“名称即资格”的是商群。设 N 是 G 的子群，想把同一左陪集中的元素视为一个新对象，并规定　$(aN)(bN)=abN$。这个规定首先要不依赖代表元的选择。当 N 正规，即对任意 $g\in G$ 有 $gNg^{-1}\subseteq N$ 时，用 $a'=an_1$、$b'=bn_2$　代换，$a'b'=ab(b^{-1}n_1b)n_2$ 仍落在 abN 里，运算有定义，得到商群 G/N。反过来，若这个陪集

乘法确实无歧义，N 必然正规。正规性因此是标准陪集乘法能够下降的充要条件，不是一道可有可无的审查手续。

反例也是具体的。在 S_3 里取 $H=\{e,(12)\}$，$r=(123)$。$r^{-1}sr=(13)$，落在 H 之外，H 不正规。把同一个陪集 H 写成 eH，用 e 作代表，$(eH)(rH)=rH$；写成 sH，用 s 作代表，$(sH)(rH)=srH$。二者不等，因为若 $rH=srH$，则 $r^{-1}sr\in H$，与刚算出的结果矛盾。失败发生在运算还没有被定义的阶段，不是结合律没验证。

名称所给的资格，到同态那里更精致。同态 $f: G\to H$ 保持运算，其核 $\ker f$ 是正规子群；第一同构定理：$G/\ker f$ 同构于 $f(G)$。取商正好留下了“经 f 可观察的区别”：模 4 的映射把整数 1、5、9 合并，原来的大小关系没有保留，模 4 加法关系得到保留。泛性质把这一切封成一个接口：若 f 把 N 的元素全部送到单位元，则 f 能够而且只能通过投影 $\pi: G\to G/N$ 分解。“能否通过这个商”，成了一个可以检验的条件。

此后，每一个新的代数对象都沿着这套接口生长。循环群的分类可以由幂映射 $n\mapsto a^n$ 与整数的带余除法一次完成：无限循环群同构于 Z，有限循环群由阶决定同构类型。凯莱定理说每个群同构于某个置换群的子群，于是抽象结构又回到它出发的地方：左乘映射 $L_g(x)=gx$ 给出忠实的表示。正三角形的六个对称变换与 S_3 同构，把余数的计算、置换的计算与图形的对称连接在一条证明里。

环和域的例子把代价摆得更清楚。模 n 的余数在加法下总是群；在乘法下，全体余数包含 0，不成群，只取与 n 互素的余数才得到单位群。模素数 p 的余数构成域，因为非零的 a 与 p 互素，由贝祖等式 $ax+py=1$ 得到逆元 x；模合数 $n=uv$（$1<u,v<n$）则有两个非零余数相乘为零，不成域。同一个“取余”的程序，在不同参数下得到不同资格的对象，名称按资格把它们分了类。

这里已经可以看到，结构名称带来了两样东西：一套跨材料的统一定理，和一张资格表。后者的存在使统一定理能被机械地套用，也使不属于这个名称的对象一时找不到合适的地方，例如不可逆的过程在群的框架里没有位置。资格表的两面，在布尔巴基那里将被放大到整个数学。

◆ 8.4　三种母结构与《数学原本》

1948 年，布尔巴基以《数学的建筑》为题发表了一篇概观（收入勒利翁内编《数学思想的伟大潮流》；1950 年有德雷斯登的英译，载《美国数学月刊》第 57 卷第 4 期，第 221–232 页）。文中的主张是：数学不是许多分支的集合，而是一座建筑，其地基是少数几种母结构，其上依次建立由母结构组合、特化得来的多重结构

与具体理论。三种母结构分别是：代数结构，核心是合成法则，例子有群、环、域；序结构，核心是满足自反、反对称、传递的关系，例子有偏序、格、良序；拓扑结构，核心是邻域、极限、连续性的抽象，例子有拓扑空间、一致空间。

实数轴是看这三种母结构如何组合的最短例子。它同时是加法群、全序集和拓扑空间，三者并列时不过是三个互不相干的事实；《原本》要的是它们的相容：加法与序相容（a≤b 推出 a+c≤b+c），加法与拓扑相容（加法与取负是连续映射），序与拓扑相容（开区间构成拓扑的基）。凡同时满足这些相容条件的对象，称为有序拓扑群，实数加群只是其中一例，整数与有理数加群也是。于是关于有序拓扑群证明的任何命题，对这三者同时有效。这是“组合、特化”二词的具体含义：母结构给出骨架，相容条件把骨架焊在一起，细节由具体对象去填。例如阿基米德性质只属于实数这类对象的细节，不在母结构的骨架里；骨架一旦立好，实数与有序拓扑群的其他成员便在同一张图纸上各占一格。

《原本》第一卷《集合论》的第四章给出了“结构”的一般定义。它从若干基础集合出发，用笛卡尔积与幂集反复构造“梯级”，在梯级上取一个满足指定公理的元素，这个元素与相应的公理合起来称为一个结构种类（espèce de structure）。以群为例：E 上的一个合成法则是 E×E×E 的一个子集（运算的图），它须满足结合、单位元、逆元三条公理；这个子集作为 P(E×E×E) 的一个元素，加上公理，就是 E 上的一个群结构。在此之上，同构被定义为保持结构的双射，结构的转移成为一个一般的操作：若集合 E 上有某种结构，且有双射 E→E′，则 E′ 上有对应的结构。群、环、拓扑空间、序集因此是同一个定义在不同参数下的实例。代数卷里的“泛问题”也是同一种手法：不描述对象长什么样，只描述它与所有同类对象的映射关系，由此一次性定义自由群、张量积、商这类构造。这一手笔把一个个孤立的同构概念，收成了一个可以套用的元定义。

多重结构是母结构的组合，条件是相容。拓扑群是一个群加上一个拓扑，且乘法与取逆连续。有序域是一个域加上一个全序，且 x≤y 蕴含 x+z≤y+z，0≤x 与 0≤y 蕴含 0≤xy。实数集 ℝ 因此同时是域、全序集与拓扑空间，三个结构由相容条件焊在一起。再往上走，拓扑向量空间、巴拿赫空间、李群、微分流形，都是母结构沿着相容条件逐层叠加的结果。韦伊 1937 年引入的一致结构，又给拓扑母结构补上了“近”的度量。

《原本》之外，还有一个常设的出口：布尔巴基讨论班自 1948 年起每年举行数次，报告人把别处刚出现的重要结果改写成《原本》的语言，印成统一格式的讲稿。这是一道输入的工序，别处的发现经过它被翻译成已有的结构语言，才算进入

这座建筑的视野。工序的存在说明建筑对新材料是开放的，开放的方式是翻译：新来的东西先被标上已有的名称。

这座建筑的叙述方式也有规定：从一般到特殊。先讲集合，再讲代数，再讲拓扑，之后才是实数与函数。这一次序与历史的次序相反：历史上是从实数与微积分的问题出发，一步一步抽象出集合与结构。《原本》各卷的历史注记（后来汇成《数学史原理》）单独成篇，放在正文之外。逻辑的次序留在正文里，来历留在注里。

《原本》的形式基础是一个以希尔伯特 τ 记号为基本符号的形式语言，写进第一卷第一章。第一卷坦率地交代，没有办法保证这个形式体系没有矛盾，只能说迄今没有遇到。A. R. D. Mathias 1992 年在《布尔巴基的无知》一文里批评过这套基础与哥德尔结果的关系，并在 2002 年发表的《一个长度为 4 523 659 424 929 的项》里算出，把“1”这个数在这个系统里完整写出来，需要约 4.5 万亿个符号，这表明形式基础作为理想位于很远的地方，而日常使用的是一层一层的缩写。这个体系与第 7 章的基础是同一类：单一背景加语法的合法性判定。区别在于《原本》不满足于一个背景，它给背景之上的整座建筑也配了蓝图。

这套蓝图同时留下了空位。范畴论由艾伦伯格与麦克莱恩 1945 年发表（《自然等价的一般理论》），格罗滕迪克 1957 年的《托霍库论文》让它在同调代数里立住脚，布尔巴基的《原本》却没有把范畴作为框架；组合学、概率、数理逻辑作为专门的课题，也没有被纳入。《原本》的建筑在书外继续生长：格罗滕迪克与迪厄多内合写的《代数几何原理》（1960 至 1967 年陆续出版）用概形取代了簇，用范畴与函子的语言重写了代数几何，其风格是布尔巴基式的，框架却已经超出《原本》自己划定的疆界。这些空位在 8.6 节还要再谈，眼下只记一点：蓝图越是完整，没被放进蓝图的东西就越显眼。

◆ 8.5　按定义检验：它是多元化的统一性吗？

布尔巴基的结构分类有一个吸引眼睛的外形：三种母结构并列，下面是一棵由相容条件长出的树，树上每个节点都有自己的位置与亲疏。这个外形很容易被读成谱系。本书的三个定义要求检验这件事，而不是被外形说服。

检验先用两个问题，随后再补第三个。

问一：系统之间有没有“亲缘尺子”，这把尺子由谁给出？　在《原本》里，结构之间的远近有一把现成的尺子：加公理或减公理。半群加单位元成为幺半群，再加逆元成为群，再加交换律成为阿贝尔群。同一个集合上的拓扑按包含关系排成

格，更细、更粗有明确的次序。结构 A 比结构 B “更丰富”，指的是 A 的公理包含 B 的公理。这些位置与远近，在定义写出来的时刻就已经确定，不随任何社群的使用史而变。用导论的措辞，这就是“程度即使有，也由事先给定的定义安排”。

问二：位置是不是由回写历史生成？ 回写历史生成的位置有一个标志：“这里才这样”。同一个概念在不同地方有不同的境遇，取决于它在那里被怎样用过、改过。《原本》里一个概念的位置，是它在定义链上的位置；它在历史上被怎样引入、争论、改写，被放在注里，正文不依赖那些经过。换一个读者、一个国家、一台机器，位置的读法不变。

按这两条检验，布尔巴基的结构分类带着分类之形：有位置，有亲疏，有程度。位置与亲疏的来源是定义，所以仍属统一性。更准确地说，它比“几本菜谱并排”更靠近单数的那一端：不同的结构类并非各用各的尺子，它们共用一种语言（集合加结构定义）、一套同构概念、一个形式基础。这是单一框架之内的多种结构，并非多元化的统一性意义上的多个框架并排。多元化的统一性是第三编的论题，那里的多宇宙、逻辑多元论确实在系统之间留出空隙；布尔巴基的建筑则把空隙用相容条件封死了。

这里要点明本书与第 53 号的术语分界。第 53 号《SDE数学导论》第 13 章称伞模型使数学“统一”，说的是构造的统一：同一个构造（伞心、半径、核函数与三个参数 r、ω、v）可以解释连接、次序、结构三个层次，也能解释看、摸、听三种数。构造同一，配置成谱，配置的位置由场的发生给出，对不同的问题有不同的读数。布尔巴基的统一性是另一回事：构造与配置都由定义给出，实例的参数是使用者输入的（给出一个集合、一个运算，检验它够不够格叫群），不是场的发生输出的。两个“统一”同名，指向的是相反的两端。这个区分在第 14 章和第 15 章还要继续使用。

问三：这个位置能不能“应用”？ 同一性谱系的位置只能发生，不能应用，意思是：不存在一条从定义出发、对谁都得到同一个位置的算法。布尔巴基的结构分类恰有这样的算法：给一个集合与一个运算，逐条核对公理，答案是确定的，机器可以做这件事。所谓“认出这是一个拓扑群”，就是核对两个结构种类的定义与一条相容条件。能被机械套用，是统一性的标志，不是缺点；只是把它放在本书的尺子旁边，就知道它在哪一端。

设想一个谱系版本的分类，大致会是什么样子：一个数学对象的位置，由它在若干社群里被使用、被回写的经过确定，同一个对象在不同的地方位置不同，而且这些位置没有一条事先的公式可算。那样的分类图不是一棵树，更像一张带着地名

的地图。布尔巴基的树没有这类地名，所有的节点都在同一张图上有唯一的坐标；地名要靠使用者的足迹才写得上去，而《原本》的正文里没有足迹的位置。

把检验结果列成一张小表，便于后面的章节引用。

检验项	在布尔巴基那里的读数	归属
位置由谁给	加公理、减公理、相容条件，即定义	统一性
回写历史是否参与位置	历史在注里，正文不依赖	统一性
能否机械套用	逐条核对公理即可，机器可做	统一性
框架数量	一套语言、一个同构概念、一个形式基础	单数
外形	并列的母结构、层层的树	带分类之形

笔名在这一检验里不是细节。一个没有人的作者位置，对应的是一种文本：它的每一句都可以被任何一位合格读者复述、检验、续写，续写者无须得到谁的许可，也无须知道前文怎样写成。结构的检验本身又是机械的，核对一个对象是否满足一组公理，可以交给程序。统一性定义中的“可脱离发生过程被搬走、被机器生成”，在这里有了一个完整的文本实例。

此外还有一处要提醒。第 53 号按 E2 的三元素“连接、次序、结构”读数学，并在第 13 章里把连接对到拓扑，次序对到代数，结构对到几何与分析〔读法，见该章 13.1 与 13.7〕；布尔巴基的三母结构是代数、序、拓扑，序被单列，几何不独立成母。两套三分的切法错开，并非对号入座。本书不强行把它们拼成一对一的对应，错位本身倒是一条线索：一个由定义事先给出的分类，切口落在哪里取决于写定义的人当时手头的材料；一个由场的发生给出的三元素，切口则依赖于数学这一信息维度的运行。

◆ 8.6　统一之美的力量与它留下的张力

统一之美有实在的力量，本书不回避。

一、证明的复用。　拉格朗日定理、同构定理、泛性质的论证写一次，在群、环、模、向量空间里复用。母结构的理论一次建好，之后所有叠在它上面的理论都继承它的结果。一位研究拓扑群的人，可以直接取用群论里的陪集计数与同构定理，也可以直接取用拓扑里的紧致性定理，两边的证明都不必重写。学习者的负担也因此变轻：同一套概念学一遍，到哪里都认得。

二、巨大的分类工程。 有限单群的分类是 20 世纪后半叶最宏大的结构分类之一：每个有限单群或属于几个无穷族（循环群、交错群、李型群），或是 26 个散在群之一。原始证明散布在上百位作者的数百篇论文里，总页数常被估为一万多页；1983 年有人宣布完成，其后发现拟薄群部分有缺口，阿施巴赫与史密斯在 2004 年出版了两卷专著补上这一块，第二代简化证明由戈伦斯坦、莱昂斯、所罗门等人继续推进。最大的散在群“魔群”的阶约为 8×10^{53}。康威与诺顿 1979 年观察到魔群的表示维数与模函数的系数之间有奇异的对应，博彻兹 1992 年证明了这个“月光猜想”，1998 年获菲尔兹奖。

三、跨分支的惊喜。 阿蒂亚—辛格指标定理（1963 年宣布）把椭圆算子的分析指标等同于拓扑不变量；朗兰兹 1967 年的纲领预言数论、代数几何与表示论之间有精确的对应；镜像对称联结了辛几何与代数几何。这些联系是“统一之美”最亮的证据。指标定理的两侧，一边是微分算子的核与余核维数之差，另一边是流形上示性类的积分，两边出自不同的分支，却给出同一个整数。

然而同一批证据也带出了统一性下的张力，下面分五项。

第一，**叙述次序遮蔽来路。** 从一般到特殊的叙述，使学习者先接触结果，再倒推它为什么这样。1959 年的罗约蒙讨论会上，迪厄多内喊出“欧几里得必须走”的口号（法文转述为“打倒欧几里得”），意思是几何教学应当改以向量空间的公理方法为基础。20 世纪 60 年代前后的“新数学”运动把集合与结构带进中小学课堂，引发了广泛的批评，一个常被引用的例子是莫里斯·克莱因 1973 年的《为什么约翰尼不会做加法：新数学的失败》。教学里把一个被标准化的成品直接交给学生，学生得不到定义背后的碰撞，只能记住定义。

第二，**同构的“相同”是有损的。** 同构说两个结构除了名字外一样，但“除了名字”之后剩下的东西并非总是无关紧要。模 4 的映射把 1、5、9 合并，商群 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 保留了加法关系，丢掉了大小；若问题恰好关心大小，同构于像并不能弥补这一损失。群同构只承诺群结构保持，不自动承诺拓扑、生成元或外部作用也保持；每一次说“相同”，都要重新声明保持的范围。统一之美在这里的代价是细节：被宣布为相同的东西之间，原来的差异无处安放。第 11 章会把“怎样相同”当作主题。

第三，**例外清单。** 《原本》没有收入的对象，如组合学、概率、数理逻辑、计算，在分类里没有位置，只能作为“应用”或“专门课题”被另行安放。数学学科分类（MSC）的一级类（两位数字的大类）在 2020 版中共有 63 个，由编辑部门按事先的目录归类，每篇论文落入一个或几个格子。这张目录是一个现成的统一性装

置：位置由目录给，作者只管填。这一点与第 6 章里“病态清单”的结构相同，只是例外现在以“专门课题”之名出现。

第四，**母结构的分离正是被惊喜打破的东西。** 第 53 号《SDE数学导论》第 13 章的读法是：代数、序、拓扑在相容条件下，三层解耦，可以各自独立发展；指标定理与朗兰兹纲领是在深处重新发现耦合。本书按这个读法接受一个推论：母结构的“母”字，是三层退化解耦的读数；当研究深入到耦合重现的边界，三母结构的分野就变成问题，这时的“惊喜”是统一框架内部的紧张，不是统一的补充证据。该读法属于第 53 号，本书读它为标准化的重生，是否成立要看第 18 章判决预测的数据。

第五，**基础与建筑之间的缝。** 《原本》的建筑立在 ZFC 一类的集合论之上，第 7 章已经说过这个基础有独立的句子。建筑的完整性以基础的一致性为不言明的前提，而这个前提在形式上证明不了。迄今为止，这条缝在日常数学中没有出现裂纹，它却一直在那里。

◆ 8.7 顶点与枯竭：三律在这里的退化

统一之美到了布尔巴基这里达到顶点，意思是：三条意义律在这座建筑里同时被开到最大的相容程度，也同时露出了最清楚的退化形态。

按本书的写法，三律的运行形态依次是：特征律，混沌碰撞→自组织→涌现；自由律，矛盾纠缠触发→路径裁剪→新模式；幸福律，张力积累→模式转换→释放。相容性公理（第 53 号《SDE数学导论》第 1 章）之下，三律分别退成固定点收敛、唯一合法路径、误差最小化，这是第 344 号《意义数学的诞生》的读法，第 4.5 节已逐条读过。《原本》的运行，几乎是这三个退化形态的逐字实现。

特征律：固定点收敛。 一个概念进入《原本》，先经过一轮碰撞：不同领域、不同作者对同一事物的不同处理；然后凝成一个定义；之后概念停在那里。例如“紧致”“滤子”“模”这些概念，在正文里都是已经凝成的终态，读者看到的是它们的定义和后果。碰撞留在注里，终态留在正文，终态之后不再变。一个新的结构种类，要进入《原本》，必须以定义的形式进入；换句话说，涌现在建筑的门口就被收成了定义。

自由律：唯一合法路径。 这座建筑里选项极多：公理可以任意添减，结构可以任意组合。选项的数目是一个组合数，可以大得难以想象。但是自由的量度是发生新路径的能力，不是选项数目。新的结构种类要在已有的相容条件下由旧结构衍生，新路径是旧路径的组合；一条路是否合法，完全由语法判定，任何一个读者都

得到同一个答案。因此这里的自由是在固定地图上选路的自由，地图本身不由路的走法来改写。

幸福律：误差最小化。 统一之美给出的释放，是把差异收成同一：同构说，两个结构除了名字外一样；取商说，被合并的元素除了核之外一样；泛性质说，所有满足条件的映射都经过同一条通路。这是一次实在的释放，它拥有美：从杂乱中看见一个形。按 S3·D1·E2 的透镜读，这份美属于幸福律的一种，而且是消除差异的那一种。《原本》里所有的张力来源于“还没统一”，所有的释放都是“统一了”，释放之后新张力的来源只剩下尚未归类的东西。一旦分类做完，张力就被抽干。第 6 章里的病态清单、第 7 章里的独立清单、本章 8.6 里的专门课题清单，是这种枯竭在外部留下的残渣，也就是第 4.8 节所说的张力复发律的读数：统一性下的新张力，常常以例外的面目出现。

这里的“枯竭”指的是运行方式的单一，《原本》与布尔巴基工作的产出是实绩，不在此列：在这个相位里，三律剩下的运行方式只有一种，产出越多，这一种方式被重复得越多。特征律只剩下把新对象收成定义，自由律只剩下在固定地图上选路，幸福律只剩下消除差异。顶点的含义是，这三条单一的方式都跑到了极致，没有别的路再通。顶点与枯竭同处一点。

再回到美。S3·D1·E2 的透镜里，美属于追问“什么算好”的那一格，它能够重新定义标准化，是因为它不在标准化的内部。统一之美是美的一种：把许多个别收成一个形，释放的是“原来是同一个”的惊讶。另一种美没有被这套体系收入，它出现在差异被安排得恰到好处的时候：一个数在一眼、一摸、一听中各有各的样子，三种样子之间的亲疏有它的分寸，“一小撮盐”与“3 克”各有各的适用处。这种美的位置要靠谱系给出，第 16 章再回来。眼下只需记住，顶点之美是全体美里的一类，而且是消除差异的那一类。

这一点放在本书的论证里还有一层意思。第 17 章要写统一性标准化走出数学之后，人成为社会大机器的零件。布尔巴基在《建筑》一文里，把公理方法比作数学中的“泰勒制”（文中说，公理方法说到底不过是数学的泰勒制）：把复杂的工作拆成标准的工序，每一个工序由合格的工人完成，不需要知道整件产品。一个比喻不是证据，但它说明这套方法的设计者自己也看到了流水线的形状。数学内部的“谁用都一样”，在文本里已经带着可替换的意味：读者是可替换的，作者位置是空的，定理的使用者不需要知道它从哪里来。这是数学一侧的零件化。进入社会之后，同一个逻辑变成对人的度量，那是后面章节的事。

枯竭在日常工作里也有可察的形态。一篇代数论文最常见的推进方式，是“推广”：把一个已知的结论从域推到环，从交换推到非交换，从有限推到无限，每一步都沿着加公理、减公理的方向走。这类工作的价值是实在的，但它的路径是预先标好的，沿着树上的一条枝向上或向下。一个结构种类被推广到什么程度，在写下定义时就已经能看出来，剩下的是把证明补完。当可推广的方向被一条一条走完，新张力的来源便只剩下树枝以外的东西，那些东西在树上没有位置，所以它们被叫作例外。

把这些读数摆在一起，对布尔巴基的评价可以更准确：这是统一性标准化在数学内部做得最完整的一次。它让陌生人之间的协作达到了前所未有的规模，也让这种协作所依赖的东西，即定义、名称、相容条件与形式基础，长成一张不再需要追问来历的表。以后的章节会不断回到这张表。需要追问的是另一件事：这样一张表，对一个刚走进数学的人意味着什么？他先拿到的是资格证书，要等很久才会碰到证书背后的难题；而那些难题原本是他可以带着自己的手感去碰的。数学作为信息维度服务意义目标的能力，在这个入口处已经先被削去了一块。这是标准化在教学中的最小读数：入口统一了，进门的人也就被统一成了同一种进门的方式。一个学生要问的“为什么要这样定义”，在课堂上常被一句“这样定义最方便”打发，方便二字背后的整段历史，没有人再讲。这段历史里有的是碰撞与取舍，定义是它的结算单，课堂上递出的只有结算单。

单数的统一性到此走到了头：第 5 章的欧几里得与希尔伯特、第 6 章的一种收敛、第 7 章的单一基础、本章的结构之母，四站合起来，是同一个运行态的四种形态。第三编要问的是，当人们意识到单一不够，转向“复数”的时候，是不是就离开了这个运行态。第 9 章的强度阶梯给出的第一个回答是：刻得再细，位置仍由定义给出。

◆ 本章结论

1. 抽象代数把具体计算凝成结构名称，名称同时是资格证书：正规性是商群成立的充要条件，非正规子群给出不能省略的反例。
2. 布尔巴基以代数、序、拓扑三种母结构及相容条件统摄数学全体，从一般到特殊叙述，来历放进注里，作者位置由笔名清空。
3. 按多元化的统一性的定义检验：结构的位置与亲疏由加公理、减公理等定义事先给出，带着分类之形，仍属统一性；伞模型的“统一”指构造，与此不同。

4. 统一之美的力量在证明复用、大规模分类与跨分支的对应；张力在叙述遮蔽来路、例外成清单、母结构的分野被惊喜打破、基础与建筑之间的缝。
5. 顶点处三律退成固定点收敛、唯一合法路径、误差最小化，统一之美的释放只剩消除差异这一种，顶点与枯竭同处一点。

◆ 本章参考

— 原始文献

- Galois, É. Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux（1831 年署期），收入 Œuvres mathématiques, 1897。
- Cayley, A. On the theory of groups, as depending on the symbolical equation $\theta^n=1$. Philosophical Magazine 7, 1854。
- Weber, H. Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie. Mathematische Annalen 43, 1893。
- Steinitz, E. Algebraische Theorie der Körper. Journal für die reine und angewandte Mathematik 137, 1910。
- Noether, E. Idealtheorie in Ringbereichen. Mathematische Annalen 83, 1921。
- van der Waerden, B. L. Moderne Algebra, 2 Bde., Springer, 1930–1931。
- Weil, A. Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, 1937。
- Eilenberg, S.; Mac Lane, S. General theory of natural equivalences. Transactions of the AMS 58, 1945。
- Bourbaki, N. Éléments de mathématique, Livre I Théorie des ensembles（1939 年起）、Livre II Algèbre、Livre III Topologie générale。
- Bourbaki, N. L'architecture des mathématiques, 收入 Le Lionnais (éd.), Les grands courants de la pensée mathématique, 1948；英译 Dresden, A., American Mathematical Monthly 57, 1950。

研究文献

- Mathias, A. R. D. The ignorance of Bourbaki. The Mathematical Intelligencer 14, 1992。
- Corry, L. Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures, Birkhäuser, 1996。
- Beaulieu, L. A Parisian café and ten proto-Bourbaki meetings (1934–1935). The Mathematical Intelligencer 15, 1993。
- Dieudonné, J. Pour l'honneur de l'esprit humain: Les mathématiques aujourd'hui, Hachette, 1987。
- Kline, M. Why Johnny Can't Add, St. Martin's Press, 1973。
- Gorenstein, D.; Lyons, R.; Solomon, R. The Classification of the Finite Simple Groups, AMS, 1994–（多卷）。
- 阳涌：《标准如何生成数学》原稿第 11 章（抽象代数，本书取其数学与史料）。

站内著作

- 第 53 号《SDE数学导论》第 1 章（相容性公理）、第 13 章（从伞模型看传统数学的统一性）。
- 第 344 号《意义数学的诞生》（一把伞三种数；统一的是构造，不是配置）。

◆



第　三　编

复数的统一性：数学界误以为的出路

编　序

这一编（第 9—12 章）看数学界误以为的出路：强度阶梯、多宇宙与宽容、把更多东西纳入「相同」。它们解除了「只有一个」，没有解除「谁用都一样」，仍是多元化的统一性，对意义三律的亏缺方式与单数的统一性相同。

09

第 9 章

强度阶梯

本章提要　数学界为单数统一性的困局找到的第一条出路，是承认系统有强弱，并把强弱刻成一把阶梯：证明论序数、逆数学五大系统、大基数的一致性强度。阶梯刻得极细，近乎线性，一个命题在数学的版图上由此有了坐标。本章逐一检视这三种刻度及其毛边（拉姆齐定理一带的“动物园”），判断它们的位置处处由定义与证明给出，与回写历史无关，因而是统一性的极致形态——刻度化；并以同一性谱系作对照，指出从刻度到谱系，缺的正是回写。

◆ 9.1　一个数列里长出来的尺子

取数 3，写成以 2 为底的遗传表示 2^1+1。“遗传”是说指数本身也要继续按同一个底写开，直到不再有可拆的指数。现在做两件事：把底 2 换成 3，得 $3^1+1=4$；再减 1，得 3。接着把 3 写成以 3 为底的 3^1，底换成 4，得 4，减 1 又得 3。以 4 为底时，3 只是个位上的一个 3，换底后仍是 3，减 1 得 2。此后是 2、1、0。整条数列是 3、3、3、2、1、0，六项收场。

换成 4，情形立刻不同。$4=2^2$，换底成 $3^3=27$，减 1 得 26；26 在底 3 下是 $2\cdot3^2+2\cdot3+2$，换成底 4 得 $2\cdot4^2+2\cdot4+2=42$，减 1 得 41；再往下是 60、83、109……数列一路攀升，攀升的速度使它回到 0 所需的项数，远远越过任何物理计算所及的范围。古德斯坦在 1944 年证明，无论从哪个数出发，这样的数列终将回到 0。

证明的办法是一次换位。把每一步里的底统统换成第一个无穷序数　ω，数列便变成一串序数，而每一步“换底再减 1”都使序数严格变小。小于 $\varepsilon_0=\sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{(\omega^\omega)}, \ldots\}$ 的序数不存在无穷下降列，数列于是必然终止。近四十年后，柯比与帕里斯证明了这条定理在皮亚诺算术（PA）中无从证明：对每一个具体的起始数，PA 都证得出数列终止，而对“一切起始数”的全称陈述，PA 无力。

这个例子之所以适合作为本章的开场，是因为它显出一把尺子是怎样长出来的。ε_0 早在 1936 年就以另一种身份出现：根岑用到 ε_0 为止的超限归纳，证明了 PA 的一致性；而 PA 自己，对每个小于 ε_0 的序数都证得出相应的超限归纳，到 ε_0 为止

便停住。于是 ε_0 成了 PA 的一个读数：这个系统够得着多远。古德斯坦定理则表明，这个读数不是一个孤立的记号，它决定了一批看上去与证明论毫无干系的、关于自然数的朴素命题落在哪一侧。

这种尺子的出现有它的历史缘由。1931 年哥德尔的两条不完备性定理，使希尔伯特想要的那种一劳永逸的绝对证明无从实现：一个足够强的系统，无法在自身之内证明自己的一致性。绝对的尺子走不通，数学界转而造相对的尺子。既然不能问“这个系统是否绝对可靠”，就问“这个系统比那个系统强多少”“这条定理需要多少前提”。根岑的 ε_0 是第一个成功的相对读数，此后的序数分析、逆数学、一致性强度，都是在这条路上长出来的。后人称之为相对化的希尔伯特纲领。因此，阶梯是数学界面对单一绝对基础的落空，所作的第一次系统性回应，这也是本书把它放在第三编开头的原因。

从这里出发，数学界造出了三种相互呼应的刻度。证明论序数给每个系统一个序数；逆数学把每条定理放进一个子系统的格子里；大基数把集合论的各种假设排在一致性强度的队伍里。三种刻度所依赖的技术各不相同：序数分析靠证明变换，逆数学靠反推与模型构造，一致性强度靠内模型与力迫。它们能够相互呼应，是因为共享同一个起点——形式系统与可证性关系。正因共享这个起点，三种刻度可以彼此翻译：一个系统的序数、它在逆数学中的格子、它的一致性强度，常常给出同一个排位。

三种刻度合起来，给出一个印象：全部数学的不同假设、不同系统、不同定理，可以按“强”排成一列。这个印象有一半来自事实，一半来自刻度本身的构造。本章要把两半分开，并回答一个问题：这样一把阶梯，对意义三律意味着什么。

◆ 9.2　序数分析：根岑以降

根岑 1936 年的论文《纯数论的无矛盾性》，以及 1938 年的新证明，给出了此后一切序数分析共有的骨架：对一个形式系统 T，找出一个良序，使 T 对其任何真初始段都证得出超限归纳，而一致性的证明恰好需要整个良序上的超限归纳。后人把这个良序的序型定义为 T 的证明论序数，记作 $|T|$；通行的定义是：$|T|$ 为 T 能证明其良基性的、自然数上的原始递归良序的序型之上确界。

根岑的方法，后来由舒特（1951 年起）改写成无穷证明论的形式：给 PA 加上一条ω规则（若对每个自然数 n 都有 A(n) 的证明，则得 A 的证明），证明便成为可以带序数标记的无穷分支树；对这样的树做切割消除，每消去一层切割，序数标记

便按指数方式增长一次，PA 里任何证明的序数标记都落在 ε_0 之下。证明论的秘密由此显出：证明的复杂度被翻译成序数的大小，一个系统的强度便是它所有证明的序数标记之上界。

读数随后一路排开。原始递归算术 PRA 的序数是 ω^ω，逆数学中的 RCA_0 与 WKL_0 也是 ω^ω；算术概括系统 ACA_0 对一阶语句保守于 PA，序数为 ε_0；带完全归纳的 ACA 是 ε_(ε₀)；算术超限递归系统 ATR_0 的序数是 Γ_0，这是费弗曼与舒特各自独立刻画出的“可谓词化”的上限；Π^1_1 概括系统 Π^1_1-CA_0 的序数，由竹内外史以“序数图”开始分析，后经布赫霍尔茨、波勒斯等人的工作，在布赫霍尔茨的 ψ 函数记号下写成 $\psi_0(\Omega_\omega)$。再往上，Π^1_2 概括、完整的二阶算术，序数分析只推进到若干片段（拉特延 2000 年代的工作），整体仍是开放的研究前沿。

把读数连起来看，可以看到一个规整的图景：每上一格，序数记号所需的构造就更强。ε_0 只需要对 ω 反复取幂；Γ_0 需要把维布伦层级的函数不动点再取一次；ψ(Ω_ω) 要引入对大不可数序数的折叠。这些构造本身，就是一部“可谓词化”逐级失守的历史：谓词化的上限到 Γ_0，再往上进入非谓词化的区域。每一次越界，都对应着一种新的、由定义给出的构造手段。

这一串读数的魅力在于，它们回答的是一个很实际的问题：这个系统到底能证明什么、不能证明什么。古德斯坦定理、帕里斯—哈灵顿命题、克鲁斯卡尔树定理的有限形式，这些“自然”的组合命题，都因序数读数而获得了不可证性的精确位置。序数不是装饰，它是预言：某个命题的证明需要多长的良序，这个命题便不会在序数更低的系统里出现。

然而序数分析有一个众所周知的内部条件：记号必须“自然”。若容许随意的原始递归良序，则序数读数会变得无意义；克赖泽尔等人早已指出，借助哥德尔第二不完备定理一类的自指构造，可以制造出序型实际上仅为 ω、而理论 T 无法证明其良基的原始递归序，这类序被称为病态序。所以实际的序数分析总是附加一条筛选：只承认出自某种标准构造（如维布伦层级、折叠函数）的记号。

这条筛选值得单独看一眼。什么算“自然”，没有一条形式定义可以一劳永逸地给出；它在这个领域长期的实践里被校准，校准的结果并不写进任何一条定义：哪些记号经得起检验、哪些被反复回用、哪些在推广时站得住。换言之，在阶梯的最底层，有一小块东西是被回写出来的：记号的自然性。本书把这一小块读作阶梯向谱系的一次让步。但这次让步被迅速封存：一旦记号被认定为自然，序数便是它的定义所给出的，此后任何人、任何机器按同一套步骤都得到同一个读数。回写发生在刻度的制作之前，刻度制成之后，回写的痕迹被擦去了。

序数分析还有一个方向性的动机：给定一个自然的理论，能否为它找出这样一个序数，使其证明论强度被完整刻画？这项工作由波勒斯、布赫霍尔茨、拉特延等人推进到相当高的层级，其难度随系统的强度陡增：每向上一层，所需的序数记号体系都更为复杂。研究者把它称为一项没有终点的计划，序数分析的目标，是让每一个自然的数学理论都有自己的读数。这个愿景本身就是统一性标准化的愿景：每一个系统都要被放进同一套读数体系，都要有一个任何人可以复核的序数。

这里顺带可以看出阶梯对“差异”的态度。两个系统若序数相同，序数分析便视二者为同一强度；若序数不同，便说一个强一个弱。差异在这里只有两种命运：被抹平，或被排序。一个系统独有的、不能还原为序数的那部分风格，比如它偏爱哪类构造、拒绝哪类论证，在读数中没有位置。这不是序数分析的缺点，而是它的定义：它测量的是可证性的边界，别的东西不在量程之内。

◆ 9.3　逆数学：五大系统

序数分析从系统出发，问系统够得着什么。逆数学反过来，从定理出发，问定理需要什么。弗里德曼 1970 年代中期的工作开其端，辛普森的《二阶算术的子系统》（1999 初版，2009 再版）作了系统阐述。

做法是先固定一个很弱的基础系统 RCA_0（可计算概括加 Σ^0_1 归纳），然后对一条通常数学里的定理 φ，问：要证 φ，最弱需要补充哪条集合存在公理 A？若在 RCA_0 之上能证明 φ 当且仅当 A，便称 φ 与 A 等价。“由定理反推公理”，故名逆数学。令人惊讶的经验现象是：大批经典定理，被反推到了少数几条公理上，其中最突出的五个系统依强弱排成一条链：

- RCA_0：可计算数学。其中证得出存在的集合，都在可计算集的范围之内。
- WKL_0：加入弱柯尼希引理（每棵无穷二叉树有一条无穷路径）。闭区间上的海涅—博雷尔覆盖定理、连续函数在闭区间上有界、可数语言的哥德尔完全性定理、可数交换环的极大理想的存在，都与它等价。
- ACA_0：算术概括。波尔查诺—魏尔斯特拉斯定理、有界单调实数列收敛、无穷有限分支树的柯尼希引理，与它等价。
- ATR_0：算术超限递归。可数良序之间的可比较性、Σ^1_1 集的完美集定理、卢津分离定理，与它等价。
- Π^1_1-CA_0：Π^1_1 概括。康托—本迪克松定理等价于它。

这五个系统在蕴含的意义下严格递增，序数读数依次是 ω^ω、ω^ω、ε_0、Γ_0、ψ(Ω_ω)，其中前两者在序数分析里重合，在逆数学里却严格区分：WKL_0 对 Π^1_1 语句保守于 RCA_0，这一保守性（弗里德曼）把二者的一阶强度压在同一格，二阶存在的力度却不同。两把尺子的读数并非总是一一对应，这是它们各自的刻度精度所致。

“五大”的说法需要附带一个限定：它描述的是经典分析、可数代数与点集拓扑这一片区域，而这片区域本是逆数学首先考察的地方。离开这片区域，进入组合学与可计算性理论的交界，情形随即松动：定理不再整齐地落在五格之一，而是挂在五格之间的许多中间位置。五大是一个有范围的经验规律，范围本身由研究者选择考察哪些定理而定，这又一次把“自然”放回了刻度的入口。

“五大”现象的意义，常被表述为：通常数学的大量结果，其所需的集合存在公理恰好落在这五个阶梯之一。辛普森把它读作一种对数学基础的经验刻画——分析、代数、拓扑的主体，大体坐落在 ACA_0 以下或附近，需要 ATR_0 以上的定理，多半属于描述集合论一类较为专门的领域。

举一个反推的例子，看它怎样工作。设有界单调实数列都收敛（单调收敛定理）。任给单射 f：ℕ→ℕ，要证它的值域存在为一个集合。令 a_n 为所有满足“k 在 f 的前 n 个值之中”的 k 所对应的 2/3^(k+1) 之和；a_n 单调不减、以 1 为上界，故收敛于某个实数 x。x 的三进制展开只含数字 0 与 2，且第 k+1 位为 2 当且仅当 k 属于 f 的值域，所以由 x 即可读出值域。这样，单调收敛定理给出了单射函数的值域，而“任意单射的值域都存在”恰是 ACA_0 的一种等价形式。证明在 RCA_0 之内全部走得通，因此单调收敛定理蕴含 ACA_0；再把 ACA_0 之下的正向证明补上，便得到等价。

反推的方法本身也值得留意。它要求每一个等价都以正式推导给出，且推导在固定的基础系统 RCA_0 之上进行。这样一来，等价关系成了一个可检查的对象：给定 φ、A 与一份推导，任何一个有耐心的人，或一台证明检查器，都能验证它。刻度因此是公共的、可复核的，这正是它的力量。后面第 9.6 节会看到，这份力量与统一性的定义是同一回事。

◆ 9.4　大基数：一致性强度

序数分析和逆数学都在算术附近用功。向上走，进入集合论的领域，刻度换成一致性强度。哥德尔第二不完备定理给出出发点：对任一一致的、递归公理化的、

含 PA 的理论 T，T 无法证明 Con(T)。于是，若 S 证明 Con(T)，则 S 在一致性意义上严格强于 T，这种比较自然定义了一个预序。

集合论里的大基数公理恰好配合这个预序。设 κ 是不可达基数，则 V_κ 是 ZFC 的模型，所以 ZFC＋“存在不可达基数”证明 Con(ZFC)；而 ZFC 无法证明 Con(ZFC)，故不可达基数的存在严格强于 ZFC。继续向上，是马洛基数、弱紧基数、可测基数、强基数、伍丁基数、超紧基数、可扩基数，直至秩到秩的嵌入公理。顶端有一道已证的天花板：克南 1971 年证明，在 ZFC 中不存在从 V 到 V 的非平凡初等嵌入。

这里的关键是，每一级大基数公理都是独立于更低一级的：ZFC 若一致，则无法证明不可达基数存在；ZFC＋“存在不可达基数”若一致，又无法证明可测基数存在。每一级的存在性，同时是比它低的所有级别的一致性的充分条件，而反之则不然。哥德尔的可构造宇宙 L 给出另一重尺度：可测基数的存在与 V＝L 不相容（斯科特 1961），大基数越强，所容纳的内模型越丰富，内模型的构造本身又成了一把测量工具。

这个阶梯与前两种有一点重要的不同：它在数学之内确实做了预测。马丁与斯蒂尔 1989 年证明，存在无穷多个伍丁基数蕴含射影决定性（PD）；伍丁则证明了反向的一致性方向，使 PD 与无穷多伍丁基数等一致。这就是说，一个关于实数集合的描述集合论命题，其一致性强度恰好落在大基数阶梯的一个确定位置。又如，奇异基数假设的失败，其一致性强度由吉提克等人定位：它与“存在一个米切尔序为 κ^{++} 的可测基数 κ”等一致，这比单个可测基数略强，却远在超紧基数之下。相反，科恩的力迫法表明，连续统假设的否定仅仅需要 ZFC 本身的一致性：CH 的独立，并没有把我们送上阶梯的任何一格。

更引人注目的是线性。已知的自然的一致性强度比较，几乎总是可比的，并且排成一个良序。这是一条经验观察，不是定理。斯蒂尔 2014 年的论文《哥德尔纲领》提出了一种解释思路：内模型理论中，不同大基数的最小内模型（mouse）之间可以做比较，比较的结果恰给出线性。但这份解释本身依赖尚在发展的内模型理论，而且仅对“自然”的理论成立。

对任意递归公理化的理论，线性即告失效。借助哥德尔—罗瑟式的自指构造，可以人为地造出一致性强度彼此不可比的理论；这类理论是为了不可比而造的，数学实践里自然出现的理论则几乎总排在同一条链上，这一反差本身值得记下。线性为什么值得追问？若一致性强度的自然比较处处可比，这不是逻辑的必然，而是某种结构的显露。内模型理论的解释是：每个大基数公理都对应一个最小的标准内模

型，两个这样的模型总能通过共同迭代相互比较。这份解释若成立，线性便来自内模型的构造方式——一种由定义给出的比较机制。换言之，对线性的最好解释，恰好也是对“位置由定义给出”的最好解释。

这类人为造出的不可比理论，它们的存在只说明：“阶梯近乎线性”的断言，必须以“自然”二字限定，而“自然”又一次是从实践中筛出来的。这与序数分析中记号的自然性同构。

一致性强度还有一个常被忽略的技术细节：Con(S) 是一个 Π^0_1 语句，它的逻辑形式极为简单，所以一致性强度的比较实际上衡量的是两个理论在 Π^0_1 语句上的差别。这样的刻度很锋利，也很窄：两个理论的 Π^0_1 后承相同，而在更复杂的语句上大不相同，它们在这把尺上便是同一格。要看出更细的差别，需要换尺，例如换成 Π^0_2 层面的证明论序数、可证递归函数的增长速度，或可解释性序。每换一把尺，位置就要重画一遍，并且常常得到不同的偏序。多把尺并用，是阶梯的日常。

◆ 9.5 阶梯的毛边：动物园

逆数学的五大系统是一个干净的故事，但故事并不完整。设 RT^n_k 为拉姆齐定理：对自然数的 n 元子集的 k 染色，必有无穷同色集。雅克施 1972 年证明，当 $n \geqslant 3$ 时，RT^n_2 在 RCA_0 之上等价于 ACA_0，恰好落在第三格。但 $n=2$ 的情形，即成对拉姆齐定理 RT^2_2，一直是个麻烦。

关于 RT^2_2 的结果相继出现：它蕴含 $\mathrm{B}\Sigma^0_2$（赫斯特），所以 WKL_0 无法证明它；西特普恩与斯拉曼 1995 年证明它不蕴含 ACA_0；Liu Jiayi 2012 年证明它不蕴含 WKL_0。于是 RT^2_2 与 WKL_0 在 RCA_0 之上互不蕴含，二者都位于 ACA_0 之下，却不在同一条链上。随后，稳定成对拉姆齐定理 SRT^2_2 被证明严格弱于 RT^2_2（Chong、Slaman、Yang 2014），RT^2_2 又被分解为 SRT^2_2 与 COH 的合取；还有 CAC、ADS、DNR、各种选择与组合原理，每一个都有自己的位置、自己的蕴含箭头。Patey 与 Yokoyama 2018 年证明 RT^2_2 的 Π^0_3 后承与 $\mathrm{I}\Sigma^0_1$ 一致，即 RT^2_2 对 Π^0_3 语句保守于 $\mathrm{I}\Sigma^0_1$；由此推出，在 Π^0_2 语句的意义上它并不比原始递归算术强。这批原理的蕴含图，在网络上有专门维护的“逆数学动物园”（Reverse Mathematics Zoo）。

在组合方向上，还有另一类“自然独立性”。帕里斯—哈灵顿命题是拉姆齐定理的一个有限加强形式，它在 PA 中无法证明，而对应的 Con(PA) 级别的强度，使它与古德斯坦定理同属一个层次；弗里德曼的有限克鲁斯卡尔定理，在 ATR_0 中无法证明（辛普森 1985 年的分析），而加上“间隙条件”的加强形式，连 Π^1_1-CA_0 也

无法证明；他后来的布尔关系理论，更提出了一批需要大基数才能证明的有限组合命题。这些结果把阶梯向“朴素”命题方向延伸，使阶梯的读数落到了日常数学的门口。

这类原理的特点是，它们在应用数学家看来几乎是同一个东西：对成对的染色找无穷同色集，听上去平淡无奇。可是它们在蕴含图上的位置各不相同，差别细到需要在可计算性理论里用多年才分得清。刻度精细到这个程度，恰好说明了阶梯的方法论承诺：只要两个陈述在形式上不同，就一定要给它们各自的位置。

动物园对“五大”故事的冲击很大：五格之外，存在大批互相交错、没有被塞进一条链的原理。这是不是对统一性阶梯的反例？本书的回答是：不是，原因恰在它的格式。

逆数学内部对“蕴含”这一把尺也在作细化：计算性约化、韦赫劳赫（Weihrauch）约化等更精细的比较，把“在 RCA_0 之上蕴含”拆成“由一个原理的一次调用计算出另一个原理的解”等多种强弱，使同一格内部的定理再分出层次。韦赫劳赫约化原出自可计算分析（韦赫劳赫 1992），2010 年代中期起，贾法罗夫、帕泰等人把它系统地用于拉姆齐型组合原理，布拉特卡等人则用它刻画分析中的定理。这类工作仍然遵循同一种格式：先固定约化的定义，再让每个原理在其中获得位置。

韦赫劳赫约化的定义可以一句话写完：原理 f 可约于原理 g，指存在两个可计算的泛函 K 与 H，对 f 的任一实例 x，把 K(x) 交给 g 求解，再由 H 结合 x 与 g 的任一解，就得出 f 在 x 上的一个解，记作 $\mathsf{f} \leqslant_{W} \mathsf{g}$。全部的精细处，在于对“调用几次”“是否允许回看 x”的规定。规定一变，同一对原理可约与否便随之而变。这又一次说明，格式先于位置。

线性或偏序，是阶梯的形状；形状的变化，与位置从何而来是两个问题。RT^2_2 的位置——它在 ACA_0 之下，与 WKL_0 不可比，在 Π^0_3 层面与 $\mathrm{I}\Sigma^0_1$ 相当——是由蕴含与保守性这样的形式关系给出的，每一条箭头都附有一份证明或一个模型。动物园里的每个居民，位置同样由定义和推导给出，任何人、任何证明检查器得到同一张图。从全序变成偏序，刻度变得更细、更复杂，仍是同一种刻度：由定义给出的关系结构。

反过来，这也是第三编要反复强调的一点：多元化的统一性，不是只有一条线。偏序、格、树，凡是位置先于使用而被给定的结构，都在这一类里。以“不同方向有多把尺”代替“一把尺”，改变的是尺的个数，没有改变尺的出身。

◆ 9.6　位置由定义给出：刻度化的统一性

现在可以把前面三节合起来，作一个判断。

三种阶梯有一个共同的性质：一个对象的位置，完全由两样东西决定——对象的陈述，加上比较关系的定义。波尔查诺—魏尔斯特拉斯定理在 ACA_0 一格，不依赖它在布拉格的最初证明是何种形态，不依赖后来有多少个行当把它改写成自己的术语，也不依赖这些行当彼此间多大程度上借用过它。Γ_0 是 ATR_0 的读数，不论读它的人在什么共同体里。一致性强度的比较，关系 $T \vdash Con(S)$ 是递归可枚举的，一台机器按证明枚举就能把这类关系列出，不需要任何发生过程的参与。

这就是“谁用都一样”，亦即本书所说的统一性。它不要求只有一把尺；上一节已显示，这把尺可以分叉、变成偏序。它要求的是：尺的读数可以脱离发生过程被搬走、被复核、被生成。阶梯满足这一点，而且满足得最彻底：每条等价附有推导，每个读数附有证明，整张图是一套可审计的公共账。

把这样的结构与意义三律对读，三条律的亏缺方式是清楚的。

特征律的跑法是混沌碰撞、自组织、涌现。在阶梯里，两个系统的差异一经比较，立刻被收入同一把尺的两个刻度之间，差异被转写成方向和距离；它没有机会停留在尚未被安排的状态里相互碰撞。当一个新的等价关系被发现，发生的是“归位”，而非“凝成”：新对象的坐标，在它被陈述的那一刻就已由定义确定，整个图景的结构并不因它而改写，只是多了一个点。

自由律的跑法是矛盾纠缠触发、路径裁剪、新模式。阶梯的比较在固定的基础系统之上进行，反推以 RCA_0 为准绳，一致性强度以哥德尔编码为准绳。这些固定的基准，使不同系统的内容不得相互纠缠，只许在基准上读出差别；基准一旦换掉，读数便无法比较。

幸福律的跑法是张力积累、模式转换、释放。阶梯确实有张力：“RT^2_2 到底在哪里”、“这个命题需要多强的公理”，这些问题推动了数十年的研究。但释放的形态，始终是同一种：为一个悬而未决的对象找到它的坐标，使差异变为已安置的差异。这是三律中幸福律那一条的枯竭形态：释放只有“消除差异”这一种，而不是每一次释放都生出新的张力来源。

还应问一句：数学界为什么把阶梯看作出路？理由很充分。阶梯承认了系统的多：没有哪个系统被宣布为唯一正确，每个系统都有自己的位置；它承认了差异：一个系统比另一个强，不等于另一个错；它还把不可证明的东西变成了研究对象：

独立性、不可判定性不再是失败，而是一格坐标。哥德尔之后，这是一次确实的进步，它使单数统一性的困局不再逼人在“全对”与“全错”之间选择。

可是进步发生在单一性这一侧，统一性没有受到触动。“只有一个系统”变成了“有许多系统，各有各的位置”，位置的来源没有变：仍是先于使用而给定，仍是谁用都一样。三律的读数也就停在原处：碰撞被排序取代，纠缠被固定基准隔开，释放仍是安置差异。

因此本书把阶梯称为统一性的极致形态，并给它一个名字：刻度化。把差异转成同一把尺上的度数，刻得越细，覆盖越广，它越是统一性。给温度计加一位小数，温度计仍是温度计。阶梯刻到了 $\mathrm{RT}^2_{\mathbf{2}}$ 这样的精细处，它没有因此变成别的东西。

有一种反驳值得正面回答：阶梯的建造过程充满创造，何以说它是统一性？五大系统现象的发现、辛普森对反推方法的系统化、斯蒂尔对线性的内模型解释，每一步都是新特征的涌现。回答是：创造的丰沛，与成品的出身，是两个层面。建造阶梯的人经历了混沌碰撞与自组织，这没有疑问；本书考察的是阶梯作为标准运行时的形态。阶梯一旦成形，使用它的人，包括证明检查器，不再需要重走这个过程，也无需知道它是怎样被走出来的。标准运行时与其发生过程脱钩，是统一性的定义性特征；而在谱系标准化之下，位置的读数不能与它的回写历史分离，使用一个读数，就是在使用那段历史。

还有一层，与机器有关。逆数学的每一次反推，序数分析的每一个良基性证明，原则上都可以交给证明助手去生成与核对；这类推导是机械可检的，而大规模形式化早已证明这条路走得通：四色定理有冈蒂埃的 Coq 形式化，开普勒猜想有 Flyspeck 项目，下一章还要谈到连续统假设独立性的形式化。位置由定义与证明给出，意味着位置的计算可以外包。一旦标准可以被机器无差别地生成，“谁用都一样”就达到了最彻底的程度。这是阶梯的优点，也是它在本书的框架中被称为极致的理由：再往前一步，就是尺子自己长出尺子，人退出了刻度的发生。

为便于对照，把阶梯与谱系在几个要点上的分工列成一张表。

要点	强度阶梯（刻度化的统一性）	同一性谱系
位置从何而来	对象的陈述加上比较关系的定义	对象被回写的历史
谁来读	谁读都一样，可交给机器	读数带着“这里才这样”，只能发生
差异的去处	转成度数，归位	在谱系间碰撞，凝成新特征

要点	强度阶梯（刻度化的统一性）	同一性谱系
关系的形状	全序、偏序、格，均由定义给定	亲疏随回写而生成、改写
新对象到来时	多一个点，原图不动	邻近位置的亲疏随之改写

这里还应排除一个误读。说阶梯是统一性，没有说阶梯里的数学是一成不变的；每一年都有新的反推、新的序数分析、新的大基数等价被写出。变的是图上的点，不变的是图的出身。统一性标准化在运行中并不静止，它日日有新增，但新增的方式是同一种。

需要说明一件事：这个判断不是对阶梯的贬低。它是人类数学迄今所造的、最精致的公共尺子之一，上一节的毛边恰好说明它诚实：不能排成一条线的地方，它照实画成偏序。本书不反对标准化，反对的是以统一性去标准化；阶梯正是以最高水平的统一性标准化，把数学各部分连了起来。问题只在：它连接的方式，仍然是以可替换连接——任何两个处于同一格的定理，在这把尺看来是等价的、可互换的。

◆ 9.7　对照：从刻度到谱系

同一性谱系的定义是：同一性的程度由回写历史生成，“这里才这样”；只能发生，不能应用。拿这个定义回头读阶梯，差别立刻清楚。

设想同一条定理，处在 WKL_0 这一格上，却出现在两个行当里。在数理逻辑学家手中，它是紧致性论证的一个形态，与完全性定理、可计算性理论中的树论证一同被反复使用、改写；在分析学家手中，它是一个覆盖定理，被当作闭区间的性质来用。同一格的两个位置，在阶梯上是等价的、可互换的。在谱系上，它们是两种不同的“这里才这样”：每个行当对这条定理做过什么改写，借用了多少来自邻近行当的技巧，哪些变形被后续工作接受并成为默认写法，这些回写的痕迹，决定了两个位置之间的亲疏。亲疏不在定义之中，它在历史之中。

阶梯里没有这个维度。它记录的是一条定理需要什么，没有记录这条定理被写回了什么。位置先于使用，读数与来历无关。这并不是阶梯的疏漏，而是它之所以是阶梯的条件：一条定理在五格中的坐标，在布拉格的书桌前与在今天的证明检查器里没有分别，这种无分别正是它被称作公共尺子的缘由。若读数随来历变，它便不再能被搬走、被机器生成，不同行当的读数也无法并排放在同一张图上，统一性也就消失了。

如果要为阶梯补上谱系的维度，需要增加的不是格子，而是记录。一个定理在五格之中的哪一格，是定义能回答的；它与另一个定理在使用中隔着多远，是历史才能回答的。谱系版的问法大致是：这条定理的证明技术，被哪些后续工作借用过，借用时改动了什么，改动后的版本又回到了哪里。这些问题的答案只能从发生的轨迹里读出，不能从公理的强弱里推出。两个定理可以在阶梯上同格，在谱系上相隔很远；也可以在阶梯上相距几格，在谱系上近邻——例如，因为同一批人长期在两者之间来回搬运方法。

同样的考察可以放到序数记号的自然性上去。上面第 9.2 节指出，“自然”是阶梯里唯一仍带着回写痕迹的地方。这里有一个小小的实验场：同一个序数，在不同的记号系统里写出来，哪一种被后来的工作沿用、哪一种被搁置，这本身是一段可记录的历史，它给“自然”这个词提供了内容。把这段历史保留下来，序数分析便多出一个谱系的侧面；把它擦去，只留下读数，便是纯粹的刻度。阶梯现行的做法是后者。

所以，阶梯到谱系，不是把尺子刻得更细所能到达的。再多一位小数、再多一道偏序的分叉，都在同一种出身之内。缺的是回写：让位置、亲疏与适用范围由被写回的历史给出，而非由定义事先给出。第 18 章的判决预测一正是为这一差别设计的：两个子领域形式标准相同、回写历史不同，同一新证明技术在二者中的采纳与改写程度若有差异，多元化的统一性便无法预测它。

可以把这一差别化成一个判别式，供后文各章反复使用。它是附录二三问（正文见第 12 章 12.8 节，那里是三问的主版本）的一种展开：三问问的是系统内部、系统之间、新系统加入后三处，这里把前两处改写成可以直接操作的形式。面对一把号称“多元”的尺子，依次问三件事。第一，合并 12.8 的第一问与第二问：每个系统内部是否仍是谁用都一样的尺，位置是否先于使用而被定义给出，离开发生过程能否被搬走。第二，是对第二问的检验：若把全部系统的使用历史对调，读数是否依然不变；不变，便说明亲疏由定义排定，没有由回写生成。第三，即 12.8 的第三问：新对象到来时，已有位置的相对关系是否随之改写。三问依次答“是、不变、不改写”，便是统一性，无论它有一把尺还是一百把尺；谱系则对第二问答“变”，对第三问答“改写”。强度阶梯对三问的回答是：是、不变、不改写，与 12.8 所说“是、是、否”同义。

最后补一笔，以免与后文混淆。第 53 号《SDE数学导论》所说伞模型的“统一”，指构造的统一：构造同一、配置成谱。那是谱系的数学形态，与本章所说“谁用都一样”的统一性是两回事。本书将在第四编回到伞模型，用它把“回写

决定位置”写成可以计算的形式；在那里，阶梯可以被读作谱系的一种特殊情形——回写历史被冻结，只剩定义可见的一面。这是本书的读法，其数学部分的一般情形仍属猜想。

下一章转向另一种出路：不排强弱，只承认并存。卡尔纳普的宽容、哈姆金斯的多宇宙、逻辑多元论，把系统之间的关系交还给选择与目的。强度阶梯至少还承认系统之间有一把共用的尺；并存的立场连这把尺也可以不要。它是否因此摆脱了统一性，是第 10 章要检验的问题。

◆ 本章结论

1. 证明论序数、逆数学五大系统与大基数的一致性强度，是同一种工作的三种形态：把系统与命题的强弱刻成公共的尺子。
2. 阶梯近乎线性，但这一线性是对“自然”理论的经验观察，在人为构造的理论之间失效；逆数学中的拉姆齐定理一带，则使阶梯本身成了偏序的动物园。
3. 线性或偏序，是尺子的形状，不是尺子的出身；只要位置由定义与证明给出，多把尺、偏序、格，都是统一性。
4. 阶梯是统一性的极致形态——刻度化：差异被转成度数，三律在其中的亏缺方式是归位而非凝成、基准固定而非纠缠、释放只有安置差异一种。
5. 从刻度到谱系缺的是回写：位置与亲疏由被写回的历史给出，而非由定义事先给出。

◆ 本章参考

— 原始文献

· Gentzen, G. 1936. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. Mathematische Annalen 112: 493–565.

· Gentzen, G. 1938. Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie. Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, Neue Folge 4: 19–44.

· Gödel, K. 1931. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik und Physik 38: 173–198.

- Goodstein, R. L. 1944. On the restricted ordinal theorem. Journal of Symbolic Logic 9: 33–41.
- Kirby, L., Paris, J. 1982. Accessible independence results for Peano arithmetic. Bulletin of the London Mathematical Society 14: 285–293.
- Paris, J., Harrington, L. 1977. A mathematical incompleteness in Peano arithmetic. In Barwise (ed.), Handbook of Mathematical Logic, North-Holland, 1133–1142.
- Takeuti, G. 1967. Consistency proofs of subsystems of classical analysis. Annals of Mathematics 86: 299–348.
- Feferman, S. 1964. Systems of predicative analysis. Journal of Symbolic Logic 29: 1–30.
- Friedman, H. 1975. Some systems of second order arithmetic and their use. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vancouver 1974, vol. 1: 235–242.
- Jockusch, C. 1972. Ramsey's theorem and recursion theory. Journal of Symbolic Logic 37: 268–280.
- Kunen, K. 1971. Elementary embeddings and infinitary combinatorics. Journal of Symbolic Logic 36: 407–413.
- Martin, D. A., Steel, J. R. 1989. A proof of projective determinacy. Journal of the American Mathematical Society 2: 71–125.
- Seetapun, D., Slaman, T. 1995. On the strength of Ramsey's theorem. Notre Dame Journal of Formal Logic 36: 570–582.
- Liu, J. 2012. RT^2_2 does not imply WKL_0. Journal of Symbolic Logic 77: 609–620.
- Chong, C. T., Slaman, T., Yang, Y. 2014. The metamathematics of stable Ramsey's theorem for pairs. Journal of the American Mathematical Society 27: 863–892.
- Simpson, S. G. 1985. Nonprovability of certain combinatorial properties of finite trees. In Harrington et al. (eds.), Harvey Friedman's Research on the Foundations of Mathematics, North-Holland: 87–117.

- Gitik, M. 1989. The negation of the singular cardinal hypothesis from $o(\kappa)=\kappa^{++}$. Annals of Pure and Applied Logic 43: 209–234.
- Patey, L., Yokoyama, K. 2018. The proof-theoretic strength of Ramsey's theorem for pairs and two colors. Advances in Mathematics 330: 1034–1070.

— 研究文献

- Simpson, S. G. 2009. Subsystems of Second Order Arithmetic, 2nd ed. Cambridge University Press / ASL.
- Pohlers, W. 2009. Proof Theory: The First Step into Impredicativity. Springer.
- Rathjen, M. 2006. The art of ordinal analysis. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid 2006, vol. 2.
- Kanamori, A. 2003. The Higher Infinite, 2nd ed. Springer.
- Steel, J. R. 2014. Gödel's program. In Kennedy (ed.), Interpreting Gödel, Cambridge University Press, 153–179.
- Hirschfeldt, D. 2014. Slicing the Truth. World Scientific.
- Dzhafarov, D., Mummert, C. 2022. Reverse Mathematics: Problems, Reductions, and Proofs. Springer.

— 站内著作

- 第 53 号《SDE数学导论》：相容性公理与伞模型的构造统一。
- 第 344 号《意义数学的诞生》：伞模型读作标准化的重生。

◆

10

第 10 章

多宇宙与宽容

本章提要 哥德尔、科恩之后，数学界的第二条出路是让多个系统并存：卡尔纳普 1934 年提出宽容原则，哈姆金斯 2012 年提出集合论多宇宙，比尔与雷斯托尔提出逻辑多元论，数学多元主义随后成形。它们解除了“只有一个系统”的单一性，系统内部的尺子依旧统一，系统之间则没有亲缘尺子——如同几本菜谱并排。本章给出判别，指出这些主张为何被当作出路，又为何意义三律的读数并未同升；并以同一性谱系作对照，指明从多元到谱系缺的是回写。

◆ 10.1 同一句话，两间屋子

连续统假设只有一句话：实数集合的基数是第一个不可数基数，即 $2^{\aleph_0}=\aleph_1$。1938 年，哥德尔在《美国国家科学院院刊》的两页短文里宣布，在可构造宇宙 L 中这句话成立，广义连续统假设与选择公理也成立。1963 年，科恩在同一份刊物上给出另一半：从一个 ZFC 的模型出发，用力迫法添加 $\aleph_2$ 个科恩实数，得到的新模型仍满足 ZFC，基数不塌缩，而连续统的大小变成了 $\aleph_2$。

力迫的做法，可以用一个粗略的图景理解：先在基础模型之上设计一个由“条件”组成的偏序集，每个条件是关于新对象的一小段有限信息；再取一个与基础模型里所有稠密集都相交的“泛型”子集，由它把新对象粘合出来。添加 $\aleph_2$ 个科恩实数时，条件是从 $\aleph_2\times\omega$ 到 $\{0,1\}$ 的有限部分函数；因为这个偏序集满足可数链条件，基数不会塌缩，$\aleph_2$ 在新模型里仍是 $\aleph_2$，新添的实数数目便正好把连续统推到 $\aleph_2$。整个构造是机械的，条件与泛型的定义对谁都一样。

于是同一句话，在一间屋子里成立，在另一间屋子里失败。两间屋子都是 ZFC 的模型，里面的数学家用同一套公理、同一套推理，写出来的定理在共同部分一字

不差，在 CH 这一处却各说各话。若 ZFC 一致，则 ZFC 既不证明 CH，也不证明 ¬CH；这是独立性，与矛盾是两回事。

CH 不是孤例。苏斯林假设（实数线的序刻画）在 1970 年代初由索洛维与坦嫩鲍姆、延森等人证明独立于 ZFC；阿贝尔群论里的怀特海问题，由谢拉赫 1974 年证明独立于 ZFC；测度论、拓扑学里还有一长串这样的命题。独立性从逻辑学家的专门话题，渐渐变成了数学各处都会遇到的常态。

接下来的半个世纪，数学界对这个局面有两种反应。一种是继续找：既然 ZFC 决定不了，就为它添加新的公理，直到 CH 有了答案。大基数公理、力迫公理、伍丁的终极 L 方案，都属这一路。另一种是改变问法：既然 CH 在两间屋子里各有各的真值，也许根本没有“CH 的唯一答案”这件事；两间屋子都是数学的合法居所，问题不再是“哪一间才是数学”。

这第二种反应，便是本章的主题。它的形态不止一种：有的从语言与逻辑的层面讲（卡尔纳普、逻辑多元论），有的从集合论的宇宙层面讲（多宇宙），有的从整个数学的层面讲（数学多元主义）。共同点在于，它们都接受并存，并把并存视为数学的常态而非过渡。前一章的强度阶梯承认系统有强弱，这一章的立场更进一步，把强弱的比较也交给目的去裁量。

问题是：这样的出路，是否同时离开了统一性？本书的回答是否定的。要看清原因，先逐一走进这几个主张，看它们各自怎样安排系统与系统之间的关系。

◆ 10.2　卡尔纳普的宽容

卡尔纳普在 1934 年出版的《语言的逻辑句法》里，提出了后来通称的宽容原则。大意是：在逻辑与数学里没有道德可言，每个人都可以按自己的意愿搭建自己的逻辑，即自己的语言形式（英译本 §17 的原句是 “In logic, there are no morals. Everyone is at liberty to build up his own logic, i.e. his own form of language, as he wishes.”）；对语言形式提出禁令不是哲学家的任务，哲学家的任务是陈述规约，并说明采用某种形式会带来什么后果。

这一立场有它的时代背景。其时，数学基础正处在三派的争执之中：逻辑主义、形式主义与直觉主义，各自主张自己的逻辑是唯一合法的。希尔伯特与布劳威

尔之间关于排中律的争论持续了十余年；哥德尔 1931 年的结果又使任何一方都无法宣称自己在绝对意义上稳固。卡尔纳普的宽容原则，把争论的性质改写了：问“哪种逻辑是正确的”，被换成问“采用哪种语言形式更合用”。排中律成了语言框架的一个选项，有没有它，是便利与成效的问题。

1950 年，卡尔纳普又在《经验论、语义学与本体论》里补上一层区分：框架之内的问题（内部问题）可以按框架的规则回答；对框架本身的选择（外部问题）是实践问题，不是理论问题。在数的框架里，“有没有质数大于一百”是内部问题，有确定答案；“数是否存在”若被理解为对整个数的框架的质疑，则是一个关于是否采用该框架的实践抉择，其评价标准是该框架是否有效、简便、富有成果。

《句法》一书本身就是宽容的示范。卡尔纳普在书中构造了两种语言：语言 I 是极其节制的、近于构造主义的系统，只含原始递归的算术；语言 II 则容纳全部经典数学，包括非构造性的概括。两种语言并排给出，各有一套变形规则与后承规则，读者可以按自己的立场取用，任何一边都不被宣布为唯一合法。这个做法在当时是新颖的：哲学论证被一份份规格说明取代，规格说明对任何读者一律有效。

宽容原则的力量，是它打破了垄断：任何一个框架都可以是合法的。它的第二个特点在本书的论证里更为关键：它是一条对谁都一样的元规则。“每个人都可以搭建自己的逻辑”这句话，对每个人说得一样；框架选择中的评价标准——有效、简便、成果——也是对每个框架一视同仁的。因而宽容原则本身，是一把统一性很高的尺子：它统一的不是系统，而是对系统的态度。

再看框架之间的关系。在卡尔纳普那里，不同的语言形式之间，可以通过句法上的翻译来比较，也可以根本不比较；若有取舍，取舍依据在框架之外，在实用的考量里。框架 A 与框架 B 的亲疏，不在 A 与 B 的使用历史中，而在二者各自的规则与目的之间。每一间屋子的尺子是统一的，屋与屋之间由实用的眼光来衡量。这是几本菜谱并排的最早形态。

卡尔纳普的内外之分，后来受到蒯因的批评：蒯因 1951 年的《经验论的两个教条》以及同年对卡尔纳普本体论观点的评论，主张框架的选择并非与经验全然隔绝，整个信念网络面对经验作为一个整体受检验，修改可以牵动任何一处。这个批评若成立，框架之间的取舍便要追溯到它们在整个网络里被修改、被调整的经过，

其中已有了回写的影子。然而在数学基础的后续讨论中，宽容原则主要仍以卡尔纳普的原貌被继承：框架的选择是目的问题。本书讨论的，正是这一原貌的宽容。

◆ 10.3　集合论多宇宙

哈姆金斯 2012 年发表于《符号逻辑评论》的《集合论的多宇宙》，把并存立场推到集合论内部。核心主张是：存在许多个集合论宇宙，每一个都体现一种集合概念；它们各自满足 ZFC，却可以在 CH 等问题上给出相反的答案。集合论的研究对象因而不是单一的宇宙 V，而是整个多宇宙。关于 CH 的问题，不再等待一条新公理的裁决：我们对它在多宇宙中如何起落已知甚多，这些知识本身就构成了对该问题的回答，哈姆金斯称之为对“梦想解”的拒绝——凡是想用一条新公理一劳永逸地决定 CH 的方案，都与我们已经掌握的、关于 CH 在不同宇宙中既真又假的知识相冲突。

多宇宙并非一堆互不相干的孤岛。哈姆金斯为它列出了一组原则：实现原则、力迫扩张原则、反射原则、可数性原则，以及对“良基幻象”的讨论（哈姆金斯 2012 年的论文）。其中最关键的是，宇宙之间有明确的联络方式：一个宇宙可以做力迫扩张，得到包含它的新宇宙；也可以取内模型，得到嵌在它之内的更小宇宙。围绕这两种联络，哈姆金斯与勒韦研究了“力迫的模态逻辑”，证明有效的原则恰是 S4.2；后续又有集合论地质学（set-theoretic geology）等分支。这些都是实质性的新数学。

多宇宙的研究也产出了关于“V 自己”的新问题。设一个宇宙 V，问它是否是某个更小宇宙（基础模型）的力迫扩张；如果是，这样的基础模型有多少；所有基础模型的交（地幔）长什么样。这些问题只有在多宇宙的视角下才会被提出，答案则要靠力迫与内模型的精密技术获得。多宇宙立场为集合论开辟了新的研究方向，这一点毫无疑问。

这里要讲清楚：多宇宙并非“没有任何联系”。宇宙之间的联系是有的，而且很丰富。本书所谓“系统之间没有亲缘尺子”，指的是另一件事：联络的规则本身，是由构造事先给定的。力迫扩张是一套确定的配方：给定偏序集与模型，扩张的结果由配方算出，对谁都一样；内模型同样是定义好的对象。多宇宙里宇宙与宇

宙的关系，是“从 A 出发，按这个配方，到 B”，这是路径的存在性，而不是亲疏的程度。哪一个宇宙与另一个宇宙“更近”，哪些宇宙在实践里被反复往来、其数学相互改写，多宇宙的框架没有这样的读数；它记录的是配方能否走通。

同样的情形，在多宇宙的对立面也成立。伍丁的终极 L 方案主张宇宙只有一个，CH 在其中成立；这个主张要以一族公理与猜想（如 Ω 猜想）为条件，至今仍是一个活跃的研究纲领，没有定论。无论赞成多宇宙还是赞成单一宇宙，争论的格式一样：什么是正确的集合论宇宙，由公理与定义裁定，裁定对所有研究者一致。这一点把两派置于同一块底板之上，也预告了下文的结论：单数与复数，是统一性内部的分歧。

哈姆金斯本人对多宇宙观的辩护，还指出了一个有趣的对照：几何学在非欧几何出现之后，没有人再问“哪一种几何才是几何”，而是同时研究欧氏、双曲、椭圆等各种几何，并在更一般的框架（黎曼几何）里统一处理。他希望集合论走同一条路。这个类比有启发：几何学走过的路，恰好显示出统一性如何在多元之后继续运行——更一般的框架出现了，它把各种几何装进同一份定义（黎曼度量与曲率），欧氏、双曲、椭圆三种几何成为常曲率取不同值的特例，位置由曲率这个参数事先给出。这是一个优美的统一，与第 53 号所称的“构造统一”有相通之处；至于曲率这个配置是否随回写而成谱，黎曼框架没有涉及，它给的是一个事先可取的参数。

另一类证据来自机器。Han 与 van Doorn 在 Lean 证明助手里形式化了 CH 的独立性证明（成果发表于 2020 年的 CPP 会议）；Gunther、Pagano、Sánchez Terraf 与 Steinberg 则自 2018 年起在 Isabelle/ZF 里逐步形式化力迫法，2022 年报告了从可数传递模型出发、构造 ¬CH 成立的力迫扩张的完整验证。力迫的配方可以被写成程序，并被检查器逐步验证。这是“谁用都一样”的直接表现：不同宇宙之间的联络，已经可以交给机器去生成与核对。

最容易看清力迫之为配方的，是回看 10.1 节的那个构造：偏序取定，泛型滤子取定，可数链条件保证基数不塌缩，三步都有确定的写法。在可数传递模型上，条件的选取与滤子的使用都可以逐行写成程序，形式化要做的，正是把这些写法一行

一行交给检查器去核对；检查器不问这个构造是谁想出来的，也不问它此前被用在过哪些领域，它只核对每一步是否合乎规则。配方之为配方，在这里最为清楚。

◆ 10.4　逻辑多元论与数学多元主义

比尔与雷斯托尔 2000 年发表《逻辑多元论》，2006 年出版同名专著，主张存在多于一种正确的逻辑后承关系。他们的办法，是先给后承一个共同的图式，即广义塔斯基论题：一个论证在 x 意义下有效，当且仅当在每一个 x 情形中，前提为真则结论为真。再让“情形”的所指有若干种合理的选择：塔斯基模型对应经典逻辑，构造对应直觉主义逻辑，情境对应相干逻辑。三种情形给出三种正确的后承关系，各自对应一类推理实践。

多元论遭受的批评很多。其中一类（普里斯特等人提出的坍缩论证）认为，多元论者在表述自己的立场、判断一个推理该不该被接受时，仍要用到某一条后承关系，于是多元论在运行中塌向一元论（普里斯特 2006 年的著作中有此论证；比尔与雷斯托尔的《逻辑多元论》2006 年出版，是被批评的主要对象）。另一类质疑“情形”的各种选择是否确有同等资格。本书不在这些争论里站队，只取一个结构性的观察：这一多元论是以一个统一的图式为骨架的。图式对所有逻辑一视同仁，每种逻辑只是图式里一个参数的不同取值。参数取什么值，由对“情形”的选择给出，不由各逻辑在实践中彼此的往来给出。这与上一节的框架类似：系统之内有统一的尺子，系统之间由事先给定的图式相连。

从逻辑到整个数学的多元，是弗兰德 2014 年《数学中的多元主义：哲学中的新立场》所勾画的方向，也有巴拉格尔 1998 年的“全血柏拉图主义”，主张凡逻辑上一致的数学对象都存在，从而一切一致的数学理论都描述某个数学实在。弗兰德强调的是实践层面的多元：数学共同体里同时存在多种做法，它们有各自的标准，应当按各自的标准来评价，而不是拿一种做法去审判另一种。

逻辑多元论的内部，各种逻辑之间的关系也有成熟的刻画。经典逻辑的定理集合包含直觉主义逻辑的定理集合；经典逻辑可以通过否定翻译（哥德尔—根岑翻译）嵌入直觉主义逻辑；相干逻辑与它们的关系则要看失去了哪些结构规则。这一切都是形式的、可核对的比较，每一项比较都有确定的结论。逻辑多元论者所依靠

的，正是这类比较的清晰性：各逻辑之间虽无单一的优劣次序，却有一张精确的关系图。关系图的精确，恰说明联络是由定义给出的。

这几种主张的侧重各不相同，却可以用同一幅图画概括。取出若干本菜谱，每本里的做法自成一体：几克盐、几成火候、先后次序，都有统一的规矩，同一本里的两道菜可以按同一把量勺来比；两本菜谱并排放在书架上，各自合法，谁也不审判谁。若问“这一本的做法与那一本有多近”，答案要么没有，要么由事先给出的一份对照表（如何换算度量单位）来回答，而这份对照表对每个看它的人都一样。

站内第 344 号《意义数学的诞生》提供了另一个切口：“3 克”与“一小撮”划在不同的轴上，不能按“精不精确”这一根尺子来比。这一观察对多元化的统一性是一个提醒：如果把两本菜谱的差别化为同一把尺的刻度，就已经把它们压回统一性；若要说二者的亲疏，要看这两种划分在使用者手里被改写、被换算、被回用的经过。

实践导向的多元主义最值得单独一提。弗兰德的主张把评价标准绑在实践上：每一种数学实践有它自己的标准，应当按它自己的标准衡量。这是几种主张里最靠近谱系的一种，因为它把标准与实践联系了起来。然而从本书的判别看，它仍在统一性的一侧：每种实践的标准一旦被刻画，就是一份可以交付的规格；实践与实践之间如何互相改写，不进入这份规格。至于实践与实践之间的相互改写能否在其框架里得到安放，是另一个问题，本书只取其结构。

◆ 10.5　几本菜谱并排：判别

现在可以把判别写出来。第 12 章 12.8 节给出了三问的主版本：系统内部是否仍受相容性约束，系统之间的亲疏是否由事先给定的定义排定，新系统加入之后旧系统的运行是否改写；附录二给出它的编码形式。本节所列是附录二三问的一种展开，把第二问拆开，便于逐项检视前文的四种主张。对任何一个号称“多元”的数学安排，问四个问题。

其一，每个系统内部，尺子是否统一，即定义、推理、判准是否对所有使用者一视同仁？

其二，系统之间的联络，是由事先给定的配方、图式或对照表给出，还是由使用中的回写历史给出？

其三，把各系统的使用史整体对调，联络的读数是否依然不变？

其四，系统是否可以脱离其发生过程被搬走，乃至被机器生成？

其一对应 12.8 的第一问；其二、其三是第二问的两个侧面，一问来源，一问把来源拿去检验；其四问的是尺子能否脱离发生过程，它是前三问的共同后果。12.8 的第三问（新系统加入之后旧系统是否改写）在下面四种主张上同样答“否”：新的框架、新的宇宙、新的逻辑加入，都只是多出一个选项，旧有的联络不因它而变。按这四问逐一检视前文的四种主张，每一种都分别作答，不合并断言。

宽容原则：系统内部统一，联络由实用的选择给出；对调使用史，所有的取舍依据都在框架之外，读数不变；框架一经规约，即可被搬走。四问的答案分别是：是，事先给定，不变，能。

集合论多宇宙：每个宇宙内部服从 ZFC，统一；宇宙之间的联络是力迫与内模型，由配方给出；对调使用史，哪些宇宙存在、彼此如何联络，不受影响；联络已有机器形式化。四问的答案相同。

逻辑多元论：每种逻辑内部统一；逻辑之间由广义塔斯基论题的参数联系，参数取值是对情形的选择；对调使用史，读数不变；各逻辑的推理规则可以被写成程序。四问同样。

数学多元主义：系统内部各有标准；系统之间由“按各自标准评价”这一元规则相连；对调使用史，这一元规则的内容不变；各系统的做法可以被系统化、被传授。四问同样。

主张	内部尺子统一	联络的来源	对调使用史后读数	可搬走、可生成
宽容原则	是	实用选择、事先规约	不变	是
集合论多宇宙	是（ZFC）	力迫与内模型的配方	不变	是（已有机器形式化）
逻辑多元论	是	广义塔斯基图式的参数	不变	是

主张	内部尺子统一	联络的来源	对调使用史后读数	可搬走、可生成
数学多元主义	是（各实践自有标准）	“按各自标准评价”的元规则	不变	是

四个主张在四问上全部同答。所以按照本书的定义，它们属于多元化的统一性。这里面还藏着一个旁证。作者此前的原稿《标准如何生成数学》第 18 章对并存立场定过一条明确的纪律：不同分支的条件结论不可随意拼接，必须标明各自的前提，否则会制造出并不存在的综合优势；构造数学的研究者也提醒读者，不要把不同的构造解释合成一个无差别的世界。这条纪律是对的，也是并存立场得以成立的必要条件。然而从本书的视角看，它恰是系统之间“相容性公理”的一个版本：为防止不同系统相互污染，规定各自的前提不得混用，各分支各守其界。在系统之间，纠缠被设置为受限的、须登记的操作。

判别式有它的失败条件，须事先写明。若某个多元主张对第二问答“回写给出”，即系统之间的位置与亲疏确由使用中的写回历史生成，而且这个生成过程被纳入了主张本身的内容，它便越出了多元化的统一性，进入谱系的边界。若对四问的答案出现分歧，比如系统间的联络一部分由配方给出、一部分由历史给出，则应分开计，不得合并断言。本书目前检视的四种主张，没有出现分歧。

读者或许要问：若多元之后，各系统之间的往来频繁、相互借用，岂不是已有了亲缘？问题在于，往来的实际情况是一回事，尺子是另一回事。数学家们当然在不同的系统之间借用方法，力迫一类的方法，在集合论、可计算性理论与模型论的不同分支之间都曾被借用、被改造（费弗曼 1965 年把力迫与泛型集用于算术与证明论，亚伯拉罕·罗宾逊 1971 年前后在模型论里引入了无穷力迫）；借用是实际发生的、有历史的。但在多元化的统一性的框架里，这些历史没有进入尺子：多宇宙理论不因集合论者与代数学者往来多寡而改变它对两个宇宙关系的描述。尺子里没有历史，历史便是尺子之外的事。

◆ 10.6　为什么被当作出路，三律读数为何没有同升

这些主张被当作出路，理由充分，不妨认真说一遍。

第一，它们化解了真假之争。独立性定理之后，如果坚持只有一个正确的集合论，就得为 CH 找一条无人能反驳的新公理，而这至今没有找到。承认并存，使一场看似无望的争论失去了赌注。

第二，它们保护了数学实践的多样。构造数学、经典数学、范畴论的基础、非标准分析，各自有成熟的做法与成果；并存立场使这些做法免于被一把尺审判。

第三，它们与哲学上的反基础主义潮流吻合：不再要求一个唯一的、先于一切的基础，而容许基础的复数。

这三条都成立。本书并不质疑，多元比单一好得多：它使单一性的暴力退场。需要追问的是下一步：单一性退场之后，意义三律运行得如何。这里，不妨逐律审视。

特征律需要混沌碰撞，使差异在介生态里相互冲撞，凝成新特征。并存立场下，各系统各自封闭在自己的定义里，彼此碰撞的机会不多：A 系统的定理要进入 B 系统，须先翻译，翻译须保持前提，前提须登记。碰撞被事先的翻译规则所调停。系统多了，调停的规则也跟着多，碰撞没有随之增多。

自由律需要矛盾纠缠触发路径裁剪，在约束之中裁出原本没有的新路。并存立场把选择交给目的：不同的目的选不同的系统。这是在现成的系统里挑选，路径的数目增加了，裁出的却不是新路，仍是“挑一个现成的”。第 344 号所说，自由的量度是新路径的发生能力，不是选项的多少，说的正是这一点。

幸福律需要张力积累后的释放，且每次释放生出新的张力来源。宽容原则所做的释放，是宣布差异无害：两个系统各有各的道理，争论失去必要。这个释放很轻松，也很干净，但它是用“消除差异”的方式完成的——差异被宣布为无关，而不是被安排成能生出新特征的位置。释放之后，没有新的张力来源。

再从组织与连接的角度看一层。并存使一个共同体里的成员可以各取所需，却也使成员之间的连接依赖对照表：要合作，先对表。对表可以做得很好，但每一次合作都是“把我的换算成你的”，参与的双方在对表中是可替换的——换一个人来对，对出的结果相同。这正是以可替换连接的方式，只是被连接的单位从个人上升为系统。以亲缘连接，则要求连接的内容随双方的往来而生长，换一个人来，连接就不再是原来那一个。

因此在三律的读数上，多元化的统一性与单数的统一性方式相同：特征律的碰撞被调停取代，自由律的纠缠被分界限制，幸福律的释放仍是消除差异。系统的数目增加，只是读数的分母增加，分子没有同升。这一点，本书不依赖印象，而依赖第 18 章的判决预测二：在系统数量增加的方向上，非原作者开出的新路与长期问题的解决数，是否随系统数同升。若同升，第三编撤回。

对此可以举 CH 为例。在多宇宙的立场下，“CH 究竟成不成立”被宣布为失去单一答案的问题，数学家们不必再为此争论；争论的热量散去，研究的力量转向了力迫技术本身。这是一次干净的释放，但释放的方式是：把一个张力来源（CH 的唯一答案）从问题清单上划掉。张力没有被安排成能生出新特征的位置，只是被撤销。撤销之后留下的是技术的积累，不是新的问题域。当然，多宇宙的研究也带来了地质学一类的新问题，10.3 节已经承认。本书的看法是：这类新问题来自力迫技术自身的内部发展，不是因为“并存”这一立场而产生的新张力。

还有一种情形值得单独标出：多元之后若回写也一并缺席，系统之间连一份对照表也不再维护，只剩无亲缘的增殖，便成了漂泊。宽容原则的反面是“怎么都行”，数学多元主义最强的表述里有这种倾向。漂泊实为多元化的统一性的退化端，同样在第 12 章展开。

这里值得停一下，看一看漂泊的反面，以免对多元化的统一性估计过苛。并存的纪律本身是有分量的：标明前提、标明版本、标明翻译方向，这些要求使并存不致沦为各说各话。一个并存的数学共同体，若遵守这套纪律，其内部的合作是高效而清晰的。本书说它仍属统一性，并不是说它是低劣的；统一性在组织与连接上的功绩，在第 2 章里已经论述过。本书要问的，仅仅是它对意义三律意味着什么。

◆ 10.7　两个反驳与回应

对本章的判断，至少有两个反驳需要正面回答。

第一个反驳说：多元之后，数学确实长出了新东西。非欧几何的出现，使几何学从一个系统变成一族系统；构造数学与经典数学并立，使“证明”一词获得了新的内容；多宇宙研究产出了地质学与模态逻辑。这些都是特征律的涌现，怎能说三律没有同升？

回应是：这些新东西的存在，本书全部承认，并且认为它们极为重要。问题在于它们的来源。非欧几何的出现，是平行公理被否定后一个合法系统的显露，它之所以成为数学，靠的是相对一致性的建立——也就是靠模型：在欧氏空间里造出双曲几何的模型，使新系统获得了与旧系统同一把尺上的位置。新系统出现之后，欧氏与非欧氏的关系，由模型和翻译给出，对谁都一样。涌现发生在新系统被造出来的那一刻；此后，新系统作为标准运行，进入的是统一性的轨道。本书关心的是标准运行时三律的读数，而不是标准诞生时的创造。诞生时的创造，在任何一种标准化下都会发生；运行时三律的亏缺，才是区分统一性与谱系的地方。

第二个反驳说：既然多元之后各系统彼此借用，历史实际上已进入了数学，为何说它们是统一性？

回应是：历史进入了数学家的工作，没有进入标准的构造。这是两件事。10.5节判别式的其三问的是后者：把各系统的使用史整体对调，联络的读数是否改变。在多元化的统一性里，读数不改变，因此历史虽然发生，却是标准之外的事。谱系标准化则要求把历史纳入标准本身，使读数随历史而生。要做到这一点，需要新的数学构造，这正是下一编伞模型要给出的东西。

还有一个方便的检验。设想有人问：在多元的数学里，一位初学者应当先学哪个系统？按多元化的统一性，答案由目的决定：想做分析，先学经典；想做算法，先学构造；想研究独立性，先学力迫。这个回答对每位初学者都一样，只依赖目的。按谱系，答案还要依赖这位学习者所在的行当、手边已有的方法、前人在这一处写回过什么：同一个目的，在不同的位置，应当走不同的路。第二种回答更像一位好老师的建议，第一种更像一份说明书。

有了这两个回应，可以把本编的路线说得更清楚：强度阶梯是纵向的刻度化，宽容与多宇宙是横向的并存化，下一章的“相同”的扩张，是把等同的范围推宽。三个方向都在统一性之内增加复数，没有一个引入回写。

◆ 10.8　从多元到谱系：缺的是回写

把多元与谱系并排，差别在一处：程度从哪里来。

在多元化的统一性里，系统 A 与系统 B 的关系，是一份事先给定的联络：力迫的配方、情形的参数、框架的选择理由。联络可以很丰富，丰富到构成一门新的数学；它的读数——能否到达、如何到达——在被定义时就已经确定。

在同一性谱系里，A 与 B 的亲疏，由它们被回写的历史生成。回写指的是：一个结果写回它所在的定义、实践和后续的路径，并因此改变自己的位置。力迫这项技术在集合论、模型论、描述集合论、可计算性理论中的境遇，可以作为一例设想：它在每个领域里被怎样学习、怎样改造、哪些改造被后续工作采用、哪些被弃置，这一段一段的回写，使力迫在每个领域里所处的位置各不相同。力迫在谱系上的“这里才这样”，是这些历史的产物；在多宇宙的框架里，力迫只是一个配方，对谁都一样。

若要把这一差别变成可观察的东西，需要的记录大致有三项：一项技术或结果从哪个领域出发，进入了哪些领域；进入每个领域时被改写成什么样；改写后的版本是否又回到出发的领域，成为那里的新默认。这三项记录合起来，才是“这里才这样”的材料。多元化的统一性不需要这些记录，它的联络靠配方即可运转；谱系则一刻也离不开它们。第 18 章的判决预测一，正是通过比较两个子领域对同一技术的采纳与改写，检验这些记录是否提供了配方之外的信息。

所以，多元与谱系的区别，不在数目。把菜谱从三本增加到三百本，仍是菜谱；让一本菜谱在三百个厨房里被做出来、被改良、被写回，每个厨房里的这道菜才有了自己的位置，菜谱之间才有了亲缘。从多元到谱系，需要的是后一个过程：回写。

第 457 号《AI对科研的冲击为何首先表现在数学上？——从知识的统一性到同一性谱系》论述了统一性在知识层面的退位与谱系的接替，第 552 号《陶哲轩如何才能与大模型公司和解与合作呢？》论述数学之场的谱系与迁移；本书取其中标准化的这一化，考察标准如何才能由回写历史生成。回写如何进入数学的构造，是第四编的任务：第 53 号《SDE数学导论》与第 344 号《意义数学的诞生》提供了伞模型，本书读它为谱系标准化的数学形态。伞模型的“统一”指构造同一，配置成谱，与本章所说“谁用都一样”的统一性是两回事；在伞模型里，不同配置之间的亲疏，随回写而生成，不由定义事先给出。

最后回到本编的判断：多元不是出路。多元化的统一性与单数的统一性，对意义三律的亏缺方式相同；强度阶梯是它的刻度形态，宽容与多宇宙是它的并存形态。伞模型的数学将在第四编给出。这里只先预告一点：在伞模型里，一个数、一个系统的位置，是由伞心、半径、核函数这几个量，加上它与邻近伞的重叠方式共同给出的；重叠处允许碰撞与纠缠，权重随回写改变。这是一种让历史进入构造的办法。它是否站得住，由第 18 章的判决预测零来检验。

这也提示了下一步的方向。几何学的例子说明，把许多系统装进一个更一般的框架，是数学擅长的事情；而把这个框架里的位置，从事先给定的参数改为随回写而生成的量，是数学尚未做过的事情。伞模型的任务，恰在于此。在此之前，多元的数学可以被安放得很好、被运用得很好，也可以被机器很好地检查；它缺的那一件东西，本章已经指明。

一句话收束本章：并存解除了“只有一个”，没有解除“谁用都一样”。要解除后者，需要让位置随回写而生，这是并存立场尚未提出、也无需提出的要求，却是同一性谱系的核心。

接下来的第 11 章看另一种扩张：把“相同”本身的范围扩大，从同构、范畴等价一直到同伦类型论的单价公理。

◆ 本章结论

1. 宽容原则、集合论多宇宙、逻辑多元论、数学多元主义，都解除了单一性，系统内部的尺子依旧统一，仍属统一性。
2. 系统之间的联络，无论是翻译规则、力迫配方还是广义塔斯基图式，都由事先的构造给出，不由使用中的回写历史给出。
3. 它们被当作出路有充分的理由，却使三律的亏缺方式原封不动：碰撞被调停取代，纠缠被分界限制，释放仍是消除差异。
4. 系统数目的增加不带来三律读数的同升，这一点由第 18 章的判决预测二检验；多元而无回写的极端，是漂泊。
5. 从多元到谱系，缺的是回写：程度由被写回的历史生成，只能发生，不能应用。

◆ 本章参考

— 原始文献

- Carnap, R. 1934. Logische Syntax der Sprache. Wien: Springer. 英译本 The Logical Syntax of Language, 1937.
- Carnap, R. 1950. Empiricism, semantics, and ontology. Revue Internationale de Philosophie 4: 20–40.
- Gödel, K. 1938. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis. Proceedings of the National Academy of Sciences 24(12): 556–557.
- Cohen, P. J. 1963. The independence of the continuum hypothesis. Proceedings of the National Academy of Sciences 50(6): 1143–1148；续篇 51(1), 1964: 105–110.
- Hamkins, J. D. 2012. The set-theoretic multiverse. Review of Symbolic Logic 5(3): 416–449.
- Hamkins, J. D., Löwe, B. 2008. The modal logic of forcing. Transactions of the American Mathematical Society 360: 1793–1817.
- Beall, J. C., Restall, G. 2000. Logical pluralism. Australasian Journal of Philosophy 78: 475–493.
- Woodin, W. H. 2011. The continuum hypothesis, the generic-multiverse of sets, and the Ω conjecture. In Kennedy, Kossak (eds.), Set Theory, Arithmetic, and Foundations of Mathematics, Cambridge University Press.

— 研究文献

- Priest, G. 2006. Doubt Truth to be a Liar. Oxford University Press.
- Feferman, S. 1965. Some applications of the notions of forcing and generic sets. Fundamenta Mathematicae 56: 325–345.

- Robinson, A. 1971. Infinite forcing in model theory. In Fenstad (ed.), Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium, North-Holland: 317–340.
- Beall, J. C., Restall, G. 2006. Logical Pluralism. Oxford University Press.
- Friend, M. 2014. Pluralism in Mathematics: A New Position in Philosophy of Mathematics. Springer.
- Balaguer, M. 1998. Platonism and Anti-Platonism in Mathematics. Oxford University Press.
- Shapiro, S. 2014. Varieties of Logic. Oxford University Press.
- Han, J. M., van Doorn, F. 2020. A formal proof of the independence of the continuum hypothesis. Proceedings of CPP 2020, ACM. DOI 10.1145/3372885.3373826.
- 阳涌：《标准如何生成数学》（原稿）第 18 章，竞争标准与理论并存。

— 站内著作

- 第 53 号《SDE数学导论》：相容性公理与伞模型。
- 第 344 号《意义数学的诞生》：“3 克”与“一小撮”，自由律与路径的发生。
- 第 457 号《AI对科研的冲击为何首先表现在数学上？——从知识的统一性到同一性谱系》。
- 第 552 号《陶哲轩如何才能与大模型公司和解与合作呢？——从统一性数学到同一性谱系数学》。

◆

11

第 11 章

“相同”的统一

本章提要 同构、范畴等价、森田等价、格罗滕迪克的相对观点，直到同伦类型论的单价公理，数学一路把更多的东西收进“相同”。本章把这条线读作统一性的扩张：“相同”的口径由定义给定，谁用都一样，可以搬走，可以交给机器核验。同伦类型论让“怎样相同”成为带有内容的数据，是第三编里最靠近谱系的一处；然而这些路径由理论的形成规则产生，没有回写历史，谱系尚未开始。

◆ 11.1 十六张表，十种结构

取两个符号 0 与 1，在其上写一张二元运算表。四个输入依次为 (0,0)、(0,1)、(1,0)、(1,1)，每个输入的输出取 0 或取 1，于是一张表可以写成四位串 abcd。串 0110 是模 2 加法：0 是单位元，1 与自己运算回到 0。串 1001 看上去是另一张表：1 是单位元，0 与自己运算得 1。把 0110 里的每个符号对调——0 写成 1，1 写成 0——便得到 1001。两张表之间存在唯一一个保持运算的双射，就是这一次对调。

在“有标号”的口径下，这是两张表；在“同构”的口径下，这是同一个二阶群。全部二元运算共有 $2^4=16$ 张，按同构合并之后是 10 种。下面的数字取自作者原稿对 {0,1} 上二元运算的完整枚举，并在本章用手算复核：

条件	有标号运算表	同构类型
任意二元运算	16	10
结合律	8	5
交换律	8	4
结合律并且交换律	6	3
结合律并且有双侧单位元	4	2
群公理	2	1

十这个数可以这样核对。对调符号之后仍是原表的，要求首尾两位互为补数、中间两位也互为补数，恰有四张：0011（左投影）、0101（右投影）、1010 与 1100。其余十二张两两配对，成为六个轨道。四个单元轨道加六个双元轨道，合计十种。同一个数还可以由伯恩赛德计数得到：(16＋4)÷2＝10，其中 4 是对调下不动的表数。

表中另有一个细节：结合律与交换律各有 8 张表，二者重合的只有 6 张，所以 16、8、8、6、4、2 是六个指定条件下的计数，不是逐项添加公理的一条轨迹。在这个两点载体上，四张带单位元的结合表恰好都交换，这是该载体上的一件具体事实，换到别的载体，同样的数字可以来自不同的判定结构。数字相同，并不保证口径相同；比较两个数之前，先要知道各自数的是什么。

这组数字里有一件容易滑过去的事：16 与 10 都是正确的计数，区别只在于“相同”取哪一种口径。口径一经写定——双射、保持运算、对调符号算同一——任何人拿去数，得到的都是 10；规范代表可以取字典序较小的那一串，程序算一遍就完事。“相同”的这套规定不依赖谁来数、在哪里数、为什么数，它可以脱离任何发生过程被搬走。这正是本书第 0.3 节所立的统一性：谁用都一样。

由此引出本章的问题。两千年来，数学不断地把“相同”的口径放宽：先是形状全等，然后是同构，然后是对象不必一一对应的范畴等价，然后是连对象所在的世界都可以更换的森田等价，最后是同伦类型论里“等价即相等”的单价公理。口径一次比一次宽，被收进“相同”的东西一次比一次多。本章要问的是：这一路扩张，是统一性的扩张，还是谱系的开端？

本章的判断先行说出，后面逐节验证。把更多东西纳入“相同”，是统一性的扩张——尺子变得更宽、更巧，仍是一把谁用都一样的尺子；单价公理之后，“怎样相同”不再只是一个是或否的判断，而成了带有内容的路径，这是同伦类型论里值得点出的萌芽；但路径由理论的规则生成，不由使用它的历史生成，所以谱系要等到路径带上历史之后才开始。11.2 至 11.6 依次考察五种口径，11.7 作出分界，11.8 把这条线放回意义三律。

◆ 11.2　同构：由定义给出的“相同”

“相同”的口径由所选的结构给定，这一点在克莱因 1872 年的埃尔朗根纲领里已经显出轮廓。纲领把一种几何读作一个变换群下保持不变的性质：全等几何看刚体运动群，相似几何看相似变换群，仿射几何看仿射群。同一个平面上的两个图形，在刚体运动群下可能不同，在相似群下却是同一个。“相同”随群而变，群换

了，几何也就换了。这里已经有了一族口径，而每一种口径内部，判据对谁都一样。

同构把这个想法推到一般的代数与拓扑结构。在一个范畴里，同构是有双侧逆态射的态射：集合范畴里是双射，群范畴里是可逆的群同态，拓扑空间范畴里是同胚。同样一个底层的函数，在不同范畴里得到不同的判决。取实数集 R 的两种拓扑，一种是离散拓扑，一种是通常拓扑，恒等函数从前者到后者是连续的双射，因为通常拓扑中的开集在离散拓扑中都是开集；它的逆函数却不连续，单点集在离散拓扑中是开的，在通常拓扑中不是。于是这同一个函数，在集合范畴里是同构，在拓扑空间范畴里不是同构。

群的情形给出对照。设 f 是群同态，且底层函数是双射，任取目标中的两个元素 a、b，写成 $a=f(x)$、$b=f(y)$，则 $f^{-1}(ab)=f^{-1}(f(xy))=xy=f^{-1}(a)f^{-1}(b)$，逆函数自动是群同态。双射同态因而自动是同构。拓扑里没有这条保证。同一个口径的写法“有逆”，在两个范畴里要核查的内容不同：这是“相同”随所选结构而定的最小例子。

口径一旦写定，同构带来的搬运力非常强。若两个结构同构，则在它们共同的语言里，凡能陈述的句子，一边成立，另一边亦成立。一个定理在一处证明，到同构的另一处不必重证。数学家日常说的“在同构意义下”，就是把这种搬运力当成默认的权利。群论里关于二阶群的所有结论，对 0110 和 1001 一视同仁；人们谈论的是“二阶群”，不是写在纸上的某一张表。

这里可以回看第 0.1 节的那个 3。自然数 3 可以读作三元集合的同构类：凡是能与 $\{0,1,2\}$ 建立双射的集合，都属于这一类。一眼看到的三个点、手指摸过去的三圈、耳朵听见的三声，只要能一一对应，在同构类里就是同一个 3。第 344 号《意义数学的诞生》谈到同一只杯子，看是一眼的一，摸是一圈的一，听是一声的一；本书读到的是，同构类恰好把这三种“一”收成了同一个，谁的 3 都一样。这既是计数得以成立的条件，也是它抹去的东西：看、摸、听各自划单位的方式，在同构类里没有位置。

同构的口径还有一个性质，值得在此记下：它由定义一次给出，没有程度。两个结构，或者同构，或者不同构；若同构，同构的方式可以有若干种，但同构的计数通常只问有没有。11.1 的表格里，每一个条件下的同构类型数，都是一个只问“有没有同构”的数。这个性质在 11.6 节会重新出现，那时它将成为关键。

同构的口径也有适用的边界，边界同样由定义划出。倘若元素的名字另带外部含义——0 代表“断”，1 代表“通”，或者两个符号分别是两种不能互换的单位

——那么对调符号的重标号就不再被允许，同构分类中的“十种”便要换成别的数。这时必须把外部条件写进结构与映射，重新规定什么叫保持结构。换言之，同构并不是一个放之各处而皆准的“相同”，它是在已经写定的语言与结构之内才有意义的判据；口径变了，数出来的结构个数也跟着变。数的本身没有错，错的只会是把一种口径下的数拿到另一种口径里去用。

◆ 11.3　范畴等价：对象不必字面一一对应

同构要求两个对象之间有一个双侧可逆的映射。艾伦伯格与麦克莱恩 1945 年的论文《自然等价的一般理论》提出了更高一层的问题：当许多对象各自同构，这些同构是否彼此协调。论文以有限维向量空间及其对偶、双重对偶为入口。对每个有限维向量空间 V，有典范映射 $\eta_V: V\to V$，**把向量 v 送到“用线性函数 λ 去评价 v”的那个函数，$\eta_V(v)(\lambda)=\lambda(v)$。它在有限维情形是同构，且与任意线性映射 $f: V\to W$ 相协调：$f\circ\eta_V=\eta_W\circ f$。**这一族同构不依赖任何基底的选择。

协调是实在的额外要求。仍在有限维实向量空间里，可以构造一族逐个对象都合法、整体上却不协调的同构：对一维空间 V 取 $\theta_V=2\cdot\mathrm{id}$，其余取恒等映射。每个 θ_V 都是线性同构，但取 $f: R\to R^2$，$f(x)=(x,0)$，则 $\theta_{(R^2)}\circ f$ 在 $x=1$ 处给出 $(1,0)$，$f\circ\theta_R$ 给出 $(2,0)$，两者不等。失败不出在任何单个对象上，而出在对象之间的接口。于是“相同”从“对象与对象相同”升了一级，变成“一族相同与所有映射协调”，这就是自然同构。

在此基础上，范畴等价把对象的字面对应也放松了。两个范畴 C、D 等价，指存在函子 $F: C\to D$ 与 $G: D\to C$，使 $G\circ F$ 自然同构于 C 的恒等函子，$F\circ G$ 自然同构于 D 的恒等函子。在选择公理之下，这等价于 F 是忠实的、充满的，并且本质满射：不同的态射不被合并，目标里对应对象之间的态射都来自源，目标里每个对象同构于某个像对象。

一个具体的例子可以看出放松了什么。有限维实向量空间范畴 FinVect 的对象多得不成集合：每一个有限维实向量空间都是对象。另有一个范畴 Mat，对象是自然数 n，从 n 到 m 的态射是 $m\times n$ 的实矩阵，复合是矩阵乘法。把向量空间 V 送到它的维数，再选定基底把线性映射写成矩阵，就得到 FinVect 与 Mat 的范畴等价。前者有一个真类的对象，后者只有可数个，二者并不字面一一对应，却在范畴的全部可说之处相同。线性代数课上“选一组基，写成矩阵”的日常动作，就是在这个等价里挑一个骨架。

骨架这个词值得停一下。FinVect 里同构的向量空间成千上万，Mat 里每个同构类只留下一个代表，这样的子范畴称为骨架。从 FinVect 到 Mat 的挑选需要在每个同构类里指定一个代表，并为每个空间指定一个到代表的同构，这些指定在一般情形下用到选择公理。选择是一次实际发生的动作，等价的说法却把它藏进了“存在”二字：只要存在这样的指定，两个范畴就算相同，指定如何作出，不再进入判断。

范畴等价抹去的，是同构类之内的个体性。一个范畴里同构的两个对象，对范畴内可陈述的一切性质不可区分，因而范畴论里形成了一条行规：谈论两个对象字面上相等，被视作不得体的事；范畴论者半开玩笑地把这类做法称为“邪恶”（evil），其判据是：一个定义若不在范畴等价下保持不变，便是邪恶的。等价所保留的是一切在范畴语言里能够陈述的东西。判断两个范畴是否等价，只需检验三项性质，这三项检验也与谁来检验无关。

就统一性而言，范畴等价是比同构更宽的一把尺。同构问的是一个对象能否被另一个替换，等价问的是整个世界能否被另一个世界替换。替换的权利扩大了，替换仍是替换：只要核查通过，谁用都一样。

◆ 11.4　森田等价：模范畴相同，环不同

“相同”的口径还可以再放宽。森田纪一 1958 年发表的关于模的对偶及其在极小条件环论中的应用的论文，奠定了后来称为森田等价的概念：两个环 R 与 S 森田等价，当且仅当它们的模范畴等价。环自己可以相当不同，只要它们作用其上的模的世界在范畴的意义上相同，二者就被算作“相同”。

最简单的例子是域 k 与它的 n×n 矩阵环 M_n(k)。当 n>1 时，两者不同构：作为 k 上的向量空间，前者维数是 1，后者维数是 n^2；前者交换，后者不交换。可是 k 上的模范畴与 M_n(k) 上的模范畴等价：给定一个 k 上的向量空间 W，令 W 的 n 份直和 W^n 配上列向量式的矩阵作用，就得到 M_n(k) 上的模；反方向的构造用到幂等元 e_{11}。一般的刻画是：S 与 R 森田等价，当且仅当 S 同构于某个有限生成投射生成元 P 的自同态环 End_R(P)；上面的例子取的是 P＝R^n。

森田等价保持什么、不保持什么，可以列成清单。环的中心在森田等价下保持，理想的格也保持，许多同调性质保持；环的交换性不保持（k 与 M_2(k)），环的元素个数或维数不保持（有限域 F_2　有两个元素，$M_2(F_2)$ 有十六个），环是否为除环也不保持。这份清单是一个确定的东西：任何人想知道某个性质是否森田不变，去查清单、去证明即可，答案对谁都一样。

森田等价的特点是，它把“相同”的判据从对象本身移到对象所作用的世界。环失去了它的个体性——是 k 还是 M_n(k) 不再要紧——保留了它在表示论里全部可说的部分。这一步与范畴等价同方向，只是更远：被收进“相同”的东西，包含了结构上看起来完全不同的环。很多时候，正是这种“看起来不同”被收进相同之后，一些原本分开的分类问题合成了一个。

代数 K 理论里的零阶群 K_0 是森田不变量：R 与 M_n(R) 的 K_0 同构，所以关于射影模分类的许多结论可以在其中较简单的一个上完成。这类结果有一个共同的形状：先把“相同”的口径放宽，再在放宽之后的口径下一次性地解决问题，最后把结果搬回每一个被收进来的对象。搬运的通道是确定的，沿着通道走的人，无须带着任何关于环从何而来的知识。

此处值得留意一件事：森田等价把差异安顿在“不变量清单”之外。凡森田不变的性质被带过去，凡不变的性质留在原处，不再参与比较。差异没有消失，被划出了尺子的刻度。

还有一个细节：森田等价对“有限生成投射生成元”这样的条件极为敏感。换掉一个条件，等价的范围就变了——例如把有限生成去掉，等价的刻画就要改写；因此“相同”在这里是一份条件清单的产物，清单上每一项都可以被单独检查，也可以被单独替换。口径的精细，来自清单的精细。

◆ 11.5　格罗滕迪克的相对观点

20 世纪 50 年代末至 60 年代，格罗滕迪克在代数几何里改写了研究对象。他与迪厄多内合作的《代数几何原理》（EGA，自 1960 年起刊行）把概形放到中心，并提出一个贯穿全书的取向，后来称为相对观点：与其研究一个概形 X 本身，不如研究态射 X→S，其中 S 是基。一个定理，一个性质，不再对一个又一个具体的 X 各证一遍，而是陈述为对基 S 上的一族对象成立，并要求这性质在基变换下保持稳定。

这一取向与米田引理一脉相承。固定一个范畴里的对象 X，考察函子 T↦X(T)＝Hom(T,X)，称为 X 的点函子：T 取遍所有“探测对象”，X(T) 是 X 被 T 探测到的样子。米田引理说，从 Hom(A,—) 到任意集合值函子 F 的自然变换，与集合 F(A) 中的元素一一对应；作为推论，一个对象由它被所有对象探测的方式唯一确定，确定到同构。作者原稿第 12 章 12.13 节给出了这一引理的协变形式及证明。对格罗滕迪克来说，概形的“点”不再是一个孤立的东西，而是一整族：在每个基上、每个探测对象处，都有它的点。

相对观点里的“相同”，是探测下的相同：两个对象，在一切探测下表现一致，便是同一个对象。它也包含了一类新的相同：同一个性质，在不同的基上、经基变换之后仍成立，便算作同一个性质的两次出现。此后又有拓扑斯的概念（SGA 4，20 世纪 60 年代前期），把一个空间换成其上的层范畴，不同的空间可以有等价的层范畴。“相同”的口径因此再次放宽，被收进来的是整个空间的几何，而不止一个对象。

这套想法的力量，来自一次表述覆盖无穷多个情形。就统一性而言，相对观点是效率最高的一种：它让一个定理的适用范围从一个基扩展到所有基，让证明一次完成、处处可用。同时它的口径是复数的，基有无穷多个，探测对象有无穷多个。然而所有的基与探测对象都是事先在定义里规定的范围，哪一个基上的结论与哪一个基上的结论是“同一个”，由基变换的规则给出，也是谁用都一样的。复数在这里没有改变统一性的性质：有许多把尺，每把尺的刻度由定义写定。

基变换下稳定的性质有一份确定的名单：平坦、光滑、固有等性质经基变换后仍然保持，这是可以证明的定理。名单上的性质，随着基的更换被原样带走，不问它们在哪个基上最初被发现；名单之外的性质，则不参与这条搬运。相对观点所达到的，是一种极其有力的“谁用都一样”：不仅同一个人在不同的对象上用得一样，不同的人在不同的基上用，也得到一样的结果。

◆ 11.6　同伦类型论：等价即相等

2009 年前后，沃沃茨基提出了单价公理，并在此后以“单价基础”为名发展了一条数学基础的路线；2012 至 2013 年普林斯顿高等研究院的特别学年之后，《同伦类型论：单价基础》一书于 2013 年出版。这条路线与前面几节的关系是：它不再把“相同”作为数学之外的约定附在数学上，而是把“相同”写进了基础。

先看背景。在依赖类型论里，对同一类型的两个元素 a、b，“a 等于 b”本身是一个类型，称为同一性类型，它的元素是 a 等于 b 的证明。经典观点以为，一个等式至多有一个证明，即同一性类型至多一个元素。霍夫曼与施特赖歇尔 1998 年用群胚模型指出，这一点无法从类型论的规则推出：把类型解释为群胚，同一性类型可以有多个元素。阿沃迪与沃伦 2009 年，以及沃沃茨基同期，把类型解释为空间的同伦型，a 等于 b 的元素被读作从点 a 到点 b 的路径。同一性类型因而是一个路径空间，可以有多条路径，路径之间还可以有路径。

单价公理在这个背景上说：在类型的宇宙 $\mathcal{U}$ 里，对任意两个类型 A、B，由“等于”到“等价”的典范映射 $(A=B)\to(A\simeq B)$ 本身是一个等价。通俗地说，等

价即相等。其后果是，凡在类型论里写出的构造、陈述的性质，都自动沿等价传递：A 与 B 等价，则 A 的性质搬到 B 上。数学家一向口头约定的“同构的对象视为相同”，在这里成了形式规则的推论，不再是行规。这项公理在单纯集模型里相容（卡普林、拉姆斯登与沃沃茨基的工作）；立方类型论（Cohen、Coquand、Huber 与 Mörtberg，2015 年的会议稿，2018 年刊出）则给出了它的计算解释。

一个最小的例子是自然数的两种表示：一进制的 0 与后继，和二进制的位串。两个类型之间有显然的等价。在单价公理之下，凡对其中一种表示证明的命题，经传递即得另一种表示上的对应命题，无需重证。传递的路径由那条等价给出，程序设计里常见的“换一种数据表示而程序照用”，正是这个意思；至于这条等价当初是怎样被找到、为什么偏偏是这一条，不进入公理的陈述。

再看单价公理所带来的东西：“怎样相同”成了数据。设 A 与 B 是两个集合，它们之间的等价就是双射，单价公理于是把“A 等于 B”的元素与双射一一对应。取 A＝B＝Bool，即两点集合，则 Bool 到自身的等价有两个：恒等与对调。所以 Bool＝Bool 这个同一性类型恰有两条路径。这与 11.1 的那十六张表是同一件事的两面：两点集合的自同构群是二阶群，它作用在十六张表上；同构类型数 10 是这个作用的轨道数，对每个类型而言，“它与自身相同”的方式有几种，在轨道计数里全部被忽略。

同伦类型论保留了这个信息。把十六张表和它们之间的全部同构看作一个群胚，则它的群胚基数是对每个同构类取 1/|Aut|，再求和。四张在对调下不动的表（左投影、右投影等），各有两个自同构，各贡献 1/2，共 2；其余六个同构类的自同构只有恒等，各贡献 1，共 6。总和是 8，恰好是 16 除以 2。于是对同一批表，有三个数：标号计数 16，同构计数 10，群胚计数 8。三个数对应三种对“相同”的处理：不合并；合并而不记合并的方式；合并并且记下合并的方式。0110 与 1001 之间有且仅有一个同构，左投影与自身之间则有两个。这个差别，在轨道计数中看不出来，在群胚里看得出来。

沿路径传递的规则也值得写出。设 P 是 A 上的一个性质（类型论里就是一族类型 P(x)），p 是 a 等于 b 的一条路径，则 p 给出一个从 P(a) 到 P(b) 的传递映射，把 a 处的证据搬到 b 处。单价公理之下，路径可以来自等价，于是性质 P 沿着任意等价都被搬走。不同的路径给出不同的搬运：Bool 上的恒等路径把每个元素原样搬走，对调路径把 0 搬成 1。“同一个性质搬过去”这件事，从此带上了“沿哪条路径搬”的参数。

从标准化的角度看，单价公理还做了一件更朴素的事。在此之前，“同构的对象视为相同”是数学写作中散布各处的约定：每位作者在自己的领域里默认它，各个领域默认的细节略有出入，遇到边界时靠判断力补缝。单价公理把这个约定收成一条公理，写进基础，使得凡在基础之内写出的数学自动遵守它。把散在各处的做法收成一条所有人共用的规定，这正是标准化的典型动作；而它收进来的内容恰好是“相同”本身。所以单价公理在本书的意义上是标准化的一次升级：标准化的对象由量度衡转为“相同”的判据，标准化的方式仍是把差异收进一把谁用都一样的尺。

最后要写准同伦类型论里的层级概念。h 层级（h-level）从 −2 起算：−2 层的类型是可缩的，只有一个点，且路径空间也同样平凡；−1 层的类型是命题，至多一个元素；0 层的类型是集合，它的同一性类型都是命题，即“等于”只有是与否，没有“怎样”；1 层的类型是群胚，它的同一性类型是集合，即两点之间可以有多条路径，路径与路径之间只有是否之分；往上依此类推。递归的定义是：一个类型是 (n＋1) 层的，当且仅当它的所有同一性类型都是 n 层的。因此 h 层级衡量的是同伦复杂度——路径空间的高阶结构有多复杂——并不是一个“相同的层级”，不是说某一层的东西比另一层的东西更相同。集合层之下，相同没有内容；越往上，“怎样相同”的内容越丰富。自然数类型是集合层的；类型的宇宙 $\mathcal{U}$ 却不是集合，因为 Bool＝Bool 已经有两条不同的路径，宇宙至少落在第 1 层。同伦类型论里“相同”的内容，就这样从集合层的是与否，一层一层地长出了结构。

◆ 11.7　扩张与谱系的分界

把五种口径排在一起，可以看清它们共有的东西。同构、范畴等价、森田等价、相对观点、单价公理，每一种都比前一种宽，每一种的判据都写在定义或公理里，每一种都能被核查，也都能被机器核查：同伦类型论已经有 Coq、Agda 等证明助手中的形式化库，UniMath 是其中以沃沃茨基的基础为底本的一个。无论由谁检验，在哪里检验，检验的结果都一样。这就是第 0.3 节所说的统一性。

五种口径各有自己的历史。艾伦伯格与麦克莱恩的自然性，起于对同调计算中“自然”一词的澄清，1942 年的论文《群论中的自然同构》已讨论群论里的自然同构，1945 年的《自然等价的一般理论》把它一般化为范畴、函子与自然变换的语言；森田等价起于环论里的对偶与极小条件；相对观点起于代数几何里对基域与基的处理；单价公理起于类型论里同一性类型的解释。这些历史各不相同，每一段都是在具体的计算与困难中长出的。然而口径一经写成定义，历史便从定义里脱落：

学习范畴等价的人只需要知道三项检验，不必知道它为什么在 1945 年出现。脱落之后的东西可以被搬走，可以写进教科书，可以被机器执行。这正是统一性的特征：它与发生过程可以分开。

艾伦伯格与麦克莱恩的动机可以说得很具体：有限维向量空间与它的二重对偶之间有一个不依赖基的同构，而与它的一次对偶之间只有依赖基的同构。“自然”一词起初只是对这一差别的朴素辨认；范畴与函子的整套语言，是为了把这个辨认写成可以检验的定义才被造出来的。

口径	“相同”由什么给出	被收进来的	留在尺外的
标号相等	符号字面一致	只有同一张表	一切重命名
同构	双侧可逆的保结构映射	对调符号后的表	同构类之内的方式
范畴等价	一族协调的自然同构	对象数目不同的范畴	对象的字面身份
森田等价	模范畴的等价	不同构的环	森田不变量之外的性质
相对观点	基变换下的稳定与探测	一族基上的同一定理	基之间的亲疏
单价公理	等价即相等，路径为数据	等价的类型	路径的来历

这六行之间有次序：同构蕴含范畴等价，环的同构又自然给出模范畴的等价，所以同构蕴含森田等价；单价公理则把等价收为相等。强的口径蕴含弱的口径，口径与口径之间因而有亲疏。但这些亲疏是由定义的蕴含关系事先排好的，与第 9 章的强度阶梯同属一类：位置由定义给出。第 0.3 节把这种情形称为多元化的统一性——程度即使有，也由事先给定的定义安排。五种口径嵌套而不并排，比第 10 章那几本并排的菜谱更有亲缘，却没有离开同一个类别。

最后一列要紧。每一种口径都有它放在尺外的东西，同伦类型论也有：路径的来历。路径是数据，这一点必须点出。一条路径不再只是“有”或“无”，它是一个可以计数、可以复合、可以求逆、可以比较的对象，两条路径之间还可以问有没有路径。“怎样相同”在这里取得了数学对象的身份，同一性不再是一个二值判断，而有了结构。就本书的主题而言，这是第三编里最接近谱系的地方：谱系要求同一性有程度，同伦类型论给出了一个能容纳程度的对象。

但谱系的第二个条件没有满足。本书对谱系的定义是：同一性的程度由回写历史生成——“这里才这样”。在同伦类型论里，路径由理论的形成规则产生：自反性给出平凡路径，传递给出路径的复合，对称给出逆，单价公理给出由等价而来的路径。两条路径有区别，区别在代数上——复合后是否同伦——而不在来历上。哪

些路径在什么实践里被反复走过、走过之后改写了什么，理论里没有位置。Bool＝Bool 的两条路径之所以有两条，因为两点集合的自同构群是二阶群，这与任何一位数学家是否走过它们毫无关系。“怎样相同”有了内容，内容却是由规则推出的，不是由回写历史生成的。

于是本章对这条线的判断是：由同构到单价，是统一性的扩张；“路径是数据”是萌芽，因为它备好了一个可以存放“怎样相同”的位置；萌芽还没有长成，因为位置里放的是规则推出的内容，没有放进回写。谱系何时开始？当“怎样相同”的路径连同它被反复走过、被改写过的历史一并带着，使得同一性的程度成为“这里才这样”的位置，而不再是对谁都一样的结果。这一接口是否可以搭上，是第四编要处理的事情：第 13 章至第 16 章将看到，伞模型里的重叠、权重与半径，正是在尺的内部为这类历史留出的位置。

这里需要对术语作一次点明。第 53 号《SDE数学导论》第 13 章谈到传统数学的统一性，并说伞模型是“统一”的框架，那里的“统一”指的是构造的统一：同一个构造，配置各异。本书说的统一性，指的是“谁用都一样”的标准化。本书读第 53 号为标准化的重生：伞模型统一的是构造，不是配置，构造同一、配置成谱，这才是同一性谱系标准化；而本章五种口径，统一的是尺：同一套判据，谁用都一样。二者不是一回事。

◆ 11.8　“相同”与意义三律

数学是 E2 的特征纠缠场，三元素是连接、次序、结构。“相同”是其中连接的口径：它规定两个结构在什么条件下可以互相替换。同构说的是，两个结构可以逐点替换；范畴等价说的是，两个世界可以逐对象替换，并且替换与所有映射协调；单价公理说的是，替换在基础层面不需要另外声明。这些口径从窄到宽，是同一种连接方式——以可替换连接——的不同强度。第 2 章曾把连接分成两种：以可替换连接，是统一性；以亲缘连接，是同一性谱系。本章所考察的，是以可替换连接的数学精确形式。

在这种连接下，差异有两个去处。一部分差异被抹去：同构类之内的区别，等价类之内的区别，在范畴语言里不可陈述，不参与比较。另一部分差异被安置：森田不变量以外的性质，留在清单的另一边，成为“不是数学对象”或“不在此处讨论”的东西。这与意义三律的关系，第 4 章已有机制的分析，第 12 章还将把它放进复数的统一性里完整地读；此处只记下一点：特征律的跑法是混沌碰撞、自组织、

涌现，碰撞需要尺外的差异存在而且留得住；“相同”的每一次扩张，都在把更多的差异收进尺内，要么抹平，要么安置，留给碰撞的余地因此一次比一次窄。

特征律还有另一层可读。按意义三律的定义，特征律管目标的发生：差异出稳定性，凝成可指向的特征，也就是同一性。数学里的“同一”正是这样一个特征，它在使用中被反复走出，才稳定成可指向的东西。统一性标准化的做法，是把这个凝成的过程一次写成定义，只交付结果：同构类、等价类、单价公理，都是被凝成的同一性，以定义的形式出现在教科书里。过程被取消，结果留下，结果可以被搬走。谱系标准化要保留的恰好是过程：同一性是怎样、在哪里、被走了多少遍之后才这样的，这些进入同一性的程度。

这并不否认“相同”的扩张带来的成果。范畴等价让线性代数与矩阵理论成为同一件事，森田等价让环的分类问题归并，相对观点让一个定理管一族基，单价公理让形式化数学中的等价替换不再需要手工搬运。这些都是数学上的实绩，也是标准化对文明组织的实际贡献：连接得更紧，搬运得更省。本书的立场是，标准化需要保留；问题在于以什么方式连接。以可替换连接，连接得越紧，余下的差异越少。

回到最开始的两张表。0110 与 1001 之间有一个同构，这个同构把一张表搬到另一张表，谁搬都一样。左投影有两个自同构，同伦类型论把这两个自同构都记在账上。账记得越细，“相同”的口径越宽；账上记的是什么，却由规则推出。记账的方式可以精细到一条路径、一个高阶同伦，精细并不改变记账的来源。来源若不变，同一性的程度便仍然是应用的结果，不是发生的结果。当有一天，账上记下的是某一条路径在哪一段数学实践里被走过、走过之后哪些定义被改写，同一性才有了“这里才这样”的位置。那是谱系，而它从哪里开始，需要的是回写，不是更宽的尺。

于是第三编前三章的结果可以这样合起来读。第 9 章的强度阶梯把一把尺刻得极细，第 10 章把许多把尺并排放在一起，本章把尺的“相同”一再放宽；三条路都在统一性之内行进，各自推到了某种极致。下一章要问的是，这些极致处的数学运行得怎样：三律的读数是否因系统增多、口径放宽而同升。

◆ 本章结论

1. 标号计数 16 与同构计数 10 都是正确的数；“相同”的口径由定义给定，谁用都一样，可以搬走、可以交给机器，这是统一性。

2. 同构、范畴等价、森田等价、格罗滕迪克的相对观点、同伦类型论的单价公理，是同一种连接方式——以可替换连接——的逐步放宽，每一步都是统一性的扩张。
3. 单价公理使“怎样相同”成为路径数据：Bool＝Bool 有两条路径；十六张表的三个计数 16、10、8 对应不合并、合并不记方式、合并并记方式。h 层级衡量的是同伦复杂度，不是“相同的层级”。
4. 路径由理论的形成规则产生，没有回写历史，因而“路径是数据”只是谱系的萌芽，而不是谱系；谱系在“怎样相同”的路径带上历史之后才开始。
5. 第 53 号所说伞模型的“统一”指构造统一，构造同一而配置成谱；本章五种口径统一的是尺，谁用都一样，二者不是同一种统一。

◆ 本章参考

— 原始文献

· Klein, F. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen（埃尔朗根纲领），Erlangen，1872。

· Eilenberg, S., and Mac Lane, S. General Theory of Natural Equivalences. Transactions of the American Mathematical Society, 58(2), 1945, 231–294。

· Yoneda, N. On the homology theory of modules. Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo, Section I, 7, 1954, 193–227。

· Morita, K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A, 6, 1958, 83–142。

· Grothendieck, A., and Dieudonné, J. Éléments de géométrie algébrique I. Publications Mathématiques de l'IHÉS, 4, 1960。

· Hofmann, M., and Streicher, T. The groupoid interpretation of type theory. In Twenty-Five Years of Constructive Type Theory, Oxford University Press, 1998。

· Awodey, S., and Warren, M. Homotopy theoretic models of identity types. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 146, 2009。

· The Univalent Foundations Program. Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics. Institute for Advanced Study, 2013。

— 研究文献

· Mac Lane, S. Categories for the Working Mathematician. Springer，第 2 版 1998。

· Lam, T. Y. Lectures on Modules and Rings. Springer，1999（森田等价一章）。

· Kapulkin, C., and Lumsdaine, P. L. The simplicial model of univalent foundations (after Voevodsky). arXiv，2012；Journal of the European Mathematical Society 23 (6), 2021, 2071–2126。

· Cohen, C., Coquand, T., Huber, S., and Mörtberg, A. Cubical type theory: a constructive interpretation of the univalence axiom. TYPES 2015 会议稿；LIPIcs 69, 2018, article 5。

· 阳涌：《标准如何生成数学》原稿，第 12 章（范畴论）与第 17 章（二元运算表十六张与同构计数）。

— 站内著作

· 第 53 号《SDE数学导论》：相容性公理、伞模型，第 13 章“从伞模型看传统数学的统一性”。

· 第 344 号《意义数学的诞生》：同一只杯子的一眼、一圈、一声；统一的是构造，不是配置。

◆

12

第 12 章

为什么复数的统一性仍然枯竭

本章提要 第三编前三章考察了强度阶梯、多宇宙与宽容、“相同”的扩张。本章问它们共同的一个问题：系统增多，意义三律的读数是否同升。论证分三步：每个系统内部仍守相容性公理，系统之间的位置由定义事先给出，宽容原则把张力的来源一并取消，所以三律的读数没有理由随系统数同升；多元而无回写，是 D1 三权失衡中的漂泊。本编因此判断：多元化的统一性与单数的统一性，亏缺方式相同。

◆ 12.1 一道题，三处住所

连续统假设问：实数集的基数，是不是紧接在自然数集基数之后的那个无穷基数。1938 年哥德尔证明，若 ZF 一致，则 ZFC 加上连续统假设也一致；1963 年科恩用力迫法证明，若 ZF 一致，则 ZFC 加上连续统假设的否定同样一致。于是这道题在 ZFC 之内没有答案：它独立于 ZFC。

两个证明的做法已在第 10 章 10.1 节写过，一个取可构造宇宙，一个用力迫添加新实数。这里只取与本章有关的一点：两个方向各造出一个模型，每个模型里的数学都完整地运转；独立性的结论是这两个具体构造的合取，读它的人只需复核构造，不必知道构造当初是怎样被想到的，也不必知道它后来被用在了哪里。构造能被原样交付，是这个结论成为公共财产的条件；同时，它也是下文要追问的东西：构造一旦可以原样交付，使用它的历史就不再是它的一部分。

此后这道题有了三处住所。在 ZFC 里，它悬着；在 ZFC 加连续统假设里，它是公理，答案是“是”；在 ZFC 加连续统假设之否定里，它是定理，答案是“否”。到了 2012 年，哈姆金斯的多宇宙观点（第 10 章 10.3 节）把这三处住所推成一族宇宙，每一个都是集合论的“合法居所”，宇宙之间可以通过力迫扩张、内模型等操作互相到达。这道题的答案，成了“在哪个宇宙里”的函数。

这样的处理方式在数学界有很强的吸引力，因为它兑现了两件事：一是尊重已有的独立性结果，不再强求一个唯一的答案；二是保留了每个宇宙内部的全部数

学，不必牺牲任何已经建成的东西。吸引力越强，越需要问它的代价记在哪一栏。本章的问法是：代价不记在数学的正确性上，记在意义三律的运行上。

对一个只看一把尺的数学家来说，这是一次解放：争论不必再有胜负，各取所需，各住各的。对一个想问“数学的标准化化解了什么、遗漏了什么”的人来说，这里出现的是一个可以作数的问题。系统由一个变成了许多个——ZFC 加什么，不加什么，逻辑取经典还是直觉主义，阶梯上选哪一级——三律的读数是否随之同升？数学的创造、新路的开出、释放的丰满，是否因为住所多了而增加？

第 9 章与第 10 章已经考察了两种复数的统一性：强度阶梯把系统排成一列，多宇宙与宽容把系统并排放开；第 11 章把“相同”的口径一再放宽。三条路各有所长，也都被数学界当成走出单一基础的出路。本章要回答的是：它们为什么仍然枯竭。回答依次展开。12.2 先把三律的读数写出来，让“同升”有可检验的含义；12.3 考察系统内部；12.4 考察系统之间；12.5 与 12.6 逐律读数；12.7 讨论多元而无回写的漂泊；12.8 收束为本编的判断。

◆ 12.2　先把读数写出来

“读数”一词需要交代。意义三律各管一件从零到一的发生：特征律管目标的发生，自由律管路径的发生，幸福律管动力的发生。三律的量纲不同，彼此不能替代，所以分开记，不压成总分——这是第 344 号《意义数学的诞生》定下的口径。本章沿用，不给三律加权求和，只问每一律各自的读数是否上升。

特征律的读数看新特征。按第 344 号的说法，新特征要过四道关：门槛性、活的稳定、抗扰、回写；回写了才算新。落到数学上，一个新特征，是在差异的碰撞之后凝成的、可以被指向的稳定对象，并且被后来的工作拿去改写别的东西。群的概念凝成之后，二元运算的分类被改写；范畴等价凝成之后，线性代数与矩阵理论被归在一处。读数就是：这样的凝成，每隔多久发生一次，发生在哪里。

自由律的读数看路。自由不是选项多，也不是随便，而是在约束中裁出原本不存在的新路；它的量度是发生新路径的能力，不是选项数目。第 344 号把这件事写成：走通后改写纠缠，使可达路径空间变大，这是激发。落到数学上，读数是：一个领域里，由非原作者开出的新路有多少，长期难题被推进的数量有多少。这是第 18 章判决预测二所用的两项读数，它们取自互不重叠的数据源，由编码者与判定者分开处理。

幸福律的读数看释放。张力积累，模式转换，能量释放；幸福不在结果，而在每一次完整发生走通的当下。落到数学上，读数是：一个领域的张力从哪里来，释

放有几种。统一性标准化之下，释放只剩一种——消除差异；若复数的统一性使释放的种类增加，读数就会上升。

于是“系统增多，三律读数并未同升”成为一个有结构的主张：把系统数 N 当作横轴，把上面三项读数当作纵轴，主张是三条读数线不随 N 同升。本章负责从机制上说明为什么没有理由同升；是否同升，由第 18 章的判决预测二用数据去判。预测二写明：若系统数量增加的方向上，非原作者开出的新路与长期问题的解决数随系统数同升，则第三编撤回。这样的写法使本章的论证有败的条件。论证能败，才谈得上立住；一个不留败路的论证，对读者没有信息。

还须说明读数的对象是什么。三律的读数不属于某位数学家的心理，也不属于某个系统的美学评价，它们是对一个领域运行状态的刻画：新特征在哪里凝成，新路在哪里开出，张力在哪里释放。这些读数一律写成运行态的读数，不写成“某人做了什么”：枯竭与漂泊是运行的状态，不是谁的意愿所致。系统增多与读数的关系，因此是两种运行态之间的关系：一种是单元并排的运行，一种是单元之间有回写的运行。本章所论证的，是前一种运行的读数没有理由高于单个单元的读数。

◆ 12.3　系统内部：每本菜谱仍是统一的

先看一个系统之内。ZFC、ZFC 加连续统假设、ZFC 加大基数，是三个系统；经典命题逻辑、直觉主义逻辑、相干逻辑，是三个系统；逆数学的 RCA_0、WKL_0、ACA_0、ATR_0、Π^1_1-CA_0，是五个系统。每个系统内部有什么？有一份写定的语言，有一套无歧义的定义，有一份被要求一致的公理，有一个被规定好的推理规则，还有一个被默认为唯一的“有效”。这些特征，恰好是第 13 章要展开的相容性公理的几项约束在数学里的样子。

无歧义：一个系统的公式与规则，由语法一次性确定，谁读都读出同一个对象。无矛盾：一个系统被要求一致，一旦出现矛盾，整个系统便因爆炸原理而平凡，除非另换逻辑。独立：公理的选取通常追求相互独立，一条公理不能由其余推出，这被当作公理系统的美德。唯一的标准模型被追求：自然数的标准模型、实数的标准模型，凡能唯一刻画的，都被当作更好的刻画。这四项，对应本书第 4 章分析过的亏缺性运行的机制：无歧义禁止混沌碰撞，无矛盾与独立减少纠缠，唯一模型使差异即错误。

系统数增加，这四项约束没有被取消；每个新系统，都按同一套要求建成。多宇宙里的每一个宇宙，是 ZFC 的一个模型，模型内部服从 ZFC 的全部规则；逻辑多元论里的每一种逻辑，有自己的后承关系，后承关系由定义确定。所以复数并不是

把单个系统里的约束放松了，而是把同样受约束的单元多复制了几份。说得具体一些：N 个系统，就是 N 本菜谱，每本菜谱内部的尺子仍是统一的。这样的复制，若用意义三律来读，就是 N 份同样亏缺的运行并排摆放。

逻辑多元论可以作为这一点的样本。比尔与雷斯托尔 2006 年的《逻辑多元论》主张，对“什么是有效论证”可以有不止一个正确的回答：有效性是在某一类“情形”上保真，情形取经典模型、构造或情境，便得到经典逻辑、直觉主义逻辑或相干逻辑，它们各自正确。这一主张是多元的，而每一个答案内部，有效性仍由一个无歧义的定义给出，一个论证在某个逻辑里或有效或无效，没有中间态，谁来判都判得一样。多元的是定义的数目，不是定义的运行方式。

读者可能会提出，系统一多，系统之间就会有碰撞，碰撞不就是特征律的发动部件吗？这个问题要看系统之间怎样接触，12.4 回答。在此先记下系统内部的结论：增加系统的数量，不改变任何一个系统内部三律的读数。

还有一层值得点出。公理的独立性在数学里被当作美德：一个公理系统里，每条公理都不能由其余推出，才算简洁。独立性的追求，是对纠缠的削减——各条公理彼此解耦，各管一块。一个系统的内部越独立，各部件之间越少相互牵动，新特征在部件之间凝成的机会就越少。复数的统一性把这种内部的独立，延伸成了系统之间的独立：系统与系统互不牵动。解耦由此从一个系统的内部性质，放大成了整个领域的组织原则。

◆ 12.4　系统之间：亲疏由定义事先给出

系统与系统之间当然有关系。数学基础的研究恰好以这类关系为对象，而且得到了精确的结果。相对一致性：若 ZF 一致，则 ZFC 加连续统假设一致。解释：一个理论 T 可以在另一个理论 S 里被解释，T 的定理译成 S 的定理。翻译：1933 年前后，哥德尔与根岑各自给出否定翻译，经典算术的命题通过它们嵌入直觉主义算术，经典算术相对于直觉主义算术一致。强度：证明论序数，根岑 1936 年证明皮亚诺算术的一致性要用到序数 ε_0 上的超穷归纳；逆数学里，一条定理等价于哪一个子系统，被一个一个地定位。这些结果刻画了系统之间的亲缘，而且刻画得极细。再举可解释性为例：理论 T 在理论 S 中可被解释，是说有一份句法上的翻译，把 T 的语言的每个公式送进 S 的语言，并使 T 的公理译成 S 的定理。这份定义里没有一个字提到谁来翻译、何时翻译、翻译之后两边怎样往来；它给出的是一个预序，两个理论若互相可解释，在这把尺上便算同一格。翻译存在与否可以核对，翻译的内容可以交付，整张可解释性的图因此也是拿到定义的人都能画出的公共图。

阶梯并不总是一条线。逆数学的五大系统之外，有一批定理既不等价于其中任何一个，又落在它们之间。二元组的拉姆齐定理（针对两种颜色）是最著名的一个：西特普恩与斯拉曼、刘（Liu）的结果（第 9 章 9.5 节）使它既不蕴含 ACA_0，也不蕴含 WKL_0。这些结果使阶梯分叉，成为一张错综的图。分叉的图是复数的另一种样子，其中每一个新位置的确认，仍靠蕴含与不蕴含的证明，位置由定义和定理给出，与那条定理被多少人在何种实践里使用无关。

位置如何由证明给出，可以举两个经典的例子。在弱基础系统 RCA_0 之上，波尔查诺—魏尔斯特拉斯定理（有界实数列必有收敛子列）与 ACA_0 等价；闭区间 [0,1] 的海涅—博雷尔覆盖性质（每个开覆盖有有限子覆盖）则与 WKL_0 等价，后者严格弱于前者。两个熟悉的分析学命题，各自住在阶梯上一个确定的台阶，台阶的高低由两个方向的证明读出：一个方向从命题推出系统的公理，另一个方向在系统内部证明命题。这样的位置，谁来读都读得出同一个答案，读数里没有读者的份。阶梯因此是一张以证明为刻度的表，表上每个格子都可以被搬走、被复核、被机器检验。

哈姆金斯的多宇宙也不是毫无亲缘的堆放。宇宙之间有力迫扩张、内模型、反向力迫等操作，这些操作构成一张可以绘制的图，图上的相对位置是确定的。可是这张图的边，是集合论内部的构造，由定义写出，由证明确认；一个宇宙在图上离另一个宇宙多远，取决于构造的步数与类型，不取决于数学共同体曾经怎样来回走过这两个宇宙。图是精确的，也是应用的：拿到定义的人，就能画出同一张图。

关键在于这些亲缘怎样被给出。相对一致性是一个定理，由力迫或内模型的构造证明；解释是一个函数，由翻译的定义写出；强度由序数或等价关系定位；每一条关系，都是谁拿去、依同一套定义、都得出同一个结果的东西。位置是定义给定的：ZFC 加大基数比 ZFC 强，这是由一致性强度的定义排定的次序，不依赖于哪些人在什么历史里走过这两个系统。第 9 章已经论证，近乎线性的强度阶梯是统一性的极致形态；第 10 章已经论证，多宇宙与宽容之下，系统之间没有亲缘的尺子，程度即使有，也由事先给定的定义安排。

由此可见，系统之间的接触方式有两种。一种是翻译与解释，二者都是把一个系统里的东西送进另一个系统，送过去之后，两边各自的运行保持不变；翻译是一次搬运，不是一次碰撞。另一种是比较与定位：将系统排进一个次序或一张格，定位之后，系统的位置固定下来，位置的确定与哪个系统更有生产力没有关系。这两种接触，都没有让一个系统的差异进入另一个系统的运行并改写它。碰撞要求差异留在场里，使对方因它而变；搬运与定位则把差异放在各自的位置上，各归各处。

宽容原则（第 10 章 10.2 节）在这里起到了制度化的作用。它解决了一个实际的困难——两个系统对同一个命题的判决冲突，不必再争谁对，各自按自己的规则判便是。可是，冲突的消失同时也是碰撞的消失：既然谁也不必说服谁，谁也不必被谁改写。

所以，系统之间的接触，在复数的统一性里是搬运、定位与宽容；三者合起来，使得系统内部的运行不受系统外部差异的牵动。这里没有任何地方出现特征律所需要的东西：被留在场里、使别的东西因之而变的差异。

◆ 12.5　特征律与自由律：碰撞被分区，新路被菜单化

特征律的跑法是混沌碰撞、自组织、涌现。复数的统一性下，碰撞被分区。设想一个新证明技术在 ZFC 之内出现，它的适用范围由 ZFC 的公理划定；在 ZFC 加连续统假设之否定的宇宙里，技术可以被重新表述，其结论可以被搬运，却是按翻译的规则搬运。技术并没有因另一个宇宙里的差异而被改写，它在自己的区域里完成自己的凝成。这与第 18 章判决预测一所设想的情形有关：两个子领域形式标准相同、回写历史不同，同一新技术被采纳与改写的程度不同，多元化的统一性预测相同——因为在它看来，决定技术能否通行的，是形式标准，不是历史。

于是特征律的读数在复数下没有新的来源。凝成新特征仍然发生，在各个系统内部，按各个系统内部的速度。系统之间没有额外的碰撞可供凝成，新增的系统对新特征的贡献，主要来自它内部的凝成，而这部分在 12.3 已经说明：与单个系统无异。复数带来的新鲜感，常常来自翻译带来的“原来如此”——一个领域的结果在另一个领域里被重新表述。这是有价值的，价值属于搬运，而不属于凝成。

否定翻译可作这一区分的样本。经典算术的每个命题经哥德尔—根岑翻译之后，成为直觉主义算术里的一个命题；翻译是一个确定的函数，翻译前后各自的运行都保持不变。翻译让经典算术的一致性得到了相对于直觉主义算术的论证，这是一个漂亮的结果，可是在翻译之中，没有哪一个系统因为另一个系统而长出新的特征：双重否定的出现，是翻译规则规定的，不是两个系统碰撞之后涌现的。

自由律的跑法是矛盾纠缠触发、路径裁剪、新模式激发。自由的量度是发生新路径的能力，不是选项数目。复数的统一性最容易被误认的，正是这一点：系统多了，选项就多了，似乎自由就增加了。选项数目确实增加了：选哪个逻辑、哪个宇宙、哪一级强度，菜单变长。然而菜单上的每一项都是事先写定的；新系统被加入菜单，要先写出它的公理与规则，加入之后，它就成了又一个可选项。从菜单里挑，与在约束中裁出原本不存在的新路，不是同一件事。

第 344 号有一条引理说得清楚：纠缠不变时，选择不扩张远期可达集，所以路要变宽，必须添新节点。把这条引理读到多元论上：在 N 个系统各自内部相容、系统之间只有搬运与定位的条件下，从一个系统走到另一个系统，是在已有的节点之间换位，不添新节点。新路在什么时候开出来？当两个系统的差异纠缠在一起，使得原来合法的步子在纠缠之下出现矛盾，经裁剪而得到一条两边都没有的路。非欧几何在历史上是这样一类事件：它起于对平行公设的追问，那是在一个系统之内被推到边界的差异；而当它被收进“希尔伯特 1899 年的公理系统加模型”的框架之后，欧氏与非欧氏成了两个并排的住所，各自的运行重新安顿。后一步使局面稳定，也使新路的开出暂时终止。

在这里可以补一句对非原作者新路的观察。若系统数增加使自由律读数上升，一个自然的指标就是：非原作者在新系统里开出的新路，随系统数同升。作者开出的新路，常常是系统建立者为了让这个系统显出其用途而做的；非原作者开出的，才反映系统作为公共场地的生产力。这就是第 18 章预测二选用该读数的原因。本章的机制分析给出的预期是：该读数不随系统数同升。

对照之下，碰撞确曾发生过，发生的地方不在系统并排之处，而在系统的边界上。代数与拓扑的相遇是一个例子：拓扑里的同调要用代数来计算，代数里的许多构造要借拓扑的直觉才找得到，二者相互牵动，催生了同调代数，1956 年嘉当与艾伦伯格的《同调代数》是这一阶段的总结之作。碰撞使两边都被改写：拓扑学家的不变量变成了函子，代数学家的模范畴获得了几何的味道。这类事件是靠两边的差异留在场里、彼此顶撞才发生的，它们的出现，并不由“系统数增加”这一条件产生。

◆ 12.6　幸福律：宽容取消了张力的来源

幸福律的跑法是张力积累、模式转换、能量释放。张力是“该连上的还没连上”，要有纠缠才有张力；释放是张力经转换后回落，落在连接更紧、仍然活着的新和谐上。统一性标准化之下，释放只剩一种——消除差异。

复数的统一性是否增加了释放的种类？看三种对象。强度阶梯：一条定理被定位在某一级，定位完成，一个“这个定理要多强的系统才证得出”的悬问被消除。多宇宙：一道独立性的问题被回答为“看你在哪个宇宙”，一个“到底是还是否”的悬问被消除。“相同”的扩张：两个看似不同的东西被证明等价，一个“它们到底有没有关系”的悬问被消除。三种情形里的释放，形态相同——差异被安排

到位，张力随之消失。复数增加了消除差异的方式，没有增加消除差异以外的释放。

宽容原则则从源头上削减张力。张力的积累需要冲突在场且不被消解：两种做法互相顶着，各自都有道理，却连不上。宽容的第一步，就是宣布冲突不必解决，各自成立。这在避免无谓争论上有价值，同时也取走了冲突作为张力来源的位置。既然哪边都不必改，积累就无从发生，转换就无从发生，释放也就只剩下“归档”：把分歧记在案上，标明两边各自的适用范围。

第 344 号指出，最优释放不是最大释放，拖得太长连接会先松掉；松下来只有释放一种，压制、转移、暂时遮蔽用撤去检验分开。可以用撤去检验问一问宽容下的“释放”：把宽容原则撤去，冲突回来，张力还在吗？在。这说明宽容所做的，是转移与遮蔽，而不是释放：冲突被搬到了不同的系统，张力没有落入“连接更紧的新和谐”，只是被分居而保存。

这并不是说复数的统一性没有任何价值。对一个要处理很多不同对象的文明来说，分居是保持各方继续运行的办法，也是标准化的一种合理形态。本书反对的不是分居，而是把分居当成出路：分居使系统各自安稳，使三律的读数保持在原有的水平，却没有使它们上升。幸福律的读数，在复数下与在单数下一样，落在“消除差异”这一个位置上。幸福律要求的是另一种释放：张力经转换而回落，回落处连接更紧，并且仍然活着，每一次释放生产出新的特征，成为下一轮张力的起点。归档不生产新特征，分居也不生产新特征，二者都使一件事了结，没有使它长出下一件事。三重结构里的心满足、身快乐、灵喜悦，也就只剩了第一重的一个窄口。

撤去检验还可以用到阶梯上。把“这个定理的强度是某一级”这样的定位撤去，悬问回来，张力还在；定位完成之后，张力被消除，留下一个确定的位置。位置越确定，数学家对它的下一步探索越少——这不是批评，只是说明定位本身的功能是收尾。收尾是释放的一种，却是最窄的一种：它让一个问题安静下来，没有让问题所连着的东西变得更紧、更活。

◆ 12.7　多元而无回写：漂泊

至此，三条线都指向同一个结论：复数的统一性使系统数增加，而没有让三律读数同升。这个现象还有一个形状需要命名。意义三律互相校准，D1 的方向由三者各自发生的强度配比决定；任一权单独压过其他两权，就致退化：只重创造，导致创伤、破坏与不可持续；只重自由，导致漂泊、虚无与无收敛；只重幸福，导致平

庸、停滞与退化态。这是 D1 三权失衡的诊断工具，面对任何议题，问三权的配比，失衡处即病灶。

把这个工具用到多元论上。多元论保住的是自由的外形：选项多，无人被迫接受别人的系统，每个人可以自由选择住在哪里。保不住的是自由的量度——新路的发生，12.5 已经论证。外形压过量度，加上特征律（新特征的凝成）与幸福律（释放的丰满）的读数没有同步上升，三权的配比便偏向自由的外形一端。偏向这一端的后果，按诊断，是漂泊、虚无与无收敛。

漂泊在数学里有具体的样子。系统可以被无限地制造：加一条公理，换一条规则，改一个逻辑常项，一个新系统就出现了。制造容易，弃用同样容易。一个系统被提出之后，可能被使用，也可能被遗忘，它的位置由翻译定理标注，它与别的系统的亲疏由强度的定义排好；至于它是否曾被一个共同的实践反复走过，是否因这些走动而改写了别的系统，系统的位置里没有这一栏。没有这一栏，就没有收敛：系统多了，并不会因此凝成一个更稳定的、有来历的整体，只是更多的单元并排。

回写在这里的缺席尤其明显。第 344 号所说的回写，是新特征被后来的工作拿去改写别的东西，改写之后才算新。复数的统一性里，一个新系统建立之后，旧系统不受影响：旧系统的运行不因它而变，因为系统之间只有搬运与定位。无回写意味着系统之间的亲疏无法由使用生成，只能由定义标注。这就是第 0.3 节说的：多元化的统一性，每个系统内部尺子统一，系统之间没有亲缘尺子。无亲缘的增殖，是漂泊的数学形态。

漂泊要与多样分清。多样是好事：不同的系统服务不同的目的，群、环、域各有各的用场。多样本身没有问题，问题出在多样没有回写的时候。一个有回写的多样，是系统之间彼此改写，改写之后留下痕迹，痕迹成为亲疏；一个无回写的多样，是系统各自生长，彼此之间只有定义事先画好的连线。前者在时间里长出结构，后者在空间里铺开清单。清单可以无限长，结构不会因此出现。漂泊指的是后一种情形：清单越长，每一项的位置越轻，越没有“这里才这样”的分量。

弃用是观察漂泊的一个窗口。一个系统被提出之后，没有人再使用，它依然合法：定义仍在，一致性仍在，与别的系统的翻译仍在。合法与否不随使用的有无而变化，所以一个无人问津的系统与一个被反复走过的系统，在清单上占据同样的行数。谱系里的情形相反：被反复走过的地方，同一性的程度高，亲缘近；无人走过的地方，程度为零。清单看不出这种差别，谱系的位置由此而来。

这里需要区分两种看似相近的说法。同一性谱系也容许系统多，也容许系统之间亲疏有别；区别在于，谱系里的亲疏由回写历史生成，“这里才这样”，只能发

生，不能应用。多元化的统一性里的亲疏由定义给出，可以应用，可以搬走，可以由机器按定义计算。亲疏的来源不同，所对应的三律读数也不同：前者在每一次回写里让特征凝成、新路开出、张力释放；后者在每一次定位里让位置落定。

所以，漂泊并不是谱系的另一种失败，而是多元化的统一性本身所带有的失衡。谱系失去回写，只剩无亲缘的增殖，实为多元化的统一性；换言之，漂泊与复数的枯竭是同一种状态的两个侧面。读者若以为枯竭与漂泊是两个相反的毛病，需要再想一步：枯竭是三律在尺内停转，漂泊是尺与尺之间没有牵动，二者说的都是回写没有发生，只是描述的位置不同。内部看，每个系统受相容性公理约束，三律枯竭；外部看，系统之间无回写，增殖而不收敛，D1 三权偏向自由的外形，漂泊。

◆ 12.8　两端失衡与本编小结

把单数与复数的情形并排，可以得到一张对照表：

	单数的统一性	复数的统一性（多元化的统一性）
内部	一把尺，相容性公理全面运行	每个系统内部仍是一把尺
差异的去处	判为错误或例外，放在尺外	分居到另一个系统，放在另一把尺内
系统之间	无（只有一个）	搬运、定位、宽容；亲疏由定义给出
特征律	混沌碰撞被禁止，死亡	碰撞被分区，凝成限于各系统之内
自由律	纠缠被解耦，死亡	纠缠不跨系统，新路被菜单化
幸福律	释放只剩消除差异，枯竭	释放仍是消除差异的变体，枯竭
D1 三权	创造与自由先死，幸福只剩一个窄口	偏向自由的外形，漂泊

表里最后一行看起来相反：单数里创造与自由先死，复数里自由的外形压过其余。然而两端指向同一个结构性事实：差异不改变尺子。在单数里，差异被扣为例外，尺子保持不变；在复数里，差异被分居，每一把尺保持不变。尺子都不因差异而改写，回写在两种情形里都没有发生。这是全书母题所说的两端失衡：统一性过度则枯竭；谱系失去回写、只剩无亲缘的增殖，则漂泊，而后者实为多元化的统一性。

一个多元是否仍属统一性，可以用三个问题判别。第一，系统内部是否仍受相容性公理的约束——无歧义、无矛盾、独立、唯一模型；第二，系统之间的亲疏是否由事先给定的定义排定；第三，新系统加入之后，旧系统的运行是否因之改写。

三个问题的答案若依次是“是、是、否”，这个多元便是多元化的统一性。强度阶梯、多宇宙、逻辑多元论、宽容原则，依次过这三道问，答案相同。这是全书三问判别的主版本；附录二把它整理成可供编码者使用的编码形式，第 9 章 9.7 节与第 10 章 10.5 节另列的问句，都是这三问的展开，不是另立的判据。

第三编的四章于是可以合起来读，读法很简单：看每一章里差异最后去了哪里。第 9 章说明，强度阶梯刻得再细，位置仍由定义给出，近乎线性的阶梯是统一性的极致；第 10 章说明，多宇宙、逻辑多元论、宽容原则让几本菜谱并排，系统之间没有亲缘尺子；第 11 章说明，“相同”的口径一再放宽，仍是统一性的扩张，只在“路径带上历史”之处才有谱系的萌芽；本章说明，系统增多而三律读数没有同升的机制，以及多元而无回写的漂泊。

本编的判断是：多元不是出路。多元化的统一性与单数的统一性，对意义三律的亏缺方式相同——差异不改写尺子，回写缺席，三律只能在尺内的狭小范围运行。因此数学界今天以为的出路——多元、分层、多宇宙——仍然落在统一性之内，只是把一换成了许多。

多元论者可能反驳：多宇宙让数学家自由地开出新路，这不正是自由律所要的吗？回应分两层。其一，自由律的量度是新路的发生，不是选项的数目；多宇宙使选项增加，是否同时使新路增加，是一个要靠读数去判的经验问题，第 18 章的预测二正是为此而设。其二，即便有新路开出，要问它开在何处：开在某个宇宙内部的，属于该宇宙内部的运行，与系统数无关；开在宇宙之间、使两边都被改写的，才是复数带来的增益。后一类事件，要靠回写才能发生，而回写正是多元化的统一性所缺的。

这一判断提出了下一编的任务。如果出路不在把尺子的数目增加，就要问尺子本身的构造：是什么使一把尺子“谁用都一样”，使得差异改变不了它？第 13 章将指出，答案藏在相容性公理里：纠缠必须局域、单元不重叠。这条公理在无数定义里不被说出地运行，它拆掉了特征律与自由律的发动部件。这是下一编的起点，也是它与本编的分界。伞模型要做的，恰好是在构造的层面把这条公理松开：让邻域带权重、可重叠，使混沌碰撞与纠缠在重叠处被允许发生。需要点明的是，第 53 号所说伞模型的“统一”指构造统一：伞模型构造同一、配置成谱，它统一的是构造，不是配置，这与本书批评的统一性不是同一种统一。

至于判决，留给第 18 章：若系统数增加的方向上，非原作者开出的新路与长期问题的解决数随系统数同升，则本编撤回；若不同升，本编立住。

这一结构在数学之外也有对应物，留待第 17 章详论，在此只作预告。单一评分、单一排名是单数的统一性在日子里的形态；把一项评分换成一块指标仪表盘，把一个排名换成几张并列的榜单，是复数的统一性在日子里的形态。指标多了，每一项仍是谁用都一样的尺，各项之间的权重与关系，仍由事先给定的规则安排。人在其中仍是被量度的对象，仍然可替换，只是被量度的方面多了几个。数学里多元不是出路，日子里多指标同样不是出路，二者的缘由相同。

◆ 本章结论

1. 三律的读数分开记、不压成总分：特征律看新特征的凝成与回写，自由律看新路的发生，幸福律看释放的种类；“系统增多而三律读数并未同升”是一个可由第 18 章判决预测二检验的主张。
2. 复数的统一性里，每个系统内部仍守相容性公理，系统之间只有搬运、定位与宽容，亲疏由定义事先给出；这三者都不让差异留在场里改写对方。
3. 特征律下碰撞被分区，自由律下新路被菜单化，幸福律下释放仍是消除差异的变体；宽容原则从源头取走了张力的来源，所做的是转移与遮蔽，不是释放。
4. 多元保住的是自由的外形，保不住自由的量度；外形压过量度，D1 三权偏向自由一端，即漂泊；无亲缘的增殖，实为多元化的统一性。
5. 单数里差异被扣为例外，复数里差异被分居，尺子都不因差异而改变，回写缺席：多元化的统一性与单数的统一性，对意义三律的亏缺方式相同，多元不是出路。

◆ 本章参考

— 原始文献

· Gödel, K. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis. Proceedings of the National Academy of Sciences, 24, 1938, 556–557。

· Cohen, P. J. The independence of the continuum hypothesis. Proceedings of the National Academy of Sciences, 50, 1963, 1143–1148。

· Gentzen, G. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. Mathematische Annalen, 112, 1936, 493–565。

- Gödel, K. Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 4, 1933, 34–38。
- Carnap, R. Logische Syntax der Sprache. Vienna: Springer，1934（宽容原则）。
- Hilbert, D. Grundlagen der Geometrie. Leipzig，1899。
- Friedman, H. Some systems of second order arithmetic and their use. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vancouver, 1974，第 1 卷，1975 年出版，235–242。
- Hamkins, J. D. The set-theoretic multiverse. Review of Symbolic Logic, 5(3), 2012, 416–449。

— 研究文献

- Seetapun, D., and Slaman, T. A. On the strength of Ramsey's theorem. Notre Dame Journal of Formal Logic, 36(4), 1995, 570–582。
- Liu, J. RT^2_2 does not imply WKL_0. Journal of Symbolic Logic, 77(2), 2012, 609–620。
- Simpson, S. G. Subsystems of Second Order Arithmetic. Cambridge University Press，第 2 版 2009。
- Beall, J. C., and Restall, G. Logical Pluralism. Oxford University Press, 2006。
- 阳涌：《标准如何生成数学》原稿，第 17 章（二元运算表与计数口径）。

— 站内著作

- 第 53 号《SDE数学导论》：相容性公理；第 13 章“从伞模型看传统数学的统一性”。
- 第 344 号《意义数学的诞生》：三律的读数口径、新特征四关、引理 18.1、撤去检验、最优释放。

◆



第　四　编

伞模型：
同一性谱系标准化的数学形态

编　序

这一编（第 13—16 章）把同一性谱系标准化写成数学：相容性公理是统一性标准化的隐蔽预设；一个数有它的模型谱——点、伞、圆柱；SDE 数给出标准在谱系中的位置，退化极限把旧数学安放为谱系的一端；伞下三律得以丰满运行。

13

第 13 章

相容性公理：统一性标准化的隐蔽预设

本章提要 第 53 号《SDE数学导论》在计算数学中辨认出六个互锁的约束——相容网格、合法中间态、质量单调性、确定性、可审计性、固定点收敛——并追溯到局域、连续、凸、确定四个物理预设。本章把这组约束读成统一性标准化在伞模型语言里写成的公理，说明它如何在无数定义里不被说出地运行：用桑托斯定理说明每步合法使某些配置不可达，用有限元方法的诞生说明标准是后来凝成的，最后把六约束逐条对应到三律的拆除。

◆ 13.1 一个检查器的一天

设想一段网格优化程序，它的任务是把一个三维区域上的四面体网格改得更好。程序每改动一处，就立即运行一个检查器，检查器依次做六件事。

第一，逐个单元计算有向体积，出现负值（单元翻转）或趋于零（单元退化）就报警；同时检查相邻单元是否共享完整的面，有没有悬挂节点，有没有重叠或缝隙。第二，把这些检查通过的状态登记为“合法”，只有合法的状态才被允许成为下一步的出发点。第三，计算网格质量，与改动之前比较，质量下降则撤销改动，回到上一个状态。第四，用同样的输入把整个流程再跑一遍，核对输出逐位相同。第五，在日志里写下每一步改动的位置、原因与前后差值，以便任何人事后按日志复现任一中间状态。第六，当相邻两轮的网格与解之间的差小于容限，宣布终止。

检查器的一天过得很平静：绝大多数改动通过，少数被撤销，最后程序收敛、停机。没有人觉得这套做法有什么可疑——它就是“好的网格程序应有的样子”。第 53 号《SDE数学导论》第 1 章做的事，是把这六件事从程序里提出来，给它们一个名字：相容性公理。提出之后，它们的互相依赖就变得清楚了：没有第一件事，第二件事无从谈起；没有第二件事，第三件事里的“质量”没有定义；没有第四件事，第五件事无法兑现；没有这些，第六件事的收敛性证明无从下手。六件事互锁，成为一个封闭的整体。

本章的任务有两层。一层是转述第 53 号对这组约束的辨认，并把它放进本书的语言：这六件事是统一性标准化写成公理之后的样子。另一层是追问它在计算数学之外的运行——网格程序里的检查器是显眼的，数学定义里的检查器是不写出来的。

先作一个范围上的交代。第 53 号这一章的题目是“计算数学的相容性公理”，它的对象是网格生成与数值求解。把它推广到数学的定义与证明，是本书的读法，依据在 13.5 节所列的若干处平行结构。这个推广是否成立，应当由那些平行结构是否承担了同样的功能来判断，不由类比的修辞力度来判断。

◆ 13.2　六个约束

按第 53 号 1.2 节，相容性公理由下列六个约束组成。以下逐条复述，并附上本书对它们的伞语言读法（读法部分是本书的，不是第 53 号的原文）。

约束一，相容网格（conforming）。相邻单元必须共享完整的边或面，不许有悬挂节点，不许重叠，不许缝隙；每一个空间点属于且只属于一个单元。伞语言里，这是重叠度 $\omega=1$：第 53 号 5.2 节写明，$\omega=1$ 即不重叠，就是 conforming。伞与伞之间的重叠积分 $E(i,j)=\int \phi_i\phi_j dx$，在支集仅交于测度为零的公共边界时取值为零，伞与伞的牵连只能经由公共边界传递。

约束二，合法中间态。算法每一步之后，网格必须仍然合格：没有翻转单元，没有退化三角形，没有不相容的连接。伞语言里，这是对演化轨道的限制：轨道上的每一个时刻，配置都在合法类之内。

约束三，质量单调性。每一步操作都须通过质量检查，误差减小、单元质量提高才被接受；质量只升不降。伞语言里，这是给演化加了一个沿轨道单调的泛函。

约束四，确定性。同样的输入，同样的输出，每一步确定且可复现。伞语言里，第 53 号 5.4 节的共振动力学 $du_i/dt=f(u_i)+\Sigma_j\ E(i,j)\cdot g(u_j-u_i)+\sigma_i(t)\xi_i(t)$ 有三项，对应秩序、纠缠传导、混沌注入；确定性等于令第三项的噪声强度 $\sigma_i\equiv 0$。

约束五，可审计性。给定任何中间状态，可以追溯每一步操作的原因。伞语言里，每个状态须带着它的来历：由前一状态与所施操作可以重构它。

约束六，固定点收敛。算法的终态是固定点，网格和解不再变化。伞语言里，轨道的归宿是 $du_i/dt=0$。

把这六条放在一起，可以得到一个紧凑的伞语言陈述，作为本书后文引用的形式（符号为本书所定）：

> **相容性公理（伞语言读法）。伞场 $\{\phi_i\}$ 及其动力学满足：(C1) 重叠度 $\omega\equiv 1$，相邻伞共享完整界面；(C2) 轨道上每个时刻的配置属于合法类 $\mathscr{L}$；(C3) 存在质量泛函 Q，沿轨道不降，使 Q 下降的操作被拒绝；(C4) 动力学确定，$\sigma_i\equiv 0$；(C5) 每个状态可由其前一状态与所施操作重构；(C6) 轨道收敛于固定点。**

这一陈述留下了两处要看清的事。其一，(C1) 令第二项里 $i\neq j$ 的耦合只剩公共边界上的传递，第三项由 (C4) 清零，余下的第一项 $f(u_i)$ 是每把伞的自身动力学：公理成立时，伞场在体内几乎是一族各自演化的伞。第 53 号 6.5 节把这个情形用伞参数写成 $r\to 0$、$\omega=1$、$v\to\infty$，即 $N\to 0$，并说这是相容性的物理条件。其二，第 53 号说这六条构成自洽的封闭系统，拿掉任何一个，其余都会动摇。这一论断是下一节与 13.8 节论证的支点：若六条互锁，则任何单条的松动都会被其余五条拉回——13.5 节的模拟退火就是一个例子。

互锁的链条可以逐环写出。没有 (C1)，就没有“合法”的明确定义，因为合法首先指的是单元相容；没有 (C2)，(C3) 的质量比较无从进行，因为质量只对合格配置有定义；没有 (C4)，(C5) 的追溯没有意义，因为同一个状态可能来自不同的历史；没有 (C5)，(C6) 的收敛性证明无法对任一中间状态作估计。反方向也成立：(C6) 要求终态是固定点，才使 (C3) 的单调量有极限可趋近，(C3) 的存在又反过来使 (C2) 的合法类不会被轨道再次离开。这条链首尾相接，成为一个环。环的稳固，是 13.8 节论证“完备拆除”的根据。

◆ 13.3　四个物理预设

第 53 号 1.3 节指出：相容性公理不是数学定理，是一个物理假设。它把六个约束追溯到四个预设。

相容网格预设了**局域**的纠缠：每个单元只与几何上相邻的单元发生关系。合法中间态预设了纠缠的**连续**可变：没有突变，没有相变，没有拓扑重组。质量单调性预设了能量景观的**凸**或者说简单：没有局部极小值的陷阱，顺着下降方向走总能到达好的地方。确定性预设了因果的**确定**：没有本质的随机性。

这四条合起来描述的物理，是局域的、连续的、凸的、确定性的。第 53 号的判断是：经典物理大致满足，并且在 6.3 节把经典弹性放在 $N\approx 0$ 的位置，说传统方法在那里完美适用。本书取这一点，也取四个预设本身，作为后文的依据；第 53 号关

于生命不满足其中任何一个的断言，本书留给第 14 至 16 章的伞模型去处理，此处不借用。

四个预设之所以值得单独列出，是因为它们解释了一个看上去矛盾的事实：一套对网格程序合理的约束，为什么会在整个数学的定义里显影。一种解释是历史的：数学的标准形态是在与经典物理的长期共处中定型的。几何的公理化面向的是刚体运动与测量，微积分面向的是连续介质与确定的轨道，变分学面向的是极小原理。这些领域的物理恰好满足四个预设，于是为它们量身定做的定义方式，被当作定义本身应有的方式。当它们沿着教学体例（第 4 章 4.6 节）流传，预设就和定义一道流传，而没有被一同写出。

四个预设在纯数学的语汇里各有化身。局域化身为“局部性质”：一个对象的性质由它在每一点的邻域决定，整体只是局部的拼合，层的定义即建立在此。连续化身为对映射的基本要求：连续、可微、光滑，是数学中最常见的合格条件，跳跃与突变要作为例外另外安置。凸化身为优化中的黄金标准：凸问题局部极小即全局极小，是所有可解类问题的边界，非凸问题被默认为难。确定化身为函数概念本身：同一个自变量只对应一个值，多值性要通过黎曼面之类的办法改造成单值。这四个化身极少被当作物理假设来读，人们把它们读成数学本身的品质。

这里要补一句分寸：局域、连续、凸、确定在经典力学与弹性力学中的成功是事实，统一性标准化因此在那里是极有效的。本书的论点是：当数学的对象走出这四个预设成立的区域，同一套标准继续以隐蔽的方式运行，才是问题所在。

◆ 13.4　读成统一性标准化写成的公理

现在把第 4 章的三条纪律与这六个约束并排。第 4 章的纪律是对数学实践的描述：定义须无歧义，命题须无矛盾且彼此独立，模型唯一而差异即错误。相容性公理是对网格算法的描述。两者并非同一件事，但它们的结构一致，这是本书的读法所要说明的。

下表给出逐条对应。

相容性公理的约束	对应的纪律	对应的内容
一　相容网格	纪律二（独立、解耦）	单元互不重叠＝各部分可以单独核对；一点只有一个取值＝无矛盾
二　合法中间态	纪律一（无歧义）	每一步的对象都是良定义的，没有“半成形”的对象

相容性公理的约束	对应的纪律	对应的内容
三　质量单调性	纪律三（唯一标准）	只有一个“好”的方向；往坏的方向走即错误
四　确定性	纪律一（无歧义）	同样的输入唯一对应同样的输出＝输出不依赖描述方式
五　可审计性	纪律一、三（谁用都一样）	状态可以脱离发生过程被重构，故可由任何人核对
六　固定点收敛	纪律三（唯一模型）	终点只有一个，到了就不再变

对应表里最见分量的是第五行。可审计性要求任何中间状态都能由前一状态与操作重构，意思是：状态不携带任何仅在发生过程中才存在的信息。这与统一性的定义“可脱离发生过程被搬走”是同一句话在两个层面上的写法。导论里立住的三个定义中，统一性的要害就在这里；相容性公理的第五条，就是这一要害的公理形式。

“隐蔽”在这里指两件事。一是公理从未被作为公理列出：数学的教科书里没有哪一章标题为“相容性”，没有哪个公理系统把它写成一条公理，它存在于每一个被接受的定义的**形式**里。二是公理的违反，在标准内部被读成错误而不是发现：悬挂节点被报警，不合法的中间态被撤销，非单调的一步被拒绝，噪声被认为是故障。违反被当作故障处理，所以公理本身无需出场。

隐蔽还有第三层：公理被读成严格性。一个定义若通过了六条中的每一条，人们称它严格、干净、可靠；若有一条没通过，人们称它含糊、不完整、有待澄清。严格这个词的内涵与相容性公理的外延大体重合，所以对公理的任何质疑都容易被听成对严格性的质疑。这是公理能长期隐蔽的原因之一：它没有躲藏，它被当成了一种美德，而美德用不着被审查。

第 4 章讲的是机制，这里讲的是形式。机制是三条纪律怎样拆掉三律的发动部件，形式是这些拆除怎样被固化成一组可以逐条检查的约束。从机制到形式的一步，也是标准从习惯变成制度的一步。

◆ 13.5　在无数定义里不被说出地运行

相容性公理的每一条，在数学的日常定义里都有平行的对应物。下面五处，是本书选出的最清楚的。

测度的不交性。测度论的核心公理是可数可加性：对两两不相交的可测集列，并集的测度等于各测度之和。公理陈述里的“两两不相交”是不可省略的限定；对于相交的集合，标准办法是先把它们改写成不交并（$A \cup B = A \sqcup (B \setminus A)$），再度量。

重叠没有被禁止存在，却被禁止进入公理的运算：任何要被度量的东西，先被改写成 ω＝1 的形态。这正是相容网格的数学化：一个点属于且只属于一块。

流形的相容图册。微分流形用图册定义：若干坐标图覆盖流形，图与图可以重叠，但重叠区上的转换映射必须光滑，这一条件直接称为图的**相容**。层（sheaf）的粘合公理更干脆：局部截面若在重叠处一致，就能唯一地粘成整体截面。这里重叠是被允许的，条件是重叠处**没有差异**。放进伞的动力学里看：耦合项 $E(i,j)\cdot g(u_j-u_i)$ 靠差异 u_j-u_i 驱动，重叠处强制一致，等于令差异为零，耦合项随之消失。重叠留住了，重叠的功能（差异驱动的传导）被取消了。这是统一性标准化对 $\omega>1$ 的处理方式：容纳重叠的外形，取消重叠的作用。它与第 15、16 章伞的重叠不是一回事，后者要保留的恰是重叠处的差异。

形式证明的合法步。形式证明是一串公式，每一个或是公理，或由前面的公式按推理规则得出。证明助手的内核逐步检查，通过才放行。这里合法中间态、确定性、可审计性三条同时在场：每步合法，同样的证明同样地被接受或拒绝，任何人可以复检。一个证明是否“被允许”，与证明者是谁、怎样想到它无关。这种可复检性是数学公共性的基础，同时也是统一性的完整定义。

下降法与单调格式。数值分析里，线搜索要求充分下降（Armijo　1966 年的条件），许多差分格式因保持极值原理或单调性而被偏爱，Lyapunov 函数用来证明稳定。它们的共同要求是：沿着轨道，某个量只许向好的方向变化。这是质量单调性在优化与微分方程里的写法。

随机性的处理。确定性这一条在随机算法里被松开了，松开的方式却很有教益。模拟退火（Metropolis 等 1953 年的采样，Kirkpatrick、Gelatt 与 Vecchi 1983 年用于优化）在一定概率下接受变坏的一步，这正是对质量单调性的放松。随后 Hajek 在 1988 年（《运筹数学》13 卷 2 期）对有限状态空间上的模拟退火给出了冷却进度的充要条件：设 d^* 为非全局极小点中最深者的深度（从它出发到达更低状态所需越过的最高势垒），则状态依概率收敛到全局最优集合，当且仅当 $\Sigma_k \exp(-d^*/T_k) = \infty$。对数冷却 $T_k = c/\ln k$ 满足条件，当且仅当 $c \geqslant d^*$。放松被重新标准化：单调性松开了，随之建立的是另一套确定的结论——在分布的意义上，终态收敛到最优集合。六条约束里被松开的只有一条，其余五条（至少在分布层面上）仍然成立，新增的结论又回到固定点收敛。这是互锁结构的一个读数：松动被拉了回来。

还可以补一个朴素的读数：软件层面的“可复现性”。同一份代码、同一组输入、同一个输出，被科研界当作可信的底线，并因此催生了容器、版本锁定与确定

性随机种子之类的工具链。可复现性是约束四与约束五在工作流程里的名字。它的价值无可争议，它预设的事也同样清楚：计算只有一条合法的展开方式，凡不能被复现的差异，一律归入故障。

这五处加起来的效果，是公理几乎不必出场。定义者按各自领域的习惯写定义，每一个习惯都遵守着这一组约束中的某几条，于是整个领域的定义整体上遵守着这六条。没有人需要说出“请遵守相容性公理”，因为这六条已经是“什么叫好的定义”的内涵。公理的隐蔽，就是这个意义上的隐蔽。

◆ 13.6　桑托斯定理：每步合法，有些配置够不着

相容性公理有一个后果，可以用一个定理精确地陈述，这就是桑托斯（Santos）在 2000 年发表的结果。

先看背景。给定平面上的有限点集，它的三角剖分之间可以用“翻转”互相变换：删去两个共边的三角形，用另一条对角线重新剖分这个四边形。Lawson 在 1972 年证明，平面上任意两个三角剖分之间总有一串翻转连接。换言之，在平面上，以翻转为步子的搜索可以到达任何剖分。Delaunay 剖分、最大化最小角的剖分，都可以靠翻转从任意初始剖分得到。这是相容性公理在低维的美好时光：每步合法，而可达集是全部。

平面情形的论证有一条很短的主线。点集处于一般位置时，对任何一条不满足局部德洛内条件的内部边做翻转，三角剖分的角度序列（把全部内角从小到大排成一列）按字典序严格增大；剖分只有有限个，所以连续翻转必然在有限步内停于德洛内剖分。翻转本身可逆，于是从任一剖分到任一剖分，都可以先走到德洛内剖分，再沿另一条路的逆向走下去。平面上的可达性，就这样由一个单调量保证；高维里这个单调量不再起这个作用，桑托斯的反例便出在这里。

桑托斯的定理指出，这件事在高维不成立。他在 2000 年（《美国数学会杂志》13 卷，611–637 页）构造了一个六维的点集（324 个点），它的三角剖分在翻转之下构成的图不连通，其中一个剖分根本无法翻转；2005 年他又把维数降到五维。三维乃至四维的一般点集，三角剖分的翻转图是否连通，至今是未解决的问题。第 53 号 1.4 至 1.5 节把此定理陈述为三维、24 个顶点，与原文不符，本书不沿用该陈述，只沿用其结构性结论。

定理的结构性内容不依赖于维数的细节：存在点集，其剖分的翻转图不连通。设 T_1 与 T_2 属于不同的连通分支。从 T_1 出发，只走合法翻转的算法，无论多聪明、走多少步，永远到不了 T_2。若某个质量泛函的最优点恰在 T_2　所属的分支，则这个

最优点在“每步合法”的约束下不可达。需要留意的是，桑托斯的定理说的是连通性，质量是另加的：它只在最优点落入不可达分支时才有意义。

再看一个更古老的例子。Schönhardt 在 1928 年给出一个非凸的多面体（把一个三棱柱的上底面扭转一个角度后连起来得到），它不能不添加新顶点而被剖分成四面体。Ruppert 与 Seidel 在 1992 年证明，判定一个三维多面体能否不加新顶点地剖分，是 NP 难的。限制“不许添加新点”时，有些对象无法被剖分；允许添加新点，问题立即变得可解。限制与可达之间的这个关系，和 桑托斯的结果同形：规则排除了某类步子，使得规则内的步子够不着目的地。

Schönhardt 多面体的难处可以直观地看出：它的六个顶点中，不属于边的连线都落在多面体之外，所以任何不添顶点的剖分，第一块四面体就无处可放。添一个内部点，问题便解开。规则“不许添新点”去掉的恰是这一个自由度。

读数应在三律的账上记下。第一，**自由律**：自由的量度是发生新路径的能力。第 344 号给过一个精确的说法，纠缠不变时，选择不扩张远期可达集（引理 18.1，标〔A〕），要让路变宽必须添新节点；断路即命题 5.5，好去处在“每步合格”下走不到，又分阈值造成的与结构性的。桑托斯的结果给出的是**结构性断路**的几何实例：不是阈值定得太严，是合法配置图本身分裂成了互不连通的块。合法中间态一旦成为公理，可达路径空间就被固定在初始点所在的连通分支里，能增加路径的唯一办法，是离开合法区——这是第 53 号 1.6.2 节所说的“穿越非法区域”。

这里还要交代出路的形态，因为它决定了本书后文的走向。第 53 号 1.6.2 节提出的办法是允许中间态不合法：在合法配置之外引入惩罚势能 V_violation（合法时为零，出现自交或负体积时为正），在全空间上定义含质量项与惩罚项的作用量，并预期存在穿越非法区域的路径，其总代价低于任何合法路径。该节自己把这个预期标为“D 级债务”，即尚待证明的任务。本书据此只取它的方向：出路是把非法区域重新纳入可走的空间，并以一个松弛度参数控制非法的程度；至于这个预期定理本身，仍是待办。二维时 Lawson 的结果使这条路用不上，所以相容性公理在平面上没有代价；代价随维数和纠缠的复杂度升起，这与第 53 号把相容性放在 N 小的区域的判断一致。

第二，**幸福律**：张力的积累与释放之间，常常需要先退后进。第 53 号 2.2 节写道：确定性约束排除混沌态，合法中间态排除大规模拓扑重组，质量单调性排除“先退后进”。这三个排除，每一个都对应翻转图里的一道墙。

第三，第 53 号称桑托斯的结果是哥德尔不完备性在计算数学中的具体实例。本书取其形状而不取其推演：两者共有的形状是，“在规则内逐步到达的集合”小

于“规则下合格的集合”，这个差额由规则本身造成。形状相同足以支撑本章的论点，推演的对应留待有谁把它写出来。

◆ 13.7　有限元方法的诞生：标准是后来凝成的

相容性公理读起来像是一个先于实践的要求。有限元方法的历史，显示了它的另一副面貌：标准是在实践之后凝成的。

第 53 号 1.7 节把这段历史写成混沌、介生、秩序三态，下面按此顺序，并补入一些细节。

混沌期，1940 至 1950 年代。结构工程师需要分析复杂的飞机结构，把结构分成小块，对每块假设简单的位移模式，再把各块组装成整体方程。Hrennikoff 在 1941 年用杆件网格近似弹性体，Courant 在 1943 年的论文里用三角形上的分片线性函数处理扭转问题的变分形式，Turner、Clough、Martin 与 Topp 在 1956 年发表了复杂结构的刚度与挠度分析，Clough 于 1960 年给这一做法定名为“有限元”。不同的人用不同的单元形状、不同的位移假设、不同的组装方式，没有统一的理论。

介生期，1960 年代。在多样的尝试之中，一个方法论框架浮现出来：变分原理，分片多项式空间，组装与求解的流程。Zienkiewicz 与 Cheung 在 1967 年出版了第一本系统的教科书。这一时期的单元里，有不少是**非相容**的——单元之间的位移或斜率在边界上不连续——却在实践中给出了良好的结果。工程师发明了“小片试验”（Bazeley、Cheung、Irons 与 Zienkiewicz　　1965 年的论文标题里就有“相容与非相容解”字样），用来判断一个非相容单元能否在网格加密时收敛到正确解。

秩序期，1970 年代起。数学家为方法建立了严格的基础：Lax–Milgram 定理（1954）提供了变分问题解的存在唯一，Céa 引理（1964）把有限元解的误差约化为最佳逼近误差，Babuška（1971 至 1973）与 Brezzi（1974）给出混合问题的稳定性条件，Strang 与 Fix 在 1973 年、Ciarlet 在 1978 年出版了专著。在这个阶段，相容单元成为理论的基准：如果单元相容，收敛性定理几乎自动成立。

最值得注意的是 Strang 在 1972 年的一篇文章，它的标题是“有限元方法中的变分罪行”（Variational crimes in the finite element method）。“罪行”所指的，是理论之外的各种做法：非相容单元、数值积分、曲边区域的多边形近似。这些做法在工程里一直在用，在理论里则属于对变分框架的偏离。Strang 的文章为

这类偏离建立了误差分析，其后 Crouzeix 与 Raviart 在 1973 年给出了一个非相容却收敛的 Stokes 单元，非相容单元由此成为理论中有正式身份的成员。

这个故事的次序，是把相容性公理读成“后来凝成的标准”的最直接证据。（一）相容并不是方法诞生的条件，诞生期的工程实践里已有大量非相容的做法；（二）相容成为基准，是在数学基础建成之后，因为在这个框架里，相容使证明可以走通；（三）偏离相容的做法，先被命名为“罪行”，随后被附加条件、重新吸收。“罪行”一词是差异即错误的又一个读数；吸收的路线与第 4 章 4.8 节所说的一致：登记为新类，附上条件，保持标准的无歧义、无矛盾、唯一。

同样的次序，在数学内部的定义史里也能找到。无穷小在牛顿与莱布尼茨手中是混沌的工具，在十八世纪被各种说法并行使用，十九世纪中叶由魏尔斯特拉斯一路的 ε–δ 语言收成秩序，二十世纪罗宾逊（Robinson）又从模型论里把它请回；δ 函数的路径也是如此（第 4 章 4.2 节）。每一回，被收成秩序的东西，都是一个先在混沌里长成、后被标准吸收的对象。标准的完成态总是看上去先于实践，其实它排在实践之后。

第 53 号对此作出了一个方法论上的推论：如果一开始就以严格数学为要求，也就是只许秩序态存在，有限元方法可能就不会自然产生，因为没有人能从 Hilbert 空间理论“推导”出它。它从混沌里涌现，然后被严格化。这个推论对本书有双重含义。其一，统一性标准化的完成态（秩序）不是它的起点，起点是一个没有那六条约束的时期。其二，伞模型自身的建设也可以走同样的路：先在具体问题上做探索，让理论从实践中涌现，再严格化；第 53 号估计，这可能需要与有限元相当的时间尺度，三十年量级。

◆ 13.8　六约束与三律的拆除

前面七节各自取了一个角度。现在把它们收到一张表里：相容性公理的每一条约束，拆掉了意义三律中的哪个发动部件，退成了什么。

约束	被拆的部件	所属的律	退化后的形态
一　相容网格（ω＝1）	重叠处的碰撞与矛盾纠缠	特征律、自由律	各块单独核对，牵连只经公共界面
二　合法中间态	半成形的介生态；大规模拓扑重组	特征律（自组织）	每步都是定型的对象
三　质量单调性	先退后进；张力的积累	幸福律	误差最小化

约束	被拆的部件	所属的律	退化后的形态
四　确定性	噪声项，混沌注入	特征律（混沌碰撞）	同输入同输出
五　可审计性	不可追溯到前一步的涌现	特征律（涌现）、自由律（新模式）	状态可脱离发生过程被重构
六　固定点收敛	释放之后激发新目标的循环	三律的互生循环	固定点收敛

逐行说明。

约束一拆的是碰撞发生的地方。特征律的第一步是混沌碰撞，碰撞要在伞与伞的重叠处才有位置；自由律的第一步是矛盾纠缠触发，矛盾要在两个取向于同一点相遇时才有位置。$\omega=1$ 使每个点只有一个取向，这两处位置同时被取消。13.5 节的图册与层的粘合公理表明，即便允许重叠，条件仍是重叠处无差异，位置依然是空的。

约束二拆的是介生态。三态的相位轴贯穿所有层次：混沌态里目标未成形，秩序态里一切确定，唯有介生态是“半成形”的，那是创造的相位。合法中间态要求每一步都是完整定型的对象，没有给半成形留位置。第 53 号 2.2 节明确写出：合法中间态排除大规模拓扑重组。

约束三拆的是幸福律的势能路径。幸福律是张力积累、模式转换、释放，其中张力积累常常表现为质量的暂时下降，转换的完成表现为一次上升。质量单调性把下降一概拒绝，等于把积累的阶段拒绝在外，只留下释放中“消差”的一种。第 344 号对幸福律的刻画是：松下来只有释放一种，最优释放不是最大释放，拖得太长连接会先松掉。质量单调性下的释放恰是另一副样子——被还原为尽可能大地消除误差。

约束四拆的是混沌注入，即共振动力学里的第三项。没有噪声，介生态所需的从混沌背景里浮出有组织模式的过程就没有材料。

约束五拆的是涌现。涌现的本性是：结果不能从前一步和所施操作中读出，否则就只是推演。可审计性要求每个状态可以重构，等于要求每一步都是推演。新特征凡是从不可追溯处来的，在这条约束下都是故障。

约束六拆的是循环。三律的原定义里，目标、路径、动力互相生成，释放之后会激发新的目标，这是“意义的持续再发生”。固定点收敛要求轨道最后不再变，循环在此终止。

六行读完，可以看出一个事实：六条约束没有一条是在拆三律的同一个部件，它们覆盖了三律的全部发动部件，且分工清楚。这是一套**完备的拆除**，不是零散的限制。这也解释了互锁：每条约束单独松开，被拆的部件会部分复活，但其余五条仍在原位，复活的部件找不到可以运行的环境。模拟退火是松开约束三的例子；它的结果是依概率收敛到最优集合——复活的只是一小块，且被另外五条重新装进确定性的结论里。

伞语言里的位置。第 53 号 6.5 节把相容性写成伞参数的条件 $r\to 0$、$\omega=1$、$v\to\infty$，合成 $N=r\omega/(vT_c)\to 0$。本章 13.2 节的 (C1) 至 (C6) 是这个条件在动力学与算法层面的展开。依第 53 号 6.4 节：N 小则相容性成立、传统数学适用；N 大则相容性崩溃、需要伞模型。需要留意，N 只是沿相容角方向给出的标量摘要，相容区本身是 $r\to 0$、$\omega=1$、$v\to\infty$　三个参数的那个角（见第 15 章 15.2）。按这个分法，统一性标准化的有效区域是 N 小的区域，在那里它简洁、高效、正确。本书对这个区域不持异议。问题出现在它被当作数学的唯一形态，而数学的对象早已走到区域之外。

关于“统一”一词。第 53 号第 13 章“从伞模型看传统数学的统一性”所说伞模型的“统一”，指**构造**的统一：伞同时具有连接、次序、结构三个层次，传统数学的分支是退化条件下三层解耦的结果，在伞模型里不存在分支。本书所说的统一性，指“谁用都一样”的标准化。两者不是一回事。伞模型是构造同一、配置成谱：统一的是构造，不是配置——这正是同一性谱系标准化。第 53 号第 13 章又给出了一个与本章呼应的观察：分支的分离源于相容条件下三层次的解耦，自然数是三重退化的伞，连接是二值的、次序是线性的、结构是固定的。相容性公理的 (C1) 在构造层面的后果，就是这种解耦。

这一读法在什么情形下撤回。读法是可以落空的。若能找到一类被数学共同体普遍接受的定义方式，它同时放松了其中两条以上的约束——比如容许有名分的重叠，又容许非单调的步子，又不要求每个状态可重构——而没有靠附加条件把放松的部分重新装回确定性的结论，那么“六约束完备且互锁”的说法就要收回。相反，若凡是看似放松的情形，细查都能找到被保留的五条与被重新引入的收敛结论（模拟退火、非相容单元、分布理论都属此列），读法就得到加强。这是一个可以逐案检查的工作，第 18 章的判决设计与附录三的编码手册会把它做成判定表。

留给后文的两件事。第一，退化极限的地位。现有数学是伞在 $r\to 0$、$\omega=1$、$v\to\infty$ 时显露的稳定态，这一命题在一维、伞心等距等特定情形下已有证明，三重退化下计数与自然数同构；一般情形仍是猜想，本书不把它当已完成的定理使用。本

章对相容性公理的读法不依赖这一般情形：13.5 节的五处对应各自独立可查。第二，出路的形态。若相容性公理是一整套完备的拆除，则局部的松动都会被拉回（13.5 节、本节），出路要从整体的重写入手：保留构造，放开配置。这就是第 14 章要做的事——同一个数在模型谱上的不同位置，各自允许多少碰撞与纠缠。

回到 13.1 节的检查器。它每天做的六件事，是一整个数学传统每天做的事的缩影：把差异挡在门外，把牵连拆开，把路径收窄，把终点钉死。检查器本身没有错，它在 N 小的区域里把事情做得很好。需要改变的是它的地位——从众多可选的运行方式之一，退回到谱系上的一个位置。这个退回，是第 14 至 16 章的内容。这一步也回答了本章开头的问题：那个检查器之所以显得天经地义，是因为它长期是谱系上唯一被看见的位置。退回之后，检查器的六件事不会消失，它们成为伞在 $r\to 0$、$\omega=1$、$v\to\infty$ 处的读数；而在谱系的其余位置上，检查器要问的问题换成了另一组：这里允许多少重叠，容许多大的先退后进，留下多少可追溯的来历。

◆ 本章结论

1. 相容性公理的六个约束与四个物理预设，是统一性标准化在伞语言里写成的公理：$\omega=1$、合法中间态、质量单调、无噪声、可重构、固定点。
2. 公理在数学定义中不被说出地运行：测度的不交性、流形与层的重叠处一致、形式证明的合法步、下降与单调格式，都是它的平行结构。
3. 桑托斯定理显示，坚持每步合法会把可达配置限制在翻转图的一个连通分支里，这是自由律的结构性断路。
4. 有限元方法的历史是混沌、介生、秩序的次序，相容是后来凝成的基准，偏离它的做法先被称为“罪行”，再被附条件吸收。
5. 六个约束覆盖三律的全部发动部件，拆除是完备的，故局部松动会被其余约束拉回。

◆ 本章参考

— 原始文献

· Armijo, L. (1966). Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives. Pacific Journal of Mathematics 16.

· Bazeley, G. P., Cheung, Y. K., Irons, B. M., Zienkiewicz, O. C. (1965). Triangular elements in plate bending — conforming and

nonconforming solutions. Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base.

· Brezzi, F. (1974). On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers. RAIRO Analyse Numérique 8.

· Céa, J. (1964). Approximation variationnelle des problèmes aux limites. Annales de l'Institut Fourier 14.

· Courant, R. (1943). Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. Bulletin of the American Mathematical Society 49.

· Crouzeix, M., Raviart, P.-A. (1973). Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. RAIRO 7.

· Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., Vecchi, M. P. (1983). Optimization by simulated annealing. Science 220.

· Lawson, C. L. (1972). Transforming triangulations. Discrete Mathematics 3.

· Lax, P. D., Milgram, A. N. (1954). Parabolic equations. Annals of Mathematics Studies 33.

· Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., Teller, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. Journal of Chemical Physics 21.

· Santos, F. (2000). A point set whose space of triangulations is disconnected. Journal of the American Mathematical Society 13.

· Schönhardt, E. (1928). Über die Zerlegung von Dreieckspolyedern in Tetraeder. Mathematische Annalen 98.

· Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., Topp, L. J. (1956). Stiffness and deflection analysis of complex structures. Journal of the Aeronautical Sciences 23.

· Strang, G. (1972). Variational crimes in the finite element method. In A. K. Aziz (ed.), The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations.

— 研究文献

· Ciarlet, P. G. (1978). The Finite Element Method for Elliptic Problems. North-Holland.

· Hajek, B. (1988). Cooling schedules for optimal annealing. Mathematics of Operations Research 13.

· Ruppert, J., Seidel, R. (1992). On the difficulty of triangulating three-dimensional nonconvex polyhedra. Discrete & Computational Geometry 7.

· Strang, G., Fix, G. J. (1973). An Analysis of the Finite Element Method. Prentice-Hall.

· Zienkiewicz, O. C., Cheung, Y. K. (1967). The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics. McGraw-Hill.

— 站内著作

· 第 53 号《SDE数学导论》：第 1 章（相容性公理、物理预设、桑托斯定理、有限元的诞生）、第 5 至 6 章（伞模型、SDE 数、相容性的伞参数条件）、第 13 章（构造的统一）。

· 第 344 号《意义数学的诞生》：三律在相容退化下的形态；引理 18.1、命题 5.5；D3 两层。

◆

14

第 14 章

一个数的模型谱

本章提要 从一个最小的样本出发：数 3。通用模型把 3 写成数轴上的一个点，谁的 3 都一样，这是统一性标准化的最小样本，也是连接、次序、结构三重退化的伞。同一个 3 还可以是一把伞：有伞心、半径、核函数，与 2、4 的伞重叠，纠缠强度等于重叠积分。圆柱模型只在此提名。视觉数、触觉数、听觉数共用一个构造，分在配置；点模型是诸模型共同的退化端。重叠处是混沌碰撞与纠缠被允许发生的地方，Voronoi 胞元给出伞的一种离散实现。

◆ 14.1 皮亚诺写下的三

1889 年，皮亚诺在都灵出版了一本拉丁文小册子，题为《算术原理，依新方法阐述》。册子里，自然数被压缩成几条公理：有一个起点，每个数有唯一的后继，不同的数后继不同，起点不是任何数的后继，再加上归纳原则。在这套写法里，3 是起点的后继的后继的后继，写成 S(S(S(0)))。早一年，戴德金在《数是什么，数应当是什么》里走了另一条路，用映射与链来刻画同一个对象。两条路的结论一致：自然数是一条从起点伸出去的链，链上每个位置只由它之前的位置决定。

这是现代数学里 3 的出身。它的好处无人怀疑：写下 S(S(S(0))) 的人，无论在都灵、哥廷根还是今天任何一台机器里，得到的是同一个东西。3 可以被脱离写它的人和写它的时刻，装进证明里、编码里、协议里，原样搬走。本书把这一性质叫作统一性，三个定义已在导论中立住：统一性的要害是“谁用都一样”，可脱离发生过程被搬走，被机器生成。

现在让这个 3 回到日子里。一个孩子数桌上的杯子：眼睛扫过，三只；手指一只一只按过去，也是三只；摇铃响了三声，同样是三。三种数法得到同一个结论，似乎说明背后只有一个 3，三种感官是它的三个入口。但是这三种数法在发生的过程

里并不相同：扫一眼是一次性的，几乎不动；按过去是一圈一圈的，路径上的每一步都带着前一步；听三声是随时间展开的，第三声到来时，第一声已经过去。第 344 号《意义数学的诞生》把这个差别当作起点：数的基本单位不是给定的，是在差异中划出来的，划法里已经有“我”。

本章要问的是：这三种数法与皮亚诺的链，是同一个对象的三个入口，还是同一个构造在不同位置上的三种配置？本章的回答取后者，并且把它画成一张模型谱：谱的一端是点，也就是皮亚诺的链；谱的中间是伞；谱上还有别的位置，圆柱是其中一个被提名的。谱系标准化的数学形态，从这张谱开始。

三种数法的差别，在日常里几乎无人留意，原因是其中一种已经被写进了学校、机器和公理，其余两种留在手上和耳朵里，没有进入标准的账本。本章的另一项工作，是把这两本没有记的账补上。

读者可以把本章当作第 13 章的正面续篇。第 13 章说明了相容性公理怎样不被说出地在无数定义里运行；本章展示拿掉这条公理的预设之后，一个最小的数会长成什么样子。下一章再把这张谱上的位置换成一个可以读数的量。

◆ 14.2　点模型：通用模型与三重退化

先把点模型写清楚。点模型是通用模型：数轴上的一点，自然数的链，计算机里的二进制串。它所以通用，是因为它满足三个条件，每一个都是一种退化。第 53 号《SDE数学导论》第 13 章补论把自然数称为三重退化的伞模型，本书采用这个读法，并逐项展开。

连接是二值的。　在链上，n 与 n+1 之间只有两种状态：连着，或没有连着。连着的程度没有意义，n 与 n+2 之间则只经由 n+1，不存在直接的关系。一个数与另一个数的亲疏，要么由“是否后继”这一问回答，要么由定义事先安排的函数回答：差的绝对值，除法的余数，p 进赋值。每一种亲疏尺子都是事先给定的，用时才调出来。

次序是线性的。　自然数是全序：任意两个数可比较，比较的结果唯一。先就是先，后就是后，中间不存在“前后纠缠”的状态。第 53 号说，在这种退化条件下，次序层的性质与连接层几乎无关：不管通的方式是什么，先就是先。

结构是固定的。 链的形状不变：一条无分叉、无环、有起点而无终点的线。数 3 在链上的位置是固定的，是起点之后第三个。位置不因谁在数、怎样数、什么时候数而改变。

三重退化合在一起，就是一个“谁用都一样”的数。这里值得停下来问一句：一个数既然在三个层次上都被固定，它的三个层次能否各自独立地研究？答案是可以，而且数学史上也确实这样做了。集合论研究连接，序数理论研究次序，代数研究结构，三个传统各自成长。第 53 号第 13 章把现代数学分支的分离追到这里：自然数的退化性使三层解耦，解耦使独立研究成为可能，独立研究产生了独立的语言。本书不展开这条线，只取其结论作为点模型的刻画。

皮亚诺的公理与这三重退化可以逐条对读。“每个数有唯一的后继”把连接固定成一条有向边，没有第二条边的位置。“不同的数后继不同”排除了环与汇合，次序因此是线性的。“起点不是任何数的后继”给链一个端点，结构因此有头无尾。归纳原则则是三重退化的总收口：只要起点具备某性质，并且性质沿后继传递，整条链都具备。这条原则所以有力，正因为链是退化的；沿着一条无分叉的线传递性质，不需要考虑别的路径对它的干扰。换成有重叠的伞场，一个位置会同时从几个方向接收信号，传递就不再是一条线上的接力。归纳的威力，是以结构的固定来换的。

为了让点模型能与后面的伞放在同一个框架里比较，需要一个形式上的说法。取一维，把数 n 放在实轴的整点 $x = n$ 上。点模型对每个 n 给出一个只在 n 处非零的对象，数学上可以写成狄拉克点质量 δ_n。两个不同整数的点质量没有共同的支集，所以它们的重叠积分为零：

$$E(m, n) = \int \delta_m \, \delta_n \, dx = 0, \quad m \neq n。$$

乘积 $\delta_m\delta_n$ 在 $m = n$ 时没有定义，需要借助有限半径的核取极限，这正是下一节要做的事。此处先取其意：点模型的纠缠矩阵是对角的，各个数之间没有直接的纠缠，它们之间的关系全部由邻接（后继）与事先给定的函数安排。纠缠矩阵这个对象在传统框架里不被使用，是因为它总是对角的，没有信息。

点模型的另一个特征值得记下：它可以无损地脱离发生过程。一个 3 被写入二进制串 11，被送入任何机器，被任何人读出，仍然是 3。这是它作为通用模型的力

量，也是统一性定义里“可被搬走”的数学含义。本书反对的不是这种力量，而是把它当成数的唯一形态：当点模型被当作数的全部，亲缘这一维就被排除在定义之外，剩下的只有可替换。点模型的力量与它的退化是同一件事的两面：退化得越彻底，越能被原样搬走。

◆ 14.3　伞模型：伞心、半径、核函数

把点撑开，得到伞。第 53 号第 5 章给出伞的定义：一把伞由伞心、半径、核函数三个要素组成。伞心 x_i 是纠缠的焦点位置；核函数 ϕ_i 是以伞心为中心的衰减函数，描述纠缠强度随距离的变化，它的形状编码了纠缠的方向性与衰减模式；半径 r_i 是纠缠的有效范围，紧支集核取支集半径，非紧支集核取强度衰减到某个阈值的距离。一族伞构成伞场。

用这三个要素重写数 3：伞心取在 $x = 3$，半径 r，核函数取三角形的帽函数 $\phi(x) = \max(0, 1 - |x - 3|/r)$。数 2 与数 4 同样各自有一把伞，伞心在 $x = 2$ 与 $x = 4$。三把伞的支集分别是 $[3 - r, 3 + r]$、$[2 - r, 2 + r]$、$[4 - r, 4 + r]$。

两把伞的纠缠强度，第 53 号第 5 章第 3 节定义为重叠积分：

$$E(i, j) = \int \phi_i(x)\, \phi_j(x)\, dx。$$

它非负；当且仅当两把伞的支集至多相触时为零；自纠缠 $E(i, i)$ 为正；两伞心越远，纠缠越弱。

下面做一个可以手算的例子，伞心间距取 1，核取上述帽函数。设相邻两伞的伞心为 n 与 $n + 1$。当 $r \leqslant 1/2$ 时，两支集 $[n - r, n + r]$ 与 $[n + 1 - r, n + 1 + r]$ 至多相触于中点，重叠积分为零，纠缠矩阵是对角的，这是点模型的另一种写法。当 $1/2 < r \leqslant 1$ 时，支集在区间 $[n + 1 - r, n + r]$ 上重叠，这段区间的长度是 $2r - 1$。令 $t = x - n$，在重叠区上两个核的乘积是

$$(1 - t/r)(1 - (1 - t)/r)。$$

取 $s = t - 1/2$，乘积化为 $(1 - 1/(2r))^2 - s^2/r^2$，在 $s \in [-(r - 1/2), r - 1/2]$ 上积分，得到

$$E(n, n+1) = 4(r - 1/2)^3 / (3r^2),\quad 1/2 < r \leqslant 1。$$

在 r = 1 处，E = 1/6。这个数对做过有限元的读者很熟悉：半径为 1 的帽伞正是一维线性有限元的基函数，1/6 是单位网格上质量矩阵的非对角元。有限元的质量矩阵，在这里被读成相邻两把伞的纠缠强度。这不是类比，是同一个积分；区别在于传统框架把这个积分看作基函数在积分意义下的副产品，而伞模型把它当作模型的主要对象。

同一个积分还给出自纠缠与行和。对帽核，$E(i,i) = \int \phi_i^2\,dx = 2r/3$，r = 1 时为 2/3；一行的三个元素 1/6、2/3、1/6 相加恰为 1，等于 $\int \phi_i\,dx = r$。这是单位分解在纠缠矩阵上的读法：r＝1 时帽函数之和恒为 1，行和等于伞的面积。r 越过 1 以后，行里的非零元素增多，纠缠沿着行向更远处摊开；这时帽函数之和不再恒为 1，行和也不再等于 r，偏离的大小见下面的冗余度。

随着 r 超过 1/2，纠缠强度从零开始、以三次方起步地升起：在门槛 r = 1/2 处，E 与它的一阶、二阶导数都为零，到三阶导数才不为零，所以纠缠的出现是一次平缓的、而非突然的事件。这里出现一个门槛：r = 1/2 是两伞开始重叠的半径，也就是网格间距的一半。门槛之下，每个点最多属于一把伞（除了相触的端点），重叠度 ω = 1，伞场是相容的；门槛之上，中点附近的点同时属于两把伞，ω = 2。r 超过 1 以后，3 的伞开始与 1、5 的伞重叠，再往后与更远的数发生关系。“3 与 2、4 的伞重叠”这句话在数学上有了刻度：它是半径越过一个门槛的事。

对一般的伞心间距 d，同样的计算给出 $E = 4(r - d/2)^3/(3r^2)$，适用于 $d/2 < r \leqslant d$。此式为初等积分所得，d ≠ 1 的情形由 d = 1 的结果按尺度变换得到，与上面的推导一致。

这个例子里还有一个值得注意的事实：r = 1 时帽函数之和恒等于 1，构成单位分解。单位分解是有限元与无网格方法里的基本结构。第 53 号第 18 章指出，伞积分在满足单位分解的权重下与经典积分一致，偏离单位分解的程度反映重叠的冗余度（第 53 号的这一说法针对其伞积分的定义，本书只借它的方向）。

举一个数：r = 1.5 时，三把相邻的帽伞在伞心 n 处的取值分别为 1、1 − 1/1.5 = 1/3（来自 n ± 1 的伞，各一把），总和 5/3，已偏离单位分解 2/3；这 2/3 就是冗余度的一个读数，重叠越密，偏离越大，归一化之后才能恢复积分的一致。换句话

说，传统数学里那个被当作技术条件的单位分解，在伞模型里是一个位置：它位于谱的某一点上，既不是起点，也不是必然。

还有一层读法值得写出来：伞下的计数。一族伞的密度函数是 $\rho(x) = \Sigma_i \phi_i(x)$，它记录一个位置被伞覆盖的总强度。$r \leqslant 1/2$ 时，整点处的 ρ 是 1，离开整点逐渐降到 0，各把伞的支集互不相交，数一个对象就是看它落进哪把伞，答案是确定的，与皮亚诺的链同构。$r = 1$ 时，$x = 2.5$ 处同时落在 2 的伞和 3 的伞里，各占一半：这个位置既不是 2，也不是 3，而是“半个 2 与半个 3”。点模型对这个位置只能说它不是整数，要另立有理数来安置；伞模型里它只是同一族伞在另一处的读数。按压一只半熟的桃子，手感落在“熟”与“不熟”之间，正对应这样的位置。第 344 号在算“恢复旧数学”时，一维、伞心等距、重叠度取整数的情形下，盒伞与帽伞都算出了归一化因子，三重退化下计数与自然数同构，半径落到门槛以下（$\omega=1$）是这个同构的条件之一，三重退化还要求传播速度趋于无穷，同构只在该情形下成立。

从这个小例子往谱的深处走，伞的三个要素各自提供一个自由度。伞心不必取在整点上，可以取在任何位置，这是自适应网格的内容。半径可以随位置、随时间、随方向变化，写成 $r(x)$、$r(t)$、$r(x,\ \theta)$。核函数可以是紧支的，也可以是幂律衰减的，各向同性或各向异性。第 53 号在第 5 章第 5 节列出了一张对照表：半径趋于零、不重叠、传播无限快，得到经典偏微分方程；半径取有限视界，得到近场动力学；半径趋于无穷、幂律衰减，得到分数阶微积分。这张表里的每一行，是伞在不同配置下的一个位置。

回到 3。点模型里，3 是一个位置；伞模型里，3 是一把伞，与 2、4 的伞有一定的重叠，其重叠的程度是可以计算的量。同一个数，在谱上有了第二种读法，纠缠强度成为数之间的亲缘：不是由事先给定的函数安排，而是由伞的几何重叠给出。

◆ 14.4　圆柱模型：只提名，形态待定

模型谱上的位置，不止点与伞。构造这张谱时，还举出了另一种构造，称为圆柱模型。本书在此只提名它，并且明确标注〔形态待定〕：本书不给圆柱模型下定义，也不推测它在三个参数上的取值。

提名的意义在于给谱留位。一张模型谱需要至少三个位置才成其为谱：一个端点，一个中间点，以及一个说明端点与中间点并不穷尽可能性的第三点。点是端点，伞是中间点，圆柱是被提名占这第三个位置的候选，它究竟落在何处，尚待界定。读者若只看到点与伞，容易把它读成“从简单到复杂”的一条线，两端而已；圆柱的存在提醒这是一个有维度的空间。

对任何被提名到谱上的新构造，本书预先提出三个问题，合称接纳三问，作为核定时需要回答的清单，而不替它回答：

第一，它的三个要素（连接、次序、结构）各有多少自由度，哪些被固定，哪些被放开？

第二，它在什么条件下退化回点？退化的方式是否与伞的退化一致，即是否也经过半径趋零、重叠度趋一、传播速度趋无穷？

第三，它是否有纠缠强度的读法？如果有，是否可以写成某种重叠积分？

接纳三问对任何新构造一视同仁。第一问保证它在谱上有明确的位置，第二问保证点模型确实是它的退化端，第三问保证它与伞模型的比较有共同的单位。通不过接纳三问的构造，可以作为数学对象保留，但不能占谱上的位置。

◆ 14.5　视觉数、触觉数、听觉数：构造同一，配置成谱

第 344 号把上一节的框架用到了感觉上。同一只杯子，看是一眼的一，摸是一圈的一，听是一声的一。第 344 号认为，这三种数共用同一个构造，即伞心、半径、核函数，差别在配置：

视觉数的半径近零，并且不动。眼睛一扫，一个对象落在一个位置上，半径可以近似为零，伞收成了点。重复看，位置不变，半径也不变。

触觉数的半径沿路径变化。手指按过杯口再按过杯身，每一次按压的范围不同，半径在路径参数上变化，写成 $r(s)$，s 是路径上的位置。熟度读在按压的路径依赖里：第 344 号用按压桃子判断熟度的实验来检验触觉数感，实验的预注册与失败的写法见该书，本书不重复。

听觉数的半径随时间运动。三声的数，要在时间里积累，第三声到来时第一声已远，半径 r(t) 跟着时间延伸与收缩。

用符号表达：构造是三元组（伞心，半径函数，核函数）；配置是半径函数的取法，视觉取 $r \approx 0$ 的常函数，触觉取路径上的函数，听觉取时间上的函数。三种数的构造相同，配置的类型不同，这就是“构造同一，配置成谱”。

第 344 号还补了第三层：数模型分构造、配置、记录规则三层。构造回答“数由什么组成”，配置回答“这一次的半径与重叠怎么取”，记录规则回答“取出来的结果怎样写下来、怎样传给别人”。同一个构造和同一种配置，换一套记录规则，传递出去的东西就不同：视觉数记成符号串，听觉数记成节拍与口诀，触觉数记成手上的分寸和一句“再按一按”。点模型的通用，有一半功劳在记录规则：符号串可以无损复制，口诀与分寸不行。记录规则决定一种配置能被搬走多远，所以也决定它的规范力能积累到多大的范围。

需要点明的是，这里的“统一”指构造的统一，在第 53 号第 13 章、第 344 号的叙述里都是这个意思。它与本书所说的统一性不是一回事。本书的统一性指“谁用都一样”的标准化，是配置层面的事：把所有的数都固定在同一种配置上，且这种配置可以脱离发生过程被搬走。构造同一、配置成谱的伞模型，恰好是统一性的反面设计：构造统一了，配置不统一，这才有谱可言。

那么，为什么在日常与数学里，数常常显得只有一种？视觉数在这张谱上占了一个特殊的位置。第 344 号的解释是：视觉数成为“唯一的数”，是因为它能一一对应，能重看，能同看，规范力因此积累得最快，而不是因为构造唯一。能一一对应，意味着一个对象对应一个计数标记；能重看，意味着同一个现场可以被反复核对；能同看，意味着多个人可以同时核对同一个现场。这三条合起来，使视觉数在共同实践里最容易被检验、被纠错、被传递。

这个解释对本书很重要，因为它把“点模型何以占据通用地位”的问题改写成一个标准化史的问题。皮亚诺的链之所以通用，是视觉配置的数在漫长的规范力积累里成为默认，进而被写成公理。公理一旦写成，它又反过来回写到实践上：算术课教的是视觉配置，计算机实现的是视觉配置，其余配置成为“不精确的”“个人的”“主观的”。第 344 号对此给出的校正，是“3 克”与“一小撮”划在不同的轴

上，不能按精不精确用一根尺子比较。一根尺子统领全部的数，这正是统一性标准化的样子。

在这个意义上，点模型的通用不是自然状态，而是一段回写历史的结果。本书在导论中立过：同一性谱系的程度由回写历史生成。数的模型谱给这句话提供了最小的例子：点模型在谱上的位置，是视觉配置的规范力积累出来的位置。

◆ 14.6　重叠处：碰撞与纠缠被允许发生

为什么要把点撑开成伞？不是为了更一般，是为了让一些事情有地方发生。

在第 53 号第 5 章第 4 节给出的伞场动力学里，每把伞 i 有一个状态变量 $u_i(t)$，演化方程是

$$du_i/dt = f(u_i) + \Sigma_j E(i, j)\, g(u_j - u_i) + \sigma_i\, \xi_i(t)。$$

三项各有职责。第一项是伞的自身动力学，只依赖伞自己的状态，对应秩序态。第三项是随机扰动，对应混沌态。第二项是通过重叠区从邻居传来的信号：它传递的是差异，而不是绝对值，权重是纠缠强度 $E(i, j)$，对应介生态。

这个方程里，$E(i, j) = 0$ 时第二项消失。点模型的纠缠矩阵是对角的，所以点模型上的动力学只剩两项：每个点各自演化，各自受扰，彼此之间没有传导。这是 $\omega = 1$ 的相容世界的样子：差异产生在各点，却没有地方相遇。

混沌碰撞要求两条差异序列在同一处相遇。特征律的跑法是混沌碰撞、自组织、涌现，开头那一步需要相遇的场所。重叠区就是这个场所：两把伞同时覆盖的点，同时受两条序列的影响，两个方向的信号在此叠加。自由律的触发是矛盾纠缠，需要同一个点上有两个互相矛盾的指令；重叠区同样是这种指令能够并存的地方。点模型把这类场所取消了，所以三律中最先倒下的是特征律与自由律的开端。这一点在第 13 章从相容性公理的角度已经说过，本章从模型的角度再说一遍：不是有人禁止了碰撞，是模型里没有留下碰撞的地方。

仍以 3 为例。r 超过 1 以后，3 的伞同时与 1、2、4、5 的伞重叠。设 2 的伞和 4 的伞各带着一个状态值，它们在 3 的伞覆盖区内相遇，3 收到的是两个方向的差异：来自 2 的 $u_2 - u_3$ 与来自 4 的 $u_4 - u_3$，各按纠缠强度加权。两者同号时叠加，异号时抵消或拉扯，抵消不尽的部分成为 3 的新状态。点模型里，3 只有一个前驱 2 和一

个后继 4，信号沿链单向接力；伞模型里，3 同时是接收者和中转站，信号可以来回。来回的时间约为 2r/v，若与伞自身的振荡周期相配，便发生第 53 号所说的纠缠共振。取一组数看一遍：设 $u_2 = 1$、$u_3 = 0$、$u_4 = -1$，两条边的纠缠强度相等。来自 2 的差异是 +1，来自 4 的差异是 −1，加权之后恰好抵消，3 的新状态不动；若 $u_4 = 3$，则两项为 +1 与 +3，叠加为 +4，3 被明显拉动。同一个点，同样的权重，邻居的状态不同，碰撞的结局不同，这是点模型里没有的东西。这是介生态的数学形态，具体的门槛在第 15 章与第 16 章处理。

重叠处的另一件事，是微分的替换。经典微分算子只看一点的无穷小邻域；伞场上取而代之的是积分形式的算子，第 53 号称之为共振算子，其最简单的形式是

$$\mathcal{L}_r u(x) = \int K_r(x, y)(u(y) - u(x))\, dy。$$

它看的是 x 周围半径 r 内的加权差异：这个点的值与整个伞覆盖区内各点的值之差，按核加权求和。r 趋于零时它回到局部算子，细节留到第 15 章，那里会写出已证的特定情形（平移不变径向核）。此处只记下一件事：算子的形式从“一点的无穷小邻域”换成了“一把伞的覆盖区”，邻接微分被共振取代。

Voronoi 胞元为伞提供了一种离散实现，也让这个设想有了几何上的落脚点。给定平面上的一组种子点 p_i，每个种子点的 Voronoi 胞元 V_i 是离它最近的点的集合。狄利克雷与沃罗诺伊的工作奠定了这种剖分，1908 年沃罗诺伊发表了系统的结果，1934 年德洛内（Delaunay）发表《论空球》，给出了它的对偶：两个胞元共享一条边时，对应的种子点相连，得到德洛内三角剖分。1999 年杜强、法伯与冈茨堡格尔发表重心 Voronoi 剖分的综述，把胞元重心与种子点对齐的优化纳入统一的算法框架。

在伞的语言里，每个种子点是一个伞心，V_i 是取指示函数为核的伞：核在胞元内为 1，胞元外为 0。这是一把没有衰减、边界锐利的伞。因为胞元互不重叠，伞场是相容的，$\omega = 1$，纠缠矩阵对角，连接关系只有德洛内边这一种二值信息：相邻或不相邻。

把胞元稍微加厚，得到伞的离散实现。取 $\delta > 0$，令 V_i^{δ} 为胞元 V_i 的 δ 邻域，用它的指示函数作核。相邻的两个胞元共享边界，加厚之后在边界附近有一条宽约

2δ 的重叠带；不相邻的胞元之间有正的距离，δ 足够小时仍不重叠。因此重叠积分 $E(i, j)$ 在 δ 小时只在德洛内边上非零，并且近似与共享边的长度成正比：

$$E(i, j) = 2\delta \cdot \ell_{ij} + O(\delta^2),$$

其中 ℓ_{ij} 是两胞元共享边的长度。二维、点集处于一般位置（没有四点共圆）时此式成立；$O(\delta^2)$ 来自共享边两端的角区，其系数依赖于该处三个胞元的夹角，本书不逐项写出。

这个近似值得停下来读。德洛内三角剖分的连接是二值的，相邻就是一，不相邻就是零；加厚之后，连接变成了有权重的：共享边越长，纠缠越强。二值的连接被撑开成了连续的强度，这正是点模型的三重退化里“连接二值”那一重的松动。德洛内边的集合，是 $\delta \to 0$ 时纠缠矩阵非零元素的位置模式；权重则记录了每条边的几何。

更大的 δ 让更远的胞元进入重叠，纠缠矩阵逐渐从稀疏变为稠密，半径从零开始变成一个真正的参数。这一族构造把传统计算几何里的 Voronoi 剖分放在谱的退化端，把加厚的、重叠的、半径可调的版本放在谱的内部。第 53 号第 25 章以伞剖分命名这类推广，并且指出传统 Voronoi 在其中占 $\omega = 1$ 的位置；该章中把 power diagram 视为 $\omega = 2$ 特例的说法，本书不采用。

◆ 14.7　点是诸模型共同的退化端

把前面几节合起来，可以给出模型谱的形式轮廓。

设有一族数模型 $M(r, \omega, v)$，其中 r 是伞半径，ω 是重叠度，v 是传播速度，三个参数的含义已在本章 14.3、14.6 与第 15 章给出。点模型是这族模型在

$$r \to 0, \quad \omega = 1, \quad v \to \infty$$

处的退化端：伞收成一点，不重叠，信号瞬间传遍。伞模型在谱的内部，其中三参数取有限值。圆柱模型〔形态待定〕在谱上占的位置，待它的定义核定之后再标注。

这里有两件事需要分开说。第一，点模型是诸模型共同的退化端，这是一个关于构造的说法：任何被提名到谱上的构造，若按 14.4 接纳三问的第二问回答，其退

化的终点都是点；圆柱是否通过这一问，仍待界定。第二，点模型是否是谱的“自然起点”，这是一个关于标准化史的说法：点之所以占据端点，是因为视觉配置的规范力积累最快（14.5）。两件事都成立，但属于不同层次，前者是数学的，后者是历史的。把两者混起来，会得到“数本来就是点”这个常见的误解。

统一性与谱的关系，由此变得清楚。统一性标准化把端点当作全部：数是点，亲缘由定义安排，一个 3 对谁都一样。多元化的统一性把端点复制了几份：几本菜谱并排，每一本里的 3 仍是点，各本之间没有亲缘尺子。同一性谱系标准化把整张谱当作标准：一个数在谱上的位置，由它被回写的历史给出，“这里才这样”。

伞模型统一的是构造，不是配置（14.5）。本书把它读成标准化的重生，原因正是它在构造一致的同时，让配置成谱，让位置有来历：构造一致使不同位置之间可以比较，配置成谱使每个位置不必被另一个位置替换。

由此，数学标准化的创新可以获得一个具体的描述。以往的标准化创新，是在点模型的框架里增加定义：加上有理数，加上实数，加上复数，加上超实数。每一次扩张仍然是点，仍然谁用都一样。谱系标准化的创新，是在同一构造下移动配置：把半径从零撑开，把重叠度从一调高，把传播速度从无穷调到有限。前一种扩张加宽了端点，后一种扩张打开了谱。

模型谱还给标准化的评价提供了一个操作上的问法。面对任何一个被称为“标准”的数学对象，可以问三件事：它取的是谱上哪一个位置；这个位置是由定义给出，还是由回写历史给出；它被推广到了哪些别的位置，那里的实践者是否同意这种推广。这三件事里，第二件把统一性标准化与谱系标准化分开，第三件把模态的推广显出来。后面第 16 章讨论“一小撮盐”与“3 克”，用的就是这个问法。它与判别一个多元是否仍属统一性的三问（第 12 章 12.8 节，亦见附录二）是两回事：那里问的是一个多元内部与系统之间的关系，这里问的是一个标准在谱上的位置与来历。

最后回到那个桌上的三只杯子。皮亚诺的链告诉我们，三只杯子是一个确定的数；伞模型再补一句话：这个确定，是半径近零的视觉配置的稳定态，它是三种数法里最易积累规范力的一种，并不是唯一的一种。扫一眼、按一圈、听三声，这三

种数在同一把伞下，位置不同。下一章会给每个位置一个读数，这个读数是 SDE 数。

◆ 14.8　三个模态，三个位置

这张谱按模态区分，可以这样表述：数学的同一性谱系标准化，在视觉、听觉、触觉三大感觉模态上，取不同的位置。

先看一眼的 3。三只杯子摆在桌上，每只对应一个标记，能一一对应；明天再看，桌上仍是三只，能重看；两个人并肩站着，看到同一个三，能同看。一一对应、重看、同看三个条件，使视觉数的核对成本最低，规范力积累最快。视觉数学因此可以把统一性做得很强：几何图形、符号串、公式，都是眼睛可以反复摆在面前的对象，“谁用都一样”在这里最容易成立，也最容易被写成公理。

再听三声的 3。声音随时间流走，第三声响起时第一声已经消失，无法一一对应地摆出来；不能同看，两个人只能各听各的，同时在场也是各自的听；难以重看，重放是另一次发生，录音只是把听觉对象转成视觉对象（波形）之后的重看。听觉数学的统一性因此非常差。它的标准多半靠转写成视觉对象来维持，乐谱便是例子：乐谱是写给眼睛的，听觉数的统一性是借来的。这里只取乐谱作为一例，不展开音乐学论证。

再摸一圈的 3。手指沿杯口按过一圈，数在路径上积累，随手的力度、速度、身体的状态而变；同一只桃子，两个人按出的熟度可以不同，同一个人早晚也不同。触觉数学只在一手一地之间传递，靠手把手；它非常部落谱系化，标准的位置由谁的手、在什么路径上回写过来决定，这正是“这里才这样”。

把三个位置并排，可以列成一张小表：

模态	半径的配置	一一对应	重看	同看	标准的传递范围	谱上的位置
视觉：看一眼的 3	r 近零，且不动	能	能	能	跨地域、跨时代，可写成公理	近统一端
听觉：听三声的 3	r 随时间动	难	难	不能	多靠转写成视觉对象来保持	居中

模态	半径的配置	一一对应	重看	同看	标准的传递范围	谱上的位置
触觉：摸一圈的 3	r 沿路径变	随路径	随身体	只在一手一地	手把手，部落内	部落谱系

表里每一格是模态的读法，本书不把它当作测量值。表要说明的是排列的次序：沿着规范力积累的难易，三个模态在谱上摆开，视觉端积累快，触觉端积累慢而深，听觉端居于其间，既没有视觉那样可摆出来核对，也没有触觉那样可手把手传下去。

这个排列有一个直接的推论。数学教科书里的数，几乎全部来自视觉端；视觉端又恰好是点模型最容易成立的一端，因为半径近零且不动，伞已经收成点。于是教科书的数与点模型之间，隔着一个未被说出的选择：先取视觉配置，再把它写成通用模型，最后把通用模型当作数的全部。这个选择在每一个环节上都合理，合起来却是一次标准化：模态的一端，被推广成了整张谱。

三个模态的区别，同时给“谱系标准化”一个具体的工作面。谱系标准化不是在三个模态之间选一个最好的，而是承认三个位置各有来历：视觉数学可以保留它很强的统一性，那是它积累出来的；触觉数学保留它的部落谱系，不被硬塞进一根视觉的尺子；听觉数学的统一性本来就差，也不必靠转写来假装强。问题出在把一个模态的位置当作所有模态的位置。

听觉端的居中位置尤其值得多说一句。它的统一性差，却不因此成为部落式的：同一首歌谣可以在远隔千里的人口中保持可辨认，节拍可以教，音高可以用器物（音叉、定音管）固定下来。这类固定的做法，是用外物替代“同看”，让一次一次流走的声音有一个可以回头核对的参照。用外物固定之后，听觉数获得一些视觉端才有的稳定，代价是它所依赖的外物成了新的标准。谱上居中的意思就在这里：不像视觉端那样本来就摆得出来，也不像触觉端那样只在手上，它需要借助中介，才在更大的范围里站得住。

三个位置合起来，给出一个对本书母题的重要修正：被称为“统一性标准化”的那一套，其实是视觉模态的标准化被推广成了全部数学的标准化。视觉数的规范力积累最快，它的做法（脱离发生过程、一一对应、可同看）被当作数学标准

化的唯一做法，听觉与触觉的数被当作视觉数的粗糙版本。谱系标准化要求按模态给出不同的位置：视觉端接近统一，听觉端居中，触觉端是部落谱系。三个位置共用一个构造，配置不同（14.5），这与伞的参数一一对应，第 15 章给出对应与读数区间。

◆ 本章结论

1. 点模型是通用模型：连接二值，次序线性，结构固定；纠缠矩阵对角，亲缘由事先给定的函数安排，一个 3 对谁都一样。这是统一性标准化的最小样本。

1. 同一个 3 可以是一把伞：伞心、半径、核函数三要素，与 2、4 的伞重叠，纠缠强度等于重叠积分；帽伞在间距为 1 时，$E(n, n+1) = 4(r - 1/2)^3/(3r^2)$（$1/2 < r \leqslant 1$），$r = 1/2$ 是重叠开始的门槛。

1. 圆柱模型是又一种被提名的构造，本书只提名，形态待定；任何新构造要占谱上的位置，须过接纳三问：自由度、退化、纠缠读法。

1. 视觉数、触觉数、听觉数共用一个构造，配置各异；视觉数成为“唯一的数”，来自规范力积累最快，而不是构造唯一。

1. 重叠处是混沌碰撞与纠缠被允许发生的地方；共振算子取代邻接微分；Voronoi 胞元加厚后，德洛内边的二值连接变成与共享边长成正比的连续强度；点是诸模型共同的退化端。

1. 三个模态取不同位置：看一眼的 3 近统一端，听三声的 3 居中，摸一圈的 3 是部落谱系；“统一性标准化”实为视觉模态的标准化被推广为全部数学的标准化。

◆ 本章参考

— 原始文献

· 皮亚诺（Giuseppe Peano），《算术原理，依新方法阐述》（Arithmetices principia, nova methodo exposita），都灵，1889。

· 戴德金（Richard Dedekind），《数是什么，数应当是什么》（Was sind und was sollen die Zahlen?），1888。
· 沃罗诺伊（Georgy Voronoi），关于正二次型的论文，1908。
· 德洛内（Boris Delaunay），《论空球》（Sur la sphère vide），1934。

— 研究文献

· 杜强（Qiang Du）、法伯（Vance Faber）、冈茨堡格尔（Max Gunzburger），《重心 Voronoi 剖分：应用与算法》（Centroidal Voronoi tessellations: applications and algorithms），SIAM Review，1999。

— 站内著作

· 第 53 号《SDE数学导论》：第 5 章（伞模型）、第 13 章补论（自然数的退化性）、第 18 章（伞导数与伞积分）、第 25 章（伞剖分）。
· 第 344 号《意义数学的诞生》：一把伞三种数；单位与“我的数学”；规范力。

◆

15

第 15 章

SDE 数与退化极限

本章提要　伞场有三个旋钮：半径 r，重叠度　ω，传播速度 v。第 53 号把它们合成一个无量纲的读数 N = rω/(vT_c)，称为 SDE 数，度量一个系统离“相容”有多远；本书读它为标准在谱系中的位置。现有数学是 r→0、ω=1、v→∞　时的稳定态。本章把能证的写成证明：平移不变径向核的一维与高维极限、重叠门槛、延迟趋零；把尚为猜想的写成猜想，分栏列出。视觉、听觉、触觉三个模态落在不同的参数区间。与非局部微积分、近场动力学的分界，在于局部性被读作一种标准化。

◆ 15.1　雷诺的玻璃管

1883 年，雷诺在曼彻斯特做了一个后来写进所有流体力学教科书的实验。一根水平的玻璃管，水从水箱流入，入口处注入一缕染料。水流慢的时候，染料拉成一条笔直的细线，沿着管轴走到出口；水流加快，到某个速度，细线开始摆动、断裂，染料忽然散成一团，充满整个管子。雷诺把管径、流速、流体的密度和黏度合成一个组合 Re = ρvL/μ，发现这个无量纲数而不是其中任何一个量单独地决定了水流属于哪一种：数小，层流；数大，湍流。临界值落在两千到数千的量级上，随入口处扰动的大小而变。

这个故事里最值得取走的，不是临界值，而是它的形式。四个有量纲的量，各自单位不同，合起来是一个纯数。纯数小时，一套数学够用；纯数大时，需要另一套。不同的管子、不同的流体、不同的温度，只要纯数相同，流动的定性行为相同。判断依据不是流体的名字，而是这个数在谱上的位置。

第 53 号《SDE数学导论》第 6 章借用了这个形式。它认为，一个纠缠系统是否落在传统数学的领地里，同样可以由一个纯数来读出，这个纯数由伞的半径、重叠度、传播速度与系统的特征时间合成，称为 SDE 数。本章的任务是把这个数交代清

楚：它度量什么，哪些关于它的说法已经证明，哪些仍是猜想，它与已有的非局部数学怎样分界，以及它在本书里承担什么角色。

雷诺数还有一个性质，对后面的读法有帮助：它给出的是区间而不是点。层流到湍流的转变不在某一个确定的数上发生，入口扰动小，层流可以维持到很高的数；扰动大，几千就转。临界值是一个带，带的位置依赖于系统的其他细节。SDE 数在这一点上沿用同样的态度：它在量级上分区，N 趋于零、一的量级、很大，各对应一个定性的区域，区域之间的交界随系统而异，不需要也无从给出一个通用的临界常数。

SDE 数在本书里承担的角色是这样的。上一章画了模型谱：点、伞、圆柱，以及三个感觉模态的不同配置。谱上的位置需要一个读法，否则“这里才这样”只是一句口号。SDE 数是这个读法的候选：它把位置读成数。本章把这个读法写到能被检验的程度。

◆ 15.2　三个参数，一个读数

先把记号定下来。设有一个伞场，伞心的分布给定，每把伞有半径 r_i　与核函数 ϕ_i。第 53 号第 5 章第 2 节取三个全局参数。

半径 r，纠缠的空间范围：一把伞的信息能直接影响多远。它可以是常数，也可以写成位置的函数 r(x)、时间的函数 r(t)、方向的函数 r(x, θ)。量纲是长度。

重叠度 ω，纠缠的密度：一个典型点同时被多少把伞覆盖。第 53 号的逐点定义是 $\omega(x) = \#\{i : \Phi_i(x) > \varepsilon\}$，ε 是阈值，全局重叠度取上确界或平均。$\omega = 1$ 即不重叠，也就是相容；$\omega > 1$ 即有重叠。它是无量纲的整数或实数。

传播速度 v，纠缠信号的传导快慢：一把伞的震动传到相邻重叠伞所需时间的倒数，量纲是长度除以时间。$v \to \infty$ 表示信号瞬间传遍；v 有限表示信号带延迟。

再取系统的特征时间 T_c，例如自相关衰减的时间。SDE 数定义为

$N = r \cdot \omega / (v \cdot T_c)$。第 53 号记作 N 带下标 SDE，本书各章统一简记为 N。

量纲检查：r 是长度，v·T_c 是长度，所以 N 无量纲，是纯数。第 53 号第 6 章解释了它的结构：分子 rω　是纠缠的空间范围与密度，分母 vT_c 是信号在一个特征时间内能走多远。N 小，意味着信号在系统变化之前就已传遍纠缠范围，系统来得

及同步，行为接近局域和确定；N 大，意味着信号赶不上系统自身的变化，信息是过时的，异步产生不可预测性。第 53 号把 N 的几个区间对应到三态：N 趋于零，秩序态主导；N 在一的量级，临界区，介生态的温床；N 很大，混沌态与介生态必须参与。

与相容性公理对读。第 53 号第 6 章第 5 节把相容性写成伞参数的条件：r→0，伞不重叠；ω=1，每点恰被一把伞覆盖；v→∞，没有延迟。三条合起来，N 趋于零。

这里有一处需要读准。N = rω/(vT_c) 是三个参数的标量组合，而相容是三个独立的条件。由 ω ≥ 1 可知 N ≥ r/(vT_c)，所以 N→0 蕴含 r/(vT_c)→0，却未蕴含 ω=1：一族半径极小、但密密叠放的伞，可以 ω 很大而 N 仍小。因此本书把第 53 号的“N→0 即相容”读作：相容区是三参数空间里 r→0、ω=1、v→∞ 的那个角；N 是沿着靠近这个角的方向给出的标量读数，ω 另行记录。谱系坐标是三元组（r, ω, v），N 是它的一个摘要。

举一个第 53 号自己算过的例子，看 N 是怎样落到数上的。第 53 号第 6 章第 7 节对人脑做了一次粗估：伞半径取约十厘米（长程连接跨越两半球），重叠度取五到十（一个脑区同时参与多个功能网络），传播速度取每秒一到十米，特征时间取一百毫秒到十秒，各取中值（半径 0.1 米、ω 取 7、速度取每秒 5 米、时间取 1 秒）代入，得到 N 约零点一四（0.1×7÷5），落在秩序态与介生态的边界上。这个数的价值不在精确，而在它示范了读法：四个参数各有各的估计办法，估计各有各的误差，最后合成的是一个量级。本书引用它，只为说明 N 怎样算；它的数值只是一个量级，而且这个量级很宽：把四个参数各取区间的两端，N 最小约 0.1×5÷(10×10) = 0.005，最大约 0.1×10÷(1×0.1) = 10，相差三个数量级以上。中值给出的 0.14 是区间的几何中心附近的一点，它示范读法，并不单独断定人脑落在哪一态；要断定，需要把各参数的区间先收窄。分步看这个数：分母 vT_c = 5 米每秒 × 1 秒 = 5 米，是信号在一个特征时间内走的路；0.1 米的伞半径只占其中的五十分之一（0.02），再乘以重叠度 7，得 0.14。哪一个因子最松，一眼可见：特征时间的区间跨了两个数量级，它是收窄的第一站，其次是传播速度，区间跨了一个数量级。

这一读法还带来一个好处：门槛可以精确。上一章 14.3 算过，伞心等距（间距 d）、帽函数核的一维伞场里，相邻伞的重叠积分在 r ≤ d/2 时恒为零，r 越过 d/2 才升起。因此在这个配置里，ω=1 与 r ≤ d/2 等价（端点相触不计）。相容区在这里不是一个模糊的“很小”，而有一个明确的边界，边界取决于伞心的间距。这是后面论证“退化极限”时用到的第一个确定的事实。

◆ 15.3　三个模态在伞参数上的位置

三个感觉模态的数学在谱上取不同的位置：视觉数学的统一性可以很强，听觉数学的统一性非常差，触觉数学非常部落谱系化；被称为统一性标准化的东西，实为视觉模态的标准化被推广成了全部数学的标准化。上一章 14.8 写出了三个位置，本节把它们对应到伞参数。

对应是直接的，因为第 344 号已经给出了三种数的半径配置。

视觉数：r 近零，且不动。伞收成点，半径不随位置、时间、路径变化。三个参数里，r 在相容的那一端；一眼扫过，没有传导的等待，v 可视作足够大；扫过一次，一个对象落进一个位置，ω 取一。三项都靠近相容区的角，视觉数落在谱的退化端附近。这是它的统一性可以很强的参数根据：参数空间里它离相容区最近，而相容区正是“谁用都一样”成立得最好的地方。

听觉数：r 随时间动。三声的数需要在时间里积累，半径 r(t) 随时间伸缩。信号不是瞬时的：第一声的影响必须等待才能与第三声相遇，等待就是有限的 v 与不可忽略的 T_c。声音的纠缠在频率域里范围较大，且相邻通道大量重叠（第 53 号以耳蜗的频率通道为例，ω 远大于一）。于是 r、ω、v 三个参数同时偏离相容角，听觉数的 N 较大，第 53 号给出的量级估计是十到一百。这一读数解释了它为什么难以像视觉数那样“摆出来”：流走的信号带着延迟，同一个三，每一次听都是一次新的发生。

触觉数：r 沿路径变。手指一圈一圈按过去，半径是路径参数 s 的函数 r(s)；每一步依赖前一步，路径依赖就是它的熟度。第 53 号给出的触觉 N 的估计是一到十，处于中等非局域，传播速度可以被感知，重叠的伞接力清晰可见。

必须把这三个数读准：它们是第 53 号第 6 章第 3 节的量级估计，不是本书的测量；本书不复核，引用时均标作量级。第 53 号对视觉的描述分两层，低级视觉处理

快而局域，N 不大；高级视觉的物体识别与场景理解中 N 很大。本书这里取的是视觉“数”的读法，即一眼扫过的计数，对应前者。

这里有两种不同的测量，本书不把它们强求统一。按 N 的大小，从小到大排是：视觉，触觉，听觉。按谱系标准化的位置，从近统一到部落谱系排是：视觉，听觉，触觉。两个次序不一致。

不一致不是矛盾，两个量度量的是不同的东西。把两种测量压成一个次序，本身就是统一性标准化的动作；本书让两个次序并存。N 度量的是一个模态里的纠缠动力学离相容有多远，由 r、ω、v 与 T_c 决定，是构造—配置层的读数。统一性度量的是一个标准能被搬到多远而仍是同一个，是记录规则与规范力积累的结果（14.5 所说的第三层）。听觉数的 N 大，因为它的延迟与重叠大；它的统一性居中，因为声音可以借助音叉、节拍、乐谱这类外物获得稳定的参照。触觉数的 N 居中，因为它的纠缠范围有限；它的统一性最弱，因为触觉的分寸无法脱离手和路径而被记录。两条轴交叉，是模态差异的又一个证据：谱系位置不是 N 的单调函数。

再把这两种测量放回数学里看。视觉端的数学，也就是几何图形、符号公式、证明的书写，其对象全部可以摆在眼前，参数落在相容角附近，所以它的标准可以被写成公理，被机器生成，被万里之外的人原样接收。听觉端的数学，例如节奏、音程比例、口诀式的运算，需要时间中的积累，N 较大；它的标准一半靠转写成视觉对象，一半靠器物与师承，因此统一性居中，且每一次转写都有损耗，损耗处正是听觉数学自己的东西。触觉端的数学，例如木匠的“差不多一指”、厨师的“一小撮”、按桃子判熟度的手感，N 居中，而标准只在一手一地之间传递，是部落式的。这三类数学在人类的实践里一直并存，只是视觉端的账本被写成了教科书，其余两本留在作坊里。

这一点对本书的论证有帮助，而不是有损。它提示谱系标准化的位置需要两个坐标：一个是动力学坐标（N，或三元组），一个是传递坐标（标准的传递范围，由记录规则决定）。统一性标准化把二者压成一个：视觉配置在动力学坐标上最靠近相容，在传递坐标上又传得最远，于是被当作了“数”的全部。传递坐标的量化，本书在第 18 章的判决设计中只用间接的读数（采纳与改写程度）。

◆ 15.4　已证的特定情形

这一节只写已经证明的东西。证明不长，因为它们的前提给得很窄。窄是有意的：前提给宽了，下一节就要转入猜想。

命题 15.1（平移不变径向核的局部极限）。 设 $d \geq 1$，$\phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 有界，支集在 $[0,1]$ 内，使 $\int |w|^2\,\phi(|w|)\,dw$ 与 $\int |w|^4\,\phi(|w|)\,dw$ 有限（积分在 $\mathbb{R}^d$ 上）。对 $r>0$ 令

$$K_r(x,y) = r^{-(d+2)}\,\phi(|x-y|/r),\qquad \mathcal{L}_r u(x) = \int K_r(x,y)\,(u(y)-u(x))\,dy.$$

设 $u \in C^4(\mathbb{R}^d)$，其至四阶的导数有界。则

$$\sup_x \left|\mathcal{L}_r u(x) - c\,\Delta u(x)\right| \leq C\,r^2\,\|D^4 u\|_\infty,$$

其中 $c = \tfrac{1}{2d}\int |w|^2\,\phi(|w|)\,dw$，$C = \tfrac{1}{24}\int |w|^4\,\phi(|w|)\,dw$。

证明如下。把 $u(x+z)$ 在 x 处展开到三阶，余项为四阶：

$$u(x+z) - u(x) = \nabla u\cdot z + \tfrac12\, z^{\mathsf T}(Hu)z + \tfrac16\, D^3u[z,z,z] + R_4(z),\quad |R_4(z)| \leq \tfrac{1}{24}\|D^4u\|_\infty |z|^4.$$

乘上径向对称的核 $K_r(x,\,x+z)$ 积分。一阶项与三阶项是 z 的奇函数，与径向偶核相乘后积分为零。二阶项里，非对角元 $z_i z_j$（$i \neq j$）的积分为零，对角元的积分彼此相等且等于 $\tfrac{1}{d}\int |z|^2 \ldots$，代换 $z = rw$ 后得到 $r^{-(d+2)}\cdot r^{d+2}\int \ldots = c\,\Delta u(x)$，没有残差。余项的积分以 $r^{-(d+2)}\int \phi(|z|/r)|z|^4\,dz/24\cdot\|D^4u\|$ 为界，代换后等于 $C\,r^2\,\|D^4u\|$。证毕。

这个证明里有三点值得注意。第一，收敛是均匀的，收敛率是 r^2 的量级，这里核取到二阶矩即够用，更高的光滑度只改变常数。第二，归一化因子是 $r^{-(d+2)}$，多出的 r^{-2} 是必须的：若只取 r^{-d} 归一使核的积分为一，则算子 $\mathcal{L}_r$ 的值以 r^2 趋于零，极限是零算子，而不是 $c\Delta$。若引用第 53 号命题 5.2 时采用 ε^{-d} 归一，则按本书的计算，需要在算子前乘上 ε^{-2} 才得到所述极限；读者对照时请留意两处归一化约定的差别。第三，常数 c 取决于核的二阶矩：以一维三角核 $\phi(w) = 1-|w|$ 为例，$c = \tfrac12\int_{-1}^{1} w^2(1-|w|)\,dw = \tfrac{1}{12}$。用数值积分检验过这个例子：取 $u = \sin x$，在 $x = 0.7$ 处，r 分别为 0.4、0.2、0.1、0.05，$\mathcal{L}_r u$ 与 $c\Delta u$ 之差依次约为 2.9×10^{-4}、7.2×10^{-5}、1.8×10^{-5}、4.5×10^{-6}，每次 r 减半，差减为四分之一，符合 r^2 的收敛率。

命题 15.2（重叠门槛）。 一维，伞心等距（间距 d），核为半径 r 的帽函数。则相邻伞的重叠积分在 $r \leqslant d/2$ 时为零；在 $d/2 < r \leqslant d$ 时为 $4(r - d/2)^3/(3r^2)$。因此 $\omega = 1$ 当且仅当 $r \leqslant d/2$。证明是 14.3 中的初等积分。

取一个数看看。$r = 3d/4$ 时，$4(r - d/2)^3/(3r^2) = 4\cdot(d/4)^3 \div (3\cdot 9d^2/16) = d/27$：相邻两把伞的纠缠强度只有帽伞自纠缠 $2r/3 = d/2$ 的 2/27，不到十分之一，但已经不为零，ω 在伞心附近为 1，在两伞心之间升到 2。再设 $vT_c = 10d$，则 $N = r\omega/(vT_c)$ 在伞心附近为 0.075，在两心之间为 0.15。同一族伞里，N 随位置而变，它是沿着运行读出的读数，不是整个系统的一个固定属性。

命题 15.3（延迟趋零）。 考虑带延迟的方程 $u'(t) = F(u(t), u(t - \tau))$，F 满足利普希茨条件，初始历史取为常值。则对任意有限区间 $[0, T]$，当延迟 $\tau \to 0$ 时，解一致收敛到无延迟方程 $u' = F(u, u)$ 的解，误差为 $O(\tau)$ 的量级。证明用格朗沃尔不等式：在 $s \geqslant \tau$ 处，$|u(s - \tau) - u(s)| \leqslant M\tau$，M 为解的导数在 $[0, T]$ 上的界；在 $s < \tau$ 处差值有界，贡献为 $O(\tau)$；于是误差 $e(t)$ 满足 $e(t) \leqslant C\tau + L\int_0^t e(s)ds$，得 $e(t) \leqslant C\tau\, e^{LT}$。例如 $L = 1$、$T = 3$ 时，$e^{LT} \approx 20$，误差上界约为 $20C\tau$；延迟缩小到十分之一，上界也缩小到十分之一，这就是 $O(\tau)$ 的含义。这是对第 53 号第 5 章中传播速度 v 的刻画：延迟约为 r/v，$v \to \infty$ 即 $\tau \to 0$，在有限区间上，有限速度的方程趋近于瞬时耦合的方程。

此外，第 344 号在两个具体配置上给出了计算，本书引用其结论，不重新推导：一维、伞心等距、重叠度 ω 取整数时，盒伞的归一化因子 $W = \omega^2/(\omega^2 - 1)$（$\omega \geqslant 2$），帽伞在 ω 为偶数时 $W = 1$；W 趋于 1 发生在重叠变密时。第 344 号还给出：三重退化下，计数与自然数同构，该书把此结论的证据等级标为 A，并限定在该情形。盒伞公式在 $\omega = 1$ 处分母为零，不在其适用范围之内；这里的 W 以第 344 号的定义为准，本书只取“重叠变密时 W 趋于 1”这一方向，不与第 53 号中另一处 W 的记法相比。

把命题 15.1 放到数上看，更直观。取一维三角核，$c = 1/12$，被作用的函数是 $\sin x$，在 $x = 0.7$ 处 $c\Delta u = -\sin(0.7)/12 \approx -0.05368$。$r = 0.4$ 时 $\mathcal{L}_r\, u \approx -0.05340$，$r = 0.1$ 时 ≈ -0.05367，$r = 0.05$ 时 ≈ -0.05368。半径从 0.4 缩到 0.05，伞算子的读数从第三位小数开始，逐步与拉普拉斯算子的读数重合。这是 r 作

为谱系坐标的一个具体画面：沿着 r 的方向走，伞算子的值连续地变化，局部算子是这条路上的一个端点值。

还应当说明命题 15.1 用到了什么，由此看出它覆盖不到什么。它用了平移不变（核只依赖 x − y），所以每个位置的伞一样大；用了径向对称，所以奇数阶项消去；用了紧支集与高阶矩有限，所以余项可控；用了函数的光滑度，所以泰勒展开有意义；用了全空间，所以没有边界。每一条都是一处可以松动的前提，下一节的猜想栏正是由这些松动处构成的。

这四处结果的共同点是：都是在窄前提下的确定的数学。命题 15.1 的前提是全空间、平移不变、径向、光滑函数；命题 15.2 是一维等距；命题 15.3 是利普希茨与有限区间；第 344 号的计算是一维等距、整数重叠度。离开这些前提，以下几个问题就打开了。

◆ 15.5　一般情形是猜想

下表把已证与猜想并排列出。本书在后面所有章节里，只把左栏作为已建立的事实使用；右栏的条目只作为研究计划出现，不作前提。

方面	已证（特定情形）	猜想（一般情形）
半径趋零	全空间、平移不变径向核、C^4 函数：$\mathcal{L}_r \to c\Delta$，$O(r^2)$（命题 15.1）	非等距伞心；r 随位置 r(x) 变化；有界区域与边界条件；非光滑函数
重叠度	一维等距帽函数：$\omega = 1 \Leftrightarrow r \leqslant d/2$（命题 15.2）	高维不规则伞心的门槛；ω 非整数时的行为
传播速度	利普希茨、有限区间、常值历史：$v \to \infty$ 时解收敛（命题 15.3）	长时间行为；延迟与噪声并存；延迟与共振门槛的关系
计数	三重退化下，计数与自然数同构（第 344 号，限该情形）	半径越过门槛后，计数由什么取代
三参数联合	无	$r\to 0$、$\omega\to 1$、$v\to\infty$ 同时取极限时，次序是否可交换；极限是否唯一
现有数学	无	现有数学整体是伞场在相容角上的稳定态

方面	已证（特定情形）	猜想（一般情形）
三律退化	无	特征律退成固定点收敛，自由律退成唯一合法路径，幸福律退成误差最小化（第 344 号标为 B 级）

联合极限一栏需要多说几句，因为它是最容易被忽略的难点。命题 15.1 只让 r 趋零，其余固定；命题 15.3 只让 τ 趋零。把几个极限一起取，要问取的次序：先令 r→0 再令网格间距 h→0，与先令 h→0 再令 r→0，结果可能不同；当 h 与 r 同时趋零而比值 r/h 固定时，离散算子的极限还会依赖这个比值。这个问题在近场动力学的数值分析里有一个现成的名字：渐近相容。田晓与杜强在 2014 年的工作给出了离散化方案在两个极限都趋零时一致收敛的条件。在伞场语言里，这个比值 r/h 就是重叠度 ω 的连续对应物，因此“联合极限是否可交换”正是第 53 号的猜想要说清楚的。本书不对它作任何断言。

表中的几项猜想，各有各的难处，值得分别写出它们可能卡在哪里。

半径随位置变化的情形：r(x) 不再是常数，核 K(x，y) 失去平移不变，对称性要靠特别的构造来维持（例如取 r(x) 与 r(y) 的某种平均）。命题 15.1 的泰勒展开仍可进行，但一阶项不再抵消，会留下一个与 ∇r 成比例的输运项。极限方程因此可能不是纯扩散，而带有漂移。这个漂移项是否有物理或数学上的意义，需要具体计算；以上只是对展开结构的预判，本书未作计算。

边界的情形：伞靠近边界时支集被截断，核需要重新归一化，或者采用体积约束。杜强一系对体积约束问题的适定性已有系统的分析，可以直接借用；但边界层中半径趋零的收敛率，一般会比内部差。

联合极限的情形：这是最硬的一项。三个参数各自趋向相容角，次序不同，路径不同。若极限依赖路径，则“相容角”不是一个点，而是一片区域，其中不同的方向给出不同的局部数学。这一可能性不应被提前排除，因为它与“谱系”的说法并不冲突：谱本来就可以有多个维度。

三律退化的情形：第 344 号对固定点收敛、唯一合法路径、误差最小化的退化判断标为 B 级，意思是有论证而未形成完整证明。本书同样把它放在猜想栏。

如果这些猜想中有任何一项被证伪，退化极限的说法需要改写，而不是撤回整个伞模型：把“现有数学是相容角上的稳定态”缩小为“现有数学中某一类是”。第 344 号的第 40 章立了撤回规则，本书第 18 章的判决预测零写的是同一种态度。

“现有数学是伞场在相容角上的稳定态”这句话，在本书里的身份是读法，不是定理。它的含义由三部分构成：一，命题 15.1 一类的结果，说明在窄前提下，伞场算子确实回到经典算子；二，14.2 的对读，说明点模型的每一重退化都对应相容角的一个条件；三，还没有证的部分，是对更宽的一类数学对象，这两件事是否同时成立。第 344 号对此的表述是：该书声明这句话不是定理，退化极限在第八编拆成任务去证，证不出的照实写出卡在哪里。本书取同样的态度。

◆ 15.6　退化极限把旧数学安放在谱系的一端

即使一般情形仍是猜想，已证的特定情形已经足够改变旧数学的位置。

在统一性标准化的叙述里，经典的局部微积分是数学的原点，其余的一切（非局部的、分数阶的、核方法的）是它的推广或修正。命题 15.1 提供了另一种读法：局部算子 $c\Delta$ 是一族积分算子 $\mathcal{L}_r$ 在 $r\to 0$ 时的极限。极限点不是起点，是族的一个端点。这一读法不推翻任何一条经典定理。经典的结果在端点上依然成立，且命题 15.1 恰好给出它们在端点附近的修正：误差随 r^2 而减。

第 344 号把“恢复”分为三级：重述，嵌入，严格恢复。重述是把旧结论用新语言说一遍；嵌入是旧结构在新结构里作为子结构出现；严格恢复是旧结论作为新结论的特例被证出。命题 15.1 可算作严格恢复的一个实例，但只在它的前提之内。其余部分，旧数学与伞场的关系，多数是重述或嵌入，少数尚无结论。本书把这一分级拿来使用：每当有人说“旧数学是伞场的退化”，应当问这句话属于哪一级。

退化的方向也值得停下来。$r\to 0$、$\omega=1$、$v\to\infty$，三个方向各自对应点模型的一重退化。$r\to 0$ 使伞收成点，核变为狄拉克函数，使连接成为二值；$\omega=1$ 使每点只属一把伞，使次序无从纠缠；$v\to\infty$ 使信号瞬时传遍，使结构不因延迟而变形。把三个参数与三层逐一配对，是本书的读法；第 53 号第 13 章补论说的是相容条件整体使三层解耦，进而分支分离，并未作逐一配对。若一般情形的猜想成立，则旧数学的分支结构应当被读成相容角的一个性质，在角附近解耦，离开角则重新耦合。第 53

号举的朗兰兹纲领、阿蒂亚—辛格指标定理等例子属于这个预测，是第 53 号的解释，本书只引用，不将其作为已证事实使用。

对本书的母题，退化极限的意义在于：统一性被安放为谱系的退化端。统一性不是错误，是谱系里最粗、最老的一端；伞收成一点时显露的数学仍然有用。三律在相容角上的读数（固定点收敛、唯一合法路径、误差最小化）就是亏缺性运行的数学形态，它们在角上不是缺陷，是角的定义；缺陷出在把角当作整张谱，从而让所有场合都按角的要求运行。

在这个意义上，若三律退化的读法成立（15.5 表末栏，仍属猜想），退化极限可以给“亏缺”下一个不依赖价值判断的数学定义：三律在谱的某个位置上的读数，若恰是相容角的三个读数，则该位置上的运行是亏缺性的；离开角，读数才能变化。这个定义的另一面是，丰满运行需要离开角，离开多远、朝哪个方向，则由场的回写历史给出，下一章再讲。

把这一节与上一章的模态位置接起来，还有一层意思。视觉数学接近相容角，退化极限对它的描述最贴切；对听觉与触觉数学，退化极限只是它们的一个远端，并不是它们所在之处。若把相容角的数学当作全部数学的标准，听觉与触觉的实践便只能被读作偏离，读作误差或例外。把角读作谱的一端，这种偏离才恢复为位置：它们各在各的地方，有各自的回写历史。

◆ 15.7　与非局部微积分、近场动力学的分界

非局部数学有一段不短的历史，本书必须与它划清界线，否则“伞模型”会被读作旧话新说。

近场动力学由西林（Silling）在 2000 年提出，用积分形式的相互作用取代弹性力学中的空间导数，以便在材料出现裂纹、位移不连续的地方仍有定义。积分的范围由一个“视界”δ 给出。2008 年，西林与莱科克（Lehoucq）证明了视界趋零时近场动力学收敛到经典弹性理论。非局部向量微积分由杜强、冈茨堡格尔、莱科克与周凯的一系列工作建立，包括 2012 年发表于 SIAM Review 的关于体积约束非局部扩散问题的分析，以及之后的非局部平衡律。杜强与田晓的渐近相容格式回答了离散化与视界两个参数同时趋零的问题。

这些工作与本章的命题 15.1 在数学上相邻，甚至部分重合：视界 δ 就是伞半径 r，视界趋零回到局部的结果，就是命题 15.1 的同类。第 53 号和第 344 号都没有回避这一点，它们明说近场动力学是伞模型在有限视界上的位置，分数阶微积分是半径趋于无穷、幂律衰减的位置。

分界在三处。

默认值不同。 非局部微积分把局部当默认，把非局部当模型。局部方程是“真实的物理”或“理想的极限”，非局部模型是修正：当局部方程失效（裂纹、奇异性、长程相互作用），引入视界；视界的大小，是为了尽量逼近局部的解而选取的参数，目标是让 δ 趋零时回到局部。本书把这个默认倒过来看：局部性本身是一种标准化，即相容性公理（纠缠必须局域、单元不重叠）；说一个方程是局部的，就是说它被放在了相容角上。局部不是自然状态，是被写进公理的位置。

半径的身份不同。 在近场动力学里，δ 是模型参数，按材料性质或数值误差调节。在本书里，r 是谱系坐标，它的取值回答“这个标准在谱上的什么位置”。同一个符号，前者问的是怎样逼近，后者问的是在哪里。逼近问题的答案是越小越好；位置问题的答案没有“越小越好”，只有“这里才这样”。

回写的身份不同。 视界在近场动力学里是事先给定的，或经数值实验标定的。本书要求位置由回写历史生成：半径由场自己的关联函数读出，重叠度由独立纠缠通道的数目读出（15.8），而不是由定义安排。这是同一性谱系与多元化的统一性的区别在这个领域里的样子。

还有一处同名异义，须在此点明。杜强与田晓所说的渐近相容（asymptotically compatible），指离散格式在两个参数同时趋零时的一致收敛性，是数值分析的概念；第 53 号所说的相容性公理，指纠缠必须局域、单元不重叠等六个约束，是伞参数落在相容角上的条件。两个“相容”，字面相邻，意思不同。本书凡提到前者一律写作“渐近相容”，后者写作“相容性公理”或“相容”。

分界还可以用一个具体的问法来检验。给定一个非局部模型，问：它的视界是怎么来的？如果回答是“取得足够小，使解接近局部解”，这是修正的问法；如果回答是“由这个场的关联结构读出，不同位置、不同时刻可以不同”，这是坐标的问法。同一套积分算子，在两种问法下是两种东西。前者把局部解当作答案，后者

把局部解当作谱上的一个点值。杜强一系的框架允许变视界、非均匀核，数学上并不排斥后一种问法；只是在他们的叙述里，局部极限是评价标准，而本书的叙述里它是端点。

对杜强一系的工作，本书持承接的态度。他们已经证明了许多本书需要的结果，网格相容、视界趋零、联合极限；本书的猜想（15.5）中联合极限一栏，正是请他们那类分析去回答的问题。不同之处不在数学，在于对数学所处位置的读法：他们的结果可以被读作局部数学的精化，也可以被读作谱系的坐标。本书取后一种读法。

◆ 15.8　SDE 数是位置，不是分数

现在回到 N 在本书里的角色。N 度量离相容的距离，距离的另一端是相容角；沿着这个距离，标准在谱系中有一个位置。这个位置怎样得到，是本节要回答的问题，答案决定 N 属于统一性还是属于谱系。

假如 N 是事先定义的，比如规定“某类问题取 r = 0.1”，那么位置由定义给出，N 就是一把新尺子，把谱系变回多元化的统一性：几把刻度不同的尺子并排，位置是安排好的。第 53 号第 6 章第 7 节给出的是另一条路：N 的四个参数都从系统自己的运行中估算。r 取两点之间关联函数衰减到峰值一半的距离，在神经网络里用功能连接的互相关来估算；ω 取覆盖一点的独立纠缠通道的数目，可用独立成分分析或社区检测；v 取对系统施加扰动后到达远处的延迟，例如诱发电位的潜伏期，或材料中的应力波速度；T_c 取系统自相关衰减的时间。四个量都是读出来的，读自系统的运行记录。

这与统一性标准化的做法恰好相反。统一性标准化先给定义，再在定义的框架里运行；N 先有运行，再从运行里读出位置。位置由发生的历史给出，不由定义给出：这就是“只能发生，不能应用”在 N 上的含义。一个系统的 N 不能被规定，只能被测得；而且随着系统运行、关联结构变化，测得的值会移动。

这里可以借一个度量衡的例子来看。米的定义经历了三个阶段：1791 年取自地球子午线四分之一弧长的一千万分之一，1889 年采用铂铱合金的国际米原器，1983 年改为光在真空中一定时间内走过的距离。三个阶段是一条标准向相容角靠拢的路：从一个依赖具体地点和具体实物的量，到一个脱离任何具体实物、谁在哪里都

能复现的量。每一步都使标准更“谁用都一样”，也使它在三个参数上更靠近角：r 更小（不依赖某块金属的位置），ω 更接近一（单一的定义，不与别的实物竞争），v 更大（复现不再等待原器的运送）。这是一个关于标准化史的例证，它没有说这样做不好，度量衡的统一对文明的组织连接不可缺少，本书在第 2 章已经说过。它说的是，统一的程度是一个可以在谱上标出位置的量，而不是非此即彼的二选一。

N 作为读数的另一个用处，是给判决设计提供输入。第 18 章的判决预测零，要问按场的发生调节伞半径与权重的伞模型，是否比固定 r→0 的点模型或固定视界的非局部模型表现更好；其中“按场的发生调节”要求有一个独立于模型拟合的 r 估计，读法正是 15.8 所述的关联函数方法。若 r 只能靠拟合效果反推，则判决会陷入循环。因此本章把估算方法写进正文，作为后面判决的接口。

三个模态的 N 也应当按这个办法读。视觉数的 r 从两点之间的关联读：扫一眼的计数里，一个对象与相邻对象之间几乎没有关联，r 近零。听觉数的 r 要在时间里读，把听三声时第一声对第三声的影响随间隔的衰减画出来，衰减到一半的间隔给出时间上的半径。触觉数的 r 要沿路径读，把按压在路径上相邻两点的手感关联画出来。三条曲线各有各的横轴，但都是同一件事：用系统自己的关联来读伞的大小，而不是事先规定它。这样读出的三个 N，才是三个模态在谱上的真实位置；本书给出的量级只是第 53 号的估计，等待用这类读法替换。

最后，要说明 N 在这本书里不承担的角色。N 不是创新的分数，不是对一个人或一个团体的评价，也不是三律读数的总分；第 344 号明确说三律量纲不同，彼此不能替代，所以分开记，不压成总分。N 只回答一个问题：这个标准在谱系里离相容角多远。有了这个读数，第 16 章才能进一步问：离开角之后，三律在伞下怎样运行。

一个读数的好坏，要看它能否被别人重复。N 的四个参数都有明确的估算办法，估算用的数据可以公开，编码者与判定者可以分开，这些条件使 N 可以进入第 18 章的判决设计。读数若再配上预先写下的失败条件，就成为可以输的读数；本书希望 N 是这样的读数，并在第 18 章里为它预先写下输的条件。读数的价值不在于把标准排成一条线，而在于让每个位置都带着可以复算的来路。

◆ 本章结论

1. SDE 数 $N = r\omega/(vT_c)$ 是无量纲读数；相容区是 $r\to 0$、$\omega=1$、$v\to\infty$ 的角，N 是沿此角方向的标量摘要，谱系坐标是三元组。

1. 视觉、听觉、触觉三个模态落在不同的参数区间：视觉数靠近相容角，听觉数的 N 较大（量级估计十到一百），触觉数居中（一到十）；谱系位置还取决于记录规则决定的传递范围，故不是 N 的单调函数。

1. 已证的特定情形：平移不变径向核在 $r\to 0$ 时均匀收敛到 $c\Delta$，收敛率 $O(r^2)$；一维等距帽伞的重叠门槛为 $r = d/2$；延迟趋零时有限区间上解收敛；三重退化下计数与自然数同构。

1. 一般情形（非等距伞心、联合极限、现有数学整体为退化稳定态、三律退化）是猜想，本书不把它当已完成的定理使用。

1. 本书把局部性读作一种标准化，把 r 读作谱系坐标，以此与非局部微积分、近场动力学分界；N 由系统运行读出，位置由回写历史给出。

◆ 本章参考

— 原始文献

· 雷诺（Osborne Reynolds），《决定水的运动是直线还是曲折的条件的实验研究》（An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous），Philosophical Transactions of the Royal Society，1883。

· 西林（Stewart A. Silling），《弹性理论对不连续与长程力的重新表述》（Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces），Journal of the Mechanics and Physics of Solids，2000。

— 研究文献

· 西林、莱科克（Richard B. Lehoucq），《近场动力学向经典弹性理论的收敛》（Convergence of peridynamics to classical elasticity theory），Journal of Elasticity，2008。

· 杜强、冈茨堡格尔、莱科克、周凯，《具有体积约束的非局部扩散问题的分析与逼近》（Analysis and approximation of nonlocal diffusion problems with volume constraints），SIAM Review，2012。
· 杜强、冈茨堡格尔、莱科克、周凯，《非局部向量微积分、非局部体积约束问题与非局部平衡律》（A nonlocal vector calculus, nonlocal volume-constrained problems, and nonlocal balance laws），Mathematical Models and Methods in Applied Sciences，2013。
· 田晓（Xiaochuan Tian）、杜强，《渐近相容格式及其在非局部模型稳健离散化中的应用》（Asymptotically compatible schemes and applications to robust discretization of nonlocal models），SIAM Journal on Numerical Analysis，52(4)，2014，1641–1665。

— 站内著作

· 第 53 号《SDE数学导论》：第 5 章（伞模型；5.5 节的退化极限对照表）、第 6 章（SDE 数的定义与估算方法）、第 13 章（传统数学的统一性）。
· 第 344 号《意义数学的诞生》：一把伞三种数；恢复旧数学与自我修订；规范力。

◆

16

第 16 章

伞下的三律

本章提要　一撮盐与三克盐，是同一谱系上的两个位置。本章把第 53 号、第 344 号建立的伞模型读作标准化的重生，依次写出三律在伞下怎样运行：重叠处的混沌碰撞使特征凝成，纠缠的保留使新路可裁，共振的释放使张力转为新特征。视觉数、触觉数、听觉数共用一把伞，配置各异；规范力把“我的”“我类的”“我们的”排成一条谱系。以亲缘连接的标准化，使文明的组织连接与三律的丰满运行同时成立。

◆ 16.1　一撮盐与三克

一本旧式食谱写“盐一小撮”，一本新式食谱写“盐 3 克”。前者写在拇指、食指与中指的合拢里，后者写在厨房秤的刻度上。两种写法摆在一起，很容易被读成精确与含糊之分：3 克精确，一小撮含糊；标准化的工作，似乎就是把后者一路改写成前者。

第 344 号对这一读法给出了另一种划分。符号是对经验的一次划分，“3 克”与“一小撮”划在不同的轴上：前者划在质量上，后者划在手感、菜量、盐粒粗细与口味的合拢处。两者不在同一根尺子上，也就谈不到哪一个更精确。同一个人的一小撮，可以重复十次而落在二至四克之间，这个范围里有他的手；3 克则对谁都一样，秤是谁的，读数都是 3.0。

“谁用都一样”，正是本书第 0.3 节立下的统一性。3 克可以脱离炒这一锅菜的过程被搬走：写进配方、交给机器称取、印在包装上、在千里之外被一模一样地执行。它的价值就在这里。一小撮的价值在另一处：它带着炒菜人此刻的锅、此刻的火候、这一次汤的咸淡，也带着上一次做坏的汤如何被改回来的历史。第 344 号提醒：“3 克”也曾是某些人的“一小撮”。某位厨师在无数次手感与尝味的往返中，把一撮的重量稳定下来，旁人照着他的重量去称，3 克才成为一个可以流通的数。

这就是同一性谱系上的两个位置。一端是手，规范力只积累在一个人身上；另一端是秤，规范力在多数相关共同体里过了门槛。中间有行当里的“一勺”“一匙”“半盏”，有食堂里按桶计的盐，有饮料厂的配料表。标准化在这条谱系上做的事，既可以是把一撮收成三克，也可以是让三克重新认回它的来处，并标明它在哪些菜、哪些锅里仍然成立。

本书前十五章处理的是谱系的另一半：统一性标准化如何把谱系压成一个点。本章换一个方向，问伞撑开之后意义三律怎样跑。全章走七步：16.2 写碰撞发生的地方，16.3 到 16.5 逐一写特征律、自由律、幸福律，16.6 回到三种数同在一把伞下，16.7 写谱系之美，16.8 回答母题里的那个要紧问题：以亲缘连接的标准化，怎样使文明的组织连接与三律的丰满运行同时成立。

需要先点明一处术语。第 53 号第 13 章所说伞模型的“统一”，指构造的统一：视觉、触觉、听觉的数共用一个构造。本书所说的统一性，指“谁用都一样”的标准化方式。伞模型统一的是构造，不是配置；配置一旦落到具体的半径、重叠与速度，便各成其位。后文凡写到伞的“统一”，均取构造之义。

◆ 16.2　重叠处：碰撞发生的地方

先把伞场的基本量放到手边，沿用第 53 号第 5 章的写法。一把伞由伞心 x_i、核函数 ϕ_i 与半径 r_i 给出；一族伞构成伞场。伞场有三个全局旋钮：半径 r，重叠度 ω，传播速度 v，合成 SDE 数

$$N = r\omega / (v \cdot T_c)。$$

两把伞的纠缠强度定义为重叠积分

$$E(i, j) = \int \phi_i(x) \cdot \phi_j(x)\, dx。$$

$E(i, j) \geqslant 0$，且仅当两把伞的支集不相交时为零。

取一个最小的例子。在一维直线上，令每把伞的核函数是归一化的盒核，$\phi_i = (1/2r) \cdot 1_{[x_i - r,\ x_i + r]}$。伞 A 的伞心在 0，伞 B 的伞心在 1，半径都取 1，两把伞的支集 $[-1, 1]$ 与 $[0, 2]$ 重叠在 $[0, 1]$ 上。重叠积分为 $(1/2) \cdot (1/2) \cdot 1 = 1/4$，自纠缠 $E(A, A) = 1/2$。把伞心拉开到距离 d（$d \leqslant 2r$），则 $E = (2r - d)/(4r^2)$：伞心越近，亲缘越密；d 到 $2r$ 时，两把伞刚好脱开。

这个小算式里有一件事值得慢慢看：点 x = 0.5 同时落在两把伞里。伞 A 按自己的划法给出一个读数 a，伞 B 按自己的划法给出另一个读数 b。两个读数在同一个点上相遇，a 与 b 之差，就是这里所说的混沌碰撞的原料。

回到点模型。在 r→0、ω=1、v→∞ 时，每个点只属于一把伞，支集互不相交（或只在边界相接），E(i, j) 在 i≠j 时为零。没有重叠，就没有一个点同时握着两个读数；每个点上只有一个读数，读数之间无从相撞。第 13 章写过，相容性公理（纠缠必须局域、单元不重叠）把这一点写成了公理：约束一规定每个空间点属于且只属于一个单元；到了定义层面，要求便是“须无歧义”。一个读数一个点，歧义无处安放，混沌碰撞的发生地因此被事先取消。

伞撑开以后，重叠处成了发生地。第 344 号特地提醒：混沌碰撞不发生秩序，它提供差异。两个读数相遇，本身不会给出任何新东西，只给出一个差值 a−b 和一个问题：这个差值往哪里去？后文三律，说的就是这个差值的三种去向，对应三个不同的问题：它能不能凝成一个稳定的、可以指向的新特征（特征律）；它能不能触发一条原先没有的路（自由律）；它积累起来的张力，能不能以一次完整的释放落回新的和谐（幸福律）。

这里先把一个读法立住，免得后文反复交代：三律是同一台 D2 引擎在三个方向上的运转，不是三条悬空的天条。意义三律的原定义里，D1 定方向、D2 去实现、D3 管分寸，每一律的每一步都是一轮或多轮 D2 循环在 D3 约束下的运行。本章用伞场写三律，写的是这台引擎在伞场里的样子。

◆ 16.3　特征律：碰撞使特征凝成

意义三律中的特征律（即创造律），管目标的发生。它的跑法是混沌碰撞、自组织、涌现，三段对应 D2 的三态：混沌碰撞对混沌态，自组织对介生态，涌现之后的活稳定对秩序态里的“活”。

SDE 数给了三态一张地图。第 53 号第 6 章写道：N 很小，伞小、重叠少、传播快，秩序态主导，是传统数学的领地；N 很大，伞大、重叠严重、传播慢，混沌态与介生态必须参与；N 在一的量级附近，是介生态的温床，延迟恰与伞自身的动力学时间相配。第 53 号第 5 章把共振条件写成：信号从伞 i 经重叠区到伞 j 再返回，来回时间 t_round 约为 2r／v；当伞自身的震动周期 T 与 t_round 相配时，发生纠

缠共振，来回的响应被放大，从混沌背景里脱颖而出，形成自持的有组织图样。共振需要三件事同时具备：半径够大以提供重叠面积，重叠度够高以提供共振通道，速度恰使延迟与自身频率相配。

第 344 号在这条线上走到了门槛。它证明导论里的扩散型延迟方程不出 Hopf 分岔，改用带延迟的非局域负反馈伞场，算出门槛：延迟确实存在，重叠足够，二者配合超过某个 N_c（一的量级），线性部分的增长才开始，系统才有可能从定态走进周期窗口。具体的 N_c 形式与推导属于第 344 号，本书只引它的结论：没有真延迟、没有够大的重叠，门槛过不去，特征凝不成。

取一组无量纲的数把这张地图走一遍。令 r＝1，v＝2，伞自身的震动周期与特征时间都取 T＝T_c＝1，则来回时间 t_round ＝ 2r／v ＝ 1，恰与 T 相配，共振条件满足；此时 N ＝ rω／(vT_c) ＝ ω／2，重叠度 ω＝2 便落在 N＝1 的临界处。把 v 调到 20，其余不动，t_round 缩到 0.1，N 降到 ω／20，延迟短得赶不上伞自己的节拍，系统落回秩序态；把 ω 压到 1 且 r 收小，则连重叠也没有了。三个旋钮里任何一个被拧到点模型的极端，门槛都过不去。

于是点模型下特征律的状况可以说得很清楚。v→∞ 取消了延迟，ω＝1 取消了重叠，r→0 取消了重叠面积。三个旋钮各取其极端，N→0，系统被钉在秩序态，门槛永远跨不过。这时的特征律只剩末端：在固定点上的收敛。第 344 号把这一点写成三律的相容退化：特征律退成固定点收敛。

伞撑开之后，凝成的东西要拿什么来认？第 344 号给出四条，新特征必须同时过：

第一，**门槛性**。过 N_c，是说这个特征在参数越过某条线之后才出现，线以下是没有的。它排除了那些靠硬凑、靠调参数调出来的伪特征。

第二，**活的稳定**。稳定不等于不动。涌现之后的状态满足 d(ΔSIO)／dt ≈ 0 而 ΔSIO ≠ 0：量在周期窗口里持平，量本身却不为零。一个固定点上的静止，ΔSIO 为零，不算数；一个极限环上的往复，ΔSIO 不为零而变化率持平，才是活的。

第三，**抗扰**。小的扰动打上去，特征回得来，不散。

第四，**回写**。第 344 号特别提醒，来回摆动的极限环也会冒充新特征：一个钟摆式的往复满足前三条，却没有改写任何东西，摆完了一切照旧。回写了才算新：

凝成的特征被写回伞场，改变了纠缠矩阵 [E(i, j)] 的某些项，或者添了新的节点，使以后的碰撞在一个不同的底盘上发生。

这第四条，正是同一性谱系的发生机制。本书第 0.3 节把同一性的程度定义为由回写历史生成，“这里才这样”。回写条件说的就是这件事：一个特征凝成之后，改写了它自己得以凝成的那片土壤，下一轮碰撞便带着这次凝成的痕迹；痕迹累积，位置就有了亲疏，有了“这里才这样”。统一性标准化没有这样的一环。一个标准一旦定义下来，它的运行不改写它的定义，所以位置由定义事先给出，谁用都一样。

两种标准化在特征律上的分野，可以用一句话说尽：统一性标准化把特征当作定义的产物，谱系标准化把特征当作回写的产物。

◆ 16.4　自由律：纠缠的保留使新路可裁

自由律管路径的发生。它的跑法是矛盾纠缠触发、路径裁剪、新模式激发。原定义有一句话要紧：自由不是在现成选项里挑，而是在约束中裁出原本不存在的新路；自由的量度是发生新路径的能力，不是选项数目。

第 344 号对此做了一次数学上的收紧。把纠缠织成的路径空间看作一个有向图 G：节点是伞场里可被占据的模式，边是纠缠允许的转移。从某个节点 s 出发，G 给定时，能够到达的节点集合 R(s;　G) 是固定的。在介生态的分岔点上，系统选定一支，意味着后续可达集缩到 R(s′; G) ⊆ R(s; G)，s′ 是选中的那个后继。选择只缩不扩。这是第 344 号引理 18.1 的内容：纠缠不变时，选择不扩张远期可达集。因此，路要变宽，必须添新节点、新的边，也就是改写纠缠本身。第 344 号把这件事叫作激发：走通之后改写纠缠，使可达路径空间变大。

这个引理读起来近乎平凡，后果却很重。它说，选项数目在给定的 G 里是封顶的，增加“选择”的次数不会让路变宽；自由要靠纠缠的改写来量度。一个只有选项、没有改写的系统，再民主、再多元，也只是在 R(s;　G) 里走来走去。第 10 章所说多元化的统一性，在这里找到了它的路径形态：系统数目增加，相当于许多个各自封顶的 R(s;　G_k) 并排，每一个 G_k 内部不改写，系统之间没有亲缘尺子，可达集的并仍是各自可达集之并。

第 344 号列出没有自由的三种形态：无选，失选，断路。前两种本书不展开；断路是好去处在“每步合格”的约束下走不到，这又分阈值造成的与结构性的。点模型下的自由律，被第 344 号概括为退成唯一合法路径。这一点与第 53 号的相容性约束一一相扣：约束二规定每一步之后系统必须仍在合法态里，约束三规定质量只能单调上升，合在一起，路径空间被剪向一条可审计的单线。

伞下的情形不同。重叠处有两个以上的读数相撞，矛盾因此成为路径空间里的一个分岔点：向 a 靠，还是向 b 靠，还是取一个原先没有的 c。每一支都有后续，每一支后面接着的纠缠不同。裁剪发生在这里：一支被选定并被保持，另一支被放下；选定的那一支走通，它所经过的伞被改写，新的节点加进 G，可达集扩大。纠缠的保留，是这套动作得以开始的条件：重叠处的矛盾被留着，没有被“解耦”“正交化”“独立”掉，才有一个能被选择、能被改写的东西。

用一个五个节点的小图把这件事走一遍。设 G 的节点为 s、p、q、t、w，边为 s→p，s→q，p→t，q→t；w 是图外的一个模式，目前没有任何边通向它。从 s 出发，R(s; G) = {s, p, q, t}。在 s 处选 p，后续可达集缩为 {p, t}；选 q，缩为 {q, t}；无论选哪一支，w 都在可达集之外。要让 w 进入路径空间，只有一种办法：某次走通改写了纠缠，例如 p 与 w 的伞出现了新的重叠，添上边 p→w。此后 R(s; G′) = {s, p, q, t, w}，路变宽了。选项数目在这个例子里从头到尾是二，变的是图。自由的量度落在 G 到 G′ 的改写上，而不在 s 处的二选一。

这里可以看见自由律与特征律之间的接口。特征律的第四条回写，从路径的角度看，就是自由律的激发：一个特征凝成，G 里添了新节点；添了新节点，下一轮分岔点上的可选支多了一支，这一支是此前整个 G 里没有的。三律在这里咬合成环，也就是原定义所说的“目标→路径→动力→激发新目标”的循环。

本节的小例子也说明了一点：判断一个系统有没有自由，不是数它有几个出口，而是看它的图能不能被自己走过的路改写。

第 344 号在此自留了一处退路：可达路径若能不经纠缠改写而持续扩张，激发的定义就要改。本书沿用它的态度，把这一条记入第 18 章的判决设计中去，当作输的条件之一，不在此处展开。

◆ 16.5　幸福律：张力、释放与新的和谐

幸福律管动力的发生。跑法是张力积累、模式转换、释放。原定义强调：幸福不在结果、别处或将来，而在每一次完整发生走通的当下，并有心满足、身快乐、灵喜悦（真、善、美）三重结构。

第 344 号的数学表述从一句话开始：张力是“该连上的还没连上”。这句话有数学含义：只有已经相连的伞之间，才谈得上落差；没有纠缠的两把伞，彼此的读数差多少也不构成张力。所以先要有纠缠。设 n 把伞带着状态 u_i，纠缠强度为 E(i, j)，可以写出一个最小的张力势：

$V(u) = (1/2)\cdot\Sigma_{i<j} E(i, j)\cdot(u_i - u_j)^2$。

支集不相交的伞对贡献为零，只有连着的伞之间的落差才计入。这个函数对一切 u 非负。对 u_i 取负梯度，得到

$du_i/dt = \Sigma_j E(i, j)\cdot(u_j - u_i)$,

与第 53 号第 5 章里的纠缠传导项在 g 取恒等映射时一致。矩阵形式是 $du/dt = -L\,u$，$L = D - E$ 是以 E 为权的图拉普拉斯，其谱非负，所以 −L 的谱非正；这正是第 344 号所说“释放流由谱非正保证”。沿着这个流，V 单调不增：$dV/dt = -|L\,u|^2 \leqslant 0$。以上都是标准的线性代数事实。这里的张力势取最简的二次型，只用来演示谱非正的释放流，不依赖第 344 号所用的具体形式。

这个流的终点在哪里？V 的下降停在 $L\,u = 0$，即在每个连通分量内各伞读数相等。落差全部消除，张力归零，系统停在固定点。这就是点模型之下幸福律的数学形态：误差最小化。第 344 号的相容退化说它退成误差最小化，在此得到一个具体的实现。三律的相容退化，第 344 号标为 B 级（有论证而未形成完整证明），本书在 15.5 把它列在猜想栏；这里的最小例子只是给幸福律一栏一个具体的实现，并不证明另外两栏：特征律退成固定点收敛，自由律退成唯一合法路径，幸福律退成误差最小化，三者在同一个点模型里互相接上。

于是第 0.4 节所说“幸福律只剩消除差异这一种释放”的意思，可以精确地说出：在固定点收敛的框架里，释放的唯一方式是让落差耗尽；落差耗尽之后，张力的来源也随之耗尽，要有下一次释放，必须从外部再供给一个新的落差——新的指

标、更高的目标、下一份考卷。第 17 章会看到，这就是“越达标越干”的数学形态。

伞下的幸福律走另一条路。第 344 号的刻画是：张力经转换、以释放回落，落在连接更紧、仍然活着的新和谐上；幸福不是张力为零。把线性的误差流换成带延迟、带非线性的伞场方程

$$du_i/dt = f(u_i) + \Sigma_j\, E(i,j)\cdot g(u_j(t-\tau_{ij}) - u_i),$$

延迟 τ_{ij} 的量级是 r/v，系统便可能在周期窗口里持续运行，$\Delta SIO \neq 0$，$d(\Delta SIO)/dt \approx 0$。落点是一个活的稳定，而且按照回写条件，它改写了纠缠，让 E 的某些项变大，或让网络多了节点。这时的释放，产出了一个新特征，下一轮的张力在这个新特征与周围伞的落差里重新积累。

第 344 号还做了几个区分，对本书很要紧。第一，真正的松下来只有释放一种，压制、转移、暂时遮蔽用“撤去检验”分开：把外力撤掉，看张力是否回来、在哪里回来、过多久回来；撤掉之后仍然松着的，才是释放。第二，最优释放不是最大释放：拖得太长，连接会先松掉。第三，铺垫与解决的分别，在输入顺着拉力还是逆着拉力。第四，这是对伞场张力的刻画，不是心理判断，不打分。

这四条把幸福律与“达标”划开了。达标是落差消到阈值以下，在撤去检验里，达标之后外力撤掉，系统不一定保持；释放则要求撤去之后仍成立，并且留下新的连接。

◆ 16.6　一把伞下的三种数

第 344 号有一个具体的演示：同一只杯子，看是一眼的一，摸是一圈的一，听是一声的一。三种“一”，是同一个构造在三种配置上的显影，数模型分构造、配置、记录规则三层：

构造是伞：伞心，半径，核函数。三种数共用这一个构造。

配置在三种数上各不相同。视觉数的半径近零且不动：一眼望去，每个对象是一个边界清楚的点，可以一一对应，可以重看，可以同看。触觉数的半径沿路径变：手沿杯壁走一圈，伞随手的位置移动、随按压的力度伸缩，熟度读在按压的路

径依赖里（按桃子判熟度就是一例）。听觉数的半径随时间动：一声是一个时间窗里的伞，窗口移动，数跟着变。

这里的“统一”取 16.1 所点明的构造之义，与本书的统一性不是一回事。三种数在构造上同一、在配置上成谱，这正是同一性谱系标准化要处理的对象：不是找出一个对三种数都一样的配置，而是承认同一个构造在不同配置上显影出不同的数，并给出这些配置之间的亲缘。构造的统一恰是配置得以成谱的前提：构造若各不相同，配置之间就无从比较，亲缘也无从谈起。

视觉数在这张谱上有特殊的位置。它成了“唯一的数”，第 344 号的解释是：因为它能一一对应、能重看、能同看，规范力积累最快，不是因为构造唯一。这句话把一个常见的误读拆开了。数学史上，视觉化的、可并排摆开的离散计数，被当成数的本来面目，触觉的、听觉的数被当成不够格的感觉印象。从伞模型看，视觉数是配置之一，处在 $r\to 0$ 附近，规范力在上面积累得最快，因此最先成为公共标准，成了谱系上最粗、最老、最稳定的一端。它退化为点，点模型是它的数学形态。其余两种数没有消失，只是规范力积累得慢，没有被写进公共定义。

规范力这个量，把“我的”“我类的”“我们的”排成一条线。第 344 号说，这是同一把规范力尺子在三个范围上的读数。个人规范力，数的是一个模式在多少个独立情境里站得住，不是重复了多少次；情境越独立，站得越稳，读数越高。一个人的数模型，过三关才算数：有适用条件，可检验，能纠错。两个“我的数学”相遇时，能互换的是两把伞的重叠区，换的方式是伞对伞；换不了的，用粘性逻辑的“和”保留。行当里的数，靠共同对象、粗粒度的名称、手把手的传递与外部检验长成。公共有效性，是规范力在多数相关共同体中过了门槛。

这条线与第 0.3 节里谱系的定义完全对得上。同一性的程度，由回写历史生成；规范力的积累，是回写在多个情境里的累计。一小撮盐的规范力，积累在一个人的手上，数的是这只手在多少锅菜里站得住；三克的规范力，积累在整个共同体的秤上。两者同处一条谱系，位置由各自被回写的历史给出，而不由定义事先给出。

三种数在谱系上的位置并不对称，三律在三个模态上的丰满方式因此各不相同。这一点关系到本书的一个核心判断，值得单独写清。

视觉端，统一性可以很强。半径近零且不动，对象是边界清楚的点，可以并排摆开，可以反复重看，可以多人同看。这些性质恰是“谁用都一样”所需要的：读

数可以脱离看的人被搬走，可以交给机器，可以印在纸上。规范力在这一端积累最快，伞缩成点的程度也最高，点模型在这里几乎是现成的描述。三律在视觉端的丰满，主要落在特征律的回写上：凝成的特征被写进公共的图、表、符号，改写了后来者开始看的底盘；它靠的是积累的速度与公共的可核对。

听觉端，统一性非常差。声音是一个时间窗里的伞，窗口一过，读数不在；不能并排摆开，不能凝固成一眼可核的东西，同一段声音，在不同的人、不同的耳朵里落下不同的期待。第 344 号对音乐的读法正落在这里：最好的延迟等于期待伞的半径，反复聆听使伞缩小，体验先升后降。听觉的数学（节拍、节奏、音程的感觉、一声两声的计数）因此是一门随时间释放张力的数学：铺垫与解决分别在输入逆着还是顺着拉力，释放的时机本身就是内容。三律在听觉端的丰满，主要落在幸福律上，一次完整的张力积累与落回，就是一个当下的走通。把它压成一个静止的刻度，释放的时间结构也随之丢失。

触觉端，非常部落谱系化。触觉数的半径沿路径变，熟度读在按压的路径依赖里；它靠手把手的传递、共同对象与粗粒度的名称长成，规范力在一个行当、一个手艺传承的范围里过门槛，出了这个范围，就是另一个部落的手感。一块面团揉到几分，一块布捻到几分，一只桃子按到几分，每一个行当有自己的数，彼此之间靠重叠区换算，换不了的以“和”保留。这一端的连接是典型的亲缘连接，部落内的往来密，部落之间的重叠区小而明确。三律里特征律与自由律在这一端最活跃：手在路径上不断遇到新的阻力，每一次按压都是一次小规模的混沌碰撞，行当里的新手法在师徒与同行之间凝成、被回写；路径上的分岔点多，新节点添得勤。

三个模态合起来看，才知道点模型是什么。统一性标准化的历史，实为视觉模态的标准化被推广为全部数学的标准化：因为视觉数最容易做到“谁用都一样”，它的做法就成了数学的做法，听觉数与触觉数被当作不够精确的前科学形态，等待换算成视觉刻度。伞模型统一的是构造，三个模态是同一构造的三个配置，没有谁是另两者的粗糙版本。同一性谱系标准化要做的，是让每个模态的规范力在自己的范围里积累，位置由各自的回写历史给出，再用重叠区把三者接起来。第 17 章会看到，这一次推广的代价，首先由触觉与听觉的谱系承担。

◆ 16.7　谱系之美：和而不同

第 3 章立的透镜是 S3·D1·E2：美，幸福律，数学。美在这一章里该交出它的内容了。

意义三律原定义里，幸福有三重结构：心满足为真，身快乐为善，灵喜悦为美。统一性标准化以误差最小化为唯一释放，能够给的主要是前两重：心里有数了，事办妥了。第三重，灵的喜悦，需要一个活的、新的、连接更紧的和谐，在固定点上是找不到的。前面 16.5 已经把这件事写成了数学：固定点的释放把落差耗尽，留下一个无差异的静止，伞下的释放留下一个活的稳定与更密的连接。

中国古代有现成的一对词来讲这件事。《国语·郑语》记史伯的话，大意是：和才能生出万物，同则不能延续；以土与金木水火相杂而成万物，若是以同去裨同，则没有后继。《论语·子路》里孔子的话，大意是：君子和而不同，小人同而不和。“同”是以水益水，是落差为零的固定点；“和”是不同的东西在一处各安其位而又相互成全，是连接更紧而差异仍在的活稳定。

把这对词放到本章的数学里，它们各有一个精确的位置。同，对应 $V=0$ 的固定点：所有连着的伞读数相等，差异被耗尽。和，对应周期窗口里的活稳定：伞与伞之间的落差持续存在，持续被释放，又持续被重新积累，连接因这一来一往而更紧。前者可以一眼看完，后者要在时间里才看得出来。两者的分别因此可以复算：看落差是被耗尽了，还是被持续地释放又重新积累。

于是“谱系之美”的意思可以落到实处。谱系上的每一个位置，都是一个在特定回写历史里长成的稳定态；两个位置之间有亲疏，这个亲疏由它们的重叠与往来给出。一小撮盐与三克盐摆在一处，不要求其中一个变成另一个，要求的是它们之间有一条可以走的路：三克的刻度对一撮的手感有一个说法，一撮的手感也有对三克的反馈。位置各不同，亲缘使其连成一片，这是和而不同在标准化里的形态。

统一性标准化把这件事反过来做：它要求所有位置同，同了之后，位置之间的亲缘无从谈起，因为没有位置可言。多元化的统一性，把许多个同并排放着，每一个同内部消了差异，彼此之间仍然没有亲缘尺子，所以也是“同而不和”。第三编的判断在这里有了美学上的对应物：多元不是和。

美在这里并不是外加的装饰。三律中幸福律的灵喜悦，是 D1 层的一重，评判标准化的尺子是三律运行得是否丰满，美因此是尺子上的一道刻度。一种标准化若只能给真与善，不能给美，它在这把尺子上就缺一格。

◆ 16.8　以亲缘连接：组织连接与三律丰满同时成立

母题里有一个难处，必须正面回答。本书不反对标准化。度量衡、历法、货币、工程、通信协议、协作分工，都是连接、次序、结构经标准化之后才接得起来的。如果同一性谱系标准化要让位置由回写历史生成，由“这里才这样”给出，它还能不能承担文明的组织连接？“谁用都一样”的好处，正是随处可用；换成“这里才这样”，是不是就失了可用性？

回答分四层。

第一层：谱系里有统一性的位置，而且那个位置照常工作。　统一性是谱系在 $r\to 0$、$\omega=1$、$v\to\infty$ 处的退化端。一台秤读 3.0 克，在这个位置上它对谁都一样，机器可以按它称盐，工厂可以按它配料，运输可以按它计价。这一端上的标准化原样保留，它的功劳不被抹去。谱系标准化改变的，是这一端在整个图景里被看成什么：它是被回写的历史凝出来的一个位置，不是唯一的位置，也不是所有位置的度量衡。

第二层：两个位置之间的连接，由重叠区承担。　第 344 号写得明确：两个“我的数学”相遇，能换的是重叠区，换时伞对伞。那么从一撮到三克的换算，承担它的是一块明确的重叠：这种盐、这样的手、这类菜量，在此范围内一撮约合三克。换算带着适用条件，可检验，能纠错，这与第 344 号对个人数模型的三关是同一套。离开重叠区，换算失效，系统不假装它成立。

统一性标准化用另一种方式连接：把所有位置折叠到同一个位置，一撮一律读作三克。连接是靠抹平得来的，接得很快，也接得很脆，因为凡是不落在被抹平范围内的东西都成了例外。第二编里的病态清单与例外清单，就是被抹平时留下的账。

第三层：连接越紧，三律越丰满。　这一条是母题里最关键的一句，也是与统一性标准化最锋利的分野，需要用 16.5 的张力势来看。统一性标准化以可替换来连接，要让两个单元可替换，就要求它们在接口上等价，$E(i, j)$ 要么为零（解耦），要

么被规整成同一个值；连接得越紧，等价类越大，落差越少，V 越小，三律的发动部件被拿得越干净。谱系标准化以亲缘连接，E(i, j) 是亲缘本身：重叠越大，亲缘越近。V 里计入的恰是这些相连的伞对。连着的对越多、越紧，落差的来源越多，释放的机会越多，新特征的原料越足。在统一性下，连接与张力成反比，连得越紧，张力越少；在谱系下，连接与张力成正比，连得越紧，可释放的越多。

这里需要补一个条件，不然会读成连接越多越好。16.5 里有一句：最优释放不是最大释放，拖得太长，连接会先松掉。连接的紧是在活稳定上的紧，是每一次释放之后连接更紧；不是把所有伞强行拴在一起，那样落差一次耗尽，又落回固定点。

第四层：谱系要有回写，才不漂泊。 第 12 章 12.7 节早已说过：谱系失去回写、只剩无亲缘的增殖，便漂泊，实为多元化的统一性。亲缘连接要有历史做底。一撮与三克的换算之所以可信，是因为有无数口锅、无数次尝味回写在它背后；如果换算表是凭空定义的，一撮与三克之间的亲缘就是事先安排的，回到了统一性。所以谱系标准化的操作要求，不在于“多定几套标准”，而在于每一个位置、每一条连接都带着自己被回写的历史，历史可查，亲疏可读。这一点由第 18 章的判决预测一来检验：两个形式标准相同、回写历史不同的子领域，同一项新技术被采纳与改写的程度应当不同；多元化的统一性预测它们相同。

可以用一个假设的小账本说明什么叫“历史可查”。设一撮与三克之间的换算，记在三本账上：第一本记某口锅在某一年的七次尝味，每次的盐量与咸淡判断；第二本记另一口锅的四次尝味，用的是另一把勺；第三本记两本账如何对到一起——哪一次的勺容与哪一次的克数在同一盘盐上称过。删去任何一本，换算的数字也许仍在，可是它为什么落在三克而不是三点五克，就无从追问了。移除检验问的正是这个：回写记录删去之后，位置变不变。

把四层合起来，答案就清楚了。文明的组织连接，靠的是位置之间有可走的路、有可查的换算、有明确的适用范围，这套连接在谱系上完全成立，并且在统一性那一端的位置上照常高效。三律的丰满运行，靠的是重叠处的碰撞被保留、纠缠被保留、释放落在新的连接上，这套运行也在谱系上成立，因为谱系的连接本身就是纠缠的保留。两件事不再对立，是因为连接的方式变了：不再把不同的东西折成相同，让它们可以互相替换；改为让不同的东西各在其位，彼此有亲缘。

这个转换的数学形态，正是伞模型。统一的是构造，不是配置：伞这个构造，在 r→0、ω＝1、v→∞ 处退成点，那里的标准对谁都一样；在别的配置上，标准有位置、有亲疏、有适用范围。同一个构造，既容纳了旧数学的稳定态，也容纳了旧数学写不出的东西。退化极限在特定情形下已有结果：平移不变径向核、光滑函数的情形下（命题 15.1），非局域算子在视界趋零时趋于局部算子，$\lim \mathcal{L} = c\cdot\Delta$，收敛率 $O(r^2)$；一维伞心等距的情形下有重叠门槛（命题 15.2），另有 Bourgain、Brezis 与 Mironescu（2001）的结果可资参照。其陈述如下：取一族径向、非负、总积分为 1 的核 ρ_ε，并设对每个 δ>0 有 ∫_{|x|>δ} ρ_ε dx → 0（核的质量向原点集中）；则对 1⩽p<∞ 和 f∈W^{1,p}，能量 ∫∫ |f(x)−f(y)|^p／|x−y|^p · ρ_ε(x−y) dx dy 在 ε→0 时收敛于 K_{p,N}∫|∇f|^p dx，K_{p,N} 是 |e·σ|^p 在单位球面上的平均值；当 1<p<∞ 时，这一能量的上极限有限还反过来刻画了 W^{1,p}。取 p＝2，K_{2,N}＝1／N，极限正是狄利克雷能量的 1／N 倍。这里的核归一化是总积分为 1，不含 |x−y|^{−N} 之类的奇异因子，与伞模型里带权重的邻域算子相似而不相同，所以只作参照：它说明在视界趋零时由非局域写法退到局部写法，是有数学先例的一类事实。一般情形仍是猜想，本书不当作已完成的定理使用。

本章到此，伞下三律各归其位，三个模态的丰满方式各异，亲缘使它们接成一片。下一章转向相反的方向：当统一性标准化走出数学，走进日子，三律被取走部件之后，人成了什么样子。

◆ 本章结论

1. 重叠处是混沌碰撞的发生地；点模型取消重叠，取消了碰撞，特征律只剩固定点收敛。
2. 特征凝成须过门槛性、活的稳定、抗扰、回写四条；回写使凝成的特征改写自身赖以凝成的底盘，这正是同一性谱系的发生机制。
3. 纠缠不变时选择不扩张远期可达集，路要变宽须添新节点；纠缠的保留使新路可裁，自由的量度是发生新路的能力。
4. 幸福律的释放，在点模型里是落差耗尽的固定点，在伞下是落在连接更紧、仍然活着的新和谐上；达标与释放用撤去检验分开。

5. 一撮盐与三克盐是同一性谱系上的两个位置；以亲缘连接的标准化使文明的组织连接与三律的丰满运行同时成立，条件是每个位置与每条连接都带着可查的回写历史。

◆ 本章参考

— 原始文献

- 《国语·郑语》（史伯论“和”与“同”）。
- 《论语·子路》（“君子和而不同”）。

— 研究文献

- Bourgain, J., Brezis, H., Mironescu, P., Another look at Sobolev spaces, in J. L. Menaldi et al. (eds.), Optimal Control and Partial Differential Equations, IOS Press, 2001, pp. 439–455。
- Silling, S. A., Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2000。

— 站内著作

- 第 53 号《SDE数学导论》（伞的定义与三参数、SDE 数、相容性公理、第 13 章）。
- 第 344 号《意义数学的诞生》（特征律四条、引理 18.1、幸福律、三种数、规范力）。

◆



第　五　编

枯竭、丰满与输的条件

编　序

这一编（第 17—18 章）先写统一性标准化走出数学之后的枯竭与技术性异化——人成为社会大机器的零件；再写本书在哪里会输：五条判决预测与撤回条件。

17

第 17 章

枯竭与技术性异化：人成为社会大机器的零件

本章提要　1883 年北美铁路改行标准时，是统一性标准化连接文明的一个干净的例子；同一把尺子进入工场与办公室，便成了使人可替换的度量。本章写这条路径：标准答案、单一评分、单一排名、关键绩效指标、流水线工时，是“谁用都一样”在日子里的形态；相容性公理被搬到人身上，人成为零件；这是视觉模态的标准化被推广为全部标准的结果，触觉与听觉的谱系首先被压平；三律在这样的运行里亏缺，读数是枯竭。本章把来源定位到数学的统一性标准化，并与五位近邻思想家分界。

◆ 17.1　铁路上的两个正午

1883 年 11 月 18 日，北美的铁路公司改行标准时，把整块大陆划成几个时区。此前，各个城镇按各自的太阳时过日子，铁路时刻表上并存着数十种地方时间；一列火车从东驶向西，要在站台的钟面上不断重新对表，换乘与错车因此成了事故的来源。改行标准时之后，一张时刻表对所有车站同样有效。有些地方的钟在这一天被拨到正午前后，同一个正午在人们的口中被说了两遍，“两个正午的一天”成了当时的说法。

这是统一性标准化的一个干净的例子，值得先把它的功劳记下来。时刻表的读数对谁都一样，可以脱离任何一座城镇的天空被搬走，可以印刷、可以电报、可以交给调度员在千里之外执行；列车相接、货物转运、货款结算，都因此有了共同的次序。本书从第 2 章起就把这一点当作前提：数学的标准化使文明的组织连接成为可能，连接、次序、结构，经标准化之后才接得起来。

同一把尺子的第二段历史没有这样干净。十八世纪末到十九世纪，军械制造先行一步，追求零件可互换：一支枪坏了，换上另一支枪的零件，仍能击发。可互换的前提是公差、量规、统一的图样，每一个零件对谁都一样。此后这种做法进了更多的工场。1911 年，泰勒的《科学管理原理》出版，他此前在世纪之交的钢铁厂里做过铲煤的试验，用秒表测每铲的重量与动作，求出一个“最佳”负荷与动作次

序，并以它作为工人的标准。1913 年，福特的高地公园工厂开动了移动装配线，工序被切成小段，每个工位的节拍对所有在岗者一律相同。

两段历史里用的是同一把尺子：一个读数，对谁都一样。第一段里被量的是时间，被连接的是车站与车站；第二段里被量的是工人的动作与时间，被连接的是工位与工位。尺子本身没有变，变的是它量到了谁。时刻表上的钟面不会因被标准化而失去什么；铲煤的人、装配线上的人，在这把尺子下被读成了一个按标准节拍运行的单元。

两段历史之间还有一个容易看漏的接缝。时刻表是在车站之间连接，被连接的东西各自仍然是车站，有各自的街道和天空；工位上的标准节拍则在人与人之间连接，被连接的东西成了节拍的承载者。前一种连接里，标准是一座桥；后一种连接里，标准成了砖，被连接者要先被切成它的尺寸才能砌进去。从桥到砖的这一变化，下面要放到数学的层面上去看：它不是某个工厂主的发明，而是同一把尺子在被推广的过程中，一步一步把被连接者的尺寸变成了连接的条件。

本章要写的就是第二段。需要先点明：这里写的是机制，不是控诉。铁路标准时与泰勒的秒表出自同一类做法，前者的功劳照旧成立。要追问的是，当这类做法被推广为衡量一切的方式时，三律会怎样；而问题的来源，落在标准化的方式上。下面七节依次写：统一性标准化在日子里的五种形态（17.2）；零件化的数学形态（17.3）；视觉标准的推广与触觉、听觉谱系的压平（17.4）；枯竭作为运行读数（17.5）；来源的定位（17.6）；与五位近邻思想家的分界（17.7）；主语与出路（17.8）。

◆ 17.2　日子里的统一性

“谁用都一样”，是统一性标准化的要害。它走出数学之后，在日子里有五种常见的形态。

标准答案。　一道题只有一个正确答案，评卷人是谁、答题人是谁，都不改变它。这是第 0.2 节谈过的：对谁都一样，也就与谁都无关。标准答案的好处是可以批量判分，坏处是答案之外的一切差异只叫错误。一个学生用了另一条路径得出了同一结果，或者给出了答案之外的另一个问题，在判分表上，这些都没有位置。

单一评分。　给每个人一个分数，把一个人读成数轴上的一个点。设 $s\colon P\to\mathbb{R}$ 是评分函数，P 是人的集合。s 一旦确定，便定义了 P 上的一个等价关系：$s(x)=s(y)$（或在某个阈值带内）的两个人，在评分意义上不可分，可以互换。等价类就是“同一档”。

单一排名。 单一评分之上再加线性次序：P 被排成一条链。第 0.1 节谈过三重退化的伞：连接只有通与不通，次序只是线性的前后，结构固定为一条链。排名恰是把人放进了这个最小样本——一个 3，换成了一个第三名。

关键绩效指标。 一组预先定义好的量，规定了在岗者应当向哪里收敛。它把“达标”写成固定点：读数到了线上，就算完成。

流水线工时。 动作与时间被切成标准段，每个工位的节拍一律。在岗者替换为别人，节拍不变。

这五种形态有一个共同的数学骨架：先有一个对谁都一样的度量，再用它去安排人。它们之间的关系是递进的：标准答案提供了判分的统一，评分把人压成点，排名给点加上次序，指标给点加上收敛目标，工时给点加上时间节拍。

这套做法有一条被反复观察到的规律。Goodhart 在 1975 年讨论货币政策时指出，一个统计上的规律，一旦被拿来当作控制的手段，便会失去它原先的可靠性；Campbell 在 1979 年对社会指标写过相近的话：量化的社会指标越被用于决策，越容易受到腐蚀，也越容易扭曲它本想监测的过程。两条规律常合称为一条。本书对它的读法是：度量成为目标时，被度量的东西从一个活的过程变成了读数的来源，读数沿着固定点收敛，过程中本来有的差异、延迟与重叠，被消耗掉。

Porter 在《相信数字》（1995）里梳理过，对数字的客观性的信赖，是怎样在缺乏相互信任的行政环境里长出来的：数字对谁都一样，不依赖判断者的人格，因此可以在陌生人之间流通。Scott 在《国家的视角》（1998）里写过，国家为了看清一片土地与人口，必须把复杂的地方知识压成标准的、可读的格式，德国的科学林业是他的一个例子。两本书给出了同一个观察：统一性标准化的好处是可读、可比、可流通，它的代价是被压平的东西。本书的任务，是把这个代价与意义三律的亏缺挂起钩来。

第 12 章 12.8 节预告过一个对应：把一项评分换成一块多指标仪表盘，把一个排名换成几张并列的榜单，是多元化的统一性在日子里的形态，现在可以展开。仪表盘上的每一项指标，仍是谁用都一样的尺；各项之间的权重、折算与警戒线，仍由事先给定的规则安排；新增一项指标，不会改写旧指标的读法。对照附录二的三问（即 12.8 节所列）：每项内部受同一类约束，答案为“是”；各项之间的亲疏由定义给出，答案为“是”；新指标加入而旧指标不被改写，答案为“否”——这正是“是、是、否”。人在仪表盘里仍是被量度的对象，仍然可替换，只是被量度的方面从一个变成了几个。读数也仍沿着各自的固定点收敛，每一项都可能被 Goodhart 与 Campbell 所说的腐蚀各自侵入，而且多项并行，腐蚀的路径更多。

所以多指标是数学里“多元不是出路”在日子里的同一个结论：把一把尺换成许多把尺，没有把任何一把尺变成会被人的差异改写的尺。

◆ 17.3　零件化：可替换的度量

一个零件的价值在于可替换。这是工程上的常识：同一型号的螺栓，换一颗不影响整机。可替换性需要两样东西，一是接口上的等价，二是度量这种等价的尺子。统一性标准化提供的正是第二样：它给每个单元一个读数，读数相同或在阈值内的，便可互换。

在 17.2 里，单一评分定义了等价关系。现在把它连到相容性公理上。第 53 号《SDE数学导论》第 1 章列出相容性公理的六个约束；它们原本写的是网格与算法，本书第 13 章已经读过：公理把纠缠限制为局域，把单元限制为不重叠。把这六个约束逐条平移到人身上，对照如下：

相容性公理（第 53 号）	在人身上的形态	取走的发动部件
约束一　相容网格：不重叠，无缝隙	岗位职责边界清楚，互不交叠	重叠处的碰撞
约束二　合法中间态	每一步都须合规，中途不容许“不合格”的状态	约束中裁出新路的余地
约束三　质量单调性	指标只升不降，退一步即被拒绝	为了新特征而先松后紧的路径
约束四　确定性	同样的输入，同样的输出；同样的人，同样的打分	取向的分岔
约束五　可审计性	全程留痕，事后可追溯每一步的原因	未写下的手感
约束六　固定点收敛	稳定停在达标线上	活的稳定

这张表的读法是：每一条在网格上是合理的工程要求，搬到人身上，就成了对人的要求。要求本身是对一个系统的要求，而不是对某一个人的要求：岗位说明书是系统写出来的，评分表是系统写出来的，节拍是系统给出来的。在岗者无论是谁，进了这套运行，就被要求无歧义（禁碰撞）、无矛盾与解耦（减纠缠）、可审计、固定点收敛。第 4 章讲的亏缺性运行，到这里落到了人身上。

零件化的数学形态因此可以说得更精确。设评分函数 s 把人映到$\mathbb{R}$，岗位 j 的合格域是$\mathbb{R}$ 中的一个区间 I_j。对岗位 j，凡 $s(x)\in I_j$ 的人都是合格者，彼此可换。每

个人在系统眼里，就是 s(x) 这一个数，人的其余一切，那些在评分里没有对应读数的差异，对系统而言不存在。点模型的 3 在这里换成了一个人：谁的 3 都一样。

表中的第五行值得多说一句。可审计性本是一条好的工程要求：每一步有记录，事后可以追溯原因，错误才找得到。把它搬到人身上，要被记录的就只能是可以记录的东西，也就是视觉刻度能够容纳的东西。一个人此刻的手感、一个停顿里的权衡、一次没有说出口的改变主意，在审计的账簿里没有栏目。账簿里没有的，在系统的运行里就不存在；运行里不存在的，就不会被回写。可审计性于是从一条工程要求，变成了一道筛子，只让一种东西通过，而被筛掉的东西，恰是三律的发动部件所在之处。

用一个小例子看评分压掉了什么。一场考试三道题，各十分。甲的得分是（8, 2, 5），乙的得分是（5, 5, 5），总分都是 15。总分函数 s(a, b, c)＝a＋b＋c 把三维的分数空间映到一维的数轴，每一个取值的原像是三维空间里的一张平面（纤维），甲与乙落在同一张纤维上。在这张平面内部，甲乙之间的一切差异，哪一题强、哪一题弱、强弱之间有什么关系，评分之后都读作零。系统把它们看作同一档，可以互换。这里损失的是两个维度的信息；而损失哪两个，是由 s 的形式事先给定的，与甲乙本人的历史无关。这正是第 0.3 节所说的“由定义事先给出”：位置由评分函数给出，而不是由这个人被回写的历史给出。若改看甲在后两题上的反复改错，乙在三题上的稳定发挥，二者在谱系上的位置便是两个，亲疏可以读出。

需要说明的是，可替换性本身并不是坏东西。急救流程里，值班的人换了，流程仍要照常进行；一条生产线停工时，替补的人要能顶上。问题出在可替换性成为衡量一个人的唯一方式的时候：评分只认他与别人相同的部分，他与别人不同的部分，既不被记录，也不被回写。

◆ 17.4　视觉的刻度，触觉与听觉的压平

本书第 16 章写过，三种数共用一把伞，配置各不相同：视觉数的半径近零且不动，触觉数的半径沿路径变，听觉数的半径随时间动。三个模态的数学，统一性的强弱也各不相同。视觉数学的统一性可以很强，因为它能一一对应、能重看、能同看；听觉数学的统一性非常差，声音在时间里发生，不能并排摆开；触觉数学非常部落谱系化，靠手把手的传递、共同对象与粗粒度的名称，在一个行当里长出规范力，出了行当就是另一个部落的手感。

统一性标准化的历史，因此可以读作：视觉模态的标准化，被推广为全部数学的标准化。视觉数最容易做到“谁用都一样”，它的做法就成了数学的做法；听觉数与触觉数，被当作还没精确起来的东西，等待换算成视觉的刻度。

走出数学以后，这一推广在日子里留下了清楚的印记。一个人的表现，要成为可以审计的东西，就必须能被看见、被记录、被并排摆开：分数，排名，曲线，报表，监控画面里的工时。这些全是视觉的刻度。凡是不能转成视觉刻度的，在评价系统里就没有位置。下面分触觉与听觉两头来看。

触觉的部分首先被压平。一个木匠凭手感知道一块料什么时候到了火候，一个护士凭指尖知道一条血管的状态，一个面点师傅用手掌估水的温度与面的软硬，一个老教师凭几十年的课堂摸索知道某个学生此刻差一步。这些数是触觉数：半径沿路径变，熟度读在按压的路径依赖里，规范力在一个行当、一个师徒谱系里积累。把它们放进评分系统，要么被迫翻译成“操作规范”的条款，条款一写出来，手感里随路径变的那部分就被抹掉了；要么被当作“经验”“悟性”这类不可量化的东西，在审计中被排除。行当里的亲缘连接，被一套岗位说明书取代。

听觉的部分同样被压平。一位教师讲课的节奏，一场谈判中的停顿，一段团队会议里谁在什么时刻开口，一首曲子的演奏者对延迟的拿捏，这些发生在时间里的东西，释放的时机本身就是内容。把它们压进视觉刻度，要么变成时长（一节课四十五分钟，一次通话限时三分钟），要么变成转写后的文字摘要。时长保留了长度，丢了节奏；摘要保留了词句，丢了期待与落回。听觉数学里本来是随时间释放的张力，成了一串数。

由此看，零件化首先是触觉与听觉的谱系被压成视觉的统一刻度。人要成为零件，先要让他身上的触觉与听觉的部分失去位置，只留下可以被看、被数、被并排摆开的部分。这一步完成之后，替换才有了度量：视觉刻度上相同的两个人，在系统看来可以互换。

换一种读法，把三个模态各自的损失记在三律的账上。视觉刻度保留了特征律所需的公共回写，却使听觉端幸福律所需的时间结构无处安放：释放的时机在刻度上没有坐标。触觉端的特征律与自由律最活跃，靠的是路径上不断遇到的小规模碰撞与分岔点；刻度把路径抹成终点，碰撞与分岔都在抹平中消失。于是同一套视觉评价，对三个模态的损失并不一样：对视觉端，几乎无损；对听觉端，损失的是幸福律的时间形态；对触觉端，损失的是特征律与自由律的发动部件。零件化的人，往往是被这第二类和第三类损失所塑造的人。

这里还要补一笔，免得读成对视觉的责难。视觉数学本身是谱系上的一个正当位置，它的统一性强，是因为规范力在上面积累得最快，这是它的功劳，第 16 章已经写过。问题出在把它当作唯一的位置。对视觉端的标准化，本书没有异议；异议在于把这一端的做法推广为全部。伞模型统一的是构造，三个模态是同一构造的三个配置，没有哪一个是另两个的粗糙版。

◆ 17.5　运行态的枯竭

零件化的人，是三律在这类运行里的读数，不是某种性格。下面按三律逐条写，用第 16 章的模型。

特征律。　特征凝成要过门槛性：延迟要确实存在，重叠要够，二者配合过 N_c。零件化的运行取走的恰是这两样。岗位职责不交叠，是取走重叠；工位节拍同步，一个周期内必须完成，是取走延迟；评分周期要求每次都有读数，是取走让特征慢慢凝的时间窗。N→0，系统被钉在秩序态。特征不再凝成，在岗位上的人每天重复的，是已有特征的同一次又一次，没有新的特征被写回。这是一种读数：特征律的第四条回写，在这里始终为空。

自由律。　路要变宽，须添新节点；添新节点，须在重叠处有矛盾纠缠，并在分岔点上有一个被保持的取向。零件化的运行写成了唯一合法路径：每一步须合规，指标只升不降，输入相同输出相同。分岔点被事先剪掉，矛盾被解耦。第 344 号《意义数学的诞生》概括的没有自由的三种形态，无选、失选、断路，在这里都能找到对应：岗位说明书里只有一条出边是无选；有选项却被考核取消是失选；好去处在“每步合格”之下走不到，是断路，其中的结构性断路，由评价体系本身造成。

幸福律。　第 16 章已写出点模型下释放的数学形态：误差最小化，落差耗尽于固定点。把达标线记为 c，每个人的状态记为 u，张力是 V(u)＝(1／2)(u−c)²，释放流为 du／dt＝−(u−c)，解为 u(t)−c＝(u(0)−c)e^{−t}，V(t)＝V(0)e^{−2t}。张力随时间指数衰减到零。到线上之后，系统不再有来自内部的张力，要有下一次释放，须从外部再供给一个新的落差：提高线，加码，换新的指标。线每升一次，一轮新的收敛开始，每一轮的释放仍然是“消除差异”这一种，没有新特征产生，也没有更紧的连接。这就是“越达标越干”的数学形态：每一次达标，都是一次张力的耗尽，而下一次的张力只能靠外加。

幸福律的原定义说，幸福在每一次完整发生走通的当下，且有真善美三重结构。在这样的运行里，真（心满足：我把事办妥了）与善（身快乐：节拍跟上了）

或许能够得到一些，美（灵喜悦：一个活的、新的、连接更紧的和谐）基本没有来源，因为它需要的恰是被取走的那些部件。

读数的整体图景因此是：特征不再凝成，新路不再裁出，幸福只剩达标这一种释放。三项各自量纲不同，不压成总分；这里只是把三项读数并排摆开，看它们是否一同下行。统一性标准化的运行，使三项一同下行，这就是本书所称的亏缺性运行，用日常的话说，就是枯竭。

团队层面的读数也是同样的形态。n 个人共同做一件事，取第 16 章的张力势 $V(u)=(1/2)\Sigma_{i<j}E(i,j)(u_i-u_j)^2$。岗位解耦把 $E(i,j)$ 压成零或同一个常数，求和里的项要么消失，要么变成同一个权重；协作能产生的落差来源，因此被事先减到最少。最后每个人的任务可以单独验收，整体的工作拼起来像一块块相接的瓷砖，边与边相合，没有重叠，也就没有谁与谁之间的相撞。这样的团队，交付稳定，换人容易，缺少的是那些要在重叠处才会出现的东西：一个人的做法在另一个人手里被改写，改写之后两人的分工也随之改变。

这一读数在经验上有可以去找的痕迹，本书不预先断言它们存在，只列出看什么。若这套机制成立，在统一性评价覆盖越久的场合，达标率应当越高、而“达标之外的新做法”的出现率应当越低；线每升一次，新一轮的收敛时间应当相近，而不是越来越长地积出新的东西；同一批人调入一个保留重叠与延迟的环境后，读数应当变化，而变化的幅度与调入前的评分无关。三条里任何一条被数据否定，本章的机制就要缩小。这三条是机制在经验上的附加检验，不在第 18 章五条判决预测之内；它们若被做成研究，应按第 18 章的记录卡格式登记，数据源互不重叠，编码者与判定者分离。

枯竭的另一面是外加张力的累积。持续不断地提高线、加码、换指标，有时被称为“内卷”。这个词在本书里不作修辞用，只作为上述数学形态的一个日常名字：固定点收敛反复被外部重启，每一轮张力都耗尽于同一种释放。

◆ 17.6　祸害的来源

人成为社会大机器的零件，这一祸害的来源在哪里？有几种常见的回答，值得逐一排除，再落到本书的定位上。

不是技术本身。　铁路标准时是技术，它连接了一块大陆，功劳是实在的。同一类技术，在时刻表上是连接，在工位上成了零件化，差别不在技术，而在它被用来衡量什么。

不是资本本身。 资本的逐利会推动效率与规模，这是实在的力。但零件化也出现在不以逐利为主要目标的场合：学校里的标准化考试与排名，医院里的单一绩效，科研评价里的单一指标，行政系统里的考核表。它们的共同点不是资本，而是同一种度量：对谁都一样的读数，以及据此安排人。资本可以借用这把尺子，也不借用，尺子仍然在。

是数学的统一性标准化。 它为可替换性提供了度量。没有“对谁都一样”的读数，两个人谈不上可换；没有可比较的次序，排名无从做起；没有可审计的标准，考核没有依据。数学在近代成为客观性的典范，一个读数一旦被赋予数学的形式，便获得了脱离具体情境、对一切人有效的权威。这个权威沿着“读数对谁都一样”这条线，进入了每一个需要安排人的地方。

这一定位是有条件的，条件就是第 18 章要设计的判决。若统一性标准化完成之后，被命名为例外、病态的对象清单并不持续增长（判决预测三），或在非原作者开出新路的数量上，多元化的统一性与一般的统一性没有差别（判决预测二），则本章的机制要重新审视。读数取自互不重叠的数据源，编码者与判定者分离。

这种权威有它自己的历史。十八世纪末法国推行米制时，流传一句口号，大意是要把一种量度交给一切时代、一切人民。量度要对一切人一样，是这句话的重心；它在地球子午线的测量里找到了自己的物质依据，Alder 的《万物的尺度》（2002）对这段历史有细致的叙述。这句口号后来的命运值得注意：在度量衡上，它是对的，米制连接了贸易、科学与工程；当同样的口吻被用于衡量人的时候，同一句话的意思变了，“对一切人一样”从一把尺子的优点，变成了对人的要求。这个变化，在标准化的方式里没有任何一处被明文写出，它沿着“读数对谁都一样”这条线自己滑了过去。

数学在这里扮演的角色，也可以用一个反向的思想实验来看：设想一个社会，没有统一性标准化的度量，只有行当内部的手感与师徒谱系，每个人的价值由他接上了谁、在哪些情境里站得住来读。这样的社会难以大规模协作，规范力范围小，这是它的短处，本书不回避。所以本书的方向不是退回去，而是让两端都在：统一性的位置照常工作，谱系的位置各有其范围，位置之间用重叠区接起来。

还要注意这一定位的范围。本书说祸害的来源是数学的统一性标准化，不是说它是祸害的唯一原因。权力、利益、技术条件，都在这个过程里起作用。本书的主张较窄：在这些因素之下，使“人成为零件”得以定量、得以审计、得以批量执行的那个环节，是数学的统一性标准化。把这个环节换掉，别的因素仍在，零件化的度量却没有了。

◆ 17.7　与近邻的分界

下面五位思想家都看见了异化。本书与他们的分界，是来源的定位和机制的给法。

马克思。 1844 年的《经济学哲学手稿》把异化劳动分成四重：劳动者与自己的产品、与自己的劳动活动、与人的类本质、与他人相异化。来源落在私有财产与雇佣劳动的关系里。《资本论》中的“抽象劳动”与“社会必要劳动时间”，其实是一种度量：把千差万别的具体劳动，按时间折成同质的量。本书与他的会合点在这里：这是一种“谁用都一样”的度量。分界在于，马克思把度量的来源放在商品生产的社会关系中，本书追问的是，使这种折算可以做、可以审计的那种标准化方式，是数学的统一性标准化；它在非资本主义的场合同样出现。两种说法可以接上，不互相取代。

韦伯。 他在 1905 年的《新教伦理与资本主义精神》里写到，理性化的结果是一个“钢铁般坚硬的外壳”（帕森斯的英译作“铁笼”）。形式理性的核心是可计算性。本书认为这与统一性标准化相邻，可计算性的数学形态正是对谁都一样的读数。分界在于，韦伯看到的是理性化整体，本书把来源收窄到数学这一化的标准化方式，并以三律的亏缺给出笼子里的运行机制：笼子是怎样把特征、新路、释放逐一取走的。

胡塞尔。 《欧洲科学的危机与超越论的现象学》（1936 年起发表，全文刊于 1954 年）谈的是自然的数学化：伽利略把自然理解为可以用数学公式穿上“观念外衣”的东西，生活世界的原初意义被遗忘。与本书最近。分界有两处。第一，胡塞尔追问的是科学意义之基的遗忘，主张回到生活世界；本书不主张离开数学，主张数学标准化方式的重生，因为生活世界里本来就有数：第 16 章的触觉数、听觉数，正是生活世界里的数学。第二，胡塞尔的“回到”是一个反思的动作，本书给出的是谱系的发生：位置由回写历史生成，而不是由回溯去找回。

海德格尔。 《技术的追问》（1953 年演讲，1954 年发表）把现代技术的本质称为“座架”，一切在其中被订造为“持存物”，随时待命。人也在其中被订造。本书与他共有的是对待命状态的观察：零件正是随时待命、随时可替换的持存物。分界是：海德格尔把座架读作存在的天命，出路被留给一种不由人安排的转向；本书把来源定位到一种标准化的方式，它有数学形态，可以被换掉，换法由伞模型给出，换得对不对由第 18 章的判决预测检验。

马尔库塞。 《单向度的人》（1964）说发达工业社会的技术理性压平了批判的维度，人只剩一个向度。本书同意“单向度”的刻画，并给出一个数学上的对应：

评价维度被压成一个，等价于点模型的一条链。分界是：马尔库塞的重点是意识形态与需求的塑造，本书的重点是评价所用的度量，以及度量取走了哪些发动部件。

把五位的位置并排放一张表，便于看清本书的接法：

思想家	看见了什么	来源所在	本书的接法
马克思	劳动与产品、活动、类本质、他人的分离	私有财产与雇佣劳动	抽象劳动是一种对谁都一样的折算，折算所用的标准化方式是数学的
韦伯	形式理性与可计算性的外壳	理性化整体	可计算性的数学形态就是统一性标准化，三律的亏缺给出笼内机制
胡塞尔	自然的数学化与生活世界的遗忘	观念外衣对意义之基的覆盖	生活世界里有触觉数与听觉数，数学可以重生，不必离开
海德格尔	一切被订造为待命的持存物	技术的本质	待命的零件正是可替换者，来源是一种可被换掉的标准化方式
马尔库塞	批判维度被压平的单向度	技术理性与需求的塑造	单向度是评价被压成一条链，点模型的人间形态

五位思想家各自的贡献，本书不作取代。他们提供了异化的诸般面相；本书的工作，是在这些面相下指出一个共同的数学来源，并以三律的亏缺把来源与读数连起来。

◆ 17.8　主语与出路

最后要回到主语问题，这是本章最容易写偏的地方。

枯竭与零件化，是统一性标准化这种运行的必然读数。在零件化的运行里，一个人没有动力、没有创意、感到空，不是他意志薄弱，也不是他选错了路；是这套运行取走了特征凝成的门槛、路径分岔的余地、释放的来源，读数自然是这样。同一个人换到一套有重叠、有延迟、保留纠缠的运行里，读数会不同。

由此推出的出路，也要换一个说法。“个人更努力”“更自律”“更积极”，这些建议在固定点收敛的框架里，意思是收敛得更快、达标得更稳。它们不改变运行的类型，只是让同一种运行跑得更顺。出路不在个人更努力，而在标准化方式的重生：把消除差异的标准化，换成安排差异的标准化。

这里不宜把重生写成一份方案，只能写出它的方向，与第 16 章衔接。第一，位置由回写历史给出。一个人在系统里的位置，不是一个分数，而是他接上了谁、在哪些情境里站得住、他的手感与节奏被谁承认，这些可查可核。第二，差异被安排

为谱系中的位置，而不是被消除。第三，视觉的刻度保留在它擅长的地方，触觉与听觉的谱系各有自己的规范力范围，用重叠区接起来。第四，连接以亲缘承担，一个岗位不再只是一个接口，而是一块与别的岗位有重叠的区域。

把这四个方向放进一个最小的形式里看。统一性下，一个人的位置是一个数 $s(x)\in\mathbb{R}$。谱系下，一个人的位置是一组带历史的记录：他的伞与哪些伞有重叠、重叠的强度 $E(i,\ j)$ 是多少、这些重叠是在哪些情境中被回写的、每一次回写改写了什么。前者是一个点，后者是一小块伞场。两个人在前者里可以重合，在后者里几乎不会重合，因为历史不会重合。可替换性在后者里依然可以问，问法变了：不是“他的分数与她相同吗”，而是“在这一块区域里，他的伞与她的伞的重叠有多大，换人之后，哪些连接要重新长”。换人是有成本的，成本等于要重新长出的那部分亲缘，这个成本是可读的，也就是说，亲缘是可读的。

按三个模态看，评价方式也各有各的样子。视觉端，保留公共的、可核对的记录，让规范力继续在上面快速积累。触觉端，承认行当内部的手感与师徒谱系为合法的规范力范围，评价者是同一部落里能读手感的人，部落之间用重叠区换算，而不是把手感翻译成条款。听觉端，评价保留时间结构：看一次完整的张力积累与落回有没有发生，以及释放的时机，而不是只数时长。三种方式的共同点是，位置由各自被回写的历史给出，不由一个事先给定的度量给出。

标准答案这一形态的重生，也可以顺着这条线想。题目仍然可以有答案，答案仍然可以批量核对，这是统一性所擅长的位置；但在它旁边，要留一块让“别的路”被记下来的地方：用了另一条路径得到同一结果的，记下这条路径；提出了答案之外的问题的，记下这个问题；日后别的学生沿着这条路又走了一遍的，这条路便有了第二个回写。这样，答案之外的差异不再只叫错误，它们成了谱系上有位置的东西。

这些方向的好坏，不由本书的偏好来评，由读数来评。第 18 章的五条判决预测给出了输的条件。若输了，母题要撤回或改写，撤回到哪一层，按 18.7 的层级表执行。

最后补一个限定。上面的叙述无意说所有的标准答案、评分、排名与指标都该取消。在统一性所擅长的位置，它们照常工作；急救流程、安全规程、会计准则、药品剂量，都是这样的位置。要追问的，是在这些位置之外，它们是不是也被推广成了唯一的方式。

◆ 本章结论

1. 标准答案、单一评分、单一排名、关键绩效指标、流水线工时，是“谁用都一样”的标准化在日子里的五种形态，骨架相同：先有对谁都一样的度量，再用它安排人。
2. 零件的价值在可替换，统一性标准化提供了度量可替换的尺子；相容性公理的六个约束被逐条搬到了人身上。
3. 统一性标准化实为视觉模态的标准化被推广为全部标准；零件化首先是触觉与听觉的谱系被压成视觉的统一刻度。
4. 在这样的运行里，特征不再凝成，新路不再裁出，幸福只剩达标一种释放，越达标越干；这些是运行的必然读数，不是个人的意志问题。
5. 祸害的来源是数学的统一性标准化，它为可替换性提供了度量；与马克思、韦伯、胡塞尔、海德格尔、马尔库塞相邻而不同，出路在标准化方式的重生。

◆ 本章参考

— 原始文献

· Marx, K., Ökonomisch-philosophische Manuskripte, 1844；Das Kapital, 1867 起。

· Weber, M., Die protestantische Ethik und der Geist des Kapitalismus, Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik 20 (1904) 与 21 (1905)；单行本修订版 1920。

· Husserl, E., Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie, 1936 起发表，全文 1954。

· Heidegger, M., Die Frage nach der Technik, 1953 年演讲，1954 年发表。

· Marcuse, H., One-Dimensional Man, 1964。

· Taylor, F. W., The Principles of Scientific Management, 1911。

· Goodhart, C., Problems of monetary management: the U.K. experience, in Papers in Monetary Economics, vol. I, Reserve Bank of Australia, 1975。

· Campbell, D. T., Assessing the impact of planned social change, Evaluation and Program Planning 2(1), 1979, pp. 67–90。

— 研究文献

- Porter, T. M., Trust in Numbers, 1995。
- Scott, J. C., Seeing Like a State, 1998。
- Alder, K., The Measure of All Things, 2002（米制的测量史，梅尚的观测差异见该书）。

— 站内著作

- 第 53 号《SDE数学导论》（相容性公理六约束、伞与 SDE 数）。
- 第 344 号《意义数学的诞生》（三律的相容退化、没有自由的三形态、三种数）。

◆

18

第 18 章

输的条件与判决设计

本章提要 前十七章立了论，本章给出输的条件。五条判决预测——伞模型是否优于固定退化的模型（预测零）、多元与谱系是否读数不同（预测一）、系统增多是否带来新路（预测二）、例外清单是否在标准完成后复发（预测三）、三种感觉模态的一致性与亲缘次序（预测四）——被逐条展开为可执行的设计：数据来源、编码者与判定者的分离、对照组、归一化、阈值与撤回后果。每条预测写明拉卡托斯、哈姆金斯式多元论、非局部微积分各自会预测什么、本书预测什么；末尾给出五条预测的撤回层级，以及撤回时该怎样写。

◆ 18.1 1919 年的两个数

1919 年 5 月 29 日有一次日全食。爱丁顿一行分赴几内亚湾的普林西比岛与巴西的索布拉尔，要在全食的几分钟里拍下太阳边缘的恒星。星光掠过太阳时偏折多少，有两个数早已写在纸上：按牛顿式的计算，约0.87角秒；按广义相对论，约1.75角秒，恰是前者的两倍。这次观测之所以被后世当作判决设计的样板，原因不在结果，在做法：两个数在底片冲洗之前就已不同，而且已经公开。数据到来以后，谁也无法再回头修改自己的预言。

数学没有日食，却有可以代替日食的东西：带日期的文献库、逐版修订的教材、公开维护的开放问题清单、可重复运行的计算基准。本章做的事情与爱丁顿相同——先把数写下来，再去看数据。写数的方式有一个统一的格式，下面称为记录卡，每条预测填一张，共八栏：

- **假设**：被检验的断言，指向前文哪一章。
- **读数**：用什么量来量，量的定义精确到可以由第三者复算。
- **数据来源**：自变量与因变量取自互不重叠的来源。
- **对照**：与谁比；对照组在冻结日前选定。
- **归一化**：怎样消去规模、年代与文献量的影响。

- **阈值**：通过、未决、撤回三个区间的边界。
- **分工**：谁编码，谁判定。
- **撤回后果**：输了，哪几章、哪几句话随之降格或撤回。

预测由作者写下，输赢的数也由作者先写下。这是立论的一部分：一个数学上的断言，在被写成可以落空的形式之前，只是一种看法。下面每一条都有它落空的方式，落空时该做什么也一并写明。

五条预测共用五项约定。

其一，冻结。预测文本、编码手册、阈值表与分析代码在登记日一并存档并公开；其后的任何修订都以新版本并列，旧版保留，报告须同时列出两版结论。冻结的目的只有一个：使“结果出来之后再画靶”成为可见的事。

其二，数据源互不重叠。同一份数据不得既用来定义自变量，又用来计算因变量。本章用到三类来源：文献库（如 arXiv、zbMATH Open 的带日期题录）、规范文本（教材与专著的版次、术语表、标准文件的修订记录）、计算基准（公开的数据集与基准问题集）。例如预测一里，“回写历史的厚薄”取自规范文本，“新技术的采纳与改写”取自文献库，二者来源不同，一个量的误差不会漏进另一个量。

其三，编码者与判定者分离。编码者依手册给条目打标签，看不到假设，也看不到条目属于哪一组；判定者持阈值表，只看汇总，不看条目原文，也不参与编码。本书作者是登记人，二者都不担任。编码一致性用科恩 κ 度量，登记值为 $\kappa \geq 0.7$〔阈值待核〕；未达标则修订手册重编，重编次数写进报告。

其四，结局三值：通过、未决、撤回。未决不算通过——处于未决的预测，其所支持的断言在报告里降一级措辞，并限期补样本一次；补后仍未决，按撤回处理。

其五，输的方向先于数据写下。每一条预测下面都有一段“何时输”，同时给出输之后的文字去处。这是立论者给自己留的出口，不是给批评者留的把柄：一个断言若找不到会使它落空的数，就还没有被写成断言。

五条预测的先后有安排。预测零最贴近数学内部，数据最硬；预测一把定义的区分变成经验区分；预测二检验第三编的核心判断；预测三检验第五编对枯竭的读法；预测四把作者对感觉模态的判断交给被试。前一条输了，后一条仍可独立进行，但它们所保护的论断层级不同，18.7 将这层级排成一张表。

◆ 18.2　预测零：伞的半径跟着场走，值不值

要检验的断言。第四编把伞模型读作同一性谱系标准化的数学形态。第 53 号《SDE数学导论》与第 344 号《意义数学的诞生》已经给出若干印证：地震波、蛋白质、网格等问题上，按场的状态调节半径与权重的伞场，表现不弱于固定在某一退化点的模型。预测零向印证之外去找：若出现一类问题，固定 $r\to 0$ 的点模型与固定视界的非局部模型都表现更好，而按场的发生调节半径与权重的伞模型并无优势，则“伞模型是谱系标准化的数学形态”降为“一种建模选择”。

这条预测的形状是寻找反例，所以设计的重心在于让反例容易被找到。

已有印证的读法也在此交代。地震波、蛋白质、网格这几类问题里，伞场的表现是在设计之前或设计之外取得的，它们提供的是存在性：至少有几类问题，让半径与权重跟着场走是合算的。预测零要问的是边界：这个合算的范围到哪里为止，在边界之外，什么样的问题把优势还给点模型或固定视界。边界划得越清楚，“点是伞的退化端”这句话越有内容——退化端有它自己的领地，领地之内它是最好的伞。

三个竞争模型。M0 是点模型：局部算子，等价于伞在 $r\to 0$、$\omega=1$、$v\to\infty$ 处的退化，即传统的偏微分方程与有限元。M1 是固定视界的非局部模型：核函数与视界 δ 在整个计算域内取同一个值，属于近场动力学与非局部微积分的框架，δ 由训练段数据校准。M2 是伞模型：$r(x,t)$ 与 $\omega(x,t)$ 由一条事先冻结的规则给出，规则的输入是场自身的发生史——局部梯度的演化、不连续的出现与消失、前一时段的残差——输出是该处伞的半径与重叠度。

另设两个对照，用来把“发生”从“自由度”里分开。其一，M1′：同样允许 δ 随位置变化，其自由度个数与 M2 的规则参数个数相同，但 $\delta(x)$ 是在训练段上一次校准的静态地图，不随场的发生史更新。其二，M2 的打乱版 M2*：规则、参数都不变，只是把输入的发生史按时间次序随机置换。若 M2 的优势在打乱后依然保留，增益来自自由度的增加，而不来自发生；若打乱后优势消失，才可以说半径跟着场的发生走是有内容的。

数据来源。问题类不由本书作者圈定。登记人公开征集挑战类，征集对象包括非局部微积分与近场动力学的研究者、数值分析的基准维护者；每个挑战类由同一数据生成机制下的至少五个实例构成，来源至少涉及三个互不重叠的数据集（实验记录、公开的反演数据、仿真基准）。挑战类一经提交，在冻结日前由登记人与提交者共同确认其可运行性，此后不得撤换。

规则的冻结。M2 的调节规则是预测零中最容易被事后调整的部分，因而冻结得最严：规则以代码和文字两种形式存档，参数个数写明上限 q，q 个参数在训练段内拟合，进入留出段后不得再动。规则的形式可以是任何由场的发生史到 (r, ω) 的映射，但映射必须只读训练段与留出段起点之前的历史，不得读取留出段本身。M1′ 的 δ(x) 取同样的 q 个自由度，用同样的训练段拟合。两者的差别于是只剩一个：一个读发生史并随之更新，一个是静态的地图。

读数与归一化。每个实例 k 取留出段的归一化均方根误差 e，即误差的均方根除以留出段数据的标准差。三方的计算预算相同——以浮点运算次数为上限，若无法统计则以同一硬件上的墙钟时间为上限。伞模型相对最强对手的增益定义为

g_k = 1 − e_k(M2) / min{ e_k(M0), e_k(M1), e_k(M1′) }

g_k>0 表示 M2 优于三者中最好的一个。取最强对手而不取平均，是让伞模型与最难的竞争者比。

阈值。对一个挑战类，取其实例的 g 中位数及自助法 95% 区间。区间下界大于 0且中位数不低于0.10为通过；区间上界低于0.05为撤回；其余为未决〔阈值待核〕。另外，M2 的通过须同时满足 M2* 的增益中位数不超过 M2 的一半，否则增益归入自由度，该类按未通过计。

与近邻的分界。三家近邻中只有一家进入这条预测。非局部微积分的核心结论是渐近相容：视界 δ→0 时，非局部算子回到局部算子，收敛性有定理支撑（如杜强等人关于渐近相容格式的工作）。在它的框架里，局部是默认，非局部是为了描述长程力与不连续而加入的模型，δ 是一个由数据校准的参数；校准成全局常数还是随位置变化的函数，同属一个框架，都由 M1 与 M1′ 代表。因此它的预测是：同等自由度下，静态校准的 δ(x) 与伞模型打平，任何增益都可以由 M1′ 吸收。本书的预测相反：M2 在发生剧烈的问题上（不连续萌生、局部相变、多尺度共存）胜过 M1′，而 M2* 失去这一优势；在发生平缓的问题上，三者打平，M0 因最省而胜出。后一半同样是预测：伞在平缓处退化为点，点模型是最合算的伞，这正是退化端的含义。

拉卡托斯与哈姆金斯式多元论对数值建模没有预测，不进入这里的比较。把它们写成“预测打平”是把沉默当成了立场。

何时输。若在某个挑战类上，g 的区间上界低于0.05，或 M2* 的增益与 M2 相近而使增益归入自由度，则该类上伞模型相对最强对手没有可辨认的优势。预测零针对的就是这一情形：这样的类一旦出现，第四编的措辞从“同一性谱系标准化的

数学形态”改为“一种建模选择”，第 14 至 16 章保留为对伞场方法的陈述，但不再承担谱系论断。

挑战类通过与否，还要看覆盖范围。通过一个类，说明伞模型在这一类上有增益；预测零的措辞是“若出现一类问题”，因此一个反例类就够，而支持它的类越多越好，二者不对称。这种不对称是有意的：被检验的论断是全称的，全称论断的判决从来如此。

◆ 18.3　预测一：标准相同，回写不同，读数是否不同

要检验的断言。第三编的判断是：多元化的统一性与单数的统一性，对意义三律的亏缺方式相同；它与同一性谱系之间的区分，不只是定义的区分。预测一把这个区分落到可观察的地方。两个子领域，形式标准相同，回写历史不同；同一项新证明技术进入二者，被采纳与被改写的程度不同。多元化的统一性预测相同，因为在它看来，标准一样，技术的适配就一样，历史是外在的。若无差异，母题撤回。

配对。以子领域为单位配对。一对中的两个子领域须满足：共用同一公理背景（例如同在经典一阶逻辑与同一集合论背景之内）、同一证明规范与同一类审稿惯例，由第三位编码者依“形式标准同一性清单”（见附录三 C.3）逐项核对，差异项不超过登记值〔阈值待核〕方可入选。配对时对年论文量、成立年代与形式化程度（是否有机器验证库）做匹配，使二者除回写历史外尽量相近。预期至少十对。

回写历史的厚度 H。H 取自规范文本这一来源，不取自文献库。读数由两部分构成：一是术语与定义的修订记录——教材与专著各版次之间，核心定义被改写、被拆分、被加限定的条数，按每百页归一；二是例外被吸收的条数——先前作为例外、病态、反例单列的对象，在后一版次里被收入定义的适用范围，或被赋予名称与位置。H 的两个部分分别记录，其中修订部分另按驱动来源再分为两类，以便在本节末区分拉卡托斯式的反例驱动与亲缘驱动。

新技术 T。在冻结日前，登记人从公开的技术表中随机抽取，候选须满足：首次发表在窗口起点之后，并且在原发表处已有跨子领域移植的可能。一对子领域至少对应两项技术。抽签而非挑选，是为了防止作者选出对自己有利的技术。

读数。采纳率 a：子领域内引用或使用 T 的论文数，除以同期该子领域论文总数。改写率 m：在采用 T 的论文中，对 T 的陈述条件作了修改、给出变体命名或限定适用范围的论文占比。改写的判定由编码者依手册作出，手册给出十个以上的标注示例，覆盖“原样套用”“加条件”“换名”“限范围”四类。

对照。每对子领域另取一项对照技术 T′：形式适配上与 T 无差异（编码者依清单判定），但与回写历史无关，例如一项纯计算性的化简技巧。以双重差分的方式使用——先看 T 在两个子领域的改写率之差，再减去 T′ 的同一差，用来扣除两个子领域本身在改写习惯上的差别。

编码手册的写法。手册对每一类标注给出判据与反例。以“加条件”为例：原技术的陈述中有一个全称量词所覆盖的范围，在后来的论文中被收窄，或增加了一条原陈述没有的前提，且论文明确把这一收窄归因于该子领域的对象，编为加条件；仅仅在引言里复述原陈述，不编。“换名”要求论文给变体一个新名称并且至少用于一个定理的陈述。手册的每一类至少附十个取自冻结日前文献的标注示例，编码者在试编阶段对这些示例达到 $\kappa \geq 0.7$ 方可开始正式编码。

阈值。记配对差 Δm，为回写较厚者的 m 减去较薄者的 m，再减去对照技术上的同一差。采用配对置换检验及自助法区间。通过：Δm 的 90% 区间下界高于 0.03，且中位数不低于0.10。撤回：区间上界不高于0.03（用等价性检验的写法，把“无差异”当作需要被证明的假设，而不是证据不足时的默认）。其余为未决。采纳率 a 只作描述并双侧报告，方向不预先规定，因为采纳受许多与历史无关的因素影响。

与近邻的分界。哈姆金斯式多元论把各个宇宙并置、各取所需，一项技术在哪个宇宙里被采纳，取决于它在该宇宙里是否适配；回写历史不是它的变量，所以它与多元化的统一性给出同一个预测：Δm 接近零。拉卡托斯的情形不同。在《证明与反驳》里，概念因反例而被拉伸、收缩、重新划界，回写厚的子领域恰是反例多、修订多的子领域，故他的预测与本书同向：Δm 为正。这意味着预测一不能把本书与拉卡托斯分开，只能把本书与多元化的统一性分开。要分开前两者，需要用上 H 中的修订部分：把修订按驱动来源拆成反例驱动的（由具体反例触发的定义改动）与亲缘驱动的（由类比迁移、跨系统翻译、借用邻域方法而引起的改动）。拉卡托斯式的预测是只有反例驱动的 H 推高 m；本书的预测是两类修订都推高 m，且亲缘驱动部分的偏回归系数不为零。这条分界另列为预测一的第二读数，用同一套数据，通过判据是亲缘驱动部分的系数下界高于零。

何时输。主读数落入撤回区间，即：在标准相同的子领域之间，回写历史的厚薄不带来技术改写率的可辨认差别。此时多元化的统一性与同一性谱系在经验上无从区分，母题撤回：“统一性标准化亏缺三律，谱系标准化丰满三律”这一对比降为一种分类方式，第三编“多元不是出路”的判断随之撤回，只保留各章对历史材

料的陈述。第二读数落空而主读数通过，则本书与拉卡托斯的区分撤回，母题保留。

◆ 18.4　预测二：系统多了，新路是否跟着多

要检验的断言。第 12 章的判断是：多元化的统一性仍然枯竭，系统增多而三律读数并未同升。预测二把它压成：在系统数量增加的方向上（多宇宙、逻辑多元、新公理系统的并存），非原作者开出的新路与长期问题的解决数，并不随系统数同升；若同升，第三编撤回。

单位与读数。以研究方向为单位，一个方向在年份 t 有系统数 n：可并置研究的公理系统、逻辑系统或模型宇宙的个数，由登记人依公开综述的列表逐年计数，计数规则在冻结日前写定。因变量取两个。其一，新路数 Y_1：由非原作者发表的论文中，引入了该系统出现之前不存在的问题类或方法类的篇数，由编码者依手册标注；“非原作者”是对著作署名的操作性区分，指系统的首次提出文献的署名者之外的作者。其二，长期问题解决数 Y_2：取公开维护、带日期的开放问题清单，统计该方向内被解决或被实质缩减的条目数。群论的 Kourovka 笔记本可作一例：它自 1965 年起在新西伯利亚编纂，条目带提出者，各版次逐步注明已解决的问题与出处，版次本身就是时间戳。用这类清单有两处偏倚须在登记时写明。其一，清单由编者收录，收录本身是一次筛选，某一方向若恰有更勤的编者，其条目数便偏多，所以每个方向的清单须在冻结日前写定，且同一方向只用一份。其二，“被实质缩减”需要操作性的判据：登记人规定，条目的陈述被一个严格更强的已证结果覆盖，或其反例类被完全分类，才计入；仅有部分进展的不计。没有公开维护清单的方向，不入选本预测。同一条目在几个版次间被改动措辞的，以它首次出现的日期为准，避免把改写误数成新增；条目的解决状态由第二位编码者独立复核一遍，复核不一致的条目占比写进报告，占比过高时，该方向的 Y_2 不进入汇总。

数据来源。n 取自综述与教科书的列表（规范文本），Y_1 取自文献库，Y_2 取自问题清单，三者来源互不重叠。

归一化。Y 除以同期该方向论文总数，消去文献量的增长。以对数线性面板估计弹性

$$\ln Y_{it} = \alpha_i + \varepsilon \cdot \ln n_{it} + \text{控制项} + \text{误差}$$

α_i 吸收方向的固定差异，控制项含该方向的论文总量与年龄。ε 近于1，意味着系统数每翻一倍，新路也翻一倍；ε 近于0，意味着新路与系统数脱钩。

对照。系统数基本不变的同类方向，作为时间趋势的基线；另取“跨系统比较文献”的篇数 c 作为第三个自变量放进回归，这是为了分开系统数与系统之间的碰撞（见下文拉卡托斯一段）。

一个读数的走法。设某方向在五年中，系统数由三个增至六个，同期该方向论文总量增长约一半。若新路数 Y_1 按文献量归一之后翻了一倍，则在这一方向上弹性约为1；若归一之后几乎不变，则弹性近于0。单个方向的弹性噪声很大，所以判决取面板估计的区间，而不看单个方向的故事。故事可以激发设计，不能充当读数。

阈值。撤回第三编：ε 的 90% 区间下界不低于0.7，即新路几乎与系统数同升。通过：ε 的区间上界不高于0.3。其间为未决〔阈值待核〕。Y_1 与 Y_2 须同时达标才算通过，任一进入撤回区间则按撤回处理其对应的论断：Y_1 对应“新路”，Y_2 对应“长期问题”。

与近邻的分界。哈姆金斯的多宇宙观点主张，把各个集合论宇宙并置研究，能够让人看到单一宇宙里看不到的现象，因此按这个立场应当预测 ε 为正，且不低。拉卡托斯的增长图景以猜想与反驳的交锋为引擎，增长与系统数无关，与系统之间的交锋次数有关：他的预测是 Y 随 c 同升，系统数的系数不显著。本书的预测与二者都不同：多元化的统一性中，系统之间没有亲缘尺子，并置不产生回写，所以 ε 低，而且 c 的系数也低——交锋如果仍停留在“同一把尺在不同系统里重复”，同样不生产新路。本书只在一种情形下预测 c 有正系数：比较文献自身带有可追溯的回写，即 18.3 所说的亲缘驱动修订。为此，c 分为带回写的比较与不带回写的比较，由编码者区分，分别进入回归。非局部微积分对这一条没有预测。

何时输。ε 的区间下界不低于0.7，并且在把 c 放入回归、分为两类之后仍然如此。这时系统数本身就在生产新路，说明并置无需亲缘也能生长，第三编“多元不是出路”撤回，第 12 章对漂泊的论述降为一种风险提示。若只有带回写的 c 系数为正，而 ε 低，则本书得到支持，并且这一结果比单纯的低 ε 更有分量。

◆ 18.5　预测三：清单是否在标准完成之后复发

要检验的断言。本节检验的是第 4 章 4.8 节立下的张力复发律。第 4 章与第 17 章把统一性标准化的完成读作张力的积累：定义须无歧义，尺外的差异便被命名为例外、病态、反常，清单随之加长。预测三：统一性标准化完成后，被命名为例外、病态的对象清单（按文献量归一）持续增长，直到下一次模式转换。

事件与读数。以标准完成事件为单位。事件的定义写入附录三：某一领域的核心概念被写入教科书的通行版本，并在其后一个窗口内未被改写。事件表在冻结日

前由登记人依教科书版次列出，至少八个领域；魏尔斯特拉斯类的病态对象、几何公理化之后的非欧模型、测度论完成后的不可测集，都是候选，但是否入表以手册判据为准，不以作者的偏好为准。读数 L(t)：在窗口内，文献中被冠以“病态”“例外”“反例”“怪物”及其同义词、用于指称某类对象的条目数，除以同期同领域论文总数。

数据来源。L 取自文献库的全文检索加人工编码；事件日期取自教科书版次，来源不同。

对照与归一化。对照组是同期未经历标准完成事件的邻近领域，用来扣除“所有领域的例外词汇都在增多”这一整体趋势。归一化已含在分母里；此外对术语的时代用法做调整，用同一批术语在对照领域的变化率作基线。

阈值。对每个事件，估计完成后 L 对时间的斜率，减去对照领域同期斜率。通过：不少于三分之二的事件，差值的区间下界大于零；撤回：过半数事件的差值区间包含零或为负〔阈值待核〕。“直到下一次模式转换”是一个可单独检验的尾部：在能识别出后续模式转换的事件里，转换之后 L 的斜率应当下降。

一个事件的走法。取一个领域的标准完成日 t^*，把 t^* 前后各十年的文献分成同长的窗口。在窗口内检索“病态”“例外”“怪物”等词及其同义词所指称的对象，由编码者核对该词是否确用于指称某一类数学对象，剔除比喻用法，再除以同期论文总量。前后两个窗口的 L 之比，减去对照领域同期之比，就是这个事件的差值。八个以上事件的差值构成预测三的样本。

吸收率。同时记录第二读数：清单条目中，后来被收入定义适用范围或被赋予位置的比例，称吸收率 α。统一性标准下，条目被命名而不被收入，吸收率低；标准以位置安排差异时，吸收率高。预测三的方向因此有两个：L 的斜率为正，且 α 低。

与近邻的分界。库恩式的常规科学同样预测反常积累至危机，方向与本书相同，所以预测三单独成立时不足以把本书与库恩分开；它的区分力来自与预测一的联合：库恩的叙述里，反常积累由范式的封闭性引起，不涉及回写厚薄，本书则预测厚回写的领域吸收率更高、清单更短。拉卡托斯的《证明与反驳》描绘的循环是反例触发修订、修订吸收反例，清单应收缩而不是持续增长；他的预测与本书在 α 上相反。非局部微积分与哈姆金斯式多元论对这一条没有预测。

何时输。L 在完成之后平稳或下降，或 α 很高：这时统一性标准化没有积累例外，第 4 章与第 17 章把例外清单读作张力积累的论断撤回，保留的是对个别历史事

件的描述。若 L 增长而 α 也高，本书与拉卡托斯的循环难以区分，该论断降为未决，由预测一的第二读数继续判决。

◆ 18.6 预测四：同一内容，三种呈现，两条顺序

要检验的断言。第 16 章与第 344 号《意义数学的诞生》把数分为视觉数、触觉数、听觉数：同一把伞，配置不同——视觉的半径近零且不动，触觉的半径沿路径变，听觉的半径随时间动。作者由此给出一个更尖的判断：数学的同一性谱系标准化，在三大感觉模态上不一样。视觉数学的统一性可以很强，听觉数学的统一性非常差，触觉数学则高度部落化、谱系化；今天的统一性标准化，实为视觉模态标准化的推广。预测四把这句话写成两条顺序。

设计。取同一数学内容——计数、比例、节奏、形状四类——分别以视觉、听觉、触觉三种方式呈现。视觉：图形与符号，可重看、可同看。听觉：声音序列，随时间展开。触觉：按压、掂量、触摸一圈，内容与第 344 号所设想的按压桃子判熟度与触觉数感实验同类。每个人对每类内容在三种呈现下各完成同一任务，被试分层招募，覆盖不同师承与地方（学徒谱系、乡镇、学校），每个谱系单元不少于登记值〔阈值待核〕。刺激由登记人在冻结日前制作并存档；触觉刺激使用带力传感器的标准件，使“同一”成为可复核的量。

四类内容的具体任务。计数：给出若干个点、若干声、若干次按压，要求报出个数；比例：判断两组刺激的量之比是否为二比一；节奏：复述一段由长短音或长短压组成的序列；形状：判别两个刺激是否同形。每类内容在三种呈现下使用结构相同、载体不同的刺激，刺激的数学描述写进冻结文本，使“同一内容”由描述而不由印象来保证。触觉的形状任务用可握持的标准件，按压的比例任务用带力传感器的弹性体；听觉任务统一在同一播放设备与同一响度下进行。

读数。其一，跨人一致性 A：不同人对同一刺激给出相同结果的比例，计数类取数值相同，比例类取落入预设容差，节奏与形状类取编码者按手册判定相同。其二，亲缘相关性 K：同一师承、同一地方的人之间一致性减去跨组一致性，以组内相关系数的差表示。

预测顺序。A：视觉＞听觉＞触觉。K：触觉＞听觉＞视觉。每条顺序用杨克赫尔—特普斯特拉（Jonckheere–Terpstra）趋势检验，按预设顺序排列三个模态。

对照与归一化。三种呈现的任务难度难以直接相比，故以每种呈现下的个人自身重测一致性为基线，把“个人内部不稳定”从跨人不一致里扣掉；并用同一批被试做组内设计，扣除被试差异。

与近邻的分界。多元化的统一性预测三种模态的 A 与 K 都接近，因为任务内容同一、标准同一，模态只是呈现的外壳；非局部微积分与拉卡托斯在此没有预测；哈姆金斯式多元论只关心形式系统之间的关系，不涉及感觉模态。

何时输。任何一条顺序出现反向的显著趋势，则三模态谱系判断撤回；任何一条的趋势检验未达预设显著水平，按未决处理，补样本一次，补后仍未达，同样撤回。撤回时，视觉数、触觉数、听觉数共用一把伞的判断保留为构造陈述，“统一性标准化是视觉模态标准化的推广”这一命题撤回。两条顺序同时成立，才支持作者的判断。这一写法与导论 0.6 所述“两条顺序有一条不成立，三模态谱系的判断撤回”一致，只是把“不成立”分成了反向与未达两种，前者即时撤回，后者先补一次样本。

◆ 18.7　联合判决与撤回的层级

预测零至四分别保护不同层级的论断，输的后果并不相同。下表把五条预测和对应的撤回后果排在一处。

预测	读数	数据来源	对照	阈值（撤回区）	撤回后果
零	伞模型相对最强对手的增益 g	挑战类的公开数据集	M0、M1、M1′、M2*	g 的区间上界低于 0.05	第四编降为“一种建模选择”
一	技术改写率之差 Δm	规范文本＋文献库	对照技术 T′	Δm 区间上界不高于0.03	母题撤回；多元与谱系的区分降为分类
二	新路对系统数的弹性 ε	综述列表＋文献库＋问题清单	系统数不变的方向	ε 区间下界不低于 0.7	第三编撤回
三	例外清单斜率与吸收率	文献库＋教科书版次	无事件的邻近领域	过半数事件的斜率差值区间含零或为负	第 4、17 章机制论断撤回
四	跨人一致性与亲缘相关性	自行设计的刺激与被试	个人重测基线	任一顺序不成立	三模态谱系判断撤回

这张表有两处读法。第一，预测之间有依赖：预测一输，则预测二和三的解释力随之下降，因为它们的区分都建立在回写厚薄上；预测零输，不牵连预测一至四，因为它们不依赖伞模型的数值优势，只依赖谱系与统一性的区分。第二，联合判决是为了防止一次通过掩盖另一次失败。报告按预测逐条给出结局三值，不合并成总分——这与三律分开记录的做法一致，三律量纲不同，彼此不能相互替代。

功效与样本。每条预测在冻结前须做功效估算：给定阈值所对应的效应量，样本量要使通过区与撤回区各有不低于八成的机会被识别。预测一的十对配对、预测三的八个事件，是登记的下限，不是够用的保证；功效估算若显示下限不足，则先补样本再登记，不降低阈值。样本不足而得出的未决，与数据说话之后的未决，在报告里分开标注。

登记的物理形态。登记文本、手册、阈值表、分析代码与刺激文件，连同冻结日的哈希值，存入公开的版本库；编码者与判定者的名单与分工，在编码开始前登记。这样，任何读者都能从版本库里看出：阈值是否在数据之前定下，手册是否在编码之后被改过。

当两条预测的结果相互矛盾时，以数据来源更硬的一条为准，并把矛盾本身写进报告，作为后续设计的对象。

◆ 18.8　输了怎么写

什么不算输。数据在阈值之内而作者不喜欢，这是输；数据落在未决区间，是未完成；对照组的设计被指出有缺陷，则修订对照并重做，旧结果与新结果并列。以下三种说法不构成输，也不构成赢：“读数过于粗糙”“概念未获公认”“时间尚短”。前两者应在冻结日之前提出，由反方设计吸收；后者由未决条款的补样本机制处理。判决的目的是让每一种结局都有去处，没有一种结局可以悬在空中。

撤回要有固定的写法，否则撤回也会变成修辞。落入撤回区间时，报告依次写四句：预测原文、读数、区间、被撤回的论断及其所在章节。接着写保留什么：被撤回的论断下游的历史陈述与数学陈述若不依赖它，原样保留。第三写改什么：被撤回论断出现的各处，措辞同步降格，章节清单列在报告里。最后写下一步：该预测是否换设计重做，以何者为对手。

撤回之后不改写成更深的支持，不把“未发生”改称“隐性发生”，不在事后扩大术语使旧论断继续成立。一个能随时容纳反例的论断，等于没有论断。

挑战的公开。预测零采取公开征集，其余四条同样接受反方设计：任何人可以在冻结日前提交替代读数、替代对照或替代阈值，由登记人并列登记，两版结果同时报告。若反方设计在同一数据上给出相反结论，两版都留在报告里，判决交给后续独立重复，而不由作者裁量。一个愿意让对手改靶的立论，其输赢才有人信。

重复。每条预测的结果，在报告发表之后，应当由非登记人的小组按冻结文本重复一次。重复的结果与首次不同时，以后者为准并写出差异来源。这一步把判决从一次性的事件变成持续的运行。

这样做的理由并不只是诚实。标准的重生，本身就是一次被回写的历史：每一次判决的结果，不论通过或撤回，都要写回本书、写回读者手中的同一份存档，这份存档的版本链就是本书自己的回写历史。书中要求别人的标准带着历史，本书的标准也带着历史。判决设计因此是本书立场的一部分，而不是附在立场后面的保险。

◆ 本章结论

1. 五条判决预测各有一张记录卡：假设、读数、数据来源、对照、归一化、阈值、分工、撤回后果，缺一栏即未完成登记。
2. 预测零寻找反例类，用 M1′ 与打乱对照 M2*，把“发生”与“自由度”分开。
3. 预测一能分开本书与多元化的统一性，分开本书与拉卡托斯还须用亲缘驱动修订这一第二读数。
4. 预测二、三与库恩、拉卡托斯有同向之处，区分力来自带回写的比较文献与吸收率两个读数。
5. 预测四把三模态谱系判断写成两条可检验的顺序；撤回按层级执行，不合并成总分。

◆ 本章参考

— 原始文献

· Eddington, A. S., Dyson, F. W., Davidson, C. 1920. A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919. Philosophical Transactions of the Royal Society A 220.

· Carnap, R. 1934. Logische Syntax der Sprache. Wien: Springer.

· Gentzen, G. 1936. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. Mathematische Annalen 112.

— 研究文献

· Lakatos, I. 1976. Proofs and Refutations. Cambridge University Press.

· Kuhn, T. S. 1962. The Structure of Scientific Revolutions. University of Chicago Press.

- Hamkins, J. D. 2012. The set-theoretic multiverse. The Review of Symbolic Logic 5(3).
- Silling, S. A. 2000. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 48.
- Tian, X., Du, Q. 2014. Asymptotically compatible schemes and applications to robust discretization of nonlocal models. SIAM Journal on Numerical Analysis 52(4).
- Kitcher, P. 1988. Mathematical Naturalism. In Aspray & Kitcher (eds.), History and Philosophy of Modern Mathematics. University of Minnesota Press.
- Maddy, P. 1988. Believing the Axioms I. The Journal of Symbolic Logic 53(2).
- Cohen, J. 1960. A coefficient of agreement for nominal scales. Educational and Psychological Measurement 20(1).
- Jonckheere, A. R. 1954. A distribution-free k-sample test against ordered alternatives. Biometrika 41.
- Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory. Novosibirsk, 自 1965 年起逐版编纂。

站内著作

- 第 53 号《SDE数学导论》。
- 第 344 号《意义数学的诞生》。

◆

结语

统一性是谱系在 r→0 处的退化端

◆ 一根米尺

1792 年，德朗布尔与梅尚各带一队人马，一个向北、一个向南，沿敦刻尔克到巴塞罗那的子午线逐段测量，要把一条地球子午线四分之一的千万分之一，变成一根人人可以复制的尺。测量花了六年多，其间经历战乱与拘押。一根米尺做成以后，度量衡走出了法国，走进了工厂、港口、税表与图纸；此后的铁路、电报、邮政与货币，一件接一件，都靠一批可以互相对上的尺度接了起来。

这段测量里有一个细节，与本书的主题相近：梅尚在巴塞罗那的纬度观测中，发现两组观测的结果对不上，此后多年为这点差异不安，Alder 的《万物的尺度》对此有细致的叙述。一把号称对谁都一样的尺，在它被做出来的那一刻，已经带着一笔没有结清的差异；这笔差异在他去世之后随笔记公开，成为史家复盘这次测量的材料。尺的统一是结果，它的来历里有分歧、有补记、有改动。本书要说的是，这段来历若被删去，尺子仍然可以使用，但再也无从回答它为什么是这个长度。读者不妨把这一幕记作后文每一处“位置由历史给出”的原型：长度的数字可以搬走，数字背后哪一次观测改写过哪一次观测，搬不走，只能在那段档案里重新读。

没有这些尺，文明连不成一张网。本书从头到尾没有反对标准化。标准化使文明的组织连接成为可能，度量衡、历法、货币、工程、通信协议、协作分工，都是连接、次序、结构经过标准化之后才接得起来的。本书追问的是接的方式：这些尺是以什么方式把人和物连在一起的。

◆ 最粗、最老、退化的一端

两千年来，数学标准化的主流方式，是统一性：标准对谁都一样，结论不因人、因地、因来历而异。欧几里得到希尔伯特的公理化，魏尔斯特拉斯以后的分析，哥德尔与科恩之后对“独立”的处理，布尔巴基的结构，是这种方式的单数形

态；强度阶梯、多宇宙、宽容原则、逻辑多元与同构等价的扩张，是它的多元化形态。第二编与第三编走过这两种形态，得到同一个读数：标准运行得越顺，混沌碰撞越少，纠缠越少，特征律与自由律的发动部件越被拆掉，幸福律只剩消除差异一种释放。多元化没有改变这个读数，因为多元化的统一性里，每一把尺子内部仍然“谁用都一样”，尺子之间没有亲缘。

第四编换了一个角度看同一件事。伞由伞心、半径、核函数组成，场上有半径 r、重叠度 ω、传播速度 v 三个旋钮。当伞收成一点——$r\to 0$、$\omega=1$、$v\to\infty$——纠缠积分退为微分，重叠消失，信号瞬时传遍，相容性公理的全部条款同时成立，数学以点的方式显露出来：一个 3 就是数轴上的一个点，谁的 3 都一样。这是统一性。它不是错的，它是谱系里最粗、最老、退化的那一端：把伞完全收拢以后剩下的东西。收拢的伞里能算的东西，仍然能算；FFT、有限元、经典热传导，在 $r\to 0$ 的位置上正是最合算的伞。

这给旧数学一个新的安放。统一性不必被推翻，它被放回谱系，作为伞收成一点时显露的稳定态。一个工程师用点模型算一座桥的静载，一个会计用整数记一笔账，用的都是这一端，用得恰当；错处只在把这一端当作整个谱系，当作一切数学都应当向它看齐的尺。把统一性读成退化端，等于给它画出领地：在伞不需要撑开的地方，收拢是最省的办法；在需要撑开的地方——不连续萌生、多尺度共存、手感与节奏传承的地方——收拢本身成了代价。

这里的措辞有分寸。退化极限在一维、伞心等距等特定情形下有已证的结果（如 $\lim \mathcal{L}=c\cdot\Delta$，收敛率 $O(r^2)$；三重退化下计数与自然数同构），一般情形仍是猜想。其余情形都在猜想之列，本书只在已证的这一限度内引用。结语里的“退化端”一词，读作这一猜想所指的方向，而不是已完成的定理。预测零以数值比较的方式，替它划出能被检验的边界。

◆ 三个定义，再看一遍

全书第一页立住的三个定义，到这里可以用同一个例子再过一遍。统一性不等于单一性：它的要害是“谁用都一样”，可以只有一把尺，也可以有许多把。多元化的统一性，是几本菜谱并排，每本内部的尺子统一，本与本之间没有亲缘的尺

子；程度即使有，也是事先由定义安排的。同一性谱系，则是同一性的程度由回写历史生成，“这里才这样”，只能发生，不能应用。

米尺是一个干净的例子。一米在巴黎与在广州一样长，这是统一性；英制、市制与米制并存，各自内部一致，这是多元化的统一性，换算表由定义事先给出；而一个木匠铺里学徒向师傅学来的“一拃”“一搭”，各自带着手的历史，彼此有亲缘，不能被一张换算表取代，这是谱系的一端。三者各有位置，各有用处。本书说统一性枯竭，说的是把全部数学都放到第一种位置上之后的读数，不是说第一种位置本身没有用处。

◆ 从消除差异到安排差异

标准化的重生，是从“消除差异”转到“安排差异”。统一性把尺外的差异叫作错误或例外；同一性谱系给差异一个位置——在谱系里离“相容”有多远，用 SDE 数 $N=r\omega/(vT_c)$ 度量，位置、亲疏与适用范围由它被回写的历史给出，不由定义事先给出。“一小撮盐”与“3 克”是同一谱系的两个位置，各有各的条件，哪个更好不由一把尺来判。

这里的变化落在意义三律上。在伞下，重叠处的混沌碰撞使特征凝成，特征律得以运行；纠缠被保留并标注亲疏，新路可以被裁出，自由律得以运行；共振的释放把张力转成新的特征，每次释放都生产出下一轮的张力，幸福律得以运行，真、善、美三重齐全。数学这一信息维度，由此从让三律亏缺运行，转为全面系统地服务 D1：目标、路径、动力这三件意义的发生，不再被数学的方式先行拆掉发动部件。

三律的读数由此可以重新排列。特征律的跑法是混沌碰撞、自组织、涌现：统一性标准化要求定义无歧义，尺外的差异直接叫例外，碰撞没有发生的地方；谱系标准化让差异在位置之间碰撞，凝成新的特征。自由律的跑法是矛盾纠缠触发、路径裁剪、新模式：统一性要求无矛盾、独立、解耦、正交，纠缠被拆掉，路径只剩一条合法的；谱系保留纠缠并标注亲疏，新路由此可裁。幸福律的跑法是张力积累、模式转换、释放：统一性之下，新张力的来源只剩消除差异，释放一种，越达

标越干；谱系安排差异去释放，每次释放生产新特征。这三行对照，是本书全部论证的压缩。

还有一点值得在此说明。点并没有从谱系里消失，也没有被贬为低级：它是最简的一把伞，是最容易被机器生成、被搬来搬去的一把伞，因此是今天最通行的一把伞。AI 把统一性做得极其便宜，是这个时代一个值得认真看待的事实——正因为统一的部分可以被机器大量生成，剩下需要人去回写的、“这里才这样”的部分，才越发清楚地显出来。

两端的失衡都要记着。统一性过度，则枯竭；谱系若失去回写，只剩没有亲缘的增殖，则漂泊——那已是多元化的统一性，不是谱系。谱系之所以是谱系，在于每一个位置都带着自己的历史，历史是回写出来的，只能发生，不能应用。因此同一性谱系标准化不是一种可以下载、安装、批量铺开的标准化；它是在每一处被重新发生的标准化。这一点使它与统一性在方式上截然两样，也使本书无法替读者交出一份现成的谱系。

◆ 三种感觉，三种标准化

最后一个判断来自第 344 号《意义数学的诞生》区分的三种数。同一把伞，视觉的半径近零且不动，触觉的半径沿路径变，听觉的半径随时间动。三种配置对应三种标准化的难度，也就是三种统一性的程度。视觉数学的统一性可以很强：图形能一一对应，能重看，能同看，规范力积累最快，同一页纸上的一个符号，千人读来大致相同。听觉数学的统一性非常差：声音随时间展开，不能同时摆出来，一段节奏要靠一个人再唱一遍；听者各有各的期待，对同一段序列常常听出不同的数。触觉数学则非常部落化、谱系化：按压桃子判熟度，手感传给谁、从哪里学来，决定了他按出什么样的熟，同一师承、同一地方的人彼此一致，跨过去就变了。

照这个判断，今天通行的统一性标准化，实为视觉模态标准化的推广：把视觉里能成立的一一对应、重看、同看，当作数学一般应当满足的条件，再用它去衡量听觉的与触觉的数学。听觉的数学被写成记谱，触觉的数学被写成量具，凡是不能还原成可看之物的，便被判为不精确、不严格。谱系标准化要把三种模态都留在场里，各自按自己的位置运行，而不是只留下其中一种。这个判断在第 18 章被写成预

测四：跨人一致性呈视觉＞听觉＞触觉，跨群体的亲缘相关性呈触觉＞听觉＞视觉；两条顺序若不成立，这一判断撤回。它是结语里最需要数据说话的一句。

这三种模态的差别，还说明一件事：所谓“数学是普遍的”，其实是某一种模态的统一性被推广之后的印象。把它读成谱系里的一个位置以后，普遍性不再是出发点，而成了需要用回写历史去说明的结果——视觉数学为什么在那么多人那里一致，是因为它的规范力积累得快，不是因为它的构造唯一。

◆ 与站内著作

本书只讲标准化这一化。文明整体的同一性谱系化，第 402 号《新文明诞生——同一性谱系化》讨论；数学之场的谱系与迁移，第 552 号《陶哲轩如何才能与大模型公司和解与合作呢？——从统一性数学到同一性谱系数学》讨论；统一性在知识层面的退位，第 457 号《AI对科研的冲击为何首先表现在数学上？——从知识的统一性到同一性谱系》讨论；伞模型的数学构造与意义数学的诞生，第 53 号《SDE数学导论》与第 344 号《意义数学的诞生》给出。本书在这些著作之间占的位置，是标准化：把三律、伞与谱系的论述，落在“一个数学标准怎样生成、怎样凝成、怎样退化、怎样重生”这一件具体的事上。

◆ 以亲缘连接

回到开头那根米尺。文明仍然需要标准化来组织与连接，这一点不变；要换的是连接的方式。

统一性标准化是以可替换连接。一颗螺丝可以换成另一颗，一份报表可以换成另一份，一个人可以换成另一个人，只要它们符合同一把尺；连接得越紧，可替换性越高。这是统一性的长处，也是它的代价：可替换意味着可以脱离发生过程被搬走、被机器生成，换下一件，不必问这一件从哪里来。

同一性谱系标准化是以亲缘连接。连接的依据，是两处各自被回写出来的历史之间的亲疏——哪里与哪里相近，哪里的做法在哪里可以改写后使用，什么样的差异需要什么样的翻译。这种连接比可替换慢，也比可替换稳：它不要求双方变成同

一个东西，而要求双方知道彼此是什么、相距多远。连接得越紧，三律越丰满，因为每一次连接本身就是一次碰撞、一次纠缠的保留、一次张力的释放。

◆ 人，回到发生之中

第 17 章写过统一性标准化走出数学以后的样子：标准答案、单一评分、单一排名、关键绩效指标、流水线工时，它们是“谁用都一样”在日子里的形态。人被要求无歧义，无矛盾，可审计，朝固定点收敛，成为社会这台大机器上一个按统一标准运行的零件。零件的价值在于可替换，统一性的那把尺子正好为可替换提供度量。祸害的来源在数学这一化的标准化方式，不在技术本身，也不在资本本身。这个读法有一个推论：出路不在个人更努力地做零件，而在标准化方式的重生。

方式一旦重生，数学这一信息维度服务的就是 D1：为了什么、往哪里走、靠什么推动，这三件事由三律在人的手里发生，数学不再在源头处把它们的发动部件取走。人从零件回到三律的发生之中——在重叠处与别人碰撞，在纠缠里裁出自己的路，在每一次完整走通的释放里得到幸福。

举一个日子里的例子。一个班级用同一张试卷、同一个满分、同一条排名线去量所有学生，这是统一性的标准化，它让组织变得容易：成绩可以相加，名次可以公布，学校与学校之间可以比较。代价是，一个学生在某道题上的独特做法，一个班级里自发长出的学习方式，都要先翻译成分数才能被看见，翻译不过去的就成了例外。谱系式的做法并非取消试卷，而是让每一份答卷带着自己的来路被读：这个做法和哪一类做法亲近，它在哪里合用，在哪里需要转换。前者可以由机器完成，后者必须有人在场。数学标准化重生以后，后一种读法才有数学的支撑。

本书对异化的读法，与前人的看法既相近又有不同。马克思看见劳动的异化，韦伯看见合理化的铁笼，胡塞尔在《欧洲科学的危机》里提出自然的数学化，海德格尔把技术的本质称作座架，马尔库塞写下单向度的人。他们各自看见了人被按统一的尺度编排的现象。本书的补充，是把来源定位到数学这一化的标准化方式，并以意义三律的亏缺给出机制：零件化不是意志的软弱，也不是某一种制度的偏好，而是统一性标准化运行的读数。读数可以改，改的办法是方式的重生。

这里再说一下全书的运行态。本书写到的标准，没有一个是谁选定的：它们在运行中显影，凝成，退化，重生。米尺在子午线的测量里显影，在工厂与港口的使用里凝成，在光谱线与光速的定义里退为另一种形态，又在今天的计量重新定义里被重写。每一步都是回写，每一次回写都带着前一次的历史。对标准的评判因此也只能放在运行里：看它让三律跑得丰满，还是让三律亏缺地跑。

◆ 输的条件，是立论的一部分

第 18 章把本书的核心断言压成五条预测，每条都写明了数据来源、编码者与判定者的分离、对照、归一化、阈值和撤回后果。回头看去，这五条各护着一块：预测零护着伞模型的数学形态，输了，第四编降为一种建模选择；预测一护着多元与谱系的区分，输了，母题撤回；预测二护着第三编，输了，多元便可能是出路；预测三护着对枯竭的读法；预测四护着对三种感觉模态的判断。五块之中任何一块落空，其余的块并不自动倒下，却要重新称一称自己还剩多少分量。

一本讲谱系的书，应当让自己的断言也处在谱系里：每一个断言有自己的位置，有自己被检验的方式，有自己的历史。第 18 章的预测不是书的附件。这些预测若有一天被数据驳回，驳回的结果写回本书，就是本书自己的一次重生。

若要问这一切的起点，答案很小：一个 3。今天的通用模型里，它是数轴上的一个点，谁的 3 都一样；可是看是一眼的三，摸是一圈一圈的三，听是三声的三，同一个数在不同的位置有不同的样子。把一个 3 重新放回它被划出来的地方，是这本书所有章节做的事；而把一个 3 收成一个点，是人们花了两千年才学会、也学得很好的事。两件事都是数学，它们的差别是方向：前者朝向发生，后者朝向搬运。

◆ 账还没有结清

本书的结尾不是一份完成的清单。伞模型的退化极限，一般情形仍是猜想；圆柱模型作为伞之外的又一种构造，只被提名〔形态待定〕；五条判决预测都写成了输的条件，没有一条已经有了读数。

对读者可以说的话只有一句：把这本书里的每一处断言，都当作一个等待回写的位置。凡是被证明站得住的，请写下它站在哪里；凡是被推翻的，请写下它倒在哪里。两种写法都会成为谱系的一部分。

这些尚待完成的东西，恰好是同一性谱系标准化应有的样子：它不在书的结尾处宣布完成，而在后来者的验证、改写与反驳里被继续回写。统一性是谱系在 $r \to 0$ 处的退化端，这句话本身也是一个位置，等待它的历史。

附录

本书附录四件：附录一 九格表：三化 × 三元素；附录二 三个定义的判别清单：如何判断一个“多元”仍是统一性；附录三 判决预测的编码手册；附录四 参考书目。附录二收三个定义的判别清单，读者可先看。

附录一

九格表：三化 × 三元素

数学在 E2，是特征纠缠的场，三元素为连接、次序、结构；数学的作用是三化：标准化、简化、优化。九格表把每一化落到每一元素上，各格并列写出统一性标准化与同一性谱系标准化的做法。格内文字是作者的读法，供全书各章检索，不是定理。

	连接	次序	结构
标准化	统一：一律用通与不通，尺外的联系不计。谱系：联系带亲疏，亲疏由回写历史给出。	统一：一条线性的前后，次序不因人而异。谱系：次序随路径，同一内容在不同位置有不同的先后。	统一：一个标准模型，差异即错误。谱系：一组配置，构造同一，位置各异。
简化	统一：删去弱联系，只留主干。谱系：弱联系标注后保留，必要时再撑开。	统一：把次序压成线性。谱系：压缩时记下压缩的路径，可展开。	统一：用最少的原语生成全部。谱系：用少量构造生成配置，配置另记。
优化	统一：使连接数最少、最规整。谱系：使连接服务于三律的运行。	统一：使步骤最短、误差最小。谱系：使次序有利于特征凝成与新路裁出。	统一：使结构最简、最对称。谱系：使结构允许碰撞、可重叠，并留出再重生的余地。

读表须知。其一，三化之内只能精进标准化，这是第 2 章的判断；表中“优化”一行因而属于用“化”改“化”，由甲组透镜 S1·D3·E2 完成，只调整标准的精度，不重新定义标准。其二，只有透镜 S3·D1·E2（美×幸福律×数学）能追问标准化化解什么、以什么为好，因此每一格的“谱系”一栏，都是从这一透镜读出来的。其三，九格互相耦合，不是九个独立的项；第 53 号《SDE数学导论》第 13 章指出，连接、次序、结构在相容退化下解耦，撑开的伞里重新耦合，表中同行同列的格子不宜孤立使用。

逐格说明。标准化×连接：度量衡的统一让两地的商人可以对账，这是统一性的功绩；谱系的做法不取消对账，而是在账旁注明两地的尺相距几何、怎样换算、换算依据什么历史。标准化×次序：一年十二个月、一周七天，是线性次序的标准

化；谱系不否认日历，只是承认农时、潮汐与节庆各有自己的先后，并在日历旁留位置。标准化×结构：欧几里得几何作为唯一标准模型，非欧几何长期被当作例外；谱系把二者读作同一构造的不同配置。简化×连接：只保留主干联系，使图纸清楚，也删去了支线上的亲缘。简化×次序：把一个过程压成一条线，便于记忆，也丢掉了分叉。简化×结构：公理越少越简洁，但每一次简洁都有被放弃的位置。优化×连接、次序、结构三格，对应第 3 章所说“用‘化’改‘化’”：最优的连接、最短的次序、最简的结构，都是标准之内的精进，其“好”的标准没有被追问。

怎样用九格表读一个案例。取一件具体的事，如“用一条公式给学生排名”。先问它属于哪一化：排名是标准化。再问它落在哪个元素：名次的次序是线性的，落在次序；打分时各科的取舍是结构；谁与谁可以比较是连接。对照九格，标准化×次序一格写着统一性做法是一条线性的前后，谱系的做法是次序随路径。于是可以问：这条线性前后抹掉了哪些路径，这些路径的亲疏能否标出来？九格表的用处不是给出答案，而是让问题落在一个具体的位置上。

附录二

三个定义的判别清单：如何判断一个“多元”仍是统一性

三问判别（本书的主版本，第 12 章 12.8 节所述即此）。一个多元是否仍属统一性，归结为下面三个问题，依次回答。第 9 章 9.7 节、第 10 章 10.5 节另列的问句，都是这三问的一种展开，遇有出入，以此处为准。

- 甲　内部：每个系统内部，是否仍受相容性公理的约束——无歧义、无矛盾、独立、唯一模型？
- 乙　系统之间：系统之间的亲疏，是否由事先给定的定义排定？
- 丙　改写：新系统加入之后，旧系统的运行是否因之改写？

判读。三问的答案依次为“是、是、否”，这个多元便是多元化的统一性。编码时每问只取“是”“否”“待定”三值，“待定”须附一行理由。强度阶梯、多宇宙、逻辑多元论、宽容原则四类对象，依次过这三问，答案相同。若有一问偏离“是、是、否”，例如丙为“是”——新系统的加入确实改写了旧系统的运行，且这一改写可追到具体的文献——该体系值得转入下列问 8 至问 11 细查，看它的位置是否由回写历史给出。

与十一问清单的对应。
下列十一问的清单是三问的细化：甲对应问 5，乙对应问 6 与问 7；丙是 12.8 单独提出的一问，清单里没有逐字对应的条目，它的后果要在问 8 与问 9 里读出，因为新系统若真改写了旧系统，改写就会留下可查的回写记录。

一个例子。举逆数学的五大系统。甲，每个系统内部受同一类相容性约束，答“是”；乙，五个系统的先后由可证明的蕴涵关系事先排定，答“是”；丙，后一个系统的提出并没有使前一个系统的运行方式被改写，答“否”。三问合起来得“是、是、否”，与“阶梯是统一性的极致形态”这一读法一致。

面对一个主张或一个体系，依次回答下列问题。前三问判断它是不是统一性，问 4 至问 7 判断它是单数的统一性还是多元化的统一性，后四问判断它有没有进入谱系。

1. **脱离检验**：把这个标准从它的发生历史里取出，交给一个不知其来历的使用者，结果是否相同？相同则是统一性。
2. **机器检验**：这个标准能否由机器依定义生成，且生成物与人手工做出的无从区分？能则是统一性。
3. **换人检验**：换一个使用者、一个地方、一个来历，结论是否变？不变则是统一性。差异在其中是否被叫作错误或例外？是则是统一性。
4. **单一性检验**：体系里是否只有一把尺？是则是单数的统一性；这一问只区分一把尺与多把尺，不决定是不是统一性。
5. **内部一致检验**：每个系统内部，尺子是否统一？是则多元化的统一性里每个成员都是统一性。
6. **系统间亲缘检验**：系统之间是否有亲缘的尺子——一把能说出“这个系统与那个系统相距多远、在哪里可以改写后使用”的尺子，而且这把尺本身是由系统间的回写历史生成的？没有，则是多元化的统一性。
7. **程度来源检验**：体系里即使有程度（强弱、阶梯、亲疏），程度是由事先给定的定义安排的，还是由回写历史生成的？前者是多元化的统一性。
8. **移除检验**：把回写历史的记录整个删去，体系给出的位置、亲疏与适用范围是否改变？不改变，则位置不是由历史给出的，仍是统一性；改变，才进入谱系。
9. **回写可查**：位置的每一次改动，能否追到一次具体的实践——某篇文献、某次使用、某次失败？可以则进入谱系。
10. **只能发生**：这个标准能否被“应用”，即直接拿来用在另一处而不重新发生？能，则不是谱系；谱系只能在每一处重新发生。
11. **两端失衡**：体系是否只有增殖而没有回写，即系统在增多但无亲缘？是，则回到多元化的统一性（漂泊）。

几个已讨论的对象。下列判定是作者的读法，各章对相应材料有详细论述。

- 强度阶梯（证明论序数、逆数学五大系统、大基数一致性强度）：内部一致，阶梯的位置由定义给出，问 7 为前者，归多元化的统一性；近乎线性的阶梯是统一性的极致形态。
- 多宇宙：每个宇宙内部一致，宇宙之间的关系由定义的方式（强迫、内模型）给出，没有由回写历史生成的亲缘尺；个别论证形式是否带来例外，须逐例按问 6 判别。
- 宽容原则、逻辑多元论：体系并列，选择由目的给定，归多元化的统一性。
- 同构、范畴等价与单价公理：把更多东西纳入“相同”，是统一性的扩张；当“怎样相同”的路径带上了历史，才触及问 9。
- 伞模型：构造同一，配置成谱，进入谱系须看配置的位置是否由回写给出，这是第四编的论证，也是预测零所检验的。

演练一：一个多元体系的判别。设有一组并列的数学系统，每个系统内部公理一致，系统间用翻译函手联系，函手的存在性由定义给出，并附有按保持性质排列的强弱阶梯。依清单：问 5成立，每个成员是统一性；问 6，系统间有翻译，但翻译是事先定义的，它说明“怎样对应”，不说明“这一对应是怎样在实践中被改写成今天的样子”，故无由回写生成的亲缘尺；问 7，阶梯由定义给出；问 8，删去回写记录，阶梯不变。结论：多元化的统一性。

演练二：一个可能进入谱系的体系。设某一技术在两个子领域里各有不同的变体，变体之间的亲疏由“哪篇论文把哪一版改成了哪一版”的链条给出，链条可查，并且新到的使用者必须沿链条重新验证条件才能使用。依清单：问 8，删去链条后亲疏无从给出，改变；问 9，每次改动可追到具体文献；问 10，不能不经验证直接应用。结论：进入谱系。两个演练的差别不在体系的复杂程度，而在位置的来源。

使用提示。清单的前三问是必要条件的检验，对大多数现行的数学标准，答案都是肯定的；这并不是缺点，只是说明现行标准大多是统一性。拉开距离的是后几问，尤其是问 8，移除检验。作者建议把问 8 当作最终判据，其余各问当作帮助回答问 8 的线索：回写历史删去之后，位置变不变。

常见的误判。第一，把“许多”当作“谱系”：系统多，不是谱系，若系统之间的亲疏全由定义安排，仍是多元化的统一性。第二，把“分层”当作“谱系”：层次的位置由定义给出，层与层之间没有回写，这是阶梯。第三，把“可调”当

作“谱系”：参数可调，但调节的规则不读发生史，那是自由度。预测零中的 M1′ 正是为此设立的对照。第四，把“历史”当作装饰：在教材里加一章数学史，不使标准带上历史；历史带入标准，是指标准的位置因这段历史而不同。第五，把统一性等同于单一性：一个体系有许多把尺，仍可以每一把都“谁用都一样”。

附录三

判决预测的编码手册

本手册服务第 18 章。手册随登记文本一起冻结，修订另列新版本。

C.1　通则。条目是编码的最小单位：一篇论文、一个教材版次、一个清单条目、一个被试在一项任务上的一次应答。编码者对每个条目依手册选取一个标签，无法确定时标“待定”并附一行理由，不得凭印象归类。判定者不见条目原文。编码一致性用科恩 κ 度量，试编阶段须达到 $\kappa \geq 0.7$〔阈值待核〕，未达者修手册后重编；每次重编的版本与 κ 值写进报告。

C.2　预测零的编码。挑战类的实例须有可复算的数据生成机制说明；模型三方的计算预算以浮点运算次数记录；训练段与留出段的划分由登记人在冻结日前给出，不得按结果调整；调节规则的参数上限 q 记入登记文本。缺失数据的处理：实例中任一方无法在预算内运行者，该实例剔除，并在报告中列出剔除的比例。

C.3　预测一的编码。

- 形式标准同一性清单：公理背景；证明规范；审稿惯例；常用术语的定义表。四项均相同或差异不超过登记值，方可配对。
- 回写厚度 H 的两部分：定义修订条数（按每百页）；例外吸收条数。修订按驱动分为“反例驱动”与“亲缘驱动”两类，判据是修订说明里是否出现具体反例、还是出现类比、翻译或借用。
- 改写标签：原样套用；加条件（全称量词的范围被收窄，或增加了原陈述没有的前提，且论文明确归因于本子领域的对象）；换名（给变体新名称并在至少一个定理中使用）；限范围（明确写出适用的子类）。后三类合计为改写。

C.4　预测二的编码。

- 系统数 n：公开综述中的并列系统列表，逐年计数；计数规则：同一系统的不同表述不重复计，宣称等价但未证明者分开记。
- 新路：非原作者的论文中，引入了该系统出现之前不存在的问题类或方法类，编为一条新路。

- 长期问题解决数 Y_2：取公开维护、带日期的开放问题清单（如 Kourovka 笔记本）；条目的陈述被一个严格更强的已证结果覆盖，或其反例类被完全分类，才计为解决或实质缩减，部分进展不计；同一条目以首次出现的日期为准；解决状态由第二位编码者独立复核，复核不一致的占比写进报告。
- 比较文献 c 的分类：带回写（比较中包含对双方做法的改写并被后续文献采用）；不带回写（只列对照）。

— C.5　预测三的编码。

计数范围说明：第 4 章 4.8 节的线索里列有哥德尔、图灵等“不可判定”结果，它们作为例证出现；预测三的计数只收被命名为例外、病态、反常的数学对象，“独立于某公理系统”与“算法不可判定”的命题不入计数，以免把两类登记混为一类。

- 标准完成事件：核心概念被写入教科书通行版本，且在其后窗口内未被改写；事件表在冻结日前给出。
- 例外条目：文献中以“病态”“例外”“反例”“怪物”及同义词指称某一类数学对象者；比喻用法剔除。
- 吸收：该类对象后来被收入定义的适用范围，或被赋予名称与位置，编为已吸收。

— C.6　预测四的编码。

- 一致性 A：计数取数值相同；比例取落入预设容差；节奏与形状由编码者对照冻结的刺激描述判定相同。
- 亲缘相关性 K：被试按师承与地方登记，登记表在测试前完成；K 为组内相关系数之差。
- 个人重测一致性：同一被试在间隔后重做同一任务的一致率，作为基线。

C.7　编码的盲法。编码者收到的条目已去除作者姓名、期刊名、发表年份与所属组别，仅保留正文与必要的上下文；若正文自身透露了组别（如明说“在本子领域中”），由第三方先行遮蔽。判定者收到的汇总表只含分组代号，代号与组别的对应关系由登记人保管，到阈值判定完成之后才揭开。这样做的目的，是使编码和判定都无从迎合假设。

C.8　报告格式。每条预测一页：原文、读数、区间、结局（通过、未决、撤回）、被撤回或降格的论断及其章节。

— C.9　标注示例（取自冻结日前的公开材料，出处于登记时补全）。

- 改写类：某论文在引用一项存在性技术时，把适用的空间由一般度量空间收窄为紧致度量空间，并说明理由来自该子领域的对象，编为“加条件”。
- 改写类：某论文把一项技术用于新对象，给变体起了新名字并在一个定理里使用，编为“换名”。
- 非改写类：某论文只在引言里复述原技术的陈述，编为“原样套用”。
- 例外条目类：某教科书的习题段称一类函数为“病态”，并说明其性质与通行定义的冲突，编为例外条目；后一版次把这一类函数纳入定义的讨论范围并命名，编为已吸收。
- 新路类：某非原作者的论文在某公理系统下提出一个在该系统出现之前没有意义的问题类，编为新路；仅在新系统里重做旧证明，不编。

上列示例只说明标注的判据，具体示例在登记时由登记人从冻结日前的文献里选取。

C.10　登记文件的结构。每条预测的登记包是一个目录，含六个文件：假设文本（含“何时输”）、读数定义、编码手册、阈值表、分析代码、数据清单。数据清单列出每一份数据的来源、获取日期与哈希值。冻结时对整个目录取一个总哈希，写入公开的版本库；其后的每一次修订追加新版本，旧版本不删。报告引用结果时，写明所依据的版本号。编码者与判定者的名单在编码开始前写入目录的另一份文件，由第三方保存。

使用说明。若读者要复核第 18 章的某条预测，可依下列顺序：先读该章记录卡，再读附录三中对应的编码条目，再读附录二的判别问句，最后到附录四找对应的文献。预测一的配对清单、预测二的方向表、预测三的事件表，随登记包公开，不印在本书里，因为它们是随时间会被追加的东西：追加不是修订，是谱系的继续长。

附录四

参考书目

分三组：原始文献是被讨论的数学与哲学原作；研究文献是对这些原作的研究、与本书比较的近邻理论，以及判决设计所用的统计方法；站内著作按“第 N 号《书名》”著录。本书引用他人观点时只述大意，不引原话。各章末的“本章参考”分章著录，仅见于某一章的文献不在本表重复。

出版信息以通行著录为准。

— 原始文献

- Euclid. Elements（《几何原本》）。
- Hilbert, D. 1899. Grundlagen der Geometrie. Leipzig: Teubner.
- Weierstrass, K. 1872 年 7 月在柏林科学院宣读连续而处处不可微函数的例子，后收入 Mathematische Werke, Bd. II. Berlin: Mayer & Müller, 1895, 第 71–74 页。
- du Bois-Reymond, P. 1875. Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Änderungen in den kleinsten Intervallen. Journal für die reine und angewandte Mathematik 79: 21–37。
- Carnap, R. 1934. Logische Syntax der Sprache. Wien: Springer.
- Gödel, K. 1931. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik und Physik 38.
- Gentzen, G. 1936. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. Mathematische Annalen 112.
- Husserl, E. 1936. Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie. Philosophia (Belgrad) 1（前两部分）；全文见 Husserliana VI, Den Haag: Nijhoff, 1954。

- Cohen, P. J. 1963. The independence of the continuum hypothesis. Proceedings of the National Academy of Sciences 50(6).
- Friedman, H. 1975. Some systems of second order arithmetic and their use. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vancouver, 1974, vol. 1. Montreal: Canadian Mathematical Congress, 1975, 第 235–242 页。
- Bourbaki, N. Éléments de mathématique. Paris: Hermann.
- The Univalent Foundations Program. 2013. Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics. Institute for Advanced Study.
- Eddington, A. S., Dyson, F. W., Davidson, C. 1920. A determination of the deflection of light by the Sun's gravitational field. Philosophical Transactions of the Royal Society A 220.
- Marx, K. 1844. Ökonomisch-philosophische Manuskripte aus dem Jahre 1844. 写于 1844 年，1932 年首次刊行（MEGA I/3）；中译本：《1844 年经济学哲学手稿》，中共中央马克思恩格斯列宁斯大林著作编译局译，北京：人民出版社，2000。
- Marx, K. 1867. Das Kapital, Bd. I. Hamburg: Meissner.
- Weber, M. 1904–1905. Die protestantische Ethik und der Geist des Kapitalismus. Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik 20 (1904): 1–54; 21 (1905): 1–110。关于“铁笼”（stahlhartes Gehäuse）的论述在全文末段；英译 Parsons, T. 1930. London: Allen & Unwin。
- Heidegger, M. 1954. Die Frage nach der Technik. In Vorträge und Aufsätze. Pfullingen: Neske.
- Marcuse, H. 1964. One-Dimensional Man. Boston: Beacon Press.
- Taylor, F. W. 1911. The Principles of Scientific Management. New York: Harper & Brothers.
- Goodhart, C. 1975. Problems of monetary management: the U.K. experience. In Papers in Monetary Economics, vol. I. Reserve Bank of Australia.
- Campbell, D. T. 1979. Assessing the impact of planned social change. Evaluation and Program Planning 2(1): 67–90.

研究文献

- Lakatos, I. 1976. Proofs and Refutations. Cambridge University Press.
- Kuhn, T. S. 1962. The Structure of Scientific Revolutions. University of Chicago Press.
- Kitcher, P. 1988. Mathematical naturalism. In Aspray, W. & Kitcher, P. (eds.), History and Philosophy of Modern Mathematics. University of Minnesota Press.
- Maddy, P. 1988. Believing the axioms I. The Journal of Symbolic Logic 53(2).
- Hamkins, J. D. 2012. The set-theoretic multiverse. The Review of Symbolic Logic 5(3).
- Beall, J. C. & Restall, G. 2006. Logical Pluralism. Oxford University Press.
- Simpson, S. G. 1999. Subsystems of Second Order Arithmetic. Springer.
- Santos, F. 2000. A point set whose space of triangulations is disconnected. Journal of the American Mathematical Society 13(3).
- Silling, S. A. 2000. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 48.
- Du, Q., Gunzburger, M., Lehoucq, R. B., Zhou, K. 2012. Analysis and approximation of nonlocal diffusion problems with volume constraints. SIAM Review 54(4).
- Tian, X. & Du, Q. 2014. Asymptotically compatible schemes and applications to robust discretization of nonlocal models. SIAM Journal on Numerical Analysis 52(4).
- Cohen, J. 1960. A coefficient of agreement for nominal scales. Educational and Psychological Measurement 20(1).
- Jonckheere, A. R. 1954. A distribution-free k-sample test against ordered alternatives. Biometrika 41.
- Porter, T. M. 1995. Trust in Numbers: The Pursuit of Objectivity in Science and Public Life. Princeton University Press.

· Scott, J. C. 1998. Seeing Like a State. Yale University Press.
· Alder, K. 2002. The Measure of All Things. New York: Free Press.
· Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory. Novosibirsk, 自 1965 年起逐版编纂。

一 站内著作

· 第 53 号《SDE数学导论》。
· 第 344 号《意义数学的诞生》。
· 第 402 号《新文明诞生——同一性谱系化》。
· 第 457 号《AI对科研的冲击为何首先表现在数学上？——从知识的统一性到同一性谱系》。
· 第 552 号《陶哲轩如何才能与大模型公司和解与合作呢？——从统一性数学到同一性谱系数学》。

版本说明

本版字数、版本与交付

本版为 2026 年 11 月第 1 版。前言、导论、十八章、结语与附录的正文实计 196,607 个汉字，合约 19.7 万字；章题、节题、表格不计入。

书稿的形成经过：阳涌原稿《标准如何生成数学》经创新智商评估与边缘观点的九宫透镜涌现后改题；2026 年 11 月 2 日，王德生口述新母题——数学标准的典范重生，从统一性到同一性谱系——并定下 E2 三元素、三化、意义三律的亏缺与丰满、技术性异化、三模态谱系与伞模型等承重命题；据此定出五编十八章大纲，由十个 AI 写手并行执笔，经两轮统稿与三审成书。

本版的边界：全书没有实测数据；退化极限的一般情形是猜想；圆柱模型的形态与判决预测的数值阈值待作者核定。

本书同时是一个出版单元：全文阅读（在线翻页、全文网页、PDF 与 Word）、学习包、专属智能体的问对。三者入口见书籍详情页。勘误与意见，请在书籍详情页留言。

核 心 问 题

统一性，是谱系
在 r→0 处的退化端。

——本书结语

数学在信息之中，是特征纠缠的场：连接、次序、结构。数学的作用是对它们做三化——标准化、简化、优化。标准化使文明的组织与连接成为可能；问题不在要不要标准化，而在以什么方式标准化。

两千年来，数学以统一性去标准化：谁用都一样，差异只叫错误或例外。它禁止混沌碰撞、尽量减少纠缠，意义三律因此亏缺运行；走出数学，它为可替换性提供了度量，人成为社会大机器上的零件。今天数学界以为的出路——多元、分层、多宇宙——仍是统一性，只是换成了复数。

典范重生，是以同一性谱系去标准化：差异不被消除，而被安排为谱系中的位置。伞模型是它的数学形态——一个 3 可以是点，也可以是伞；点只是谱系退化的一端。视觉、听觉、触觉三种数学，在谱系上各有其位。

全书导论、五编十八章、结语与附录；第十八章写明五条判决预测与撤回条件。研究性学术专著：核心命题由王德生口述提出，阳涌著，正文由 AI（Claude）协作撰写，经三审与统稿；无实测数据，无独立学术评审。

从消除差异，到安排差异。

德麦国际出版社 · Demai International Press
德麦国际专著第 554 号 · 前言、导论、五编十八章、结语、附录 · 约 20 万字
ISBN 979-8-90690-559-8 · 定价 US$20.00

ISBN 979-8-90690-559-8
9 798906 905598