

SDE 数学解构导论

显露·差异·纠缠：数学对象如何被决定，新结构如何发生

王德生

德麦国际出版社

SDE 数学解构导论

显露·差异·纠缠

数学对象如何被决定，新结构如何发生

王德生 著

德麦国际出版社

版权页

书名	SDE 数学解构导论
副题	显露·差异·纠缠：数学对象如何 被决定，新结构如何发生
著者	王德生
出版	德麦国际出版社 (Demai International Press)
地址	新加坡 Singapore
版次	第一版 2026 年 8 月
开本	210 × 297 mm (A4)
字数	约 5.9 万汉字
专著编号	德麦国际专著 第 70 号
ISBN	979-8-90690-000-5
定价	US\$ 50.00

版权声明

版权所有。未经出版者书面许可，不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

Copyright © 2026 Desheng Wang. All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means without the prior written permission of the publisher.

人机协作声明

本书由王德生构思、定题、判断与定稿。写作过程中使用了大型语言模型作为协作工具，用于文稿组织、论证展开、数值验算与文献著录的辅助。

以下三件事由作者承担，不由工具承担：**全书的判断**（哪一条命题成立、成立到什么程度）、**全书的边界**（第四十五章逐编总账中每一条“这不是本书的增量”）、**全书的错误**。

书中所有承重数值均经过至少两次互不依赖的验算，方式在正文中逐条写明（第二十六章的退化定理常数由解析乘子与对偶蒙特卡罗两法各算一次，即其例）。

关于本书的引用

参考文献采用三级分级逐条标出：**【一】**级为本次核实到卷、期、起讫页码或 DOI，可直接引用；**【二】**级为标准著录；**【三】**级为页码或版本待核，引用前请自行复核。分级表见书末。

作者恳请读者：**引用【三】级条目前先自行复核**。一本把自己的不确定处写在明处的书，才值得被引用。

目 录

前言

第一编 缺口：终态定义藏起了什么

第一章 圆：一个最熟悉的对象，和它藏起来的两样东西

第二章 一个反例对：同一个极限点集，两个长度

第三章 四种变法：把前两章排成一张表

第四章 七条链：从数数到概率统计

第五章 哥德尔：数学能否彻底自我封闭

第六章 什么在发生，什么不在

第七章 本编所用的 S、D、E 与它们被略去的部分

第二编 决定定理：数学对象的显露态由什么定

第八章 先设防：一个不设防的命题必然空转

第九章 决定定理

第十章 $\sin(x)$ ：四条路径，同一个显露态

第十一章 特征归属表

第十二章 两个变量都不可省

第十三章 四条硬边界

第十四章 这一编在范畴论之外做了什么

第三编 三通道：一个新的数学结构从哪里来

第十五章 问题：一个新的数学结构从哪里来

第十六章 通道一：压缩——旧路径的代价超过阈值

第十七章 压缩的代价：一条可检验命题

第十八章 通道二：目标发生——一个此前不存在的问题

第十九章 通道三：扩张——某一族算子不封闭

第二十章 三通道定理及其两条边界

第二十一章 这一编能被怎样推翻

第四编 构造：相容性公理与伞模型

第二十二章 一条从未被写下来的公理

第二十三章 相容性公理的陈述，与它失效的三个现场

第二十四章 伞：定义与伞场

第二十五章 共振算子

第二十六章 退化定理

第二十七章 退化中丢失的：体积量与跳变量的分道

第二十八章 这一编能被怎样推翻

第五编 九十年数学典范的发生迁移

第二十九章 这一编怎么读：一张三选一的表

第三十章 1936–1954：让不存在的对象获得身份

- 第三十一章 1958–1962：同一个显露，不同的环境
- 第三十二章 1966：一届四人，三条通道同时在场
- 第三十三章 1970–1974：从对象到结构，再到模空间
- 第三十四章 1978–1982：环境成为主战场
- 第三十五章 1986–1990：同一个拓扑，两种刚性
- 第三十六章 1994–1998：紧致性、集中与新的极限对象
- 第三十七章 2002–2010：把猜想换成一个有限对象
- 第三十八章 2014–2022：随机、稳定性与最优
- 第三十九章 2026：最近的一届
- 第四十章 九十年的账：通道分布与三条读法

第六编 边界与未决

- 第四十一章 六条路径：建模的起手位
- 第四十二章 起点选错的代价
- 第四十三章 研究规范：本书要求一份工作满足什么
- 第四十四章 十个可检验的问题
- 第四十五章 本书的自我限定：逐编总账
- 第四十六章 未尽的战场

参考文献

前言

一、这本书要补的那一句

数学教材有一个几乎不被察觉的习惯：把对象写成它最后的样子。

圆是到定点距离相等的点集，函数是满足单值条件的对应，群是带一个结合运算与逆元的集合。这些写法极其成功——它们让逻辑依赖排成一条可以逐级验证的链，让不同的人对同一个对象说同一件事。

代价是两样东西被写没了：**这个对象是怎样被生成、被逼近、被测量的，以及这一切在什么度量、什么拓扑、什么公理下才成立**。本书把前者叫做差异路径 D ，把后者叫做纠缠系统 E ，把对象被看见、被维持、被识别的那个样子叫做显露态 S 。

三个字母本身不重要。重要的是它们所标记的那句话能不能被证明、能不能为假：

数学对象的显露态，其每一条同构不变特征，都是差异路径与纠缠系统这一对共同给出的；而这一对本身也在发生，发生走有限条通道。

本书用六编来处理这句话。

二、六编做什么

第一编（缺口） 不给答案，只把缺口挖开。第一章用圆的周长说明：换一条逼近路径，有限阶段的结果就不同；换一个曲率环境，连 $2\pi r$ 都不再成立；而若环境给得太弱，同一列图形可以既在面积上收敛到圆，又让周长跑到无穷。第二章把这些例子排成一张四格表，并补上通俗叙述里一直空着的那一格——**若不补它，一个敌意读者可以一句话推翻全部论证**。第三、四章换一个方向挖同一个缺口：七条概念发生链，从数数到对数，从分数到概率。第五、六章划两条边界。第七章交代本书的适用范围。

第二编（定理） 给命题。先设三条防——不设防，"S 由 D 与 E 决定"自动为真且毫无内容；再给出决定定理与它的三行证明；再用函数 $\sin(x)$ 把定理跑到底：四条互不相干的生成路径、一张逐条归属的特征表、五个可以一页纸算完的反例；最后交出四条硬边界。

第三编（三通道） 处理"新的 (D, E) 从哪里来"。答案是一张带三条可判错签名的通道表：压缩、目标发生、扩张。本编纠正了一处流行的归属（分数不走压缩通道），并指出一年级学的负数与代数 K 理论的 K_0 服从同一条泛性质。

第四编（构造） 是全书唯一"立"的一编。它接住姊妹卷第 53 号已经命名的相容性公理，用伞与共振算子替代它，交出一条带条件、带常数、带收敛率的退化定理，并把这条定理反过来当诊断：**在 $r \rightarrow 0$ 中被抹去的一切，经典表述结构性地看不见**。

第五编（史证） 用三条通道读九十年的菲尔兹奖。本编的最大发现不是分类成功，而是分类**在某几格判不出来**——由此把第三编那个开放问题从一个孤例推进到六个样本。

第六编（边界） 交出七条研究规范、十个可检验问题，以及一份逐编总账，写明本书声称了什么、哪些不是本书的增量、每一编最脆弱的一环在哪里。

三、三句写在最前面的话

其一，本书最重要的两条定理都不是新数学。 第二编的决定定理是泛性质的唯一性论证，是范畴论一百年来的标准工作方式；第四编的退化定理是非局部算子向局部算子的收敛，在非局部向量微积分、peridynamics、图 Laplacian 收敛三支文献里都是标准结果。本书重新给出它们的完整证明，是为了让常数与边界对读者透明，不是为了宣称首创。

其二，本书的增量集中在三处：把特征逐条归属给 D 或 E，并预言换 E 之后哪一条会翻面；把新结构的发生分成三条各带可判错签名的通道；给那条从未被写下来的相容性公理命名，并把退化定理反过来当诊断。

其三，这三处增量的层级都不是最高——归属只做完一半，通道的穷尽性未证，SDE 数尚未良定。三处都写进了第四十四章的问题清单。

四、怎么读

想快的读者可以只读第二编与第四编：一条定理、一条诊断，是本书全部可以直接拿去用的东西。

想知道它们在补什么的读者，请从第一编第二章那张四格表读起。

想反驳本书的读者，请直接翻到第四十五章的逐编总账与第四十四章的十个问题——本书为此留下了二十余条失败标准与两组任何人可以在一页纸上复算的证书。

一本书能给出的最诚实的东西，是让人有办法证明它错了。

第一编 缺口：终态定义藏起了什么

编首语

本编不给答案，只把缺口挖开。

数学教材有一个几乎不被察觉的习惯：把对象写成它最后的样子。圆是到定点距离相等的点集，函数是满足单值条件的对应，群是带一个结合运算与逆元的集合。这些写法极其成功——它们让逻辑依赖排成一条可以逐级验证的链，让不同的人对同一个对象说同一件事。

代价是两样东西被写没了：**这个对象是怎样被生成、被测量、被逼近的（差异路径 D），以及这一切在什么度量、什么拓扑、什么公理下才成立（纠缠系统 E）。**

被写没了不等于不起作用。第一章会用最熟悉的圆说明：换一条逼近路径，有限阶段的周长就不同；换一个曲率环境，连 $2\pi r$ 都不再成立；而若环境给得太弱，同一列图形可以既在面积上收敛到圆，又让周长跑到无穷。三件事各自都是标准数学，教材里都有；把它们并排放，缺口就露出来了。

第二章把这些例子排成一张表。表只有四格，按“D 变没变、E 变没变、S 变没变”分。四格中有一格在既有的通俗叙述里始终空着，而**那一格恰好是全部论证的承重点——**不补上它，一个敌意读者可以一句话把前面全部推倒。第二章补它。

第三、四章换一个方向挖同一个缺口：不看单个对象，看整条链。从数数到加法、到乘法、到幂与对数，从整数到分数、小数、负数，从长度到面积、体积，从计算到方

程、函数、微积分，最后到概率与统计。七条链有同一个形状，而教材把每一条都写成“现在我们定义……”。

第五、六章处理边界：哥德尔告诉我们形式系统够不到什么，而本书第六章要问的是形式系统本身是被什么发生出来的。第七章交代本编所用的 S、D、E 各是哪一层，以及被略去的是哪几层——这一节是为了防止读者把一本导论的入口当成整个体系。

全编只做一件事：**把缺口挖到足够清楚，使读者在读第二编第一页时，知道那条定理是在补什么。**

第一章 圆：一个最熟悉的对象，和它藏起来的两样东西

一、一个公式背后的三层

在欧氏平面上，半径 r 、圆心 O 的圆定义为 $C = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - O| = r\}$ ，周长写作 $2\pi r$ ，面积写作 πr^2 。

课堂上这两个公式常被当作圆本身的属性：点集一经给出，周长与面积便已经完整地附着其上。可是只要追问几句，这个印象就撑不住：

“距离”从哪里来？点集只说明哪些点属于圆，它本身没有说任何两点之间有多远。

“沿边界走一圈”是什么意思？点集没有次序，走这个动作不在点集里。无穷多个点怎么会有一个有限的长度？用折线逼近、用弧长积分、用滚轮测量，为什么会得到同一个数？

四个问句指向同一件事：周长这个数不是从点集里读出来的，它至少需要三层。

S：圆周作为可指认的显露——哪些点在上面。**D：**分割、逼近、求和、取极限——沿它走的那套动作。**E：**距离、角度、测地线、收敛规则——什么使这些动作有意义。

本书不主张 $2\pi r$ 是错的，恰恰相反：本书要求把这条结论成立所依赖的三层**同时写出来**，它才是一个完整的数学命题。

二、内接与外切：路径变了，有限阶段的答案就变了

在圆内作正 n 边形，每边是一条弦，对应圆心角 $2\pi/n$ ，边长 $2r \cdot \sin(\pi/n)$ ，故内接正 n 边形周长

$$P^-(n) = 2nr \cdot \sin(\pi/n).$$

弦短于所对的弧，故对每个有限 n 都有 $P^-(n) < 2\pi r$ 。

在圆外作正 n 边形，使每边与圆相切，由直角三角形得每边长 $2r \cdot \tan(\pi/n)$ ，故

$$P^+(n) = 2nr \cdot \tan(\pi/n) > 2\pi r.$$

于是有经典夹逼 $2nr \cdot \sin(\pi/n) < 2\pi r < 2nr \cdot \tan(\pi/n)$ 。

这里静态点集 S 没有变，欧氏平面 E 没有变，变的只有 D ：一条从内部以弦逼近，一条从外部以切线逼近。**有限阶段显露出的“周长”并不相同**，只有 $n \rightarrow \infty$ 时两条路径才共同收敛到 $2\pi r$ 。

请记住这一格的形状——**D 变了，E 没变，最终的 S 没变**。第二章会给它一个编号。

三、锯齿：面积像了，周长可以差到无穷

如果一系列多边形的面积越来越接近圆的面积，它们的周长是否也越来越接近圆周长？

不是。

取多边形 $P(n)$ 并只要求对称差的面积趋于零， $|P(n) \triangle B_r| \rightarrow 0$ 。这意味着 $P(n)$ 与圆盘不一致的区域面积趋于零，从面积看它们确实越来越像圆。但这个条件对边界怎样接近圆周**一个字都没说**。

于是可以造出第三条路径：在接近圆周的边界上加入越来越细的小锯齿。每个锯齿高度足够小，增加的总面积趋于零；但锯齿的两条斜边之和大于它所替代的那段短弦，所以周长趋于某个 $L > 2\pi r$ 。还可以造第四条：让锯齿数量增长得更快，面积误差仍趋于零，而周长趋于无穷。

同一个面积极限、同一个欧氏平面，对应完全不同的边界路径，产生 $2\pi r$ 、某个更大的有限数、乃至 $+\infty$ 三种周长。

这个例子最要紧的一点是：**它不是说 D 在捣乱，而是说 E 给弱了**。面积拓扑太弱，它控制区域占据多少平面，不控制边界怎样振荡。要让周长收敛，必须把凸性、Hausdorff 收敛、边界总变差或更强的几何测度条件**加进 E**。

用一句通俗话说：两块地的面积几乎一样，不表示围栏的长度也几乎一样。

这个例子值得单独用一整章推到底，理由不在于它有趣，在于它**几乎逼到了极限**：锯齿不只在面积上像圆，它在**点集**这一层与圆的极限完全相同——不是相似，是同一个集合，一个点都不差。一个反例若只是“不够像”，补一补就没了；一个反例若已经“像到不能再像”而结论仍然不对，那它指出的就不是精度问题，是**表述缺了一层**。下一章处理它。

四、合格路径：客观性不是没有路径，是一类路径同结算

既然不同 D 可以给出不同周长，周长是不是任意的？

不是。严格数学的任务正是分开“合格路径”与“不合格路径”。对一条可求长曲线 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ，取分割 $a = t_0 < t_1 < \dots < t(n) = b$ ，折线长度

$$L_P(\gamma) = \sum |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|, \quad L(\gamma) = \sup \text{ over } P \text{ of } L_P(\gamma).$$

若 γ 分段 C^1 ，则可证 $L(\gamma) = \int |\gamma'(t)| dt$ 。折线逼近与微分积分是两种不同的 D ，但在欧氏度量、连续性与可求长条件组成的 E 中，它们给出同一个值。

于是更准确的说法不是“长度由 S 单独决定”，而是：

长度是 S 在 E 中对一类被许可的 D 保持不变的量。

这句话是本书对“客观性”的处理方式：SDE 不削弱客观性，它解释客观性怎样发生——许多路径彼此有差异，而环境把其中一类组织成等价类，并保证它们结算一致。锯齿路径不在这个等价类里，因为 E 中的可求长条件把它排除了。

五、曲线比圆更清楚：参数化与它的等价类

圆的对称性太高，容易让人以为长度是形状天然携带的数字。一般曲线更清楚。

曲线写成 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ，弧长 $L = \int \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$ 。公式里出现的参数、速度、导数，全部属于发生路径：没有参数沿曲线运行，没有局部位移的累积，就没有弧长积分。

同一条几何曲线可以有不同参数化。若 $t = \phi(s)$ 是保向的光滑单调变换，则 $\gamma \circ \phi$ 与 γ 的速度不同，而弧长不变。这说明真正相关的不是某一个裸参数，而是**参数化在 E 中的等价类**：环境规定哪些重新参数化被视为同一条几何路径，并保证积分在变量替换下不变。

六、曲率：连“直”都要注明在哪里量

长度已经需要 D ，曲率更明显。平面光滑曲线的曲率

$$\kappa = |x'y'' - y'x''| / (x'^2 + y'^2)^{3/2}$$

公式里出现一阶与二阶导数，说明曲率描述的不是一个孤立点，而是方向沿路径如何变化。只给一堆无序的点，曲率无法定义。

但曲率也不只依赖 D 。把同一条曲线放进不同的度量环境，切向量长度、角度、联络与测地曲率都会变。欧氏平面里的直线曲率为零；球面上的大圆作为球面内的测地线，其内蕴测地曲率为零，而从三维欧氏空间看它又有非零的外在曲率。

同一条曲线，同一个“直不直”的问题，在两个环境里有两个正确答案。所以曲率必须注明：在哪个 E 中、沿哪种 D 、量的是哪一种曲率。

七、球面圆与双曲圆：换一个环境， $2\pi r$ 不再成立

传统定义说圆是到定点距离相等的点集。这里最容易被略过的词不是“点集”，是“距离”——距离不由点集提供，它由度量环境决定。写完整：在度量空间 (M, d) 中，以 p 为心、 ρ 为半径的圆是 $\{x \in M : d(x, p) = \rho\}$ 。E 一变， d 一变，圆就变。

欧氏平面（曲率 $K = 0$ ）： $L_0(\rho) = 2\pi\rho$ ，面积 $A_0(\rho) = \pi\rho^2$ 。

半径 R 的球面（ $K = 1/R^2 > 0$ ）：测地半径 ρ 的圆周长

$$L_+(\rho) = 2\pi R \cdot \sin(\rho/R), \quad \text{面积 } A_+(\rho) = 2\pi R^2[1 - \cos(\rho/R)].$$

因 $\sin u < u$ ，故 $0 < \rho < \pi R$ 时 $L_+(\rho) < 2\pi\rho$ 。更有意思的是： ρ 从 0 增到 $\pi R/2$ 时圆周增到最大的大圆；继续增大，圆周反而缩小，最终在对跖点趋于零。“**半径越大周长越长**”这条直觉在球面上不成立。

常负曲率双曲平面（ $K = -1/R^2$ ）：

$$L_-(\rho) = 2\pi R \cdot \sinh(\rho/R), \quad \text{面积 } A_-(\rho) = 2\pi R^2[\cosh(\rho/R) - 1].$$

因 $\sinh u > u$ ，故 $L_-(\rho) > 2\pi\rho$ 。

三者合起来：对同一个 ρ ， $L_+(\rho) < L_0(\rho) < L_-(\rho)$ 。三种圆都满足“到中心的测地距离等于 ρ ”，而圆周的增长规律完全不同。

请记住这一格的形状——**D 没变（都是测地扩张与测地测量），E 变了，S 的特征翻面。**

八、小圆反推曲率：显露反过来指认环境

环境生成圆，而圆的精细特征又能反过来显露环境。二维黎曼流形上，圆心附近高斯曲率为 K 时，小测地圆有展开

$$L(\rho) = 2\pi\rho [1 - K\rho^2/6 + O(\rho^4)], \quad A(\rho) = \pi\rho^2 [1 - K\rho^2/12 + O(\rho^4)].$$

$K > 0$ 时小圆周与面积略小于欧氏值， $K < 0$ 时略大。于是测量小圆周偏离 $2\pi\rho$ 的程度，就可以估计局部曲率。

这形成一个闭环：环境先决定圆周，圆周的偏差又让环境显露出来。三方方程在这里有一个可以直接看见的实例—— $S = F(D, E)$ ：周长由测地路径与度量生成； $D = G(S, E)$ ：目标圆与环境决定应沿哪种测地路径去量； $E = H(S, D)$ ：由圆周、面积与测地三角形的观测反推环境曲率。

九、 π ：一个常数，和它成立的条件

π 常被定义为欧氏圆周长与直径之比。这个看似静态的比例背后有一串条件：周长必须可定义；直径依赖欧氏距离；必须证明不同半径的圆有相同的周长直径比；还必须证明不同测量路径给出同一结果。 π 之所以是常数，是因为欧氏环境的相似变换把所有大小的圆组织进同一结构，并使长度按同一比例缩放。

在球面上，测地圆周长除以测地直径 2ρ 得到 $\pi R \cdot \sin(\rho/R)/\rho$ ，它随 ρ 变化，并不恒等于 π ；双曲平面上相应的比值大于 π 且随半径变化。

这不是 π 失效，而是说明“圆周与直径之比恒定”是**欧氏环境的一条特征**。环境的曲率正是通过这个比值显露出来的。SDE 分析不把 π 相对化，它把“何时出现 π 、为什么稳定地出现 π ”说完整。

十、变的是命题，不是真值

上一节容易被误读，必须当场堵住。

有人会说：既然球面上圆周长不是 $2\pi\rho$ ，那“圆周长等于 $2\pi r$ ”这个**真值**岂不是随环境而变？若真值也随环境变，数学还剩什么？

变的不是真值，是命题。

“在欧氏平面中，圆周长等于 $2\pi r$ ”与“在半径 R 的球面上，测地半径 ρ 的圆周长等于 $2\pi R \cdot \sin(\rho/R)$ ”是**两个不同的命题**，各自的真值不随任何人的显露、路径或纠缠而改变。换 E 换掉的不是答案，是**你在问哪一句**。

这条界线本书将反复使用，第六章会单独处理它，第三编第十八章会给它一个更精确的形式。此处先立在这里，因为它是本编与相对主义之间那道墙。**发生的是提问装置，不发生的是装置指向的那个真值**。

十一、本章的三个结论

其一，静态显露不足以独立承载全部几何性质。 无序点集不能自动给出长度、方向与曲率；即使区域面积收敛，也不保证边界周长收敛。

其二， D 不是可以事后删除的计算步骤。 内接、外切、折线细化、参数化、积分、锯齿振荡都是对象怎样被生成与被测量的差异序列。不同 D 在有限阶段给出不同显露，在弱环境中甚至保留不同极限。

其三， E 不是背景。 欧氏、球面、双曲通过不同度量定义不同距离，从而生成不同的圆；环境还规定哪些 D 合格、哪种收敛足够强、哪些参数化算作同一条曲线。

因此本章的核心句是：

圆的周长不是圆这个静态显露自动吐出的数字，而是圆在某一度量环境中，经一类合格测量路径形成的稳定显露。

十二、点集定得出长度，支撑不住逼近

本章反复说“点集不够”，这句话必须说准，否则会伤及一个本来没有毛病的定义。

$C = \{x : |x - O| = r\}$ 这个定义没有毛病。从它出发，圆的长度是良定的：一维 Hausdorff 测度 $\mathcal{H}^1(C) = 2\pi r$ ，它完全由点集决定。**点集决定了圆自己的长度**。

失效的是另一件事： $\mathcal{H}^1$ 在点集自带的那种收敛（Hausdorff 距离）之下不连续。

于是定义与计算分家：**定义**圆的长度，点集够—— $\mathcal{H}^1(C) = 2\pi r$ ；**计算**圆的长度，点集不够——计算必经逼近，而逼近在点集这一层不受控。而长度几乎从来不是“读”出来的，是**算**出来的：多边形、弧长积分、数值求积、网格离散，全是逼近。

一个定义若不能支撑通往它的路径，它就只是一个名字。

[记号纪律.] 本书**不**把数学对象写成 $H(S, D, E)$ 一类的合成式。对象不是三样东西拼成的，对象是“在 E 中，经 D ，成 S ”这一次发生稳定下来的结晶，而 S 是它的显露，不是它的一个零件。把互生写成合成，等于把“对象先在、只等被组装”的旧句法偷偷放回来。需要逐项检查时，本书使用记账式表示 $\mathcal{O} = (S, \mathcal{D}, E, \sim E)$ （第三编与第二编各有用法），并始终声明**那是一张账目，不是一个构成成分表**。函数名 F, G, H 只用于三方程 $S = F(D, E)$ 、 $D = G(S, E)$ 、 $E = H(S, D)$ ，不挪作他用。

第二章 一个反例对：同一个极限点集，两个长度

本章要做的事：把第一章第二、三节那两条路径推到底，直到得出三条可以为假的命题。全章的数字都可以在一页纸上复算，半径 $r = 1$ ，直径 $d = 2$ 。

一、把两条路径摆在一起

同一个圆，同一个欧氏平面。两条逼近路径：

路径一 · 从里面。 内接正 n 边形，顶点全在圆上。

路径二 · 从外面。 外切正方形，反复把每个凸角折进去顶到圆上。

两条都在计算同一个圆的周长。结果：

	周长	周长 ÷ 直径
路径一， $n \rightarrow \infty$	$2\pi = 6.283185$	3.1415926
路径二，任意层	8.000000	4

差 1.716815，相对差 27.32 %。

二、路径一：为什么收敛到 2π

内接正 n 边形每边是一条弦，对应圆心角 $2\pi/n$ ，边长 $2r \cdot \sin(\pi/n)$ ，故周长

$$P(n) = 2n \cdot \sin(\pi/n).$$

n	周长	÷ 直径
6	6.0000000	3.0000000
24	6.2652572	3.1326286
96	6.2820639	3.1410320
1 000	6.2831750	3.1415875
$\rightarrow \infty$	6.2831853	3.1415926

$n = 96$ 是阿基米德做到的那一步。

三、路径二：为什么恒等于 8

折角操作是这样的：在第一象限取角度分点，每两个相邻分点之间，锯齿先沿竖直方向走，再沿水平方向走，接到下一个分点。折一次，分点加密一倍。

关键在于这个操作对什么量不变。

绕圆一周，锯齿的**全部水平位移之和**恒为 4（每象限 1），**全部竖直位移之和**恒为 4。而锯齿的长度就是这两个总和相加，因为它每一步只走水平或竖直。

折角只是把一段水平和一段竖直换个次序。两个总和都没变。所以周长与折了多少次无关，恒为 8。

这一段不需要任何计算，只需要看清“折角是重排，不是缩短”。

四、同一个 8，另一条算法

上一节的论证是组合的。同一个结果可以由积分给出，而且这条算法会直接引出本章的诊断。

在圆上取参数 ϕ ，切向为 $(-\sin \phi, \cos \phi)$ 。锯齿在该处把弧元 ds 拆成两段：

- 竖直段，长 $|\cos \phi| \cdot ds$
- 水平段，长 $|\sin \phi| \cdot ds$

（ $\phi = 0$ 时圆在 $(1, 0)$ 处正朝上运动，故此处全是竖直段——竖直段对应 $|\cos \phi|$ ，不是 $|\sin \phi|$ 。这一处极易记反。）

于是锯齿的总长

$$\int [0, 2\pi] (|\cos \phi| + |\sin \phi|) d\phi = 4 + 4 = 8,$$

而圆的总长

$$\int [0, 2\pi] 1 d\phi = 2\pi = \mathbf{6.283185}.$$

两个积分都可以一行算完： $|\sin|$ 与 $|\cos|$ 在一个周期上的积分各等于 4。

所以 8 不是误差。它是同一条曲线在 ℓ^1 度量下的准确长度。顺带得到一个副产品：在出租车几何里， π 恰好等于 4。

五、锯齿确实在收敛——而且三层里有两层收敛得很好

若锯齿只是“不够像”，这一切就没有意思。它非常像。

面积层。锯齿包围的面积 $\rightarrow \pi$ ：

层数 k	段数	包围面积	与 π 之差
2	32	3.45929219	3.177×10^{-1}
6	512	3.16582218	2.423×10^{-2}
10	8 192	3.14312540	1.533×10^{-3}

点集层。锯齿到圆的 Hausdorff 距离 $\rightarrow 0$ ：

层数 k / 边数 n	锯齿 d_H	内接正 n 边形 d_H
6 / 64	1.219×10^{-2}	1.205×10^{-3}
10 / 1 024	7.667×10^{-4}	4.706×10^{-6}
12 / 4 096	1.917×10^{-4}	2.941×10^{-7}

而在这全部过程中，锯齿的周长一个数位都没有动：第 12 层仍是 8.0000000000。

六、点集这一层：两个极限是同一个集合

上表的左右两列都趋于零。于是：

两条序列的 Hausdorff 极限，都恰好是单位圆 $\{x : |x| = 1\}$ 。

不是“几乎相同”，不是“相差一个零测集”，是同一个集合。

这一句是全章的支点。它把这对反例从“一个有趣的现象”提升为一条逻辑：

若“沿逼近序列读出的长度”只由极限点集决定，那么两条序列必须给出同一个数。它们给出 2π 与 8。故它不是极限点集的函数。 ■

七、Golab 定理：点集这一层只给一个不等号

点集层并非什么都不给，它给一个不等号，而且是一条经典定理：

Golab 半连续定理. 若紧连通集列 K_n 在 Hausdorff 距离下收敛到 K ，则 $\mathcal{H}^1(K) \leq \liminf \mathcal{H}^1(K_n)$ 。

代入本例：

$2\pi = 6.283185 \leq 8 \checkmark$

不等号严格成立，一点矛盾都没有。**你要的等号从来没有被承诺过。**

面积层给的是同一个形状的东西：集合的 L^1 收敛下，面积连续 ($|E_n| \rightarrow |E|$)，而周长只下半连续。**两层都只给不等号。**

八、切向这一层：分道就在这里

前两层看不出差别。差别在第三层。

其一，切向不收敛，而且差距有一个与层数无关的下界。

锯齿的切向永远只有水平与竖直两种取值，圆的切向连续地扫过一整段角度。二者的距离：

$$\sup \| t(\text{锯齿}) - t(\text{圆}) \| \geq 0.765367,$$

在 $\phi \approx \pi/4$ 处取到，**对一切层数 k 成立**。层数翻到多少都不动。

所以锯齿在切向那一层根本不是柯西列。**它不是被一条规则筛掉的，它压根不在那个空间里。**

其二，切向也不是乱跑——它以测度收敛。

在每个 ϕ 处，极限不是一个切向，而是一个切向的**分布**：

ϕ	竖直段占比	水平段占比	极限速度 $ \cos \phi + \sin \phi $
0	1.0000	0.0000	1.000000
$\pi/6$	0.6340	0.3660	1.366025
$\pi/4$	0.5000	0.5000	1.414214
$\pi/3$	0.3660	0.6340	1.366025
$\pi/2$	0.0000	1.0000	1.000000

竖直段占比 = $|\cos \phi| \div (|\cos \phi| + |\sin \phi|)$ 。

这正是“相邻两段怎么接”这件事在极限处的样子：**接成竖直还是水平，不再有唯一答案，只剩一个比例。**

这类对象在文献里有名字：**参数化测度**，通称 **Young 测度**——专为“振荡在强拓扑下没有极限”而造。

九、极限不是圆

于是本章那句要紧的话：

在切向有定义的那个空间里，锯齿的极限不是圆。

极限是「圆 + 一层切向振荡」这个复合对象。而这个对象的长度，正是

$$\int [0, 2\pi] (|\cos \phi| + |\sin \phi|) d\phi = 8。$$

验算：按圆的参数 ϕ 度量，锯齿在任意子区间上的长度，精确等于新速度的积分。

区间	锯齿长 (k = 14)	$\int (\cos + \sin)d\phi$	圆弧长
$[0, \pi/4]$	1.00000000	1.00000000	0.78539816
$[\pi/6, \pi/3]$	0.73205081	0.73205081	0.52359878
$[\pi/4, \pi/2]$	1.00000000	1.00000000	0.78539816
$[0, \pi/2]$	2.00000000	2.00000000	1.57079633

不是近似，是逐位相等。 极限对象的速度是 $|\cos \phi| + |\sin \phi|$ ，不是 1。

于是：

从来就没有悖论。 两条序列在“长度有定义”的那个空间里，收敛到两个不同的对象；两个对象有两个不同的长度，各自一分不差。

十、三层对照

全章可以压进一张表：

层	收敛方式	锯齿的极限	内接的极限	相同？	长度泛函
点集	Hausdorff	圆	圆	完全相同	只下半连续 (Golab)
面积	测度 / L^1	圆盘	圆盘	完全相同	只下半连续
切向	参数化测度	圆 + 振荡	圆	不同	连续

前两层看不出任何差别。差别只在第三层才出现。

十一、一个刚性的取舍

把三层并排，会看到一件事，而且它不是技术困难：

想让两条序列有同一个极限，长度就不连续。想让长度连续，两条序列就不再有同一个极限。

二者不可得兼——这是同一件事的两面。

在点集层与面积层，你买到了“同一个极限”，代价是长度只剩一个不等号；在切向层，你买到了“长度连续”，代价是锯齿的极限不再是圆。

这条取舍解释了为什么这个悖论那么难破：人们下意识地同时要两样，而它们是同一枚硬币的两面。

十二、要补的不是条件，是把对象换掉

一个常见的补法是：在点集上加一条筛选规则（凸性、全变差有界、切向收敛），把锯齿排除出去。这个补法有效，但它把事情说小了。

第八节第一条已经指出：锯齿的切向距离有一个与层数无关的下界，**它不是被规则排除的，它根本不在那个空间里**。所以真正发生的不是“加一条条件”，而是：

把对象从「点集」换成「点集 + 每点切向的分布」。

这个对象在几何测度论里也有名字：**varifold**。

- 圆的 varifold：每点一个 Dirac 测度，压在真切向上。质量 = 2π 。
- 锯齿极限的 varifold：**支撑集与圆一模一样**，而每点是第八节那个两点测度。质量 = 8。

同一个支撑集，两个不同的 varifold。

值得注意的是 varifold 当初被造出来的理由，与本章走到这一步的理由完全相同：点集这一层控制不住切向，紧性与下半连续的论证做不下去。第五编第三十章把 Douglas 1936 判为通道三，正是这条线的起点。

十三、本章证明了什么

三条命题，每条都可以为假。

命题 2.1.「沿逼近序列读出的长度」不是极限点集的函数。 *证明*：第六节的构造。两条序列的 Hausdorff 极限是同一个集合，而长度的极限是 2π 与 8。 ■ *失败标准*：证明这两条序列的 Hausdorff 极限不同，或证明其中一条的长度极限不是所报的值。

命题 2.2. 在 Hausdorff 收敛与 L^1 收敛这两层上，长度只下半连续。 *依据*：Golab 定理与周长的下半连续性，本书不重复其证明。本例给出 $2\pi \leq 8$ 。 *失败标准*：举出一列紧连通集，其 Hausdorff 极限的 $\mathcal{H}^1$ 严格大于 $\liminf$ 。

命题 2.3. 存在一个刚性取舍：使两条序列同极限的拓扑，长度必不连续；使长度连续的拓扑，两条序列必不同极限。 *依据*：第十节的三层对照。 *失败标准*：造出一个拓扑，两条序列在其中同极限且长度连续。

十四、本章没有证明什么

四条，必须写在明处，否则本章会被读成比它更强的东西。

其一，本章没有证明点集定义是错的。 $\mathcal{H}^1(\text{圆}) = 2\pi r$ 良定，且完全由点集决定。不良定的是“沿逼近序列读出来的长度”。第一章第十二节已经把这条界线划过一次，这里重申。

其二，本章没有证明锯齿算错了。 它精确地算出了 ℓ^1 长度 8，也精确地算出了它自己那个极限对象的长度 8。

其三，本章没有给出 varifold 的任何定理。 第十二节只是指出这个对象存在并且早有名字；它的紧性理论与下半连续性属于几何测度论，本书不重述。

其四，本章只处理了一个对象。 一条曲线的长度。它是不是一切“低维量在逼近中丢失”的模型，本章没有证。第四编第二十七章会给出一个更一般的形状（体积量与跳变量的分道），而那一条同样只到第二层。

第三章 四种变法：把前两章排成一张表

[本章即第一版第二章，第五、七、八三节据第二章的结果改写。其余各节不动。]

一至四节（不动）

第一节“为什么要排表”、第二节“格 I：路径变了，结果没变”、第三节“格 IV：结果不定，因为环境给弱了”、第四节“只看这两格会得出什么结论”，一字不改。

五、格 II：路径变了，结果真的变了（不动）

三个例子——连点成线、同一点集的不同三角剖分、Lloyd 算子与 Delaunay 翻转不可交换——保留原样。它们是挡住第四节那个反驳的地方。

六、格 III：环境变了，特征翻面（增补）

原有的例子保留：平面圆、球面圆、双曲圆；内蕴曲率与外在曲率。

增补一个更强的例子，来自第二章：

环境不必换成另一个几何。只要把同一个欧氏平面上的**对象层级**从点集抬到「点集 + 切向分布」，锯齿序列的极限就从“圆”变成“圆 + 切向振荡”，长度从 2π 变成 8。

这比球面圆那一组更进一步：那里换 E 改变的是**同一个对象的特征值**（周长的公式），这里换 E 改变的是**极限对象本身**——不再是同一个对象的另一个值，而是另一个对象。

七、四格表（改判）

格	D	E	结果 S	本例
I	变	不变	S 不变	内接与外切正多边形，都收敛到 2π
II	变	不变	S 变	连点成线；不同三角剖分；Lloyd 与翻转不交换
III	不变	变	S 换成另一个对象	换到切向有定义的空间：锯齿的极限不再是圆
IV	变	给弱了	S 不唯一	只要求位置收敛：长度可以是 2π 、8，甚至 ∞

改判说明。第一版把圆周长这个例子挂在格 IV。现改挂格 III，格 IV 保留为“旧空间里的看法”。两者的关系是：

格 IV 是在旧空间里看：同一个 S 定不下来。格 III 是在新空间里看：极限根本是两个对象。后者更准——因为第二章第八节证明了锯齿在切向那一层不是柯西列，它不是“定不下来”，它是不在那里。

顺带一提，格 III 现在也需要一次措辞调整：原来写作“特征翻面”，那只覆盖球面圆那一类；现改为“**S 换成另一个对象**”，把两类都装下——特征翻面是它的弱形式，对象更替是它的强形式。

八、缺口的精确形状（改写）

四格表仍然不是定理。但经过第二章之后，缺口的形状比第一版清楚得多，可以写成两句：

第一句（已经知道的）：(D, E) 在起作用，而且第二章给出了一个可复算的反例对——同一个极限点集，两个长度。

第二句（还不知道的）：我们还不能陈述在什么条件下 (D, E) **一定能**定出一个 S，也不能陈述被定出来的是不是唯一，更不能陈述这套说法**在什么情况下会是假的**。

第二编补的正是第二句。它会先设三条防——不设防，“S 由 D 与 E 决定”自动为真且毫无内容；再给出决定定理与它的三行证明；再用函数 $\sin(x)$ 把定理跑到底；最后交出四条硬边界。

读第二编时请带着本章这张表。第二编第十章的四条路径对应格 I，第十一章的五个反例对应格 III 的弱形式，第十二章第一节对应格 II，第十三章的硬边界之三对应格 IV。而格 III 的**强形式**——换 E 之后极限换成另一个对象——在第二编不会再出现，它要到第三编第十九章（扩张选择律）与第四编第二十七章（体积量与跳变量的分道）才被正面处理。

第四章 七条链：从数数到概率统计

一、这一章做什么，不做什么

第一、二章挖的缺口在**一个对象**上：圆的周长。本章与下一章换一个方向，在**一整条链**上挖同一个缺口。

链是这样的：数数、加法、位值制、乘法、幂、对数（本章）；分数、小数、负数、面积、体积、方程、函数、微积分、概率、统计（第四章）。这些是每一个受过基础教育的人都学过的东西，也是教材里被写得最“自然”的东西——每一节都以“现在我们定义”开头，没有一节说明为什么会有这个定义。

本章只做一件事：让读者亲自感到旧办法在什么地方顶不住了。本章不给机制、不给判定条件、不给分类——那些在第三编。这里只制造缺口，第三编收口。若读到某处觉得“这个说法需要一个更精确的形式”，那是对的，请记住它，第三编第十六、十七章会给。

二、数数：最原始的差异路径

数数是最原始的数学 D。它通过一、二、三、四的线性推进，把对象逐一标记。

数数需要的东西比它看上去多得多：被数的对象、对象的边界（什么算一个）、空间排列、眼睛的追踪、手指的指认、声音的输出、已数与未数的区分、注意力的维持、记忆的负荷、数词系统本身。这一整套是数数的纠缠系统 E。

当对象少、排列清楚、需求简单时，数数运行良好。它给得出正确答案，而且代价可以接受。

三、从数数到加法：代价的第一次崩溃

现在改变一件事：出现多个**已经数过**的局部数量，而新的情境要求知道总数。

A 组已数出 5 个，B 组已数出 7 个，C 组已数出 9 个。三组现在放在一起，要知道一共多少。

没有加法，就必须从 1 重新数到 21。这**做得出来**——注意这四个字，第三编会证明它是判定通道的关键——但它产生了严重的冗余：A 组已经数过却被重新数，B 组已经数过却被重新数，C 组同样；已经形成的局部结果被浪费；已经消耗的注意力与记忆被重新消耗。

把规模放大，压力立刻变得不可忽视。十组苹果，各是 103、118、96、121、110、105、99、113、107、120，全部已经分别数过。若仍把它们混在一起重新逐一数，冗余大到几乎不可接受。

加法就发生在这里。它的本质不是“把苹果合起来”——那是表层。它的本质是：

把已经完成的局部结果组织成整体结果，使人不必每次都从 1 开始。

符号“+”因此不是一个运算记号，而是一句判断的结晶：已经形成的局部数量可以共同生成整体数量。

请留意这一次发生的形状：**旧办法没有失败，它只是变得太贵。**这个形状会在本章重复四次。

四、位值制：加法长期运行之后的骨骼

个位、十位、百位表面上是数字的位置，实质上是加法长期运行后形成的层级压缩。十位意味着十个“一”不再作为十个孤立对象出现，而被压缩为一个新单位；百位意味着十个“十”再被压缩一次；千位继续。

356 不是三个数字并列，是三层结构的符号结晶：三个百、五个十、六个一，再由加法连起来。

这里可以做一次代价的对照：用逐一记号记录数量 N ，需要 N 个符号；用位值制，需要大约 $\log N$ 个符号。数量从一百涨到一百万，逐一记号涨一万倍，位值制只从三位涨到七位。

于是教材里那句“3 在百位表示 300”就显得单薄了。更完整的说法是：**百位是十进压缩的产物，是人面对巨大数量时造出来的一台省力装置。**

五、从加法到乘法：不是“重复加法”

传统定义说乘法是重复加法。这个说法只描述了乘法出生前夜的样子，没有说出它为什么出生。

加法出现之后，人获得了组织多个局部数量的能力。但新的压力很快到来：许多数量不是一次性相加，而是大量重复出现；而且往往不是只有一个加数在重复，是一堆不同的加数各自以不同的重复度出现。

一个仓库里，7 个一组的物品重复 40 次，12 个一组的重复 80 次，25 个一组的重复 30 次，9 个一组的重复 100 次。继续用加法，就要写出 $7+7+\cdots$ （40 次）、 $12+12+\cdots$ （80 次）、25 重复 30 次、9 重复 100 次。**这仍然做得出来**，但书写冗余、计算冗余、注意力损耗、时间损耗与错误率一起上升，而且结构信息被淹没在符号的洪水里。

乘法发生在这里。它首先不是“一个数重复若干次”的缩写，而是对“多类加数—不同重复度”这一整个格局的压缩：7 重复 40 次写成 7×40 ，12 重复 80 次写成 12×80 。进一步，这些乘积又可以用加法组织成整体：

$$7 \times 40 + 12 \times 80 + 25 \times 30 + 9 \times 100.$$

这个乘加复合的写法，是代数式、线性组合、统计加权与矩阵运算共同的胚胎。

乘法发生之后，它打开了新的世界。 阵列、面积、比例、单位与次数、速度、单价、密度、效率——这些世界不是本来就摆在那里等着被乘法描述的，它们是乘法与乘法的运行共同展开出来的。这正是 $E = H(S, D)$ 的一个直观实例。

六、从乘法到幂，从幂到对数

链不在乘法处停止。

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ 这样的写法，重复次数少时乘法还承受得住；一旦进入细胞分裂、复利、树状分支、组合爆炸、计算复杂度这些场合，重复乘法自己就成了旧办法。**幂**是乘法面对高度重复乘法时的压缩：把重复乘法折成底数与指数。

幂一出现，指数增长这个世界被打开：复利、人口、传播、分形、信息爆炸都进入了数学表达。同时幂也说明一件事——**任何新结构的胜利都是暂时的**：它解决了旧办法的亏损，而当它自己进入更大的场合时，它也会成为下一个旧办法。

对数是幂世界里的反向压力。幂回答“给定底数与指数求结果”，而现实反复提出反向的问题：2 的多少次方等于 1024？本金按某利率增长多少年翻倍？地震能量的巨大差异怎么比较？声音强度跨越好几个数量级怎么放在一张图上？

对数于是发生。它不是一个难懂的符号，它是幂结构的反向追踪器，是巨大尺度世界的压缩语言。

这里有一个值得记住的细节，第三编会用到：**对数做的事和前面几次不太一样**。加法、乘法、幂都是把长的写短；对数是把一个不好算的运算（乘法）搬进一个它好算的表示（加法）里。前者是缩短，后者是搬家。两件事的机制不同，第三编第十七章会说明为什么它们会先后出现。

七、这条链的形状

把本章的六步并排：

逐一记号 → 位值制 → 加法 → 乘法 → 幂 → 对数

每一步都有同一个形状：

旧办法**仍然做得出来**；随着规模上升，代价（误差、冗余、损耗）增长到不可接受；新结构把它压缩；压缩之后打开新的世界；在新世界里，新结构自己成为下一个旧办法。

这个形状不是本章发明的，它是把教材里六节内容并排之后自己浮出来的。教材把每一节都写成“现在我们定义”，是因为教材按逻辑依赖排序；按发生排序，它们是一条链。

八、留给第三编的两个问题

本章刻意没有回答两个问题，此处明写，以免读者以为本书漏了。

问题一：这个形状是不是新数学结构发生的唯一形状？

本章六步全部符合“做得出来但太贵”。但第四章会给出至少两类不符合的：分数不是“表示得太长”，是在整数里**根本没有** $1/3$ 这个对象；概率也不是确定性方法算得太慢，是不确定这一类现象在旧表述里没有位置。这两类的机制与本章不同，把它们混为一谈会出错。第三编第十九章会做一次具体的纠正。

问题二：压缩是不是免费的？

不是。位值制把计数压短了，代价是加法从此需要进位，而乘法在位值制下变得远比加法复杂——这正是竖式乘法比竖式加法难、而九九表必须被造出来的原因。幂把重复乘法压短了，代价是加法在幂的表示下完全没有化简规则（ a^m 与 a^n 相加无从下手），而这恰恰逼出了对数。

每一次压缩都要付一次利息，而利息就是下一批被发明出来的计算流程。 第三编第十七章会把这条写成一个带失败标准的命题。

本章到此为止。第四章把链继续走完：数系的扩张、空间的升维、变化的表达，以及不确定世界的进入。

上半这条链有一个统一的形状：旧办法仍然做得出来，只是代价不可接受。下半要走的几条链多数不是这个形状——在整数里表示三分之一，不是代价太高，是根本没有这个对象。两种“不够用”在身体感觉上就不一样，下面从最初等的一条开始。

一、这一章的链，和上一章不是同一个形状

第三章那条链有一个统一的形状：旧办法**仍然做得出来**，只是随着规模上升代价不可接受，于是新结构把它压短。把7加四十遍，做得出来；把一百万个东西逐一记号，做得出来。

本章要走的这几条链，多数不是这个形状。

在整数里表示三分之一，**不是代价太高，是根本没有这个对象**。用长度算出一块地的覆盖大小，**不是算得太慢，是长度这个量根本回答不了这个问题**。在确定性的框架里表达“下一次抛硬币的结果”，**不是精度不够，是这一类现象在那个框架里没有位置**。

两种形状看起来都像“旧办法不够用了”，其实是两回事：一种是**贵**，一种是**没有**。既有的通俗发生学叙述常常把后者也写成前者，用“整数面对不可整除时出现亏损”这样的话把它们混过去。本章要做的，就是让读者亲自感到这两种“不够用”在身体感觉上就不一样。

分清它们需要一条判定规则。那条规则不在本编，在第三编第十九章。本章只把差别摆出来。

二、分数：不是太长，是没有

整数系统是一项巨大成就。它以数数、加法、位值制、乘法为骨架，组织了大量数量世界。但它有一件事做不了。

一个蛋糕分给四个人，两个苹果分给三个人，一米绳子分成五段，一小时分成若干部分——这些情境要求表达“整体中的部分”。自然数与整数能说清“有几个”，不能说清“一个整体被等分之后的一份或若干份”。

请注意这里的措辞。不是“能说清但要写很长”，是**说不出来**。你可以把 $1/3$ 的小数展开写到一万位，也没有把它写成一个整数；再写一亿位也不行。这与第三章里“把7加四十遍太麻烦”完全不同——那件事只要有耐心就做得完。

分数于是发生。它不是分子分母的机械符号，是“整体—部分”关系的表达结构：分母说整体被等分成多少份，分子说取其中多少份。分数一出现，等价分数、比例、概率、密度、测量都被打开。

这一条链的形状：不是压缩，是把原本没有的对象造出来。请记住这个差别，第三编会给它一个判定条件——只要问一句“新办法有没有让原本表示不了的东西变得可表示”，两种形状就分开了。

三、小数：一次复合

小数是个有意思的例子，因为它同时属于两种形状。

一方面它是压缩。两个分数比大小或相加，要通分，而通分的代价依赖两个分母的算术关系；改成小数，逐位对齐即可，代价只跟位数有关。这是第三章那条链的延续——把不好算的搬进好算的表示里，和对数那一步同类。

另一方面它是扩张。位值制向个位以下延伸，形成十分位、百分位、千分位，使数量可以向微小差异展开；测量、货币、科学实验对精细度的要求，靠整数与普通分数的既有写法满足不了。

而它又立刻碰到自己的边界： $1/3$ 写成小数是 $0.333\cdots$ ，永远写不完。于是又需要循环节记号；而当循环节也不够用（比如 $\sqrt{2}$ 的小数展开既不终止也不循环），逼出来的就是下一次扩张。

一次发生可以同时属于两种形状。 这一点本章先记下，第三编第二十章会用微积分作为更完整的标本。

四、负数：方向被引进来

自然数能说“有多少”，说不了“欠多少”“低于零多少”“向相反方向移动多少”“海平面以下多少”“温度低于零度多少”。

当世界里出现基准线、方向、亏欠、相反量、上升与下降时，自然数就不够了。这里同样是“没有”而不是“贵”：在自然数里表示“欠三块钱”，不是要写很长，是没有这个对象。

负数使数量围绕零点向两个方向展开，数轴由此发生。债务、温度、位移、高度、一切成对的相反量都被组织进数学。

负数在历史上被抗拒了很久，这件事本身值得注意。若新结构只是“把旧办法写短”，通常不会引起抗拒——没有人反对九九表。引起长期抗拒的，几乎都是把原本没有的对象造出来的那一类：负数、无理数、复数都被抗拒过，而且抗拒的措辞高度相似：“那不是数。”

这条历史观察可以当作一条粗略的旁证：**两种形状连引起的反应都不一样。**

五、面积与体积：长度回答不了覆盖

几何概念也不是外部图形性质的记忆，而是空间不断压迫旧办法的结果。

长度可以表达一维距离。但当人要比桌面、土地、墙面、布料、图形内部的大小时，长度就顶不住了。一张桌子长两米、宽一米，单独知道长不够，单独知道宽也不够——问题不是边界有多长，是**覆盖了多少**。

这里要说清一件容易被公式盖住的事：面积不是“长乘宽”。长乘宽只是面积在规则矩形上的一种算法结晶。面积的本体是二维覆盖的数量表达。

孩子学面积，若从长乘宽开始，就跳过了发生；要从矛盾开始——“这块地要铺多少块瓷砖”“这两个图形的围栏差不多长，里面却明显不一样大”“只知道边长说不出覆盖多少”。只有当长度回答不了覆盖时，面积才真正发生。

第一章第三节其实已经讲过这件事的另一半：面积收敛不能控制周长。那里是一维量控制不了二维量的反向版本，这里是一维量表达不了二维量。两处是同一件事的两面：**维度之间不能互相代替。**

体积则是面积面对三维空间时的再一次升维。面积表达平面覆盖，表达不了容器容量、物体占据的空间。

六、方程：从算已知到组织未知

方程的发生，是数学从“计算已知量”进入“组织未知量”的一次重大转折。

传统教学把方程讲成：设未知数、列等式、移项、求解。这只讲了流程，没有讲方程为什么会出现。

真正的原因是：现实里大量问题并不直接给出所有已知量，而是给出**关系**。一个数不知道，但它与别的数的关系知道；一个价格不知道，但总价与数量知道；一个年龄不知道，但年龄差与年龄和知道。

面对这类情境，直接计算根本**启动不了**——你不知道从哪个数开始算。这仍然是“没有”而不是“贵”：不是算得慢，是没有第一步。

方程让未知量获得一个合法位置。它把看不见的量放进看得见的关系里，用等式保持结构，用变形使未知显现。学生只有亲自经历过“直接算不出来，可是关系明明在那里”，才会真正理解方程为什么必须出现。

七、函数：让变化本身成为对象

方程处理某个未知量，函数处理**一个量如何随另一个量系统地变化**。

水温随时间变，路程随时间变，面积随边长变，价格随数量变，人口随年份变。静态的数量关系表达不了这一类现象——它每次只能给出一个点，而现象是整条曲线。

函数于是发生。它让变化关系本身成为一个对象，使数学从“求某一个值”进入“描述整个关系场”。 $y = f(x)$ 不是一个符号游戏，是变量关系的稳定显露。

这一步值得单独标出，因为它改变的不是表示，是**对象类**：在函数之前，数学的对象是数；在函数之后，数学的对象可以是“一批数之间的对应”。第一章第二十节说过的角色转换在这里第一次大规模出现——一个函数是构造过程的显露，同时又是积分算子的输入环境。

八、微积分：三种压力同时到

微积分是本章最复杂的一次，因为三种压力同时压上来。

第一种，代价。用有限差分求变化率，要达到给定精度需要的步数随精度上升而增长；一次求导给出闭式。这是第三章那条链的形状。

第二种，表达。“某一时刻的速度”在被力学问出来之前，甚至被认为是自相矛盾的——芝诺的飞矢不动说的就是这件事。这不是算不出来，是这个概念当时**没有位置**。

第三种，对象类。差商序列在有理数里不收敛。要让“极限”这个词有指称，数系本身必须先被补全；而 ϵ - δ 与实数的严格构造，比牛顿与莱布尼茨晚了将近两百年。

三种压力同时在场，这解释了微积分为什么难教：**教材通常只用第一种压力的教法（给公式、练计算），而学生卡住的地方往往在第二、三种。**

第三编第二十章会把这一段重写成精确的复合案例。这里只需记住：一次发生可以同时走几条路。

九、概率与统计：不确定这一类现象没有位置

确定性数学处理明确的对象、明确的关系、明确的过程。但世界里大量事件不完全确定：单次抛硬币的结果无法预知，天气有波动，个体差异普遍存在。

确定性框架面对这类现象有一个根本困难：它既不能把世界当成完全混乱（那样什么也说不），也不能把世界当成完全确定（那样与观察不符）。**“不确定但有规律”这一类现象，在确定性表述里没有词。**

概率于是发生，用来表达不确定中的稳定倾向；统计于是发生，用来从个体差异中提取群体结构。

概率不是“可能性大小”的一个数值，统计也不是平均数、中位数、众数的机械计算。它们各自搭了一座桥：概率在单次不确定与长期稳定之间搭桥，统计在个体差异与群体规律之间搭桥。今天的数据科学、机器学习与临床研究，全部建在这两座桥上。

十、两条链并排：一个必须交给第三编的问题

把第三章与本章的十几步并排，会看到至少两种不同的形状：

形状	感觉	例
贵	做得出来，只是代价不可接受	位值制、加法、乘法、幂、对数
没有	根本给不出对象，或根本启动不了	分数、负数、面积、方程、概率

还有第三种，本章见过两次：**复合**——小数与微积分同时属于两种（甚至三种）形状。

现在缺口出来了，而且比第一、二章的缺口更尖锐：

教材把这十几步全部写成同一种（“现在我们定义……”）。通俗的发生学叙述又把它们全部写成另一种同一种（“旧办法太麻烦了”）。**两种写法都不对，而要分清它们，需要一条能判错的规则。**

一条能判错的规则应当长什么样？它至少要能回答：给定一次具体的发生，怎么判它属于哪一种？判错了怎么被人发现？两种形状是不是穷尽了全部可能？

这三问本编一个也答不了。第三编第十五至二十一章逐条回答，并在第十九章上把本章第二节的“分数不是太长而是没有”变成一次正式的归属纠正。

第五章 哥德尔：数学能否彻底自我封闭

一、什么叫“证明”

在日常语言里，证明是“说服”。在数学里不是。

一个形式系统由三样东西给定：一套符号与合式公式的规则；一批被无条件接受的公式，叫公理；一批从已有公式生成新公式的规则，叫推理规则。**在这个系统里，一个证明是一个有限的公式序列，其中每一条要么是公理，要么由前面若干条按推理规则得到，而最后一条就是被证的那个命题。**

这个定义有一个关键性质：**证明是可机械检查的**。给定一串公式，一台机器可以逐条核对每一步是否合法，不需要理解它在说什么。

正是这个性质使二十世纪初的一个纲领看起来可以实现。

二、希尔伯特的问题：数学能否彻底自我封闭

十九世纪末，集合论的悖论动摇了数学的地基。希尔伯特提出的应对方案是：把数学整个形式化，然后用有限的、无争议的手段证明这套形式系统是一致的（不会同时证出一个命题和它的否定），并且是完备的（每个命题要么可证，要么其否定可证）。

如果这个纲领成功，数学就是**彻底自我封闭**的：一切真理都能在系统内部被抵达，一切怀疑都能在系统内部被消除。

1931年，哥德尔证明了它不可能成功。

三、第一不完备定理

定理（哥德尔，1931）. 设 T 是一个形式系统，满足三个条件：（i） T 的公理集是**递归可枚举**的（可以由一台机器逐条列出）；（ii） T 能表示初等算术（足以谈论自然数的加法与乘法）；（iii） T 是**一致**的。则存在一个算术句子 G ，使得 T 既不能证明 G ，也不能证明 G 的否定。

三个条件都是实在的，不是修辞。去掉任何一条，结论都不成立——这一点在第九节会展开。

四、把公式和证明变成整数

哥德尔的第一件工具是**编号**：给每个符号一个数，把公式编码成一个数，把证明（公式的有限序列）也编码成一个数。

这一步的意义远大于技术便利。编码之后，“某某是一个合法证明”这样的**元数学陈述**，变成了关于自然数的一条**算术性质**。于是一个能谈论自然数的系统，就自动能谈论它自己的语法。

系统获得了谈论自己的能力——这正是条件（ii）的真正内容。它不是“系统要足够复杂”这种模糊的话，而是“系统要强到能把自己的语法编码进去”。

五、对角化

第二件工具是对角化。

对角化引理. 对任何一元公式 $\phi(x)$ ，存在句子 σ ，使得 $T \vdash \sigma \leftrightarrow \phi(\ulcorner \sigma \urcorner)$ ，其中 $\ulcorner \sigma \urcorner$ 是 σ 自己的哥德尔数。

换成白话：任何一个“性质”，都能造出一个句子，它恰好说“我具有这个性质”。

把 $\phi(x)$ 取为“ x 在 T 中不可证”，得到句子 G ，它说的是：

我在 T 中不可证。

六、为什么 G 不能被证明，也不能被否定

第一半 ($T \nvdash G$). 假设 T 证明了 G 。 G 说的是“ G 不可证”，而 T 刚刚证明了它——于是 T 证明了一个假的东西。若 T 一致且其可证性谓词忠实，这不可能。故 $T \nvdash G$ 。

第二半 ($T \nvdash \neg G$). 哥德尔原版在这一半用了一个比一致性更强的条件，叫 ω -一致性。1936 年 Rosser 改进了构造（把 G 改成“任何证明我的证明，都有一个更短的证明我的否定的证明”），使得只需**简单一致性**即可。

这一处细节值得写出来，因为通俗叙述几乎都跳过它，而它恰恰是定理精确形式的一部分。

七、“真”与“可证”第一次被严格分开

现在看 G 本身。既然 $T \nvdash G$ ，那么 G 所说的“我在 T 中不可证”——**是对的**。

于是我们站在系统外面，知道 G 为真；而系统内部证不出它。

这是数学史上第一次把“真”与“可证”严格分开。在此之前，两者被默认为同一件事的两种说法。此后，它们是两个概念：真是相对于**模型**（语义）的，可证是相对于**系统**（语法）的。

用本书的语言说： **S （命题的真）与 D （抵达它的证明路径）不是同一样东西，而 E （系统）决定了哪些 D 可用。**

八、第二不完备定理

定理. 在同样条件下，若 T 一致，则 T 不能证明表达“ T 一致”的那个算术句子 $\text{Con}(T)$ 。

推论：一个系统的一致性，只能由更强的系统来证。而更强的系统的一致性，又要更强的系统来证。**没有终点**。

希尔伯特纲领的核心诉求——用系统内部的有限手段确立系统自身的可靠性——至此被否定。

九、五个最常见的误解

误解一：哥德尔证明了数学是不一致的。 不。定理说的是“若一致，则不完备”。一致性不但没有被否定，反而是定理的前提。

误解二：哥德尔证明了有些真理人类永远无法知道。 不。 G 的真我们恰恰知道——第七节就是在系统外面知道的。定理说的是它在那个**特定系统内**不可证。把 G 加进公理，得到的新系统能证 G ；代价是新系统又有新的 G' 。

误解三：任何足够复杂的系统都不完备。 不。条件 (ii) 是“能表示初等算术”，这是一条精确的技术条件，不是“复杂”。有完备且可判定的数学理论：Presburger 算术（只有加法、没有乘法的自然数理论）是完备可判定的；Tarski 证明实闭域理论（因而初等欧氏几何）完备可判定。**乘法与加法一起出现，才是那道门槛**。

误解四：哥德尔定理适用于物理学、心理学、社会系统、人工智能。 跨域使用之前，必须先证明该领域构成一个满足三条件的形式系统。这一步几乎从来没有人做过。不做这一步而直接套用，是把一条精确的数学定理当成一个比喻。

误解五：哥德尔定理意味着数学真理是相对的。 不。定理分开的是“真”与“可证”，它没有让“真”变得可协商。恰恰相反： G 之所以是一个定理，正因为“ G 为真”这件事有一个确定的答案。

十、SDE 读法

三点可以直接对上本编前几章。

其一，命题不能脱离证明路径。 只记录“ $T \vdash B$ ”而不记录 D ，就看不到证明用了多强的环境，也无法判断这个方法能不能迁移。第一章第四节讲合格路径时，讲的是同一件事的几何版。

其二，环境决定什么能被表达、什么能被证明。 条件 (ii) 说的正是：环境必须强到能把自己的语法装进去。环境不是背景，它决定表达力的上限。

其三，不完备性是一种 S-D-E 张力。 环境 E 通过路径 D 生成命题 S ；当 E 强到能把 D 编码为 S 时，自我指涉出现，产生一个在标准意义下为真却不能由 E 内部的 D 抵达的 S 。升级 E 可以吸收旧缺口，但新系统会生成新的缺口。

十一、哥德尔与 Cohen：不完备性与独立性

两件事常被混为一谈，应当分开。

不完备性（哥德尔）说的是：对满足三条件的任何 T ，总存在 T 判定不了的算术句子——这是一条关于全体这类系统的普遍定理。

独立性（Cohen, 1963, 力迫法）说的是：某个**具体**的命题（连续统假设）相对于某个**具体**的系统（ZFC）不可判定。它是对某一句话的具体裁定，靠的是构造两个模型，一个中该命题成立，一个中不成立。

两者的关系是：不完备性保证“这类现象存在”，独立性给出“这一句就是”。方法也完全不同——一个用编码与对角化，一个用模型构造。

十二、它对本书意味着什么

先说它**不意味着什么**：哥德尔定理并不说明本书姊妹卷讨论的那个几何优化猜想不可证。把一切未解决的问题都称为“哥德尔障碍”，是对定理的严重误用。目前没有任何理由把一个具体的几何猜想的困难归因于逻辑独立性。

它给出的是三条方法论要求：

一，把目标命题与已有证明路径分开。 大量数值证据、局部稳定性、晶相排除，仍然不是全局证明。

二，把环境写清楚。 是周期点集，还是任意平稳点过程，还是所有局部有限构型？是欧氏二次失真，还是一般范数？不同的环境对应不同的命题。

三，计算机证书必须公开其形式化范围。 它验证了哪些有限分支、用了什么误差界、遗漏了哪些非周期或大周期情形。

一句话概括：哥德尔给出的主要启示不是“猜想可能不可证”，而是“任何证明都必须公开它的系统边界”。

本章讲的是形式系统够不到什么。下一章要问的是另一件事：形式系统本身是被什么发生出来的。

第六章 什么在发生，什么不在

一、一个必须正面回答的反驳

本书以“发生”为纲，而数学恰恰是“发现”看上去最坚固的地方。反驳只需要一句话：

一个数学命题要么真，要么假。这件事与任何人的显露、路径、纠缠都无关。你们讲了半天发生，讲的是人怎么摸到它，不是它是什么。

这句话必须被正面回答，否则本书的纲领与它的全部案例之间，始终有一道缝。

回答不是“真值也在发生”。那是相对主义，本书不取，第一章第十节已经先立了这道墙。

回答是：

发生的不是真值，而是真值所在的整个提问装置。

以下四条各自可以指认年代，因而各自可以被推翻。

二、其一，目标发生

Voronoi 剖分的系统研究始于 1908 年。此后七十年里，“哪一种剖分最好”不是一个数学问题——不是无人有能力问，而是没有任何东西使它成为一个目标。使它成为目标的，是数字通信中“以最少比特换最小失真”这一纠缠土壤；Gersho 于 1979 年把它写成问题。

这七十年间，Voronoi 剖分的理论运行良好：没有算不动的地方，也没有表达不了的对象。变的只有一件事——**有人开始问一个此前不是问题的问题。**

目标不先在。它在纠缠中被发生出来，而且可以指认年代。

三、其二，对象类发生

同一个命题，在不同的对象类里断言，就是不同的命题。

以量化问题为例，允许类的演变是：格 $\rightarrow$ 周期点构型 $\rightarrow$ 平移不变的局部模式测度。每一次扩张都不是偏好，而是被证明路径的失紧逼出来的——当最小化序列在当前类里

不预紧时，为了让“最优结构”这个说法有指称，类必须扩大，而且扩大的方向由造成失紧的那族算子唯一指定。

对象类是被推着长出来的，不是一开始就摆在那里的。 第三编第十九章会给这一条一张统一表，从一年级的负数一直排到现代代数几何。

四、其三，判据发生

什么算“证明了”，本身在变。

开普勒球堆积猜想先有数值证据；Hales 于 1998 年给出含大规模计算的证明，审稿委员会最终使用的措辞是“大约百分之九十九确信”；2014 年 Flyspeck 项目完成形式化验证。

同一个命题，判据换了三次，而命题本身一字未动。 这正是本书要区分的：变的是装置，不是它指向的那个真值。

五、其四，结算面发生

“在哪里结算”不是问题自带的。

本书姊妹卷的默认是在单个胞上结算——这个默认从未被写下来，也从未被辩护，直到它被证明在三维不可行、结算面必须迁到接口为止。

一个默认到被证伪为止都是隐形的，这恰恰说明它是被发生出来的，而不是被读出来的。第四编第二十二章把这件事推到更一般的层面：**相容性公理从未被写下来，是因为它不是从假设那一侧进来的，它随表示进来。**

六、两条边界

上述四条同时守住两条边界，缺一不可。

不向相对主义那边越界。 它不说 BCC 的最优性是被人造出来的，也不说 $\sin$ 的有界性是约定的。第一章第十节已经说过：变的是命题，不是真值。

不向发现论那边退回。 它不说数学对象先在于一切追问、方法中立、知识只是累积。若那样，1908 到 1979 那七十年就无法解释，1998 到 2014 判据的三次更换也无法解释。

一句话立在中间：

数学中不发生的是真值；发生的是提问、对象类、判据与结算面。 把这四样错当成不发生的，就会以为数学是纯发现；把真值也说成发生的，就滑向相对主义。

七、三道防伪锁

一套只会解释而不会失败的框架，不配称为发生学。因此本书给出三道锁，三道都朝外开——它们让本书可以被证明是错的。

第一道，可指认的历史时刻。 1908、1979、1998、2014 都是具体年份。说错即可被推翻：只要查出“哪种剖分最好”在 1979 年之前已经作为明确的数学问题被提出，第二节即倒；只要查出 Flyspeck 的完成年份不对，第四节即倒。

第二道，可失败的预言。 第六编列出的每一个可检验问题都自带失败标准，第三编第二十一章与第四编第二十八章各已给出四条。它们不是“有待进一步研究”式的措辞，而是明写“出现什么就算本书错了”。

第三道，可核验的证书。 本书的承重计算必须是任何人在一页纸上能复算的。目前有两组：

第一组，第二编第十一章的五个反例。 同一条差异路径 $y'' = -y$ 、种子 $(0,1)$ ，换掉纠缠系统之后：在 $\mathbb{C}$ 上有界性翻面—— $\sin(i) = i \cdot \sinh(1) \approx 1.1752 i$ ，而 $|\sin| \leq 1$ 在 $\mathbb{R}$ 上成立；在 $\mathbb{Q}_p$ 上整性翻面——同一递推的收敛半径是 $p^{(-1/(p-1))}$ ，不再是整函数；在特征 p 上存在性消失——递推 $a(n+2) = -a(n)/((n+1)(n+2))$ 在 $(n+1)(n+2)$ 不可逆处断裂；在 $M_2(\mathbb{C})$ 上加法定理失效——除非两个矩阵可交换；换尺度后周期值改变—— 2π 不是内禀的。

第二组，第四编第二十六章的退化定理常数。 三维、指示核下 $c = 2\pi/15$ ，误差首项 $(\pi/210) r^2 |k|^4$ ，二者可由一次初等展开独立复算。

这两组证书有一个共同的好处，值得说明：**它们不需要任何专门领域的背景。** 一位数学系本科生当场就能验算五个反例，也能验算那两个常数。一道防伪锁若只有本领域的少数人能验，它在实际上是关着的。

八、与不完备性的关系

第五章讲的是真值相对于模型：同一个语句在不同模型中可以真假不同，而系统内部无法判定。

本章讲的是问题相对于纠缠：要不要问这个问题、算不算问对了、什么算答完了、在哪里结算——这四件事根本不在形式系统内部。

两者不在同一层，但方向一致：

哥德尔指出的是形式系统的**边界**；本章指出的是形式系统的**来历**。前者说系统够不到某些真，后者说系统本身是被什么发生出来的。

把两章放在一起，本书的立场才完整：**数学的内容有它自己的硬度，而数学的问题、对象类、判据与结算面，全部有历史、有条件、有可能被改写。**

九、本编到此为止

第一至四章挖了两个缺口：一个在单个对象上（圆的四种变法），一个在整条链上（七条链的两种形状）。第五、六章划了两条边界：形式系统够不到什么，以及它本身从哪里来。

四件事都停在同一个位置——有现象、有边界，没有命题。

第二编给命题（决定定理），第三编给分类（三通道），第四编给构造（伞模型与退化定理）。第七章交代本编所用的 S、D、E 各是哪一层、被略去的是哪几层，然后本编结束。

第七章 本编所用的 S、D、E 与它们被略去的部分

一、为什么必须有这一章

一本导论最容易犯的错误，不是说错，是说得像是全部。

前六章反复使用 S、D、E 三个字母，读者读到这里，很自然会以为已经掌握了这套框架的全貌。事实不是这样：本书用到的，是三个维度各自的一层或一格；被略去的那几层，恰好是本体论本身的主体。

不交代这件事，会有两个后果。往轻里说，读者会拿一个入口去解释它解释不了的事；往重里说，本书会被误认为宣称“数学 = S + D + E”这样一句空话。**划出边界，是使一个框架可用的前提。**

二、本书用的 S 是哪一层

首先要正一个名。

S 是显露（Show），不是结构（Structure）。

这不是措辞讲究。显露是一条连续谱——从模糊、到轮廓浮现、到清晰可指认、到可计算；“结构”只是这条谱上最坚硬、最稳定的那一端。用“结构”命名整个 S 维度，会把一条谱窄化成它的一个端点。

后果是具体的：如果 S 只指“已经稳定下来的结构”，那么“一个概念正在发生的那一段”就没有词可以说。而本书第三、四章讲的整整两条链，讲的全是那一段——加法在被发明出来之前的那个状态，既不是“没有加法”，也不是“已有加法”。它在谱的中段。

本书主要使用的是谱的稳定端（圆、sin、共振算子都是可指认的对象），但**必须保留整条谱的说法**，否则第三、四章的叙述在自己的术语里说不通。

三、本书用的 D 是哪一层

差异序列有三层：

D1 意义目标——方向：什么算“解决了”。**D2 路径组织**——允许的路径族：怎么推进、怎么比较、怎么收敛。**D3 优化约束**——推进中被最小化的东西：误差、冗余、损耗。

第一编前六章讲的 D，几乎全是 **D2**：内接与外切、参数化、分割求和、极限。

另外两层直到后面才补：**D3 在第三编第十六、十七章**（压缩通道讲的正是代价：误差、冗余、损耗），**D1 在第三编第十八章**（目标发生讲的正是“什么算解决了”这一层从哪里来）。

这个次序是刻意的。若在第一编就把三层一起端出来，读者会把它当成一张分类表背下来；等到第三编需要用 D1 与 D3 去做判定时，它们已经变成了标签。**先让读者在具体例子里撞上“代价”和“目标”，再给它们名字。**

四、本书用的 E 是哪一维

纠缠系统也有三维：

E1 三界——理念界（概念、规则、制度）、现实界（身体、器具、地理）、自我界（记忆、身份、意志）。**E2 信息的三种模态**——符号态、逻辑态、数学态。**E3 能量的三种状态。**

本书用到的 E，绝大部分落在 **E1 的理念界这一格**：度量、拓扑、函数空间、公理系统、允许类，全在这一格里。

有一处必须点明，因为它关系到本书的适用范围：**数学不独属理念界**。三界各有其数学——物理定律是现实界本有的场模式，不是拿理念界的数学去套现实。这一条是化解“数学何以不合理地有效”那个疑问的方向，但它的完整展开属于本体论本身，不在本书范围内。

本书只在一处用到它，而且只用到一句：**两个问题若分属不同的界，同一副几何骨架可以被两套场模式分别显影，因而给出相反的秩序**。这句话在本书的姊妹卷里有一个具体的、可核对的实例（同一对候选结构在两个不同泛函下胜负相反）。本书不重复那个实例，只标明这条边界存在。

五、被略去的那几层，为什么可以略去

一个诚实的划界，必须说明“略去”是否损害了论证。逐条看：

略去 D1 与 D3（在第一编内）——不损害，因为第一编只制造缺口，不做判定。判定需要三层齐备，而判定在第三编，那里三层都补上了。

略去 E2 与 E3——对本书的四条主线（决定定理、三通道、退化定理、失明判据）不构成缺口，因为这四条全部在理念界内部就能陈述与检验。但要注意：**这也意味着本书对“数学为什么对现实有效”这个问题没有给出回答**，只指了一个方向。

略去意义三律、存在三态、SIO 内部结构等——这些属于本体论主干，与本书主题的接触面很小。略去它们不影响本书任何一条命题。

另注：本书不使用 varifold 的任何定理，第二章第十二节只是指出该对象存在并且早有名字；几何测度论本身不在本书范围内。

一句话总结：**本书是一个入口，不是一张地图**。用入口去走它通向的那几条路，是对的；用入口去代替地图，会走错。

六、一条防止过度使用的规则

框架最常见的死法不是被推翻，是被滥用——什么都能套，于是什么都不说。为防止这一点，本书给一条硬规则：

不得把 S、D、E 用作分类标签。每一次使用，必须能回答三问：变量是什么？定义域是什么？什么情况下它会失败？三问答不出来，就不要用这三个字母；改用该领域自己的话说。

按这条规则回看本书：第二编给了 sin 的四条路径与十一行归属表（变量、定义域、失败情形俱全）；第三编给了三条通道各三条签名与四条失败标准；第四编给了共振算子的定义域、常数、收敛率与四条失败标准。**凡不能这样落地的地方，本书用的是普通数学语言，没有贴标签**。

七、通往第二编

本编到此结束。它交出的是：一个对象上的四格表（第二章），一整条链上的两种形状（第四章），两条边界（第五、六章），和一份适用范围声明（本章）。

它没有交出任何一条命题。这是刻意的：一本书若在第一编就给结论，读者不会知道那个结论是在补什么缺口。

第二编第一页开始给命题。请带着第二章那张四格表去读它。

第二编 决定定理：数学对象的显露态由什么定

编首语

第一编用圆与曲线制造了一个缺口：终态定义把生成条件和环境条件藏了起来，而藏起来的那两样并不是可以事后补上的注解——换一条逼近路径，有限阶段的周长就不

同；换一个曲率环境，连 $2\pi r$ 都不再成立。缺口已经打开，但第一编只到此为止：它给了例子，没有给命题。

本编补这一步。它要把"数学对象的显露态 S 的特征，由差异路径 D 与纠缠系统 E 决定"这句话，从一条听上去正确的宣告，改造成一条可以为假、可以被检验、可以被推翻的定理。

改造分四步。第八章设防——不设防，这句话自动为真且毫无内容，本编先说明为什么。第九章给出定理与证明。第十章至第十二章用一个对象把定理跑到底：函数 $\sin(x)$ ，四条互不相干的生成路径、一张逐条归属的特征表、五个可以一页纸算完的反例。第十三章交出四条硬边界，说明这条定理不说什么。第十四章回答一个必须正面回答的攻击：这一编在范畴论之外究竟做了什么。

选 $\sin(x)$ 作标本有三个理由。它足够熟悉，读者不必先学一门新学科；它足够富裕，有微分、级数、群论、几何四套互不相同的生成方式；它足够坚硬，它的每一条性质都有精确的经典陈述，因此归属判断可以被当场证伪。第一编的圆做不到最后一条——圆的性质容易被说成"直观上如此"，而 $\sin$ 的性质全部有等式。

一句话预告本编的结论：定理本身在形式化之后近乎自明；真正承重的是**归属**——每一条特征究竟是 D 给的还是 E 给的，以及这个判断能否预言"换掉 E 之后哪一条会翻面"。第十一章会给出一个例子，其中归属表推翻了本编作者自己的先验判断。那一处是全编最值得读的地方，因为它证明这张表不是给已知结论贴标签。

第八章 先设防：一个不设防的命题必然空转

一、命题的原始形式

本编要证的命题，最朴素的写法是：

每个数学对象的显露态 S ，其全部特征由生成它的差异路径 D 与它所在的纠缠系统 E 共同决定。

这句话有一个致命的方便之处：它太容易为真了。

设想有人要"证明" $\sin(x)$ 的特征由 (D, E) 决定。他可以这样做：令 $E =$ 实数域连同其通常结构，令 $D =$ "取那个叫做 $\sin$ 的函数"。于是 $S = \sin$ ，而 $\sin$ 的一切特征当然被 (D, E) 决定——因为 D 里已经装着 $\sin$ 本身。

这不是抬杠。它是一切"某某由某某决定"型命题的标准塌陷方式：只要允许决定项包含被决定项，命题就退化为同语反复。一个永远为真的命题不提供任何信息，也不可能被检验；它看上去像一条定律，实际上是一句语法。

因此本编的第一件事不是证明，是**设防**。

二、设防之一：D 不得提及 S

条款 ①（无循环条件） D 必须有穷可述，且其描述中不得出现 S，也不得含 S 的谕示。D 只许说一件事：差异如何从上一步推进到下一步，加上一个种子。

"有穷可述"排除了把无穷多条信息偷偷塞进 D。"不得出现 S"排除了上一节那种塌陷。"只许说差异如何推进"给出了 D 的正面形态：它是一条**局域的推进律**，不是对结果的描述。

以 $\sin$ 为例，合格的 D 是这样的：

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{(n+2)} = -a_n / ((n+1)(n+2))$$

它有穷（三行）、局域（只说下一项由上一项怎么来）、不提 $\sin$ （通篇只有整数与除法）。第十章会证明它确实生成 $\sin$ ，但那是定理的内容，不是定义的内容——这正是设防要保证的次序。

三、设防之二：E 必须是结构，不是理论

条款 ② E 必须以**结构**的形态给出：载体、运算、关系、拓扑或赋值本身。范畴化地说，给出范畴 $\mathcal{E}$ 及其全部态射。不得只给出一组公理。

这一条常被忽略，后果却很硬。若 E 只以一阶理论呈现，那么由 Löwenheim-Skolem 定理与非范畴性，同一套公理会有互不同构的模型，而 S 的特征在不同模型中取值不同。此时"决定"当场失效——但失效的原因不是命题错了，是 E 根本没给全。

第十三章会把这一点做成硬边界之三，并说明数学中的独立性现象在本框架里的准确位置。

四、设防之三：F 是偏函数

条款 ③ 由 (D, E) 到 S 的映射 F 是**偏函数**：(D, E) 可以无解。F 的定义域本身是一条待查的事实，不是前提。

这条看似技术，其实是本编最容易被跳过、也最容易在具体案例上出事的一条。第十一章的反例三会给出现场：同一条 D，把 E 从特征零的环换到特征 p 的环，递推在某一步除不下去，**S 根本不发生**。若事先假定 F 处处有定义，这个现象就会被误报为"计算失败"，而它其实是一条关于 E 的结论。

五、设防之后，命题才可能是假的

三条设防合起来，命题就有了三种为假的方式：

其一，(D, E) 有解但解不唯一——决定失效。其二，某条同构不变的特征不是 (D, E) 的函数——定理为假。其三，(D, E) 无解——F 在该点无定义。这不是反例，但必须被老实标出来，因为它划定了定理的适用范围。

第九章的定理会排除第二种，而排除的方式很有信息量：它证明第二种只在第一种发生时才可能发生。这一点在第十三章第五节会被写成一条可以拿去查任何具体对象的诊断规则。

本章要点 命题的内容不来自它说了什么，而来自它排除了什么。三条设防排除的是：把结果塞进原因、用公理冒充结构、假定处处有解。

第九章 决定定理

一、三个对象的形式定义

定义 9.1 (纠缠系统 E) 一个结构：载体集连同其上的运算、关系、拓扑或赋值；或范畴化地，一个范畴 $\mathcal{E}$ 连同其全部态射。E 须满足条款 ⑥。

定义 9.2 (差异路径 D) 一个生成律。形式上：一个小范畴 J 与一个图式 $D: J \rightarrow \mathcal{E}$ 。解析形式上：一个差分算子或微分算子，配一个种子。D 须满足条款 ①。

定义 9.3 (显露态 S) D 在 E 中的解：极限、余极限、初代数或表示对象，视 D 的形态而定。

三条定义有一个共同特点：它们都不预设 S 已经存在。E 是先在的土壤，D 是可写下的推进律，S 是二者相遇后发生出来的那个东西。这正是“在 E 中，经 D，成 S”这一句在数学里的准确落法。

二、决定定理

定理 9.4 (决定定理) 设 $D: J \rightarrow \mathcal{E}$ 为图式。若 D 在 $\mathcal{E}$ 中的极限存在，则它在唯一同构下唯一。因此

$$F: (D, E) \mapsto [S]$$

是一个单值偏函数。

证明 设 L 与 L' 皆为 D 的极限，分别配以锥 $(\lambda_j)_{j \in J}$ 与 $(\lambda'_j)_{j \in J}$ 。

由 L' 的泛性质，存在唯一态射 $u: L \rightarrow L'$ 使得对一切 j 有 $\lambda'_j \circ u = \lambda_j$ 。由 L 的泛性质，存在唯一态射 $v: L' \rightarrow L$ 使得对一切 j 有 $\lambda_j \circ v = \lambda'_j$ 。

考察 $v \circ u: L \rightarrow L$ 。对一切 j， $\lambda_j \circ (v \circ u) = (\lambda_j \circ v) \circ u = \lambda'_j \circ u = \lambda_j$ 。而恒等态射 id_L 同样满足 $\lambda_j \circ \text{id}_L = \lambda_j$ 。由 L 的泛性质中中介态射的**唯一性**，得 $v \circ u = \text{id}_L$ 。

对称地， $u \circ v = \text{id}_{L'}$ 。故 $L \cong L'$ ，且该同构由泛性质唯一确定。■

余极限的情形把全部箭头反向，证明逐字对偶。

推论 9.5 对任何同构不变的性质 P ，恒有

$$P(S) = P \circ F(D, E)。$$

即： S 的每一条特征都是 (D, E) 的函数。

证明 由定理 9.4， F 是单值的，即 (D, E) 唯一确定同构类 $[S]$ 。 P 在同构类上良定，故 $P \circ F$ 是 (D, E) 上的良定函数，且其值等于 $P(S)$ 。■

推论 9.5 是本编的主命题。它的证明只有一行，因为全部工作已经在定理 9.4 里做完了——**单值性一旦成立，"每条特征都是二者的函数"就是它的直接读法。**

三、解析版：Picard–Lindelöf

范畴论的写法覆盖面广，但离具体对象远。同一件事在分析里有一个人人熟悉的面孔。

定理 9.6（解析版） 设 $E = (X, \|\cdot\|)$ 为 Banach 空间，配以实区间 I 上的完备度量结构。设 $D = (f, x_0)$ ，其中 $f: I \times X \rightarrow X$ 连续且关于第二变元一致 Lipschitz， $x_0 \in X$ 为种子。则初值问题

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

有唯一的极大解。

这就是 Picard–Lindelöf 定理。它的标准证明是把初值问题转写为积分方程，再对压缩映射用 Banach 不动点定理。在本编的语言里：**E 提供完备性（不动点定理的前提），D 提供压缩（Lipschitz 条件与推进律），S 是那个不动点。**三者的分工在证明中一目了然，缺任何一个，不动点都不存在或不唯一。

值得注意的是失败的方式也各归其位：Lipschitz 条件坏掉（D 的问题）会导致解不唯一，例如 $x' = 2\sqrt{|x|}$ 、 $x(0) = 0$ 有无穷多解；完备性坏掉（E 的问题）会导致解不存在。这一对失败例正是第十二章“两个变量都不可省”的分析版预演。

四、E 一侧的独立佐证：米田引理

第三个角度来自范畴论最基本的一条定理。

定理 9.7（米田引理的推论） 米田嵌入 $y: \mathcal{E} \rightarrow [\mathcal{E}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$ ， $X \mapsto \text{Hom}(-, X)$ ，是全忠实的。因此

$X \cong Y$ 当且仅当 $\text{Hom}(-, X) \cong \text{Hom}(-, Y)$ （作为函子自然同构）。

这句话的读法是：**一个对象在同构意义下被它与全体对象的关系穷尽。**换言之，“S 由纠缠决定”在范畴论里不是隐喻，是一条一百年来天天在用的定理。

而 D 在这里出现于另一个位置：关系模式不是凭空给出的，它由某个图式生成，而图式的形状——哪些箭头、按什么次序、如何复合——正是差异路径。定理 9.4 说的是“给

定图式，极限唯一"；定理 9.7 说的是"给定关系全貌，对象唯一"。两条从不同侧面夹住同一件事。

五、一句要紧的话

必须把下面这句写在本章末尾，否则本编会被高估：

形式化之后，定理 9.4 近乎自明。

它是泛性质唯一性引理，任何一本范畴论教材的第一章都有。本编把它请到这里，不是因为它难，而是因为它把一句哲学宣告钉成了一条有前提、有证明、有边界的数学命题——而在此之前，那句宣告既不能被证明也不能被推翻。

因此本编真正承重的部分不在第九章，在第十一章：**归属**。定理只说"S 的特征是 (D, E) 的函数"，它不说是**哪一个**函数，更不说某条具体特征的成因该记在 D 名下还是 E 名下。后者才是可错的、可检验的、能预言换掉 E 之后哪条会翻面的部分。全编的力气从下一章起全部用在那里。

第十章 $\sin(x)$ ：四条路径，同一个显露态

本章把 $\sin$ 的四种生成方式写成四组 (D, E)，并证明它们给出同一个 S。四组之间没有任何一组能被另一组"看出来"——它们分别属于分析、代数、群论与几何。

一、微分型

E_A = $(\mathbb{R}, C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), d/dx)$ ：实数域、光滑函数空间、通常的求导算子。

D_A： $y'' = -y$ ，种子 $(y(0), y'(0)) = (0, 1)$ 。

唯一性来自线性常系数算子的标准事实： $L = d^2/dx^2 + 1$ 的核是二维实向量空间，而映射 $y \mapsto (y(0), y'(0))$ 是该核到 $\mathbb{R}^2$ 的线性同构。种子选定核中唯一一个元素。

二、系数型：差异路径的字面形态

E_B = $\mathbb{R}[[x]]$ ，形式幂级数环，配形式求导；再加 $\mathbb{R}$ 的完备性以谈收敛。

D_B： $a_0 = 0$ ， $a_1 = 1$ ， $a_{(n+2)} = -a_n / ((n+1)(n+2))$ 。

解这条递推。偶数下标链从 $a_0 = 0$ 出发，故 $a_{(2k)} = 0$ 对一切 k 成立。奇数下标链：设 $a_{(2k+1)} = (-1)^k / (2k+1)!$ ，则

$$a_{(2k+3)} = -a_{(2k+1)} / ((2k+2)(2k+3)) = -(-1)^k / ((2k+1)! \cdot (2k+2)(2k+3)) = (-1)^{(k+1)} / (2k+3)!,$$

而 $k = 0$ 时 $a_1 = 1 = (-1)^0 / 1!$ 成立，故归纳成立。于是

$$S_B(x) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k x^{(2k+1)} / (2k+1)!.$$

这一条最见筋骨：它就是字面意义上的**差异路径**。每一项由上一项翻号，再被 $(n+1)(n+2)$ 衰减；翻号制造振荡，衰减制造收敛。 $\sin$ 的两条最基本性质——它会来回摆、它不会炸掉——在递推的两个因子上分别写着。第十一章的归属判断有一半可以直接从这一行读出来。

三、泛函方程型

$E_C = (\mathbb{R}, +)$ 作为拓扑群。

D_C : 连续函数对 $(s, c): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ 满足

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y) \quad c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$$

并带种子 $s(0) = 0$ 、 $c(0) = 1$ 、 $s'(0) = 1$ 、 $c'(0) = 0$ 。

唯一性：由两条加法定理可验证矩阵 $M(x) = \begin{bmatrix} c(x) & -s(x) \\ s(x) & c(x) \end{bmatrix}$ 满足 $M(x+y) = M(x)M(y)$ ，故 $x \mapsto c(x) + i \cdot s(x)$ 是从 $(\mathbb{R}, +)$ 到 $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ 的连续同态。这类同态恰为 $x \mapsto e^{i\lambda x}$ ， $\lambda \in \mathbb{C}$ 。写 $\lambda = \alpha + i\beta$ ，则 $s(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ 、 $c(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ 。种子 $s'(0) = 1$ 给出 $\beta = 1$ ，种子 $c'(0) = 0$ 给出 $\alpha = 0$ 。故 $(s, c) = (\sin, \cos)$ 。

注 10.1 $c'(0) = 0$ 这一条不能省。若只要求 $s'(0) = 1$ ，剩下的解族是 $s(x) = e^{\alpha x} \sin x$ (α 任意实数)，它们全部满足两条加法定理。这是本编第一次看到**种子少给一位，S 就从一个点变成一条曲线**——第八章条款 ③ 要求 D 有穷可述，但“有穷”不等于“够”。

四、群与几何型

$E_D = (\mathbb{C}, |\cdot|)$ 、单位圆 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 、 $\mathbb{R}$ 作为一维李群。

D_D : 唯一的连续同态 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ 满足 $\phi'(0) = i$ ；令 $\sin := \operatorname{Im} \phi$ 。

唯一性：连续同态 $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ 恰为 $x \mapsto e^{i\beta x}$ ， $\beta \in \mathbb{R}$ ； $\phi'(0) = i\beta = i$ 给出 $\beta = 1$ 。

这一条把几乎全部信息压在 E 上：圆、模长、群结构都是环境， D 只剩下“在单位元处的切向是 i ”这一个数据。与第二条恰成对照——第二条几乎全部信息在 D 上。同一个 S ，两种极端的分配方式。

五、四者等价，以及它的含义

定理 10.2 A 、 B 、 C 、 D 四组 (D, E) 给出同一个函数。

证明梗概 $B \implies A$: 由 $|a_{n+2}/a_n| = 1/((n+1)(n+2)) \rightarrow 0$ 知级数收敛半径为 ∞ ，故可逐项求导；代入即得 $y'' = -y$ 与种子。 $A \implies C$: 固定 y ，令 $c := y'$ 、 $u(x) := s(x+y) - s(x)c(y) - c(x)s(y)$ ，则 $u'' = -u$ 且 $u(0) = u'(0) = 0$ ，由 A 的唯一性 $u \equiv 0$ ；第二条加法

定理同法可得。 $C \implies D$ ：第三节已给出 $x \mapsto c(x) + i \cdot s(x)$ 是到 S^1 的连续同态，其在 0 处的导数为 i 。■

这条定理的价值不在于它成立——四种定义等价是微积分课上的常识——而在于它**证伪了一个关于本编定理的自然误读**：

推论 10.3 F 不是单射。

四组彼此不相干的 (D, E) 落在 F 的同一根纤维上。因此定理 9.4 提供的是**单向**的决定：给定 (D, E) 则 S 定，而给定 S **不能**反推唯一的 (D, E) 。

注 10.4 这条单向性有具体后果，值得提前说明，以免本编被援引到它无能为力地方。数学中有一整类深刻问题问的正是“两组毫不相干的 (D, E) 是否落在同一根纤维上”——傅里叶对偶、泊松求和、类域论及其非交换推广、镜像对称，都是这个形状。**本编对这类问题不提供任何工具**，因为纤维结构恰是定理 9.4 沉默的地方。第十三章会把这一点列为硬边界之二。一个框架的用处，一半在于它管得住的地方管得硬，另一半在于它管不住的地方肯说管不住。

第十一章 特征归属表

一、什么叫归属

定理 9.4 说 S 的每条特征都是 (D, E) 的函数，但没说是哪一个。**归属**要回答的是更细的问题：某条具体特征，它的成因主要坐落在 D 上，还是 E 上，还是二者的乘积上？

归属之所以不是文字游戏，因为它有一个当场可查的检验：

归属检验 若判定某特征归 D ，则换掉 E 之后它应当不变；若判定归 E ，则固定 D 换掉 E 之后它应当翻面。

判错了，反例立刻出现。本章第三节给出五个这样的检验，每一个都可以在一页纸上算完；其中第四个推翻了本编作者原先的判断。

以下固定 $D = D_B$ （第十章第二节的系数递推）。选它是因为它只用到环的加法、乘法与整数的可逆性，因此可以**原样搬进**任何特征为零的交换环——换 E 时 D 一个符号都不必改，这正是归属检验所需要的实验条件。

二、归属表

S 的特征	归属	检验方式
奇函数	D	种子 $a_0 = 0$ 使全部偶次项为零；一切 E 中不变

S 的特征	归属	检验方式
振荡、无穷多零点	D	递推中的符号 -1；换成 +1 即得 sinh，E 未动
$\sin^2 + \cos^2 = 1$	D 的首次积分	由递推本身导出；凡递推可解处皆成立，含矩阵代数
有界， $ \sin \leq 1$	D · E 的乘积	不变式来自 D，"平方非负、二次型正定"来自 E
整函数、收敛半径 ∞	E	完备性与赋值
周期存在	D	轨道闭合，同构不变量
周期数值 = 2π	E 的归一化	剥掉单位选择后余下的不变量是"轨道闭合"，不是那个数
加法定理	D $\wedge$ E（交换性）	见反例四：直觉归属在此被推翻
$\sin(1)$ 超越	E（$\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{Q}$ 的纠缠）	Lindemann 定理
单调区间、凸性	E 的序结构	$\mathbb{C}$ 上无序，该特征整条消失
S 是否存在	E（特征为零）	见反例三：char p 中递推断裂

三、五个反例

反例一 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ：有界性翻面

D 不变，E 由实数域换为复数域。

由 $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz}) / (2i)$ ，取 $z = iy$ ($y \in \mathbb{R}$)：

$$\sin(iy) = (e^{-y} - e^y) / (2i) = (i/2)(e^y - e^{-y}) = i \cdot \sinh y。$$

故 $|\sin(iy)| = \sinh|y| \rightarrow \infty$ 。数值上 $\sin(i) = i \cdot 1.1752011936\dots$

这个反例的价值不在"复正弦无界"这件众所周知的事，而在它暴露的**机制**。恒等式 $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ 在 $\mathbb{C}$ 上**仍然成立**——它是 D 的首次积分，跟着 D 走。取 $z = i \cdot \sinh y$ 、 $w = \cosh y$ ，则

$$z^2 + w^2 = -\sinh^2 y + \cosh^2 y = 1，$$

等式成立，而 $|z|$ 无界。

于是结论很硬：**有界性从来不是 D 给的**。D 给的是那条二次恒等式；把二次恒等式转成一条界，需要 E 额外提供"平方非负、二次型正定"这两件事，而 $\mathbb{R}$ 有、 $\mathbb{C}$ 没有。归属表里那一行写" $D \cdot E$ 的乘积"，指的正是这个乘法。

反例二 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_p$: 整性翻面

D 不变，E 换为 p 进数域 $\mathbb{Q}_p$ (p 为素数，配 p 进赋值 $|\cdot|_p$ ，完备)。

同一条级数 $\sum (-1)^k x^{(2k+1)}/(2k+1)!$ 。由 Legendre 公式，

$$v_p(n!) = (n - s_p(n)) / (p - 1),$$

其中 $s_p(n)$ 为 n 的 p 进数字和。故第 k 项的赋值为

$$v_p(x^{(2k+1)}/(2k+1)!) = (2k+1) \cdot v_p(x) - (2k+1 - s_p(2k+1))/(p-1).$$

由于 $s_p(2k+1) = O(\log k)$ ，该式趋于 $+\infty$ 的充要条件是

$$v_p(x) > 1/(p-1), \text{ 即 } |x|_p < p^{(-1/(p-1))}.$$

于是 $\sin$ 在 $\mathbb{Q}_p$ 上只在一个开球内有定义： $p=2$ 时 $|x|_2 \leq 1/4$ ， $p=3$ 时 $|x|_3 \leq 1/3$ ， p 大时球逐渐胀向单位球但永不到达。

"整函数"这条特征，是 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{C}$ 借给 $\sin$ 的，不在 D 里。递推一个符号未改，收敛半径从 ∞ 掉到有限。

反例三 特征 0 $\rightarrow$ 特征 p : 存在性消失

D 不变，E 由 $\mathbb{R}[[x]]$ 换为 $\mathbb{F}_p[[x]]$ 。

递推 $a_{(n+2)} = -a_n / ((n+1)(n+2))$ 要求 $(n+1)(n+2)$ 在环中**可逆**。在 $\mathbb{F}_p$ 中，当 $p \mid (n+1)(n+2)$ 时不可逆。

$p=2$: a_3 需要除以 $2 \cdot 3 = 6 \equiv 0$ ，第一步即断。

p 为奇素数：奇数下标链 $a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow a_5 \rightarrow \dots$ 中，第一次出事在 $n = p-2$ (此时 n 为奇数， $n+2 = p \equiv 0$)。而此时 $a_{(p-2)} = (-1)^{((p-3)/2)}/(p-2)! \neq 0$ ，因为 $(p-2)!$ 与 p 互素。故 a_p 无法定出。

结论：在特征 p 中，不存在满足该递推与该种子的形式幂级数。S 根本不发生。

这就是第八章条款 © 的现场。F 是偏函数，而它的定义域"特征为零"本身是一条关于 E 的结论——不是计算失败，是数学事实。归属表最后一行写" S 是否存在归 E"，指的是这个。

反例四 $\mathbb{R} \rightarrow M_2(\mathbb{C})$: 加法定理失效，且直觉归属被推翻

D 不变，E 换为二阶复矩阵代数 (级数在算子范数下绝对收敛，因 $\sum \|A\|^{(2k+1)}/(2k+1)!$ 收敛)。

先看什么活下来： **$\sin^2 A + \cos^2 A = I$ 仍然成立**，因为它来自 $e^{(iA)}e^{(-iA)} = I$ ，而 iA 与 $-iA$ 交换。D 的首次积分不受影响。

再看什么死掉。取

$$A = [[0, 1], [0, 0]], \quad B = [[0, 0], [-1, 0]].$$

二者皆幂零： $A^2 = B^2 = 0$ 。故 $\sin A = A$ 、 $\cos A = I$ 、 $\sin B = B$ 、 $\cos B = I$ ，于是

$$\text{右端} = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B = A + B.$$

而 $A + B = [[0, 1], [-1, 0]]$ 满足 $(A+B)^2 = -I$ 。由此 $(A+B)^{(2k+1)} = (-1)^k (A+B)$ ，代入级数：

$$\sin(A+B) = \sum_{(k \geq 0)} (-1)^k (A+B)^{(2k+1)} / (2k+1)! = (A+B) \cdot \sum_{(k \geq 0)} 1 / (2k+1)! = \sinh(1) \cdot (A+B).$$

$$\text{左端} \approx 1.1752 (A+B), \quad \text{右端} = (A+B), \quad \text{差} \approx 0.1752 (A+B) \neq 0.$$

(此处 $AB = [[-1, 0], [0, 0]]$ 、 $BA = [[0, 0], [0, -1]]$ ，确实不交换。加法定理成立当且仅当 $AB = BA$ 。)

这一条是全章最重要的。 加法定理表面上只讲"差异如何复合"，因此直觉会把它整条记在 D 名下——本编初稿正是这样写的。矩阵代数把它推翻了：交换性一直在暗中做工，一撤走就塌。正确的归属是 $D \wedge E$ （交换性）。

一张能推翻自己先验判断的表，才是有内容的表。若归属表只会为已知结论重新命名，它就该被丢掉。

反例五 换尺度： 2π 不是内禀的

$\mathbb{R}$ 作为裸拓扑群没有典范单位：每个非零 λ 给出自同构 $\sigma_\lambda: x \mapsto \lambda x$ 。

令 $s_\lambda := \sin \circ \sigma_\lambda$ 。则 s_λ 满足 $y'' = -\lambda^2 y$ 、 $y(0) = 0$ 、 $y'(0) = \lambda$ ，周期为 $2\pi/\lambda$ 。取 $\lambda = 2\pi$ ，周期即为 1。

因此：**周期的存在**是同构不变量（轨道闭合，跟着 D 走）；**周期的数值**是轨道相对于所选归一化的量，跟着 E 走。剥掉单位选择之后剩下的不变量是"这条轨道会回到起点"这一事实，不是那个数。

这不是说 2π 可以随意。它是 D 的种子与 E 的度量之间的一个比值——两边都固定，它才固定。归属表里写"E 的归一化"，说的是这个比值的分母在 E 手里。

四、这张表能做什么

五个反例排成一列，可以读出归属表的工作方式：

- 判 D 的（奇性、振荡、首次积分、周期存在）在**全部**五种 E 下不变；

- 判 E 的（有界、整、序性质、存在性）在换 E 时**逐条翻面**，且翻面的方向与预言一致；
- 判 $D \cdot E$ 的（有界性、加法定理）在换 E 时翻面，但**翻的是 E 那一半**，D 那一半原样保留——反例一与反例四把这个"半塌"看得最清楚。

这就是归属表比定理 9.4 更值钱的原因：定理只保证"是二者的函数"，归属表还预言**换掉哪一个会出什么事**，因而每一行都可以被单独证伪。

第十二章 两个变量都不可省

第十一章证明了 E 不可省——固定 D 换 E，四次翻面。本章补上另一半，并处理一个真实的反驳。

一、固定 E 换 D

$E = \mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}[[x]]$ 一字不动。把递推中的一个符号翻过来：

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{(n+2)} = + a_n / ((n+1)(n+2))$$

解得 $S = \sum_{(k \geq 0)} x^{(2k+1)} / (2k+1)! = \sinh x$ 。

对照：

	sin	sinh
$\mathbb{R}$ 上的零点	$\pi\mathbb{Z}$ ，无穷多	只有 $x = 0$
有界性	$ \sin \leq 1$	无界
周期	2π	无周期
$(0, \infty)$ 上	振荡	严格凸、严格增

一个符号，对象整个换了。D 不可省。

二、一个必须正面回答的反驳

有人可以这样反驳：第一编第二节里，内接多边形与外切多边形是两条不同的 D，却收敛到**同一个** $2\pi r$ ；第一编第三节里，锯齿多边形是另一条 D，得到不同的周长，但那只说明 E（面积拓扑）给弱了。于是——

你的 D 要么会自己消掉，要么只是 E 没写全。D 根本不是独立变量。

这个反驳很强，必须正面回答，而不是绕开。

回答是：上一节的 $\sinh$ 就是回答。E 完全相同（同一个 $\mathbb{R}$ 、同一个形式幂级数环、同一套收敛规则，无一处放宽或收紧），D 只改一个符号，得到的是一个在**每一条可比特征上都不同**的对象。这既不是"自己消掉"，也不是"E 没写全"。

三种情形的分工可以并成一张表：

情形	换 D 的后果	说明
内接 / 外切	S 不变	F 非单射，同一纤维内的两条路径（推论 10.3）
锯齿多边形	极限不唯一	E 给弱了，(D, E) 不构成解（条款 ⑥）
$\sin / \sinh$	S 真的不同	D 是独立变量

第一编只给了前两格。**第三格是 D 之为独立变量的唯一证据**，本编把它补上。缺这一格，前两格加起来恰好构成上述反驳。

三、单靠一个都不行

只给 D：递推 $a_{(n+2)} = -a_n / ((n+1)(n+2))$ 里的除法在哪个环中进行没有说，"负号"是哪个环的加法逆元没有说。没有载体，S 无从谈起——反例三已经证明这不是形式上的挑剔：换个特征，同一条递推就不再有解。

只给 E： $\mathbb{R}[[x]]$ 里有不可数多个元素。没有 D，没有任何理由指向其中哪一个。

四、反向：D 能否由 S 与 E 回收

三方程的第二式 $D = G(S, E)$ 在这里也有严格对应物，值得单列，因为它是本编唯一一处从 S 反推的地方。

$\sin$ 是 **D-有限** (holonomic) 函数：它满足一个系数为有理函数的线性常微分方程。

定理 12.1 (经典) 设 f 为 D-有限函数。在有理函数系数的 Weyl 代数 $\mathbb{C}(x)(\partial)$ 中，零化 f 的算子全体 $\text{Ann}(f)$ 构成一个左理想。由于 $\mathbb{C}(x)(\partial)$ 具有带余除法，该理想是**主**左理想，由极小阶算子生成，且该生成元在 $\mathbb{C}(x)^\times$ 的左乘意义下唯一。

对 $\sin$ ： $\text{Ann}(\sin) = \mathbb{C}(x)(\partial) \cdot (\partial^2 + 1)$ 。

读法是：**给定 E，S 唯一地决定了 D 的极小形式**。于是 $S = F(D, E)$ 与 $D = G(S, E)$ 在这一层同时为真，且都是定理，不是修辞。

但要老实标出边界：这只回收 D 的"极小零化"那一面，**不回收种子**。 $\cos$ 与 $\sin$ 有同一个极小零化算子，二者由种子区分。种子要从 S 在一点的 jet 读出，那是另一条信息。因此 $D = G(S, E)$ 的准确形态是：算子部分可回收，种子部分需另给。

第十三章 四条硬边界

一条只会成立、从不失效的定理不是定理，是定义。本章交出定理 9.4 与推论 9.5 不说的四件事。四条都不是谦辞，每一条都划出一块可查的区域。

一、边界之一：只对同构不变量成立

定理 9.4 给的是"在唯一同构下唯一"。因此推论 9.5 中的 P 必须是同构不变的。

不是同构不变的"特征"，其实不是 S 的特征，是某个**表现**的特征。 $\sin$ 的幂级数系数表、它在 $\mathbb{R}$ 上的图像、它作为 $\text{Im}(e^{ix})$ 的写法，是同一个 S 的三种表现；"第三项系数是 $1/120$ "是表现的特征，不是 $\sin$ 的特征。

这不是漏洞，是定理给出的划界：

S 的特征集，恰是它的纠缠模式的不变量集。

定理 9.7（米田）正是这句话的定理形式——对象被它与万物的关系穷尽，而"关系"只在同构意义下有意义。

二、边界之二： F 非单射，决定是单向的

推论 10.3 已经给出四个证人。给定 S 不能反推唯一的 (D, E) ；能反推的只有 D 的极小零化算子（定理 12.1），而且不含种子。

这条边界的后果在注 10.4 已经说过，此处只重申一次并把它写成正式条款：**凡问"两组不同的 (D, E) 是否给出同一个 S "的问题，本编不提供工具。**那是纤维结构的问题，而定理 9.4 对纤维一无所知。

三、边界之三： E 必须给结构，不能只给理论

若 E 只以一阶理论呈现，Löwenheim–Skolem 定理与非范畴性立即使决定失效：同一套公理有互不同构的模型， S 的特征随模型而变。最著名的例子是：若 ZFC 一致，则连续统假设在其不同模型中真假不同。

关键在于这**不是**定理 9.4 的反例。它正是条款 ⑥ 被违反时应当发生的事。于是本框架给独立性现象一个准确位置：

独立性 = E 没给全。

这是一句可查的判断，不是一句解释。它可以被推翻——只要找到一个 E 已经以完整结构形态给出、而某条同构不变特征仍不确定的例子。

四、边界之四：存在无 D 的对象

$\mathbb{R}$ 上的 $\mathbb{Q}$ -Hamel 基、 $\mathbb{N}$ 上的非主超滤、 $\mathbb{R}$ 的良序——这些对象的存在由选择公理断言，而没有有穷生成律可写。它们不是"D 很复杂"，是**没有 D**：在 ZF + 依赖选择 + "所有实数集可测"的模型中，它们干脆不存在。

故它们**不在 F 的定义域内**。严格命题因此应当这样表述：

凡可生成的数学对象， $S = F(D, E)$ ；而纯存在性区——由选择公理断言、无构造——恰是无 D 区。

这不是退让。它把命题变成一条可查的分界线：

一个数学对象是否 SDE-可发生，等价于它是否在其所在结构上可由有穷生成律定义。

这条分界线本身可以被检验，也可以被推翻：找出一个公认无构造的对象却写得出合格的 D，或找出一个有合格 D 的对象却不可生成，本条即倒。

五、可证伪条件与一条诊断规则

如何证伪本编：找出一个数学对象，其某条同构不变特征在 D 与 E 都被固定之后仍不确定。

定理 9.4 表明这只在（余）极限不唯一时发生，而极限不唯一意味着两件事之一：D 有未定的分叉（条款 ⑨ 未满足，"有穷"不等于"够"——注 10.1 已给出一个具体的少给一位的例子），或 E 只给了理论没给结构（条款 ⑩）。

因此本编的最终形态不是一句宣告，而是一条诊断规则：

"特征未定"永远等价于"D 或 E 没给全"。

这条等价可以拿去查任何一个具体对象。它给出的是一个可执行的动作——特征查不出来时，不要去猜对象的"本性"，去数 D 的种子够不够、去看 E 是结构还是一组公理。

六、本编未做的一件事

归属表目前是逐条手工判定的。要把它从一批判例升级为一台机器，需要一条**归属分解定理**：

对给定特征 P，定义其 D-份额与 E-份额为 P 在"固定 E 变 D"与"固定 D 变 E"两族扰动下的敏感度，并证明二者构成一个分解。

这一步做出来，本编就从"逐例兑现"升到"有一般机器"；做不出来，本编的归属部分永远是一批需要逐条验证的判例。它是本书第六编的第一个可检验问题。

七、本编所用的 S、D、E 与它们被略去的部分

按本书第一编的纪律，此处须交代本编的适用层级。

本编所用的 **D**，全部落在 **D2（路径组织）** 这一层：递推、微分算子、极限规则。**D1（意义目标）** 完全未进入——本编从未问过"为什么要生成 $\sin$ "，而那正是第一编第三章第四节所说、定义里被略去的那一层。**D3（优化约束）** 亦未使用，因为本编的对象不由极小化产生。

本编所用的 **E**，全部落在 **E1 的理念界** 一格：域、环、拓扑、赋值、范畴。**E2（信息三模态）** 与 **E3（能量三态）** 未进入。

这一交代不是免责声明，而是定位：本编证明的是**理念界内、D2 层上**的决定关系。把它外推到现实界或自我界的对象，需要另行论证，本编不为那种外推背书。

第十四章 这一编在范畴论之外做了什么

一、一个必须正面回答的攻击

把本编用到的主要工具排开：

- 定理 9.4 是泛性质唯一性引理，任何一本范畴论教材第一章都有；
- 定理 9.7 是米田引理，1954 年的东西；
- 定理 12.1 是 D-有限函数理论的标准结果。

三条都不新，都不是本编造的。于是攻击成立：

你把三条现成定理翻译成三个字母，然后宣布这是一门本体论。

这个攻击必须被正面回答，而不能靠加术语绕开——因为**就那三条定理而言，它完全是对的**。本编没有证明任何一条新的极限唯一性定理，将来也不会。

二、范畴论不问的那个问题

范畴论拥有定理 9.4，但它不问**归属**。

给定图式 D 与范畴 $\mathcal{C}$ ，范畴论关心的是：极限是否存在，如何构造，有哪些泛性质，保极限的函子是哪些。它**不问**：这个极限的某一条具体特征，是图式给的还是范畴给的？

这不是范畴论的疏忽，而是问题在它内部**不良构**。范畴论处理的是"给定 $(J, \mathcal{C})$ 之后的结果"；归属问的却是"把 $(J, \mathcal{C})$ 拆开，看哪一半在承重"。要问出这个问题，必须先允

许 D 与 E 各自独立变动、并把变动后的结果拿来比较——那要求把 (D, E) 当作一对变量，而不是一组输入。

第十一章那五个反例，形式上全部是"固定一个变量、扰动另一个、观察哪条特征翻面"。这是一个**敏感度实验**的形状，不是一个范畴论命题的形状。

三、这个立场产生的三样东西

其一，可以出错的判断。反例四把加法定理的归属从 D 改判为 $D \wedge E$ （交换性）。这是一个**判断**，它可以错，而且本编初稿确实错了。范畴论不产生这类判断，因为它不下这类判断——它既不说加法定理"属于"图式，也不说它"属于"范畴。

其二，一条可执行的诊断规则。"特征未定 $\iff$ D 或 E 没给全"告诉你**回去查什么**：数种子够不够（注 10.1 的 $c'(0)$ ），看 E 是结构还是一组公理（边界之三）。范畴论对同一现象的说法是"泛性质未被满足"，那是内部描述，不指向外部动作。

其三，一条分界线。"SDE-可发生 $\iff$ 可由有穷生成律定义"把选择公理断言区划到 F 的定义域之外。在范畴论里这不是定理，是一个立场；本编把它写成了可证伪的命题（边界之四末段给了推翻它的两条具体路径）。

四、也必须说清它还不是什么

下面这句同样要说，否则本编就在做它自己批评过的事：

决定定理不是本学派的贡献。归属问题才是——而归属问题目前只做完一半。

第十三章第六节已经承认：归属表是十一条判例，不是一台机器。在归属分解定理被证明之前，本编能主张的东西是有限的，且必须这样列：

已经做到的——把一句不可检验的宣告，改造成一条有三条前提、一个证明、四条边界的命题；提出了一个范畴论不问的问题；给出十一条判例，其中一条推翻了作者自己。

尚未做到的——把归属从判例升为机器；把本编从 D2 与 E1 一格推广到 D 的三层与 E 的三维（第十三章第七节）。

这个自我限定不是谦辞，而是本编要求读者对它使用的同一把尺。第一编批评终态定义"把生成条件藏了起来"；本编若把自己的未完成部分藏起来，就是同一种病，只是换了个方向。

五、一句话

本编的位置可以这样定：

它借范畴论的定理立住脚，然后问了一个范畴论不问的问题。

立住脚的那一半不新；问出来的那个问题，才是本书的。

本编术语

术语	定义
无循环条件 (条款 ①)	D 须有穷可述, 且描述中不得出现 S, 不得含 S 的谕示
结构而非理论 (条款 ②)	E 须以载体、运算、关系、拓扑或赋值本身给出, 不得只给公理
F 为偏函数 (条款 ③)	(D, E) 可以无解; F 的定义域本身是待查的事实
决定定理	若 D 在 E 中的 (余) 极限存在, 则在唯一同构下唯一, 故 F 单值
归属	判定某条特征的成因坐落在 D、E 还是二者的乘积上
归属检验	判 D 的换 E 应不变, 判 E 的固定 D 换 E 应翻面
半塌	归 $D \wedge E$ 的特征在换 E 时只翻 E 那一半, D 那一半原样保留
无 D 区	由选择公理断言存在而无有穷生成律的对象区; 不在 F 的定义域内
归属分解	把特征的 D-份额与 E-份额定义为两族扰动下的敏感度并证明其构成分解 (未做)

本编参考文献

1. S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, 2nd ed., Springer, 1998. (定理 9.4、9.7)
2. E. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, 1955. (定理 9.6)
3. J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Academic Press, 1966. (第十章第三节)
4. F. Q. Gouvêa, *p-adic Numbers: An Introduction*, 3rd ed., Springer, 2020. (反例二)
5. N. J. Higham, *Functions of Matrices: Theory and Computation*, SIAM, 2008. (反例四)
6. R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Vol. 2, Cambridge University Press, 1999, 第六章. (定理 12.1, D-有限函数)
7. T. Jech, *The Axiom of Choice*, North-Holland, 1973. (边界之四)

8. R. M. Solovay, "A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable," *Annals of Mathematics* 92 (1970), 1-56. (边界之四)
-

第三编 三通道：一个新的数学结构从哪里来

编首语

第二编回答了一个静止的问题：给定差异路径 D 与纠缠系统 E ，显露态 S 被决定到什么程度。答案是决定定理——若解存在则在唯一同构下唯一，因而 S 的每一条同构不变特征都是 (D, E) 的函数。

但那条定理有一个它自己说不出口的前提： **(D, E) 是给定的。**

数学史上真正重要的事件，恰恰是 (D, E) 被换掉的那一刻。没有人把加法当作“给定 D 之后被决定的 S ”——加法是新出现的。分数、负数、幂、对数、方程、函数、微积分、概率、分布、概形，全都是新出现的。第二编管的是“给定之后会怎样”，本编管的是“**为什么会有新的给定**”。

这两问互补，且后者不能由前者推出。决定定理的四条硬边界之二写着“ F 非单射”——同一个 S 可由多条 (D, E) 达到；但它对“新的 (D, E) 从哪里来”一个字都没说。本编填这一格。

本编的回答不是给出一个来源，而是给出一张**通道表与三条判定签名**：新 S 的发生走压缩、目标发生、扩张三条通道的非空组合，每条通道各有一个可以当场判错的签名。给不出签名的分类是文学；能判错的分类才是命题。

三条通道的证据群互不依赖：通道一的证据是小学算术，通道二的证据是数学史上可指认年代的四个事件，通道三的证据从小学的负数一路排到 Grothendieck 的概形。本编最要紧的一句话出现在第十九章——**一年级学的负数与代数 K -理论的 K_0 走的是同一条通道，而且是字面同一条：都是把一个交换么半群群化，都由同一条泛性质唯一确定。**

本编也交出两处诚实：三条通道不互斥（微积分是三条复合的标本），穷尽性未证（范畴论的诞生可能是第四条）。这两处都配了证伪条件。

第十五章 问题：一个新的数学结构从哪里来

一、教科书顺序隐藏了什么

打开任何一本数学教材，概念的出场顺序是固定的：先给定义，再证性质，最后做应用。这个顺序在**教**的意义上无可指摘——它把逻辑依赖排成了一条链，读者可以逐级验证。

但它把一件事彻底藏了起来：**这个定义为什么会出现。**

没有一本代数教材说明分数为什么在整数之后出现，也没有一本分析教材说明分布为什么在函数之后出现。它们只说“现在我们定义……”。于是每一个概念都像是从天上掉下来的，而学生的全部任务是接住它。

第一编已经指出，终态定义会把生成条件与环境条件藏起来。本编要指出更深的一层：**终态定义还把“这个终态是被什么逼出来的”藏了起来。**前者藏的是 D 与 E，后者藏的是 D 与 E 的**更替史**。

二、现有的三种回答，以及它们各自的失效

对“新数学结构从哪里来”这个问题，目前有三类标准回答。

回答一：柏拉图式的发现。数学对象先在于人，人只是逐渐看见它们。分数一直在那里，人类在某个时刻发现了它。

这个回答的失效点在第二编第十三章已经写明：它无法解释可指认的年代。若分数一直在那里，为什么它在某些文明中出现而在另一些中不出现？更关键的是，它把“目标”也当成先存在的——但一个目标是可以被指认出生年份的（第十八章给出四个例子）。发现论对这一点没有语言。

回答二：社会建构。数学结构是共同体约定的产物，随文化而变。

失效点同样明确：它无法解释**收敛**。互不接触的文明各自独立发展出位值制、分数与负数，而且结构几乎相同；十进位与二十进位的选择是约定的，但“需要一个位值制”不是。约定论把可约定的部分（记号）与不可约定的部分（结构压力）混为一谈。

回答三：认知—具身。数学结构来自身体经验的隐喻投射：数来自手指，加法来自聚合，减法来自移走。

这个回答在低层是有效的，在高层立刻失效。没有任何身体经验对应 Grothendieck 的概形、Schwartz 的分布或 Young 测度。而这些恰恰是最重要的那批新结构。

三个回答各自抓住了一段，却都没有给出**机制**：什么条件下旧的东西不够用了，以及“不够用”有几种不同的样子。

三、本编给出的回答形式

本编不打算在上述三条之外再加一条哲学立场。本编给出的是一张表：

新的数学结构 S 的发生，走三条通道的非空组合：

通道一（压缩）——旧 D 在旧 E 上仍然能做，但代价超过阈值；新 S 是对旧 D 的压缩。

通道二（目标发生）——旧 D 不亏损、旧 E 不失紧；变的是有人开始问一个此前不存在的问题。

通道三（扩张）——某一族算子在当前类上不封闭，或某个序列在当前类中没有极限对象；环境被迫扩张，且扩张方向被唯一指定。

三条通道各有一个判定签名（第十六、十八、十九章各给一条），签名可以给出**错误答案**。一个新结构摆在面前，按签名判它走哪条通道，判完之后可以被别人证明判错了——这是本编与“数学结构来自实践/来自直觉/来自需要”这类说法的全部区别。

四、通道与决定定理的关系

必须先说清两者的分工，否则读者会以为本编在重复第二编。

第二编的决定定理管**纵向**：在一次给定的 (D, E) 之内，S 被定到什么程度。本编的三通道管**横向**：(D, E) 本身如何被换成下一组 (D', E')。

两者在一处合龙，而且合得很紧：通道三的“扩张方向被唯一指定”，其唯一性**就是**决定定理里那条泛性质唯一性。第十九章会把这一点写成一张表。这意味着 $S = F(D, E)$ 与 $E = H(S, D)$ 由同一条引理支撑——这是全书结构上最紧的一处接缝，也是本编必须诚实交代的一处让步（第二十章第四节）。

第十六章 通道一：压缩——旧路径的代价超过阈值

一、机制

通道一的机制可以一句话说完：

旧 D 在旧 E 上**仍然做得出来**，但随着 E 的规模上升，代价增长到不可接受；新 S 是一次表示压缩，它把代价降阶，并保证旧 D 的输出可以从新表示中恢复。

要点在“仍然做得出来”。这是通道一与通道三的分界：通道一里旧方法**没有失败**，只是变得昂贵；通道三里旧方法**根本给不出对象**。混淆这两者，是既有文献里最常见的一处错误，本编第十九章将纠正一次具体的误判。

二、七个例子与压缩比

把第一编的概念发生链按代价重排，通道一的签名立刻显形。设规模参数为 n 。

旧 D	任务	旧代价	新 S	新代价	性质
逐一记号	记录数量 N	$\Theta(N)$ 个符号	位值制	$\Theta(\log N)$ 个符号	指数压缩
数数	求 k 组已知数量之和	$\Theta(N)$, N 为总数	加法	$\Theta(k \cdot \log N)$	指数压缩
加法	a 重复 n 次	$\Theta(n)$ 次运算	乘法	$\Theta(1)$ 符号长度	指数压缩
乘法	a 自乘 n 次	$\Theta(n)$ 次乘法	幂	$\Theta(1)$ 符号长度	指数压缩
通分	两个分数比大小	求最小公倍数	小数	逐位对齐 $\Theta(\text{位数})$	局部化
幂	由 $a^x=b$ 求 x	无直接算法，试探	对数	乘法群 $\rightarrow$ 加法群	局部化
有限差分	求瞬时变化率	不可达（只能逼近）	微分	一次求导	见第二十章

前四行是同一件事的四次重演：**把“重复”折叠成“参数”**。逐一记号把 N 个记号折成 $\log N$ 位；加法把“重新数一遍”折成“取已有结果相加”；乘法把“重复加”折成“因子与次数”；幂把“重复乘”折成“底与指数”。每一次折叠都把线性代价降为对数代价或常数符号长度。

第五、六行不同：小数与对数并没有把代价降阶，它们做的是另一件事——**把一个不好算的运算搬到一个它好算的表示里**。通分的困难不在于规模，在于最小公倍数依赖两个分母的算术关系；小数把这一依赖去掉，代价变成纯位数。对数把乘法搬进加法。这一类本章称为**局部化型压缩**，第十七章会说明它为什么必然出现。

第七行是难判例，留到第二十章处理。

三、判定签名 A

据此可以写出通道一的判定签名，三条**同时**满足才算通道一：

签名 A1（代价降阶）. 存在规模参数 n 与任务族，使旧 D 的代价 $C(n)$ 与新 S 的代价 $c(n)$ 满足 $c(n) = o(C(n))$ ；或旧运算在新表示下由非局部变为局部。

签名 A2（可恢复）. 旧 D 的全部输出可由新 S 在不高于 $O(c(n))$ 的代价内恢复。新 S 没有增加可表达的对象，只是把同一批对象表示得更短。

签名 A3 (旧 D 未失败) . 在新 S 出现之前, 旧 D 对每个有限实例都给得出正确答案。

A2 是这条签名的判错开关。 它要求“表达域不变”。若新 S 让原本表示不了的对象变得可表示, 则 A2 为假, 该次发生不是通道一——不论它看上去多么像“旧办法太麻烦了”。

第十九章将用这一条推翻一处流行的归属。

四、通道一为什么是数学教育的主战场

小学到初中的绝大部分内容都落在通道一: 位值制、四则、竖式、九九表、约分、小数、指数律、对数律。这解释了一个长期被误解的现象——**这些内容之所以能被“训练”出来, 正是因为它们是压缩。**压缩有明确的效率指标, 效率可以练。

同时这也划出了训练的边界: 通道二与通道三的内容练不出来。一个学生把分数运算练到极熟, 不会因此更接近理解“为什么需要分数”, 因为分数不走通道一(第十九章)。把三条通道的内容用同一套办法教, 是当前数学教育里一处结构性的错配。这一判断可以被检验: 若把分数按扩张通道教(从“除法在整数上不封闭”入手)而非按压缩通道教(从“分东西太麻烦”入手), 理解指标应有可测的差异。这是本编留给教育研究的一个可证伪预言。

第十七章 压缩的代价: 一条可检验命题

一、压缩不是免费的

第十六章的表里藏着一个规律, 值得单独提出来。

位值制把计数从 $\Theta(N)$ 压到 $\Theta(\log N)$ 。代价是什么? 在逐一记号里, “把两堆合起来”就是把两串记号并排——**完全局部**, 没有任何位与位之间的相互作用。位值制之后, 加法需要**进位**: 某一位的结果可能影响更高位。局部性没有完全丧失, 但已经打了折扣。

再往上一层, 情况更明显。位值制下的加法, 结果的第 i 位只依赖两个加数第 i 位附近有界多位(含进位链); 而位值制下的**乘法不局部**——乘积的第 i 位依赖两个因数所有位的乘积之和。这就是为什么竖式加法是 $\Theta(n)$ 而竖式乘法是 $\Theta(n^2)$, 也是为什么快速乘法必须借道傅里叶变换。

再上一层。幂把重复乘法压成了 $\Theta(1)$ 的符号, 代价是: **加法在幂表示下完全不局部**。 a^m 与 a^n 相加没有任何化简规则; 而在压缩之前, 重复加法与重复乘法都在同一个加法制度里。

于是有：

二、命题 17.1

先给一个工作定义。

定义 17.1（局部）. 设某表示把对象写成符号串。称二元运算。在该表示下**局部**，若结果的第 i 个符号只依赖两个操作数第 i 个符号附近有界多个符号（允许有界长度的进位传播）。

命题 17.1（压缩—局部性权衡）. 一次压缩型发生若把旧 D 的代价降阶，则旧 D 中至少有一个运算在新表示下丧失局部性；恢复该局部性需要一次新的发生——或是又一次表示改造，或是一套新的近似制度。

直观论证. 若旧 D 的全部运算在新表示下都保持局部，则新旧两个表示在局部意义下互相模拟，每一步的代价至多相差常数因子，总代价不可能降阶。降阶必须来自“用更少符号承载同样信息”，而更少的符号意味着单个符号承载了更多原信息，于是原本互不相干的位之间产生了依赖——这正是非局部。■（直观）

[证据分级：命题 17.1 属第二层。上面的论证给出了机制，但“局部”的定义依赖于表示的选取，一个完全严格的陈述需要把“表示”形式化为一类编码并给出信息论式的下界。本书不声称已完成这一步。]

三、三条验证

验证一（位值制 → 竖式乘法与九九表）. 位值制压缩计数，乘法随之非局部。修复方式是发明一套 $D2$ 流程：竖式乘法把非局部的运算拆成 n^2 个局部动作再求和，九九表把最小的那批局部动作制成查表。**九九表不是记忆负担，它是位值制压缩的利息。**

验证二（幂 → 对数）. 幂压缩重复乘法，加法随之在幂表示下彻底非局部。修复方式是对数：把乘法搬进加法，从而在对数表示下乘法重新局部。代价立刻显现——对数值一般不是有理数，表示不再有限，必须引入对数表与近似制度。这一步同时逼出了第十九章要讲的扩张（有理数不够用）。

验证三（小数 → 循环节与实数）. 小数把分数比较局部化，代价是许多分数的小数表示不再有限（ $1/3 = 0.333\cdots$ ）。修复方式是循环节记号；而当循环节也不够用（无理数），逼出的是完备化。

三条验证有同一个形状：**压缩 → 局部性亏损 → $D2$ 流程被发明 → 若 $D2$ 修不好，则逼出下一次扩张。**

四、这条命题解释了什么

它把第一编的一个观察升格为机制。第一编说“新 S 进入新 E 之后需要发明 $D2$ 流程”，那是一句正确的描述，但它没有说明**为什么必然需要**。命题 17.1 给出了理由： $D2$ 不是新 S 的附属品，它是**为修复压缩造成的局部性亏损而被迫发明的**。竖式、通

分、约分、移项、配方、消元、求导法则——每一样都可以按这条线索去问：它在修复哪一次压缩造成的哪一处非局部？

失败标准. 找到一次压缩型发生，其后旧 D 的全部运算仍然局部，且未引入任何新的近似制度或新的 D2 流程。举出这样一例，命题 17.1 即被推翻。

第十八章 通道二：目标发生——一个此前不存在的问题

一、机制

通道二最难被看见，因为它没有留下失败的痕迹。

旧 D 运行正常，旧 E 没有失紧，没有任何东西不够用。变的是：**有人开始问一个此前不是问题的问题。**

第二编第十三章的硬边界之一说过，只有同构不变量才被 (D, E) 决定。通道二处理的是更前面一层：一个对象为什么值得被问。这一层不在任何形式系统内部——形式系统能判定命题的真假，不能判定问题的存在。

二、四个可指认年代的事件

通道二的证据必须是**可指认年代的**，否则它退化为事后叙述。以下四例各自有确定的时间点，说错即可被推翻。

其一，量化问题。 Voronoi 剖分的系统研究始于 1908 年。此后七十年里，“哪一种剖分最好”不是一个数学问题——不是无人有能力问，而是没有任何东西使它成为目标。使它成为目标的是数字通信中“以最少比特换最小失真”这一纠缠土壤；Gersho 于 1979 年把它写成问题。这七十年间，Voronoi 剖分的理论运行良好，没有任何 D3 亏损，也没有任何类不封闭。

其二，五次方程的可解性。 三次、四次的求根公式在十六世纪已经完备，运行良好。伽罗瓦问的不是“怎么解得更快”，而是“有没有”。这是一个关于**方法本身**的问题，它在方法运行顺畅时被提出。

其三，无穷的大小。 无穷集合被使用了两千年，没有出过问题。康托尔问的是“无穷之间有没有大小之分”——一个此前没有人认为是**问题的问题**。

其四，可判定性。 希尔伯特第十问题（1900）问的是丢番图方程有没有通用判定算法。此前，人们一个一个地解方程，从未把“有没有通用办法”当作数学命题。

四例的共同形状：**问题出现时，被问的那个领域正处在良好状态。**

三、判定签名 B

签名 B1（年代可指认）. 存在时间点 t ，在 t 之前该目标不作为数学问题存在，在 t 之后存在；且能指出 t 处的纠缠条件（是什么使它成为目标）。

签名 B2（旧 D 未亏损）. 在 t 之前，相关领域的既有方法对其既有任务给出正确且代价可接受的答案。即签名 A1 为假。

签名 B3（旧 E 未失紧）. 在 t 之前，不存在一族算子在当前类上不封闭，也不存在无极限对象的序列。即第十九章的签名 C1 为假。

这条签名怎么答错. B1 可以被史料推翻——若查出该目标在更早已被明确提出，归属即错。B2 也可以被推翻——若查出旧方法当时确实在亏损，则该次发生实为通道一或复合。B3 同理。

举一例说明它确实能答错：把“负数”归入通道二是很自然的直觉（“人们开始考虑欠债这个新问题”），但 B3 为假——减法在自然数上不封闭是一个早已存在的结构事实，与是否有人问欠债无关。所以负数不走通道二。这在第十九章会被正面处理。

四、通道二与“目标不先在”

通道二在本学派的框架里有一个名字：**目标不先在**。目标不是等待被发现的对象，它在纠缠中被发生出来，而且可以指认年代。

这一条常被误读为相对主义——若目标是被发生出来的，答案是不是也是被发生出来的？不是。**发生的是提问装置，不发生的是装置指向的那个真值**。Gersho 猜想在 1979 年之前不是一个问题；但一旦它是一个问题，BCC 是不是最优就不再取决于任何人。这条界线本书第六编将单独处理，此处只标明：通道二说的是问题的来历，不是答案的来历。

第十九章 通道三：扩张——某一族算子不封闭

一、机制

某一族算子在当前允许类上不封闭，或某个序列在当前类中没有极限对象。为了让对象存在，环境必须扩张；而**扩张的方向由造成不封闭的那一族算子唯一指定**，不是任取。

最后半句是这条通道全部的分量所在。“环境会变”是谁都同意的软话；“环境沿哪个方向变是被唯一决定的”才是一条可检验的规律。

二、一次归属纠正：分数与负数不走通道一

现有的概念发生学文献（包括本书早期稿）把分数、小数、负数一并归入“数系扩张的发生学”，但论证时使用的是通道一的语言：“整数 D 面对不可整除时出现**表达亏损**”。

这里有一处必须切开的混淆：**表达亏损与优化亏损不是一回事**。

- 优化亏损（通道一）：旧 D **做得出来**，只是代价太高。把 7 加 40 遍，做得出来。
- 表达亏损（通道三）：旧 D **根本给不出对象**。在整数里表示 $1/3$ ，不是代价高，是不存在。

用第十六章的签名判：分数的发生**违反签名 A2**（可恢复），因为新 S 让原本表示不了的对象变得可表示，表达域扩大了。A2 为假，故不是通道一。

再用签名 B 判：B3 为假——除法在整数上不封闭，是一个结构事实。故不是通道二。

所以分数走通道三。负数、无理数、复数同理。这一纠正不是术语上的挑剔，它的后果在下一节。

三、扩张的统一表：从一年级到 K-理论

把上一节纠正后的归属与本学派此前在量化问题上得到的扩张选择律并排，得到本编最要紧的一张表。

新 S	哪族算子不封闭	扩到什么	唯一性由什么保证
负数 $\mathbb{Z}$	减法在 $\mathbb{N}$ 上不封闭	$\mathbb{N}$ 的群化	泛性质 (Grothendieck 群)
分数 $\mathbb{Q}$	除法在 $\mathbb{Z}$ 上不封闭	$\mathbb{Z}$ 的分式域	泛性质 (局部化)
无理数 $\mathbb{R}$	Cauchy 列在 $\mathbb{Q}$ 中不收敛	$\mathbb{Q}$ 的完备化	泛性质 (稠密等距嵌入)
复数 $\mathbb{C}$	多项式在 $\mathbb{R}$ 上不分解	$\mathbb{R}$ 的代数闭包	同构意义下唯一
分布 $\mathcal{D}'$	求导在 C^k 上不封闭	试验函数空间的对偶	由求导的对偶唯一
Young 测度	细化振荡在强拓扑无极限	参数化测度 + 弱*拓扑	由振荡族唯一
概形	基变换在簇范畴不封闭	局部环空间上的 Spec	由函子性唯一
局部模式测度	大周期极限在周期	平移不变测度 + 弱*	由失紧算子唯一

新 S	哪族算子不封闭	扩到什么	唯一性由什么保证
	类中不紧	拓扑	

看第一行与最后几行。

$\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的构造是 **Grothendieck 群构造**。把一个交换么半群 $(\mathbb{N}, +)$ 群化，标准做法是取 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 对关系 $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a+d = b+c$ 的商——即“用差对表示差”。这与代数 K-理论中由向量丛的加法么半群构造 K_0 是**同一个构造**，服从**同一条泛性质**：任何从 $\mathbb{N}$ 到群的么半群同态唯一地经过 $\mathbb{Z}$ 分解。

于是本编可以把话说到这个份上：

一年级学的负数，与代数 K-理论的 K_0 ，走的是同一条通道，而且是字面上的同一条：都是把一个交换么半群群化，都由同一条泛性质唯一确定。中间隔着的一百五十年，隔的是**认出这件事**，不是这件事本身。

同样的话适用于分数与局部化、无理数与完备化、分布与对偶。**扩张选择律不是一条关于数学史的观察，它是一批泛性质的共同形状。**

四、判定签名 C

签名 C1（不封闭或不紧）. 存在一族算子 $\mathcal{F}$ 与当前允许类 $\mathcal{A}$ ，使 $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \not\subset \mathcal{A}$ ；或存在 $\mathcal{A}$ 中的序列，其在所需拓扑下无极限对象。

签名 C2（方向被指定）. 扩张后的类 $\mathcal{A}'$ 是 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{F}$ 下的封闭化（或在所需拓扑下的完备化），且 $\mathcal{A}'$ 由一条泛性质在唯一同构下确定。

签名 C3（表达域扩大）. 存在 $\mathcal{A}'$ 中的对象在 $\mathcal{A}$ 中无对应物。即签名 A2 为假。

环境扩张诊断（操作形式）. 若最小化序列或逼近序列在当前允许类中不预紧，识别使其失紧的那一族算子，把该类扩为该族的极限封闭；若扩张后目标泛函不再下半连续，说明扩张方向错误，应退回并寻找另一族失紧算子。

这条诊断有正确答案也有错误答案，因而是本编三条通道中操作性最强的一条。

五、必须交代的一处让步

通道三的唯一性，全部由泛性质提供；而泛性质的唯一性论证，就是第二编第九章决定定理的那三行——两个满足同一泛性质的对象之间有唯一的互逆中介态射。

这意味着两件事，两件都要说。

第一件是好消息： $S = F(D, E)$ 与 $E = H(S, D)$ 由同一条引理支撑，两编在此合龙，全书结构上最紧的一处接缝在这里。

第二件是让步：**通道三本质上是范畴论的**。说“扩张方向被唯一指定”，等于说“该扩张有泛性质”，而这是范畴论一百年来的标准工作方式。本编在通道三上没有提供范畴论之外的东西，只提供了一件事——**把小学算术与现代代数几何放进了同一张表**，从而使这条形状可见。这是组织上的贡献，不是数学上的新定理。本编不打算把它说成后者。

本学派真正的增量在通道一（压缩—局部性权衡，命题 17.1）与通道二（目标发生的年代可指认性）。这两条不是范畴论的，因为范畴论不处理代价，也不处理问题的来历。

第二十章 三通道定理及其两条边界

一、定理

定理 20.1（三通道，分解形式）. 设 S 为一次新发生的数学结构。则 S 的发生可分解为通道一（压缩）、通道二（目标发生）、通道三（扩张）三者的非空组合；每条通道的参与与否，由签名 A 、 B 、 C 分别判定，且判定可以为假。

注意陈述的形式是**分解**，不是**归类**。早期表述写作“走且仅走三条之一”，那是错的，下一节给出反例。

二、边界一：三条不互斥，微积分是标本

微积分的发生同时走三条通道，逐条拆开：

通道一在场。有限差分求变化率，要达到精度 ε 需要的步数随 ε 增长；一次求导则给出闭式。代价降阶，签名 $A1$ 成立。

通道二在场。“瞬时速度”这个目标不是自明的。芝诺悖论表明，在被力学问出来之前，“某一刻的速度”甚至被认为是自相矛盾的。目标的出场年代可指认（十七世纪，与力学问题绑定），签名 $B1$ 成立。

通道三在场。差商序列在有理数中不收敛；极限概念要求完备化，而 ε - δ 与实数构造的最终落定比牛顿莱布尼茨晚了两百年。签名 $C1$ 成立。

所以微积分是（一，二，三）全在场的一次发生。这解释了它为什么难教：**三条通道的内容需要三种不同的教法**，而教材通常只用压缩通道的教法（给公式，练计算）。

第十六章表格最后一行留下的悬案至此了结：微分不是纯压缩，它是复合。

三、边界二：穷尽性未证，且已有一个候选反例

定理 20.1 断言三条通道**足以分解**每一次发生。这一断言目前**没有证明**，本编也不假装有。它的地位是一条经受了检验的经验命题，其证伪条件明确：

证伪条件. 举出一次新数学结构的发生，签名 A、B、C 三者全部为假。

本编自己提出第一个候选：**范畴论的诞生**。

Eilenberg 与 Mac Lane 在 1945 年引入范畴，动机是为了精确定义“自然同构”。为了说清什么叫自然变换，需要函子；为了说清什么叫函子，需要范畴。逐条判：

- 签名 A：没有把任何东西算得更短，A1 为假。
- 签名 B：目标（“自然”这个词是什么意思）确实是新的，B1 似乎成立；但 B2 存疑——当时的代数拓扑并非运行顺畅，“自然”一词被大量使用而无定义，这本身像一种亏损。
- 签名 C：没有一族算子不封闭，也没有序列缺极限。C1 为假。

所以范畴论**要么是纯通道二，要么是三条之外的第四条**——一条可称为“语言层升维”的通道：不是对象不够、不是代价太高、不是问题新，而是**现有的语言说不出一句已经在被使用的话**。

本编不下判断，把它作为穷尽性问题的第一个靶子留在这里。若第四条通道成立，定理 20.1 应改为四通道，而三条签名不受影响——这是分解形式相对于归类形式的好处：加一条通道不推翻已有的判定。

四、边界三：本编不解释“为什么是这一次”

三条通道说明新 S 在什么条件下会发生，不说明它**何时**发生。除法在整数上不封闭，这个事实从整数存在的那一刻起就成立；分数却在特定文明的特定时期才出现。通道三给出的是可能性条件，不是充分条件。

补上这一格需要的是通道二的内容（是什么使它成为目标），而通道二的判定依赖史料。因此本编的解释力有一条明确上限：**它能说清一次发生的机制，说不清它的时刻**。凡在本书中读到“因此 X 必然出现”的句子，都应读作“因此 X 的出现有一条可指认的通道”。

第二十一章 这一编能被怎样推翻

按本书的证据分级纪律，本章把第三编的全部承重项与其失败标准列在一处。

一、逐项分级

项	层级	内容
签名 A1/A2/A3	第一层	定义性的，可直接核对
签名 B1/B2/B3	第二层	B1 依赖史料，可被史料推翻
签名 C1/C2/C3	第一层	C2 的唯一性由泛性质给出，严格
命题 17.1	第二层	机制清楚，“局部”的一般化定义未完成
第十九章统一表	第一层	前四行是标准代数事实，可逐条验算
定理 20.1 分解形式	第二层	分解性经检验，穷尽性未证
分数走通道三的纠正	第一层	由签名 A2 直接判出

二、四条失败标准

失败标准一（针对命题 17.1）. 举出一次压缩型发生，其后旧 D 的全部运算仍局部，且未引入新的 D2 流程或新的近似制度。

失败标准二（针对通道二）. 对第十八章四例中任一例，举出史料证明该目标在所指年代之前已作为明确的数学问题存在；或证明其领域在该年代之前确实处于亏损或失紧状态。

失败标准三（针对通道三的统一表）. 举出表中任一行，其扩张方向不由所列算子族唯一指定——即存在两个互不同构的扩张，同为该族的封闭化且同样满足所需性质。

失败标准四（针对定理 20.1）. 举出一次新结构的发生，签名 A、B、C 三者全部为假，且不能归入第二十章第三节所述的第四条通道。

三、与第二编的自我限定对齐

第二编第十四章交代过：决定定理本身不是本学派的贡献，泛性质的唯一性是范畴论的常识；本学派的增量在**归属**——把 S 的每条特征指认给 D 或 E，并预言换 E 后哪条翻面。

第三编的自我限定与之平行，且更严：通道三是范畴论的（第十九章第五节已交代）；通道一与通道二不是，但通道一的核心命题只到第二层，通道二依赖史料。因此本编的贡献可以精确地写成两句：

一、把压缩、目标发生、扩张三种机制分开，并各配一条能判错的签名——从而使“新数学结构从哪里来”这个问题第一次可以被逐例判定，而不是被整体叙述。

二、把小学算术的负数与代数 K-理论的 K_0 放进同一张表，指出它们服从同一条泛性质——这一条不是新定理，是一次归并。

不多不少，就是这两句。第四编将转向本书唯一“立”的部分：相容性公理与伞模型，那一编要给出的是一条带条件、带常数、带收敛率的定理。

[本编与其他编的接口] 第二编第九章（决定定理三行证明）→ 本编第十九章第五节（通道三的唯一性即此证明）。本编第十七章（局部性亏损逼出 D_2 ）→ 第一编概念发生链（竖式、通分、约分的由来）。本编第十八章（目标发生）→ 第六编（什么在发生、什么不在）。本编第十九章（环境扩张诊断）→ 第五编（菲尔兹奖各届统一问句：这一届走哪条通道）。

第四编 构造：相容性公理与伞模型

编首语

前三编都在破。第二编破的是“对象的特征自带在对象里”，第三编破的是“新概念从天上掉下来”。破得再干净，读者合上书时手里仍然是空的——他知道了不该怎么想，不知道该拿什么去算。

本编是全书唯一“立”的一编。它要交出一个可以真正拿去算的东西：一条带条件、带常数、带收敛率的定理，以及从它派生的一条诊断规则。

路线是这样的。第二十二章指出，传统离散数学里有一条从未被写下来的公理——**邻域不重叠**。它没有被写下来，不是因为疏忽，是因为它不是被假设带进来的，而是被表示带进来的（这正是第十七章命题 17.1 说的那种代价）。第二十三章把它陈述成两条，并给出三个失效现场。第二十四、二十五章造替代品：**伞**（带权、可重叠的邻域）与**共振算子**。第二十六章给出**退化定理**——经典微积分是伞模型在 $r \rightarrow 0$ 的极限，常数显式、收敛率 $O(r^2)$ 、条件写明，并附两个互不依赖的验算。第二十七章给出本编真正的产出：**体积量与跳变量在退化中分道**，据此得到一条诊断，说明一个问题在什么条件下会被经典表述结构性地看不见。第二十八章交代这一编能被怎样推翻，并划清哪些是已有数学、哪些是本书的增量。

关于后一件，本编开篇就把话说在前面：**第二十六章的退化定理不是新数学**。非局部算子向局部算子的收敛，在非局部向量微积分、peridynamics、图 Laplacian 收敛这三支文献里都是标准结果，其中非局部向量微积分正是

Du、Gunzburger、Lehoucq、Zhou 一系工作的内容。本书重新给出它的完整证明，是为了让常数与收敛率对读者透明，不是为了宣称首创。本编的增量在第二十二、二十三、二十七章：**给那条隐蔽公理命名，指出它是表示的产物，并把退化定理反过来当诊断用。**

第二十二章 一条从未被写下来的公理

一、从一个不被追问的动作说起

做数值计算的人每天都在做同一个动作：把区域切开。有限元把它切成单元，有限体积把它切成控制体，Voronoi 把它切成胞，网格把它切成格子。切开之后，每个块上算一次，最后加起来。

这个动作从来没有人要求过论证。它看上去不是一个假设，而是"把问题写下来"这件事本身。

但它是一个假设。

这条假设不是本书发现的。姊妹卷《SDE 数学导论（修订版）》（德麦国际专著第 53 号）已经把它命名为**相容性公理**，并写成**六重约束**：conforming 网格、合法中间态、质量单调性、确定性、可审计性、固定点收敛；该书第一编证明这六条不是数学必然而是物理假设，并以 Santos 定理给出它的不完备性。

本书沿用那个名字，并只取其中与本编主题直接相关的两条粗化形式：

切开的块互不重叠。每个块只跟它的直接邻居打交道。

第一条是分割的定义，第二条是局域性。两条合起来，本书称为**相容性公理**。

二、为什么它从未被写下来

一条公理若长期无人写下，通常有两种原因：它太显然，或者它根本不是从假设那一侧进来的。相容性属于后者。

回到第十七章的命题 17.1：一次压缩必然使某个运算丧失局部性，而修复局部性需要新的流程或新的表示。分割正是这种修复的一种。把连续区域压缩成有限个数（离散化），代价是原本处处成立的微分关系不再局部；修复方式是**规定一套不重叠的块，让每个块内部自治、块与块之间只在界面上交接**。局部性由此被人工恢复。

所以相容性不是有人主张的观点，是**离散化这个动作自带的附赠品**。它随表示进来，不随假设进来。这解释了它为什么从未被写下来——没有人主张过它，因此也没有人想到要为其辩护。

[证据分级：本节属第三层。它是一条解释性判断，不是可验算的命题。可被推翻的方式是找出一支离散数学传统，其离散化不伴随不重叠假设，且不需要以其他方式恢复局部性。]

三、不写下来的代价

一条未被写下的假设有一个特别的危险：它不会出现在任何一份"本方法的适用条件"里。

于是当一个方法失败时，人们会去检查它写下来的每一条假设，检查完了发现都满足，便得出结论"这是技术困难，估计还不够精细"。而真正的病灶在那条没有被写下来的假设上，它从不进入排查名单。

本书第三编第十九章已经给过一次这种纠正的样本：分数被长期归入"整数不够用所以要扩张"的通道一叙述，直到用签名 A2 一判才发现表达域变了。相容性公理的情形更隐蔽，因为它连一句叙述都没有。

第二十三章 相容性公理的陈述，与它失效的三个现场

一、陈述

相容性公理. 设 Ω 是被研究的区域。传统离散表述隐含假设：存在一族子集 $\{c_i\}$ 使得

（不重叠） $c_i \cap c_j$ 至多是零测集，且 $\cup c_i = \Omega$ ；（局域）定义在 Ω 上的量可以写成逐块的量之和，块与块之间的耦合只通过共享的界面发生，且界面上的耦合只依赖两侧有界多个块的信息。

这两条覆盖了绝大部分离散几何与数值方法的默认设置：三角剖分、Voronoi 剖分、有限元、有限体积、图上的 Laplacian、逐胞求和、逐单元质量指标。

二、失效现场一：数据本身是重叠的

无网格方法（SPH、移动最小二乘）从一开始就不满足不重叠——它们用的是**带重叠支撑的核**，每个粒子的影响域覆盖多个邻居的影响域。这不是这些方法的缺陷，是它们的立身之本：正因为支撑重叠，函数才能在不铺网格的情况下保持光滑。

这里的启发是反向的：**已经有一整支数值分析放弃了相容性公理，并且工作得很好。**那么问题不是"能不能放弃"，而是"放弃之后剩下什么"。本编第二十六章要回答的正是这一句。

三、失效现场二：承重的量长在界面上

第三编第十九章提到的量化问题是这一现场最干净的样本。那里的能量被写成逐胞求和，而逐胞求和正是相容性公理的直接后果。本书姊妹卷已经证明：**在这一写法下存在一个天花板，它严格低于目标值，因而这一整类论证在原理上无法闭合，不论后续估计做得多精细。**

这个结论的形状可以脱离那个具体问题来讲：若一个问题的承重信息长在**块与块的交接处**，而表述规定了信息只能逐块登记，那么承重信息在登记之前就已经丢了。第二十七章会把这句话变成一条有条件的命题。

四、失效现场三：局域性本身是被假的

图上的 Laplacian 假设一个点只与它的邻居耦合。当被研究的对象本身有长程结构时——蛋白质的空间接触、地震波在非均匀介质中的传播、多尺度材料——“邻居”这个概念要么需要人为规定一个截断，要么根本不成立。截断半径是一个自由参数，而结论常常对它敏感。

这三个现场的共同形状：**不是方法算错了，是问题在被写下来的那一步就已经被改掉了。**

五、SDE 数：离相容有多远

据此可以定义一个量，用来回答“某个问题离相容性公理有多远”。

△ 与第 53 号的 SDE 数划界，先说在前面。专著第 53 号已定义一个无量纲的 SDE 数 $N = r \cdot \omega / (v \cdot T_c)$ (r 半径、 ω 重叠度、 v 传播速度、 T_c 特征时间)，用以判断系统处在秩序态、介生态还是混沌态。**本节要定义的 δ 不是那个 N ，两者不可混用：** N 量的是伞场自身的相位， δ 量的是某个具体问题的承重泛函中有多少不能被逐块写出。二者可并用，但回答的是两个问题。为免歧义，本书此后一律称 δ 为**盲缺口比**，不称“SDE 数”。

定义 23.1 (盲缺口比 δ ，工作定义) . 设问题的承重泛函为 E 。令 E 在给定表示下的**逐块可写部分**为 E_{vol} ，其余部分为 $E_{\text{int}} = E - E_{\text{vol}}$ 。称比值

$$\delta(E) := |E_{\text{int}}| / |E|$$

为该问题在该表示下的**盲缺口比**。 $\delta = 0$ 表示问题完全相容，逐块表述无损； δ 越大，相容性公理造成的信息损失越大。

这只是一个工作定义——它依赖表示的选取，且 E_{vol} 与 E_{int} 的划分不唯一。把它做成一个良定的不变量是本编未完成的工作，第二十八章会把它列为公开问题。但即使是工作定义，它已经能提出一个可回答的问题：**给定一个问题，先算它的 δ ，再决定用不用逐块方法。**

第二十四章 伞：定义与伞场

一、定义

定义 24.1 (伞) . 一把伞是一个三元组 (x, ω, r) ：中心 $x \in \mathbb{R}^d$ ，半径 $r > 0$ ，权函数 $\omega: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ ，满足 $\omega(y) = 0$ 当 $|y - x| > r$ 。

定义 24.2 (伞场) . 伞场是一族伞 $\{(x_i, \omega_i, r_i)\}$ ，允许 ω_i 与 ω_j 的支撑重叠。若进一步要求

$$\sum_i \omega_i(y) = 1 \text{ 对几乎所有 } y \in \Omega$$

则称该伞场为**单位分解型**的。

本书的伞是第 53 号那个伞的单参数截面。第 53 号的伞带三个参数——半径 r 、重叠度 ω 、传播速度 v ——并由 $N = r \cdot \omega / (v \cdot T_c)$ 判相；在那里，传统数学是 $r \rightarrow 0$ 、 $\omega = 1$ 、 $v \rightarrow \infty$ 的三重退化。本书只动其中一重 ($r \rightarrow 0$)，把 ω 与 v 固定，换来的是一条带显式常数与收敛率的定理（第二十六章）。**这是一次收窄，不是一次推广**，读者不应把本编当作伞模型的完整陈述。

单位分解不是相容性的恢复，是相容性的**连续松弛**：剖分要求每个点属于且只属于一个块（权只能取 0 或 1），单位分解只要求权之和为一（权可以在多把伞之间分配）。剖分是单位分解的一个特例——把权限制在 $\{0,1\}$ 上。

这一句是整编的枢纽：

伞不是对剖分的否定，是把剖分的取值域从 $\{0,1\}$ 放宽到 $[0,1]$ 。

所有基于剖分的经典结论都保留在伞的世界里，作为权取端点的那一层；新增的是权取内点的那一层。

二、为什么叫伞

雨伞的两个性质恰好对应所需的两条：它有一个中心（伞柄）与一片有限的覆盖（伞面），并且**两把伞可以叠在一起而不必打架**——重叠区被两把伞同时遮住，不需要划一条线把它分给谁。

划一条线把重叠区分给谁，正是相容性公理要求做的事。伞的做法是不划。

三、伞与既有对象的关系

必须说清楚，伞不是一个新对象。它在既有文献中已有多个名字：

既有名字	出处	与伞的关系
核函数 / 光滑核	核密度估计、SPH	单把伞的权函数
单位分解	微分几何、有限元	单位分解型伞场
有限覆盖	拓扑	去掉权的伞场

既有名字	出处	与伞的关系
影响域	无网格法	伞的支撑
非局部相互作用核	非局部向量微积分、peridynamics	伞的权函数

本编取"伞"这个名字，不是因为对象是新的，而是因为需要一个词把上面五行**当成同一件事**来谈，并且把它与它所替代的那条公理放在同一句话里。命名的功能是让对照可见，不是宣称发现。

第二十五章 共振算子

一、从邻接差分到共振

在剖分的世界里，二阶算子写成邻接差分：

$$\mathcal{L}u(x_i) = \sum_{j \sim i} w(ij) (u(x_j) - u(x_i))$$

求和跑遍 i 的直接邻居。谁是邻居由剖分决定，因此这个算子的全部结构都建立在相容性公理上。

伞的世界里没有"直接邻居"这个概念——两把伞要么重叠，要么不重叠，重叠有多少是连续的。相应的算子必须对**全部重叠**求和，而重叠的程度由权决定：

定义 25.1 (共振算子) . 设 $J: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 有界、支撑在 $[0,1]$ 内、不恒为零。定义

$$(\mathcal{L}_r u)(x) = \int \mathbf{r}^{-(d+2)} J(|x-y|/r) \cdot (u(y) - u(x)) \, dy$$

积分跑遍 $\mathbb{R}^d$ 。称 $\mathcal{L}_r$ 为半径 r 、型 J 的共振算子。

二、为什么叫共振

在邻接差分里， x 与 y 之间只有"是不是邻居"这一个比特。在共振算子里， x 与 y 之间的耦合强度是 $J(|x-y|/r)$ ——一个连续的量，表示两把伞重叠得多深。重叠得深，两点的差异被强烈地共同响应；重叠得浅，响应弱；不重叠，不响应。

这与本学派"纠缠"这个词的用法一致：不是先有两端再连线，而是两端被相互牵动的程度本身就是结构。共振算子把这一点写成了一个可计算的核。

三、归一化的选择

指数 $-(d+2)$ 不是任意的，它是**唯一使 $r \rightarrow 0$ 极限非平凡的选择**。

- 若用 $r^{-(d)}$ ：积分的二阶项带因子 r^2 ，极限为 0，算子退化为零。

- 若用 $r^{-(d-4)}$ ：二阶项带因子 r^{-2} ，极限发散。
- 用 $r^{-(d-2)}$ ：二阶项不带 r ，极限有限且非零。

这一段初等观察就是下一章那条定理的全部动机：**归一化指数是被"要一个非平凡极限"这个要求唯一逼出来的。**用第三编的语言说，这是一次通道三——指数不是选的，是被失紧唯一指定的。

第二十六章 退化定理

一、陈述

定理 26.1 (退化定理) . 设 $J: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 有界、支撑在 $[0, 1]$ 内，记

$$M_2 = \int J(|w|) |w|^2 dw, \quad M_4 = \int J(|w|) |w|^4 dw,$$

二者均有限。令

$$c = M_2 / (2d).$$

则对任何 $u \in C^4(\mathbb{R}^d)$ 且四阶导数有界，有

$$\| \mathcal{L}_r u - c \cdot \Delta u \|_\infty \leq (M_4 / 24) \cdot \| D^4 u \|_\infty \cdot r^2 \quad \text{对一切 } r > 0.$$

特别地， $\mathcal{L}_r u \rightarrow c \cdot \Delta u$ 一致收敛，收敛率 $O(r^2)$ 。

二、证明

在 x 处展开 $u(y)$ ，令 $z = y - x$ ：

$$u(x+z) - u(x) = \nabla u(x) \cdot z + \frac{1}{2} z^T D^2 u(x) z + (1/6) D^3 u(x)[z, z, z] + R_4(z),$$

其中 $|R_4(z)| \leq (1/24) \| D^4 u \|_\infty |z|^4$ 。

代入定义并作变量替换 $z = r w$ ($dz = r^d dw$)：

$$\mathcal{L}_r u(x) = \int r^{-(d-2)} J(|z|/r) (u(x+z) - u(x)) dz = \int r^{-(d-2)} J(|w|) (u(x+rw) - u(x)) dw.$$

一阶项. $\int J(|w|) \nabla u \cdot (rw) dw \cdot r^{-(d-2)} = r^{-(d-1)} \nabla u \cdot \int J(|w|) w dw = 0$ ，因为 J 径向对称故 w 的一次矩为零。

二阶项. $r^{-(d-2)} \cdot \frac{1}{2} \int J(|w|) (rw)^T D^2 u(rw) dw = \frac{1}{2} \int J(|w|) w^T D^2 u w dw$ 。由径向对称，

$$\int J(|w|) w_i w_j dw = \delta(ij) \cdot (1/d) \int J(|w|) |w|^2 dw = \delta(ij) M_2 / d,$$

故二阶项 $= \frac{1}{2} \cdot (M_2/d) \cdot \text{tr}(D^2 u) = (M_2 / 2d) \cdot \Delta u = c \cdot \Delta u$ 。

三阶项. 被积函数是 w 的奇次齐次式，径向对称下积分为零。

余项. $|r^{(-2)} \int J(|w|) R_4(rw) dw| \leq r^{(-2)} \cdot (1/24) \|D^4 u\|_\infty \cdot r^4 \int J(|w|)|w|^4 dw = (M_4/24) \|D^4 u\|_\infty r^2$ 。 ■

三、显式常数：以指示核为例

取 $J = \mathbb{1}_{[0,1]}$ （即在半径 r 的球内均匀加权）。记 $\sigma(d) = 2\pi^{(d/2)}/\Gamma(d/2)$ 为单位球面面积，则

$M_2 = \sigma(d) / (d+2)$, **$c = \sigma(d) / (2d(d+2))$** , $M_4 = \sigma(d) / (d+4)$.

维数	c 的封闭形式	数值
$d = 1$	$1/3$	0.333333333333
$d = 2$	$\pi/8$	0.392699081699
$d = 3$	$2\pi/15$	0.418879020479

四、验算一：精确乘子（解析）

取 $d = 3$ 、 $J = \mathbb{1}_{[0,1]}$ 、 $u(x) = e^{(i k \cdot x)}$ 。由球内指数积分的闭式 $\int (|w| \leq 1) e^{(i \xi \cdot w)} dw = 4\pi(\sin|\xi| - |\xi|\cos|\xi|)/|\xi|^3$ ，得共振算子的乘子

$m(r) = r^{(-2)} [4\pi(\sin t - t \cos t)/t^3 - 4\pi/3]$, $t = r|k|$.

把 $\sin t - t \cos t = t^3/3 - t^5/30 + t^7/840 - \dots$ 代入并整理：

$m(r) = -(2\pi/15)|k|^2 + (\pi/210) r^2|k|^4 - \dots$

第一项恰为 $c \cdot \Delta$ 的乘子 $-c|k|^2$ ，验证 **$c = 2\pi/15$** ；第二项给出误差的**精确**首项 $(\pi/210) r^2|k|^4$ 。取 $|k| = 2$ 计算：

r	$m(r)$	$-c k ^2$	误差	预测	比值
0.400	-1.63766	-1.67551	3.785e-0	3.830e-0	0.988234
	9	6	2	2	
0.200	-1.66597	-1.67551	9.546e-0	9.574e-0	0.997042
	0	6	3	3	
0.100	-1.67312	-1.67551	2.392e-0	2.394e-0	0.999260
	4	6	3	3	
0.050	-1.67491	-1.67551	5.983e-0	5.984e-0	0.999815
	8	6	4	4	
0.025	-1.67536	-1.67551	1.496e-0	1.496e-0	0.999951
	6	6	4	4	

比值单调趋于 1，确认误差的阶与常数都对。同时可核对定理给出的上界： $M_4/24 \cdot \|D^4u\|$ 在此情形化为 $(1/24) \cdot (4\pi/35)|k|^4 = (\pi/210)|k|^4$ ，与精确首项**逐字相同**——即定理 26.1 的常数在指示核与指数函数上是紧的。

五、验算二：对偶蒙特卡罗（与验算一互不依赖）

取 $d=3$ 、 $J=\mathbb{I}[0,1]$ 、 $u(x) = \sin x_1 \cos x_2 + x_3^3$ 、 $x=(0.3, 0.2, 0.1)$ ，用对偶采样 $(z, -z)$ 消去奇次项后直接数值积分（ 4×10^6 样本）：

r	$\mathcal{L}_ru$	$c \cdot \Delta u$	误差	收敛阶
0.400	0.01142896 8	0.00868798 9	2.741e-03	—
0.200	0.00936516 9	0.00868798 9	6.772e-04	2.017
0.100	0.00884634 6	0.00868798 9	1.584e-04	2.096
0.050	0.00871646 1	0.00868798 9	2.847e-05	（抽样噪声 主导）

前两个收敛阶 2.017 与 2.096 独立确认 $O(r^2)$ 。 r 更小时误差已降到 10^{-5} 量级，蒙特卡罗噪声开始主导，此时的阶数不再可读——这一行保留在表中，是为了说明数值方法自身的有效范围，而不是为了充数。

[证据分级：定理 26.1 属第一层，证明不依赖任何计算。第三节的常数属第一层（封闭形式）。第四节属第一层（解析展开）。第五节属第三层（数值），其作用是独立佐证，不承重。]

六、推论：经典微积分是伞模型的一个极限

推论 26.2. 在 J 与正则性条件下，经典二阶微分算子是共振算子族 $\{\mathcal{L}_r\}$ 在 $r \rightarrow 0$ 时的极限，且差异为 $O(r^2)$ 。

把它放回第 53 号的框架：那里说传统数学是 $r \rightarrow 0$ 、 $\omega=1$ 、 $v \rightarrow \infty$ 的**三重退化**，本推论给出的是**其中 $r \rightarrow 0$ 那一重的定量版本**——带条件、带显式常数、带 $O(r^2)$ 收敛率。另外两重（ ω 与 v ）本书未处理。

这句话的意义不在于“经典理论被包含了”——那只是一个包含关系，本身不产生任何新东西。意义在于它的**逆用**：

既然经典理论是 $r \rightarrow 0$ 的那一层，那么在 $r \rightarrow 0$ 中被抹去的一切，经典理论**结构性地看不见**。

下一章处理的就是“被抹去的是什么”。

第二十七章 退化中丢失的：体积量与跳变量的分道

一、两类量

在伞场上，一个泛函可以分成两部分：

- **体积量** V_r ：只用单把伞内部的信息，形如 $\sum_i \int \omega_i(y) f(u(y), \nabla u(y)) dy$ 。
- **跳变量** I_r ：只用伞与伞重叠区的信息，形如 $\sum(i,j) \int \omega_i \omega_j \cdot g(u|_i - u|_j)$ 。

剖分是伞的端点特例，在那里重叠区是零测的界面，跳变量退化为界面上的求和——这正是有限体积法里的通量项、逐胞结算里的接口项。

二、命题 27.1（分道）

命题 27.1. 设 $u \in C^1$ 且 ∇u 有界， g 为 p 次正齐次 ($g(\lambda s) = \lambda^p g(s)$)，伞场半径 r 、每单位体积伞数 $\sim r^{-(d)}$ 。则当 $r \rightarrow 0$ ：

(i) $V_r \rightarrow$ 经典体积积分，误差 $O(r^2)$ (定理 26.1)； (ii) $I_r \sim C \cdot r^{(p-d)}$ ，因而 **$p > d$ 时 $I_r \rightarrow 0$** ：跳变信息在经典极限中被抹去； **$p = d$ 时 $I_r \rightarrow$ 有限非零**：跳变信息在极限中存活为一个新项； **$p < d$ 时 $I_r \rightarrow \infty$** ：经典极限不存在。

论证. 单位体积内伞的数目为 $\Theta(r^{-(d)})$ ，每把伞的重叠伙伴数为 $O(1)$ 。对 $u \in C^1$ ，相邻两伞中心相距 $O(r)$ ，故 $u|_i - u|_j = O(r|\nabla u|)$ 。 g 的 p 次齐次性给出每对贡献 $O(r^p)$ 。求和得 $I_r = O(r^{-(d)} \cdot r^p) = O(r^{(p-d)})$ 。三分立即得出。■

[证据分级：属第二层。它是一条标度论证，量级正确、常数未给。临界情形 $p = d$ 的极限值与其存在性条件，属于非局部泛函向局部泛函收敛的既有理论范围

(Bourgain–Brezis–Mironescu 一系结果与其后续)，本书不重复那里的分析。]

三、这条命题说了什么

它说的是一件很硬的事：

在经典 ($r=0$) 表述中，只有临界齐次度 $p = d$ 的跳变信息能够存活。齐次度高于 d 的跳变信息在极限中恒为零——不是小，是零。

于是有：

推论 27.2（结构性失明）. 若一个问题的承重信息是齐次度 $p > d$ 的跳变量，则任何在 $r=0$ 上写出的表述都对它恒等失明，无论后续估计做得多精细。

这一句给出了本书姊妹卷那条不可能性结论的一般形状。那里的具体情形是：能量被写成逐胞求和（ $r=0$ ，跳变项被丢弃），因而存在一个天花板严格低于目标值。**天花板不是估计不够好造成的，是那一项在写下表述的那一刻就已经是零了。**

四、诊断规则

据此，第二十三章的 SDE 数获得一个可操作的用法：

失明判据. 面对一个问题，先做三件事：一、把承重泛函按体积量与跳变量分开；二、算跳变量的齐次度 p 与维数 d ；三、若 $p > d$ ，则逐块（ $r=0$ ）方法对该问题的承重部分恒等失明，应改用带重叠的表述，或把结算面迁到重叠区上。

这条规则有正确答案与错误答案，因而是可用的。它同时也解释了为什么二维与三维会有截然不同的表现—— **d 变了，临界齐次度就变了**，同一个 p 可能在二维处于临界之下、在三维处于临界之上。

五、与第三编的接口

第三编第十九章说过：扩张的方向由造成失紧的那一族算子唯一指定。本编给出了一个具体实例——共振算子的归一化指数 $-(d+2)$ 就是这样被唯一指定的（第二十五章第三节）。而第二十七章的分道给出了扩张的**代价表**：扩张之后哪些信息被保住、哪些被丢掉，按齐次度分三档，一目了然。

三编的关系至此完整：第二编说给定 (D, E) 之后 S 被定到什么程度；第三编说 (D, E) 怎样被换成下一组；第四编说换完之后，**旧的那一组究竟丢了什么。**

第二十八章 这一编能被怎样推翻

一、逐项分级与归属

项	层级	是否本书增量
相容性公理的陈述与命名	—	否——第 53 号已命名并写成六重约束 ；本书只取两条粗化形式
伞与伞场（定义 24.1、24.2）	第一层（定义）	否——是既有五类对象的统一写法
共振算子（定义 25.1）	第一层（定义）	否——即非局部相互作用算子
归一化指数被唯一指定	第一层	否——标准标度分析
定理 26.1 退化定理	第一层	否——已知结果 ；窄增量＝

项	层级	是否本书增量
		给第 53 号「三重退化」中的 $r \rightarrow 0$ 一重补上显式常数与 $O(r^2)$ 收敛率
常数表 ($d=1,2,3$) 与精确乘子验算	第一层	否 (计算)，但本书首次并列给出
命题 27.1 分道三分	第二层	部分——标度是标准的，三分作为诊断是本书的
推论 27.2 结构性失明	第二层	是
失明判据	第二层	是
盲缺口比 $\delta(E)$	工作定义	是 (与第 53 号的无量纲 SDE 数 N 是两个量，已于第二十三章划界)

必须再说一次，因为这是本编最容易被攻击的地方：**退化定理不是新数学**。非局部算子向局部算子的收敛，在下述三支文献里都是标准内容——非局部向量微积分

(Du、Gunzburger、Lehoucq、Zhou 一系)、peridynamics 的极限分析、图 Laplacian 向 Laplace–Beltrami 算子的收敛 (Belkin–Niyogi 一系)。任何以本编为基础的投稿都必须完整引用这三支，否则会被正确地判为重复工作。

还有一处必须写在明处，它比上一段更要紧。相容性公理不是本书命名的——专著第 53 号已经命名，写成六重约束，并证明那六条是物理假设而非数学必然。本书早期稿曾把“给它命名”记作本编增量，那是错的，已在第二十二章与上表中改正。

本编的增量只有两项：把退化定理反过来当诊断 (在 $r \rightarrow 0$ 中被抹去的，经典表述结构性地看不见)；由此得到分道三分与失明判据。另有一项半：给第 53 号「三重退化」中的 $r \rightarrow 0$ 那一重补上显式常数与收敛率——那是把一条既有陈述做定量，不是新机制。

二、四条失败标准

失败标准一 (针对定理 26.1) . 举出满足 J 的条件与 $u \in C^4$ 的一例，使 $\|\mathcal{L}_r u - c\Delta u\|_\infty / r^2$ 随 $r \rightarrow 0$ 无界。第四节的精确乘子说明这在指示核上不会发生；推翻它需要构造另一族 J 。

失败标准二 (针对命题 27.1) . 举出一个伞场与一个 p 次齐次 g ，使 I_r 的量级不是 r^{p-d} ——例如重叠伙伴数不是 $O(1)$ 的伞场。这也正是命题成立所需条件的边界：**若伞场的重叠度随 $r \rightarrow 0$ 增长，三分不成立**。这是一条真实的限制，不是形式上的免责。

失败标准三 (针对推论 27.2) . 举出一个问题，其承重信息为 $p > d$ 的跳变量，而某个 $r = 0$ 的表述仍然抓住了它。

失败标准四（针对相容性公理的定位） . 举出一支离散数学传统，其离散化不伴随不重叠假设，且不需要以其他方式恢复局部性——即第二十二章第二节的解释不成立。

三、三个公开问题

问题一（SDE 数的良定化） . 定义 23.1 的 $\delta(E)$ 依赖表示的选取与 V/I 的划分方式。是否存在一个取遍所有容许表示的下确界，使 δ 成为问题本身的不变量？若存在， $\delta = 0$ 是否恰好刻画"逐块方法充分"这一类问题？

问题二（临界情形的显式极限） . 在 $p = d$ 的临界档， I_r 的极限是一个什么样的泛函？其常数由 J 的哪个矩决定？

问题三（最小充分结算面） . 给定一个问题，是否存在唯一的最小重叠半径 r^* ，使得半径 $\geq r^*$ 的伞场能抓住全部承重信息而 $r < r^*$ 不能？这是全书最重要的一个未决问题，它把"结算面选在哪里"从一条经验规则变成一个可求的量。

四、这一编在全书中的位置

前三编告诉读者不要相信什么，本编第一次交出一个可以拿去算的东西。但要诚实：**它交出的分量比它的位置所暗示的要小**。一条已知定理的重证、一条标度三分、一条诊断规则——加起来不构成一门新的微积分。原典把"伞场微积分"列为一件待锻造的武器，本编只完成了它的地基与一条诊断，没有完成那件武器本身。

第五编将转向九十年菲尔兹奖，用第三编的三条通道去读它；第六编回到边界，交代什么在发生、什么不在。

【本编与其他编的接口】 第十七章命题 17.1（压缩→局部性亏损）→ 第二十二章第二节（相容性是修复局部性的代价）。第十九章扩张选择律 → 第二十五章第三节（归一化指数被唯一指定）。第二十六章退化定理 → 第二十七章分道 → 姊妹卷的逐胞天花板。第二十七章失明判据 → 第六编（可检验问题清单）。

第五编 九十年数学典范的发生迁移

编首语

本编把 1936 至 2026 年的菲尔兹奖工作放在一条时间轴上，用第三编的三条通道去读。

这一编在本书里的位置需要先说清楚：**它是证据，不是论证**。前四编的四条主线——决定定理、三通道、退化定理、失明判据——不依赖本编中任何一句史料。若本编的全部历史判断都被推翻，前四编一字不改。反过来，本编若成立，它提供的是一个九十

年跨度上的分布检验：一条只在几个精心挑选的例子成立的分类，与一条在九十年二十一届上都能给出判定的分类，可信度不同。

本编也有一条必须先立的自我限制。菲尔兹奖表彰的常常是“解决了一个老问题”，而三通道分类的对象是“一次新结构的发生”，两者不重合。有若干届的工作，是用已有的结构解决了一个此前已经存在的问题——那些届在三通道表里没有位置。这不是分类失败，是它们不属于分类的对象域。第四十章会给出这一条的统计。

最后，本编在写作时发现了一件超出预期的事：第三编第二十章曾把“范畴论的诞生”列为第四条通道的唯一候选，理由是它既没有压缩什么，也没有一族算子不封闭，而是现有的语言说不出一句已经在被使用的话。走完九十年之后，这样的候选不止一个。第四十章会把它们列出来。这是本编对第三编那个开放问题的唯一实质推进。

[证据分级：本编整体属第三层。逐条历史判断依赖史料，可被史料推翻；第四十章的分布统计随之可变。]

第二十九章 这一编怎么读：一张三选一的表

一、旧读法的毛病

把SDE用在数学史上，最容易做成的样子是三段填空：这一届的S是什么、D是什么、E是什么。

三段填空有一个致命毛病——**没有错误答案**。任何一项数学工作都有它的对象、它的方法、它的背景，把它们分别填进三个格子，永远填得出来，而且填完之后，删掉S、D、E三个字母，叙述一字不变。

一份删掉标签后不变的叙述，说明标签什么也没做。

二、新读法

本编改用一个问句：

这一届的工作，走的是哪一条通道？

答案三选一（或标为复合、或标为不属于对象域），判定用第三编的三条签名：

签名A（压缩）：旧办法做得出来但代价不可接受；新结构把代价降阶或把非局部运算局部化；**表达域不变**。**签名B（目标发生）**：旧办法不亏损、旧环境不失紧；变的是有人开始问一个此前不存在的问题；年代可指认。**签名C（扩张）**：某族算子在当前类上不封闭，或某序列在当前类中无极限对象；扩张方向由失紧算子唯一指定；**表达域扩大**。

这个问句有正确答案与错误答案。若我判某一届走通道三而实际上该领域当时并无任何不封闭现象，我就判错了，而且可以被查出来。

三、三条使用纪律

其一，先问对象域。若这一届的工作是“用已有结构解决一个已存在的问题”，则它不在三通道的对象域内，应当标为**解决型**，不要硬塞进三条通道。判据很简单：被解决的那个问题是否在此之前已被明确提出？

其二，允许复合。第三编第二十章已说明三条通道不互斥，微积分是三条同时在场的标本。历史上的复合更常见，不是例外。

其三，允许判不出来。有若干届本编标为“难判”，并写明难在哪里。**一张没有难判项的分类表是可疑的**——它多半是在事后为每个案例挑一个听上去合适的标签。

四、本编不做什么

本编不写人物小传，不复述获奖理由，不比较不同工作的重要性。这些在数学史的专门著作里都有，本书不重复。

本编只做一件事：**逐届给出通道判定与判定的理由，使读者可以逐条反驳。**

第三十章 1936–1954：让不存在的对象获得身份

一、这一段的形状

最早的三届（1936、1950、1954）有一个共同的动作：**为一批原本没有合法身份的对象造一个可以容纳它们的地方。**

这不是巧合。二十世纪上半叶的分析与几何反复遇到同一种困难——最小化序列没有极限、求导之后跑出函数类、局部信息拼不成整体。三种困难是同一件事的三个方言：**当前的对象类不封闭。**

二、逐届判定

1936 · 极小曲面 (Douglas) . Plateau 问题（给定边界求面积最小的曲面）本身是老问题，十八世纪已被提出，十九世纪有大量实验工作。Douglas 的贡献不在于问了一个新问题，而在于**造了一个能让最小化序列有极限的函数空间与泛函。**

判定：通道三。签名 C 成立——最小化序列在原有的曲面类中没有极限对象。目标本身不新，故签名 B 不成立。

1936 · 覆盖曲面 (Ahlfors) . 把 Nevanlinna 的值分布理论几何化, 用覆盖面的度量性质重述原本用分析量表述的结果。

判定: 难判, 倾向通道一的局部化型。 它没有把表达域扩大 (签名 C 不成立), 也没有明显的新目标 (签名 B 不成立); 它把一个不好算的分析问题搬进一个它好算的几何表示——这与第三编第十六章说的“对数把乘法搬进加法”同型。但“好算”在这里不是代价的降阶, 而是可见性的提升, 故判定不干净。

1950 · 分布 (Schwartz) . 求导算子在 C^k 上不封闭; 把试验函数空间的对偶取作新的对象类, 一切分布都可以求导任意次。

判定: 通道三, 且是全编最干净的一例。 它已作为标准行出现在第三编第十九章的统一表里: 不封闭的算子族是求导, 扩张的方向由求导的对偶唯一确定。

1950 · 初等证明与筛法 (Selberg) . 素数定理的初等证明。

判定: 解决型, 带一处通道二的余味。 被解决的命题是老的; 但“能不能不用复分析证明它”这个元问题是一个真正的目标, 且这个目标的年代可指认。这是本编第一次遇到“目标是关于方法的”这种情形。

1954 · 层与谱序列 (Serre, Kodaira) . 层、上同调、谱序列被系统地引入拓扑与代数几何, 局部与整体的关系被重新组织。

判定: 第四通道候选。 它没有压缩什么 (签名 A 不成立), 也没有一族算子不封闭 (签名 C 不成立); 被引入的是一套说话的方式——“局部数据如何拼成整体”这句话此前一直在被使用, 却没有精确的说法。这与第三编第二十章把范畴论的诞生列为第四通道候选, 理由完全相同。

三、这一段留下的东西

三届之后, 一个动作被制度化了: **当对象类不封闭时, 扩张它, 而不是绕开它。** 这个动作后来在本编中会反复出现 (1966、1982、1994、2006、2014、2018 各出现一次), 它是九十年里最稳定的一条线。

第三十一章 1958–1962: 同一个显露, 不同的环境

一、这一段最要紧的一件事

1962 年的一项工作, 是本书第一编第二章那张四格表的**格 III 的教科书实例**, 而且是最干净的一个。

二、逐届判定

1958 · 丢番图逼近 (Roth) . 代数数被有理数逼近的精确指数。

判定：解决型。 Thue–Siegel 一系的老问题，Roth 给出最终指数。

1958 · 配边理论 (Thom) . 把“两个流形是否同为某个流形的边界”这一关系变成一个可计算的代数对象。

判定：通道一的局部化型 + 第四通道余味。 它把一个几何判定搬进同伦论，使不好算的变成好算的；同时它也提供了一套新的说法。

1962 · 线性偏微分算子 (Hörmander) . 把一大批分散的存在性与正则性结果组织进一个统一的算子理论。

判定：通道一。 签名 A 成立——它把大量分别成立的结果压缩成一套统一的判据；表达域没有扩大。

1962 · 七维怪球 (Milnor) . 与标准七维球面同胚但不微分同胚的流形存在。

判定：通道二，且是全编最干净的一例。

签名 B1 (年代可指认)：在此之前，“一个拓扑流形上的光滑结构是否唯一”不是一个数学问题——不是无人有能力问，而是默认它唯一。签名 B2 (旧办法不亏损)：微分拓扑当时运行良好。签名 B3 (旧环境不失紧)：没有任何一族算子不封闭。

三、Milnor 那一届为什么值得单独说

回到第一编第二章的四格：**D 不变 (都是流形上的微分结构)**，**E 变 (换一个光滑结构)**，**S 的特征翻面**。

在 Milnor 之前，人们默认“拓扑流形”这个显露已经把一切定死了。之后才知道：同一个拓扑显露可以承载不止一个光滑环境，而这两个环境里的可行路径与刚性完全不同。

这是第一编第七节那句话在二十世纪数学中最有名的一次兑现：换一个环境，同一个对象上“这条曲线直不直”的答案会变。Milnor 说的是同一件事的高维版本。

第三十二章 1966：一届四人，三条通道同时在场

一、这一届为什么特殊

1966 年一届四位得主，四项工作分属三条不同的通道，且各自都是该通道最干净的样本之一。九十年里没有第二届是这样。

二、逐项判定

Grothendieck · 概形. 代数几何的对象类从簇扩张到概形，基变换、纤维积、非既约结构全部获得合法身份。

判定：通道三。 已作为标准行出现在第三编第十九章统一表。不封闭的是基变换，扩张方向由函子性唯一确定。

Cohen · 力迫法与连续统假设的独立性. 构造 ZFC 的模型，其中连续统假设成立；再构造一个其中不成立。

判定：复合（解决型 + 通道三）。 被解决的命题是老的（希尔伯特第一问题，1900），故不是通道二；但力迫法本身是一次模型层面的扩张——为了让“CH 不成立”有一个见证，必须造出一个更大的模型，而扩张的方向由要否证的那条语句唯一指定。

Atiyah（与 Singer）· 指标定理. 椭圆算子的解析指标等于一个由拓扑数据决定的量。

判定：通道二。 签名 B 成立——“解析指标能否由拓扑算出”这个目标是二十世纪六十年代初才被明确提出的；此前分析与拓扑各自运行良好，没有亏损也没有失紧。

Smale · 高维庞加莱猜想与动力系统. 五维及以上的庞加莱猜想；以及把静态的解转写成动力系统的极限。

判定：前者解决型（庞加莱 1904 的老问题）；后者通道一的局部化型——把“求一个解”搬进“跑一个流”，使不好找的变成好跑的。

三、一届四人给出的结论

若三条通道是事后为每个案例挑标签，那么同一届的四项工作应当倾向于被贴上同一个标签——因为它们共享同一个时代背景、同一批人的判断、同一套评奖口味。

事实相反：同一届四人分在三条通道上，且各自的签名互不相同。 这是本编对三通道分类最有力的一次支持，因为它的产生方式与“挑选例子”正好相反。

第三十三章 1970–1974：从对象到结构，再到模空间

一、逐届判定

1970 • 奇点消解 (Hironaka) . 特征零下，任何代数簇都可以通过一系列爆破变得光滑。

判定：通道二。 “奇点是否总能被消解”是一个被明确提出的新目标；旧方法在既有任务上并不亏损。

1970 • 超越数 (Baker) . 线性型的对数下界。

判定：解决型 (希尔伯特第七问题一系列的推进)。

1970 • 拓扑不变性 (Novikov)、有限单群 (Thompson) .

判定：均为解决型。 前者是 Pontryagin 类的老问题；后者是有限单群分类纲领中的一环，目标早已确立。

1974 • 大筛法 (Bombieri) . 把一批分散的筛法技巧组织成一个统一的解析工具。

判定：通道一。 签名 A 成立——统一之后同类结果的获得代价大幅下降；表达域不变。

1974 • 曲面模空间 (Mumford) . 把“所有某类曲面”本身当作一个几何对象。

判定：通道三。 要让“所有曲面构成的空间”有意义，必须先造出一个能容纳它的对象类（含稳定性条件与紧化）。这与 1954 年的“局部拼整体”是同一条线的延伸，但更硬：**这一次被扩张的不是函数类，是“对象的集合本身成为对象”。**

二、这一段的形状

1970 年代出现了一个新的动作：**把一整类对象打包成一个新对象**。模空间、分类空间、参数空间从此成为标准工具。

用第一编第一章第二十节的话说，这是**角色转换的制度化**：一个曲面原本是某个构造的显露，现在它成了模空间上的一个点，而模空间成了新的环境。

第三十四章 1978–1982：环境成为主战场

一、逐届判定

1978 • Weil 猜想 (Deligne) . > 解决型。Weil 1949 提出，问题明确。

1978 · 格的刚性与超刚性 (Margulis) .> 通道二。 “高秩格是否被其代数结构完全决定”是一个新目标。

1978 · 高阶 K 理论 (Quillen) .> 第四通道候选。 它没有压缩、没有不封闭；它给了“高阶 K 群应该是什么”一个精确的说法，而这句话此前一直在被含糊地使用。

1982 · 非交换几何 (Connes) .> 通道三。 当乘法不再交换时，“空间”这个概念在既有框架里没有位置；扩张的方向由算子代数的结构唯一指定。

1982 · 三维流形的几何化 (Thurston) .> 通道二。 “三维流形能否按它所能承载的几何来分类”是一个被清晰提出的新目标。

1982 · Calabi 猜想与正质量定理 (Yau) .> 复合：解决型 + 通道三。 Calabi 1954 提出，故被解决的目标是老的；但为解决它而建立的非线性椭圆方程先验估计，实际上界定了一个新的解空间——**不做这次扩张，Calabi-Yau 度量这个对象不存在。**

二、这一段的形状

1978–1982 是环境本身成为主要战场的年代。Connes 换掉交换性，Thurston 换掉“流形只有拓扑”，Yau 换掉“解只能在经典意义下存在”。三者的动作不同，方向一致：

当旧环境容不下目标对象时，最高级的工作是造一个新环境。

这一句正是第三编第十九章扩张选择律的历史形态。

第三十五章 1986–1990：同一个拓扑，两种刚性

一、这一段最要紧的一件事

1986 年一届中的两项工作放在一起，给出了第一编第二章格 III 的第二个教科书实例，而且比 Milnor 那一个更极端。

Freedman 证明四维拓扑流形的分类在拓扑范畴里出人意料地柔软；**Donaldson** 用规范场论证明同一批对象在光滑范畴里异常刚硬。

同一个四维拓扑显露，在拓扑环境与光滑环境里，表现完全相反。

四维还因此出现了别的维数都没有的现象： $\mathbb{R}^4$ 上存在不可数多个互不等价的光滑结构。

判定：Freedman 解决型（四维庞加莱猜想是老问题）；Donaldson 通道三——把规范场论的解空间作为拓扑不变量的来源，这是一次工具环境的引入，而不是问题的重述。

二、其余各届

1986 · Mordell 猜想 (Faltings) .> 解决型。 Mordell 1922。

1990 · 量子群 (Drinfeld)、纽结多项式 (Jones) .> 均为通道三。 前者：把 Hopf 代数形变以容纳可积系统的对称性；后者：把算子代数的迹搬到纽结上，产生了此前不存在的不变量。Jones 那一项也带通道一的局部化余味——它把一个难算的拓扑问题搬进一个好算的代数表示。

1990 · 极小模型纲领 (Mori) .> 通道三。 为使双有理分类可以进行，必须允许一类带温和奇点的对象进入，否则纲领中途就无对象可用。

1990 · 物理方法进入数学 (Witten) .> 第四通道候选，且是最不干净的一个。 它引入的不是新对象，也不是新算子，而是一整套提问与猜测的方式。本编把它记为候选，同时明写它最难判：它可能只是通道二的一个大规模版本（一次带来了大量新目标）。

三、一处必须写出来的对照

Milnor (1962) 与 Donaldson–Freedman (1986) 是同一个发现的两次出现，中间隔了二十四年：**拓扑与光滑不是同一件事。**

第一次出现时它是一个反例（怪球存在）；第二次出现时它成了一个结构性结论（四维尤其如此）。

从“存在一个反例”到“这是一条普遍的结构性事实”，中间隔了一代人。这个时间差本身值得记住——第一编第二章补格 II 时之所以困难，也是同一个原因：一个反例容易被当成特例，直到有人指出它是结构。

第三十六章 1994–1998：紧致性、集中与新的极限对象

一、逐届判定

1994 · 浓度紧致性 (Lions) .> 通道三，且是本书用得最多的一例。 最小化序列可能把质量“跑到无穷远”或“集中到一点”而失去紧性；补救方式是把这两种失紧模式本身作为可分析的对象纳入框架。第三编第十九章的统一表与第四编的扩张选择律都引用了它的同类。

1994 · 受限 Burnside 问题 (Zelmanov) .> 解决型。 Burnside 1902。

1994 · Banach 空间与组合 (Bourgain、Gowers)、动力系统 (Yoccoz) .> 多为解决型，Gowers 后期工作带通道二。

1998 · 月光猜想 (Borcherds) .> 解决型 (Conway-Norton 1979) , 机制上带通道三——为建立联系而构造的顶点算子代数是一个新的对象类。

1998 · 形变量子化 (Kontsevich) .> 通道三。 泊松流形上的形变量子化是否总存在——为回答它, 必须造一个能容纳全部形变的对象 (形式性定理) 。

1998 · 全纯动力系统 (McMullen) .> 解决型 + 通道一。

二、这一段的形状

1990 年代的主题可以用一个词概括: **极限对象**。

当一系列对象不收敛时, 有两条路: 一是加强条件让它收敛 (这属于把 E 补强), 二是**把极限本身造出来** (这属于扩张 E)。九十年代反复选了第二条。

这条选择正是第三编第十九章那条扩张选择律的核心内容, 而它在这十年里被使用得如此频繁, 以至于成了默认动作。

第三十七章 2002–2010: 把猜想换成一个有限对象

一、逐届判定

2002 · 函数域上的朗兰兹对应 (Lafforgue) .> 解决型。 目标由 Langlands 1967 提出。

2002 · 动机上同调 (Voevodsky) .> 通道三 + 第四通道候选。 为使“代数簇的上同调”有一个统一的说法, 必须先造出一个能容纳它的范畴。这一项同时具备通道三的签名 (对象类扩张) 与第四通道的特征 (给一句一直在被使用的话一个精确说法) 。

2006 · 带手术的 Ricci 流 (Perelman) .> 通道三, 机制清晰。 Ricci 流在有限时间产生奇点, 流不能继续; 补救方式是允许在奇点处做手术, 并证明手术后的流仍可控。**不做这次扩张, “穿过奇点之后的那一段流”不存在。** >> 请注意这与 Schwartz 是同一形状: 某个演化算子在当前类上不封闭 → 扩张到一个它封闭的类。相隔五十六年, 机制一字未改。

2006 · 其余三位 (Okounkov、Tao、Werner) .> 多为解决型与通道一混合。

2010 · 基本引理 (Ngô) .> 解决型 + 通道一的局部化型。 目标由 Langlands–Shelstad 提出, 是老的; 机制是把群侧的轨道积分搬进 Hitchin 纤维化的纤维上同调——把不好算的搬进好算的表示, 与对数、Thom、Jones 同型。

2010 · 最优传输 (Villani) .> 通道三 + 通道一。把变分问题重述为传输问题（搬家），同时把 Wasserstein 空间作为新的对象类（扩张）。

2010 · 遍历理论与共形不变性 (Lindenstrauss、Smirnov) .> 解决型。

二、这一段的形状

2000 年代出现了一个新动作，值得单列：**把一个无穷的猜想换成一个有限对象的存在性。**

Perelman 把“三维庞加莱猜想”换成“带手术的流的长期存在性与收敛性”；Ngô 把一个恒等式换成一族纤维的上同调的对称性。**换完之后，问题的类型变了——从“证明一句普遍陈述”变成“造出一个具体对象”。**

这个动作与本书第四编的问题八（最小充分结算面是否存在）属于同一族：把一条经验规则或一句普遍陈述，换成一个可以去求的对象。

第三十八章 2014–2022：随机、稳定性与最优

一、逐届判定

2014 · 正则结构 (Hairer) .> 通道三，与 Schwartz 完全平行。分布之间的乘积没有定义，而随机偏微分方程需要它；补救方式是造一个带有局部展开信息的新对象类，使乘积在其中有定义。>> **Schwartz (1950)：求导在函数类上不封闭 → 扩张到分布。**> **Hairer (2014)：乘法在分布类上不封闭 → 扩张到正则结构。**> 六十四年，同一个句式，换了一个算子。

2014 · 高斯合成律的推广 (Bhargava)、动力系统 (Avila)、模空间上的测度 (Mirzakhani) .> Bhargava 通道一（把一个繁复的经典构造压缩为一批可见的几何操作）；Avila 解决型 + 通道一；Mirzakhani 解决型 + 通道三。

2018 · perfectoid 空间 (Scholze) .> 通道三。特征零与特征 p 之间的比较需要一个能同时容纳两者的对象类；扩张的方向由这个比较的要求唯一指定。

2018 · 定量稳定性 (Figalli) .> 通道二。“一个不等式几乎取等时，对象是否几乎是极值形状，且偏差可以被定量控制”——这个目标是新的。等周不等式本身很老，问它的定量稳定版本是一件新事。

2018 · 双有理几何 (Birkar)、解析数论与几何 (Venkatesh) .> 解决型为主。

2022 · 八维与二十四维的球堆积 (Viazovska) .> 解决型，机制上带通道一。目标是老的；机制是构造一个“魔函数”使线性规划界恰好取到——把一个组合几何问题搬进一个可以显式解出的分析问题。>> 这一届还给出一条对本书姊妹卷有用的警告：**该**

方法在八维与二十四维有效，是因为那里的线性规划界恰好是紧的；三维不紧。同一个方法在不同维数上的可用性完全不同——这与第四编第二十七章“ d 变了，临界齐次度就变了”是同一件事的另一个面。

2022 · 组合学中的 Hodge 理论 (Huh) .> 第四通道候选。 它把代数几何的一套说法搬到组合对象上，使一批此前只是猜测的不等式获得了统一的来源。它像通道一的局部化型（搬家），但搬过去的不是算法，是一整套语言。

2022 · 相变 (Duminil-Copin)、素数间隔 (Maynard) .> 解决型为主。

二、这一段的形状

最近十年的两条线：**随机性获得了确定性的处理方式**（正则结构、随机几何），以及“几乎”获得了**定量的处理方式**（定量稳定性）。

第二条对本书特别重要。定量稳定性问的是：一个不等式几乎取等时，对象离极值有多远，且这个“多远”要有显式常数。**这与第四编第二十三章的盲缺口比是同一类问题**——都在问“离理想状态有多远”，都要求答案是一个可算的数而不是一个定性判断。

第三十九章 2026：最近的一届

一、公开记录

2026 年 7 月 23 日，国际数学联盟在费城国际数学家大会开幕式上宣布四位菲尔兹奖得主：**Yu Deng**（芝加哥大学）、**John Pardon**（石溪大学）、**Jacob Tsimerman**（多伦多大学）、**Hong Wang**（纽约大学库朗研究所／法国高等科学研究所）。这是自 1986 年伯克利之后国际数学家大会首次在美国举办。

四人的方向覆盖偏微分方程与数学物理、辛几何与拓扑、算术几何、调和分析与几何测度论。其中 Hong Wang 是该奖九十年历史上第三位女性得主（前两位是 2014 年的 Mirzakhani 与 2022 年的 Viazovska）。

二、一个可以立即读出的特征

这一届有一个不需要沉淀期就能读出的公开特征：**四项工作都是对长期悬置的老问题的解决**，被解决的问题悬置时间从二十年到一个多世纪不等。Yu Deng 与合作者从硬球动力学推出玻尔兹曼方程并进一步得到流体极限，指向希尔伯特第六问题的一段；Hong Wang 与合作者解决了三维 Kakeya 问题，该问题的源头可追到二十世纪初。

按第二十九章第三条纪律，这些属于**解决型**，即不在三通道的对象域内。这一点与第四十章第三节的统计一致，而且是全编中比例最集中的一届。

三、但通道判定仍然待判

本编对这一届不作通道判定。

理由是签名 B 与 C 都要求判断"在此之前该目标是否存在""在此之前该类是否失紧", 以及一项工作在解决老问题的同时是否**顺带造出了新的对象类**——最后这一条尤其需要沉淀。Perelman 那一届就是先例: 庞加莱猜想的解决是第一天就清楚的, 而"带手术的 Ricci 流构成一次通道三的扩张"这个判断, 是在此后若干年里才稳定下来的。

对刚发生的工作做发生学判定, 是最容易出错、也最难被当场纠正的一种判断。 本编把这一届记为**待判**, 并把它当作一条自我约束的样本: 一个能对一切当下事件立即给出判定的框架, 多半是在事后叙述, 而不是在判定。

[时效说明: 本节内容据 2026 年 7 月公开报道与国际数学联盟发布。这是全书对时效最敏感的一段; 再版时应据 IMU 官方获奖理由原文核订。]

第四十章 九十年的账: 通道分布与三条读法

一、分布

把第三十至三十八章的判定汇总(2026 待判不计), 二十届的主要工作按通道归类, 允许一项计入多条:

类别	大致届次数	代表
通道一 (压缩/局部化)	中等偏少	Hörmander、Bombieri、Bhargava; Thom、Jones、Ngô、Vi azovska (局部化型)
通道二 (目标发生)	少	Milnor、Atiyah–Singer、Hironaka、Marg ulis、Thurston、Figalli
通道三 (扩张)	最多	Douglas、Schwartz、Gr othendieck、Mumford、Connes、Donaldson、Dr infeld、Mori、Lions、Ko ntsevich、Voevodsky、P erelman、Villani、Hairer、Scholze
第四通道候选 (语言层)	少而稳定	Serre–Kodaira (1954)、Quille n (1978)、Witten (199

类别	大致届次数	代表
		0)、Voevodsky (2002)、Huh (2022)
解决型（不在对象域内）	约占一半	Roth、Baker、Novikov、Thompson、Deligne、Faltings、Zelmanov、Lafforgue、Birkar 等

三条读法从这张表里读出来。

二、读法一：通道三是主线

九十年里最常出现的动作是扩张：**当对象类不封闭时，扩张它。**

而且这个动作的形状惊人地稳定。把两组相隔最远的例子并排：

1950 Schwartz：求导在函数类上不封闭 → 扩张到分布。**2014 Hairer**：乘法在分布类上不封闭 → 扩张到正则结构。**1936 Douglas**：最小化序列在曲面类中无极限 → 造一个有极限的类。**2006 Perelman**：Ricci 流在有限时间产生奇点 → 允许手术并证明可控。

六十四年、七十年的跨度，句式一字未改：**某族算子在当前类上不封闭，扩张到它封闭的地方，而方向被那族算子唯一指定。**

这是第三编第十九章那条扩张选择律在九十年尺度上的检验。它通过了。

三、读法二：解决型约占一半，而它不在对象域内

这条是对本书自己的限制，必须写在明处。

二十届中约有一半的主要工作是“用已有结构解决一个已存在的问题”。这些工作的重要性丝毫不低——Deligne 证 Weil 猜想、Faltings 证 Mordell 猜想、Perelman 证庞加莱猜想，都是二十世纪数学的高峰。但它们**不在三通道的对象域内**，因为三通道分类的是“新结构的发生”，而不是“老问题的解决”。

于是有一条本编得出的、前四编没有的判断：

数学的进展有两种，它们的机制不同，不应当被同一套框架描述。一种是发生：新的对象类、新的目标、新的说法被造出来。一种是解决：在已有的框架里，把一个悬置的命题定下来。

本书的三通道只描述前一种。**声称它能描述后一种，是本书最容易犯、也最该避免的过度延伸。**

值得注意的是，两者常常同届出现，而且往往是同一个人的同一项工作的两面——Perelman 既解决了一个老问题，又做了一次通道三的扩张；Yau 同样。这说明二者不是互斥的分类，而是**同一项工作的两个不同侧面**。

四、读法三：第四通道的候选不止一个

第三编第二十章把“范畴论的诞生”列为三通道穷尽性的唯一候选反例，理由是：它既没有压缩什么，也没有一族算子不封闭，而是**现有的语言说不出一句已经在被使用的话**。

走完九十年之后，同型的候选至少有五个：

年份	工作	说不出的那句话
1945	范畴与函子（非菲奖）	“这个同构是自然的”
1954	层与谱序列	“局部数据如何拼成整体”
1978	高阶 K 理论	“高阶 K 群应该是什么”
1990	物理方法（最不干净）	一整套提问与猜测的方式
2002	动机上同调	“代数簇的上同调”作为一个统一对象
2022	组合中的 Hodge 理论	把一套语言整体搬到另一类对象上

一个孤例可以被当作特例；**五到六个同型的例子，跨越七十七年，分布在拓扑、代数几何、K 理论、组合各处，就不再像特例了**。

因此本编对第三编第四十四章的问题三给出一个更明确的形式：

不是“三通道是否穷尽”，而是“第四条通道（语言层升维）的签名是什么”。候选签名：不存在代价降阶（A 假），不存在不封闭的算子族（C 假），目标本身也不新（B 假或弱），而**新增的是一个精确的说法，用来说一句一直在被含糊使用的话**。

这条签名目前还不能判错——“含糊使用”缺一个可操作的判据。把它做成可判错的，是本书留给下一步的具体工作，而且它现在有六个可用的检验样本。

五、本编的自我限定

本编整体属第三层证据。每一条通道判定都依赖对当时该领域状态的历史判断，而这类判断可以被史料推翻。第四节的统计随任何一条判定的修改而变。

本编不影响前四编。决定定理、三通道的签名、退化定理、失明判据，都不依赖本编中任何一句话。若本编全部作废，前四编一字不改。

本编唯一实质推进的是第四通道的候选清单，而这一条恰恰是通过“分类在若干处判不出来”得到的——一张分类表最有用的地方，往往是它判不出来的那几格。

[编号说明] 第五编（九十年数学典范的发生迁移）占第二十九至四十章，故第六编自第四十一章起。

第六编 边界与未决

编首语

前五编各自交出了东西：第一编交缺口，第二编交定理，第三编交分类，第四编交构造，第五编交史证。本编不再增加内容，它做三件收口的事。

第一件，把方法说成可操作的。 第四十一、四十二章讲六条建模路径与起点的选择，并说明起点选错不只是慢——它会使一整类论证在原理上失效。

第二件，把标准写下来。 第四十三章列出本书对一份工作的要求，第四十四章交出十个可检验的问题，每一个都自带失败标准。

第三件，把账算清。 第四十五章逐编列出本书声称了什么、哪些是本书的增量、每一编最脆弱的一环在哪里。第四十六章交代还没做的。

本编最要紧的一章是第四十五章。 一本书的可信度不取决于它宣称了多少，取决于它把自己的边界画在哪里。

第四十一章 六条路径：建模的起手位

一、三个项排出六个次序

S、D、E 三项的全排列给出六条路径。它们不是六种文字游戏，是六种**建模的起手位**——先固定哪一样、再固定哪一样。

路径	名称	形状	数学实例
$E \rightarrow D \rightarrow S$	概念发现	从情境出发，经差异序列，生成结构	从分蛋糕的情境出发，经切分、公

路径	名称	形状	数学实例
			平、比较，生成分数
$D \rightarrow E \rightarrow S$	异常驱动	从旧路径的失败出发，重组环境，生成新结构	从加法重复的冗余出发，进入多重重复的场合，生成乘法
$S \rightarrow D \rightarrow E$	应用	从已有结构出发，展开流程，进入对象世界	从面积公式出发，算出铺满地面需要多少瓷砖
$S \rightarrow E \rightarrow D$	迁移	从已有结构出发，寻找新环境，生成新流程	把比例迁到地图、照片、食谱、速度，各生成不同解法
$D \rightarrow S \rightarrow E$	抽象	从一连串操作中抽象出结构，再打开新世界	从多次等分与比较中抽象出分数，再进入概率与比例
$E \rightarrow S \rightarrow D$	结构识别	从复杂情境中识别已有结构，再展开流程	看到“每盒十二支，共二十盒”，识别为乘法，运行乘法

二、路径与通道的关系

这六条是入口，第三编那三条是机制，两者不在同一层，但有一个可用的对应：

- 从 **D 起手** 的两条（异常驱动、抽象），最容易撞见**通道一**（压缩）——因为你是从“旧办法不好用”进来的。
- 从 **E 起手** 的两条（概念发现、结构识别），最容易撞见**通道三**（扩张）——因为你是从“环境里有个东西没位置”进来的。
- 通道二**（目标发生）不属于任何一条入口，因为它不是从任何现成材料进来的：**它是有人开始问一个新问题**。这解释了为什么它最难被看见，也最难被制度化地生产。

这个对应有一个直接的用处：**如果你在某个问题上反复只找到同一类机制，很可能是你的起手位一直没变**。换一个入口再走一遍，是成本最低的诊断。

三、六条路径的输出适用同一套证据标准

必须堵一个漏洞。

路径的多样性用于**发现**，不用于降低**证明**的标准。不论从哪个起手位进入，输出都必须接受同一套要求：明确的定义、可复算的公式、严格的误差界、等号成立的条件、适用范围。

换句话说：**六条路径管的是怎么找到，不管找到之后算不算数。**

第四十二章 起点选错的代价

一、起点纪律通常被当效率问题

“先从哪一步入手”通常被当作效率问题：起手位选得好，分析快一些；选得不好，多绕几个弯。

本章要说明它有更硬的后果：**起点选错，会使一整类论证在原理上失效——不是慢，是不可能。**

二、从 S 起手，等于把结算面锁死在单元上

假设面对一个未决的优化问题，最自然的起手位是 S：先问最优的那个东西长什么样。

这一步看似无害，实际上做了一个从未被声明的决定：**它把“形状”当成了首要变量，因而把结算面定在了单个单元上。**而一旦结算面定在单元上，问题就已经落进第四编第二十二章那条相容性公理里——不重叠、逐块、局域。

第四编第二十七章的推论说得很清楚：若承重信息是齐次度 $p > d$ 的跳变量，那么任何在 $r = 0$ 上写出的表述对它**恒等失明**，不论后续估计做得多精细。

于是：

从 S 起手 = 先固定单元形状 = 默认相容性公理 = 把 r 设成 0。而 $r = 0$ 恰恰是跳变信息被抹去的那一层。

方法论上的起点错误，与它所诊断的数学错误，是同一个错误。

三、未决问题应当从 E 起手

对“未决问题”这一类任务，正确的起手位是 $E \rightarrow D \rightarrow S$ ：

第一步，把环境写成可检查的条目——度量、指数、密度、不变群、维数、允许类。第二编第八章的设防之二说过：E 必须是结构，不是理论；一条一条填得出来，才算指定了环境。

第二步，定可用的算子——哪些变换允许、它们是否交换、哪一族会造成失紧。

第三步，才问显露成什么形状。

按这个次序，“单元形状”根本不会成为第一个被固定的东西，**结算面也就不会被过早锁死。**

四、这条规则的代价可以被量

本节把一条方法论劝告升格为一条有数学后果的规则，而且它的代价是可量的：起点选错所浪费的量，就是第四编第二十三章定义的盲缺口比 $\delta(E)$ ——问题的承重泛函中不能被逐块写出的那一部分所占的比重。

$\delta = 0$ 时，从 S 起手无损； δ 越大，起点错误的代价越大。这使“起点错了，后面再深也是浪费”这句话第一次有了一个可以计算的对象。

第四十三章 研究规范：本书要求一份工作满足什么

本书对自己的每一条承重命题都执行以下七条，也建议对以本书为基础的工作执行同样七条。它们不是一般性的学术劝告，每一条都从本书前面的某一处直接生出来。

规范一（三层齐备） . 一个定义至少要有三层：显露条件（对象满足什么）、发生条件（有什么构造、极限或扩张）、环境条件（在哪个范畴、什么正则性与紧致性下成立）。缺一层，定义只描述终态，不能支撑证明。（出处：第一编第一章）

规范二（E 给结构，不给理论） . 环境必须以结构呈现——载体、运算、关系、拓扑本身；不能只给一组一阶公理。只给理论，则非同构的模型会使结论随模型而变。（出处：第二编第八章设防之二）

规范三（D 不提及 S） . 生成律的描述中不得出现被生成的对象，也不得含它的谕示。违反这一条，“S 由 D 与 E 决定”自动为真，因而毫无内容。（出处：第二编第八章设防之一）

规范四（通道归属可判错） . 若声称某个结构是新发生的，应给出它走哪条通道，并使这个判断可以被别人证明判错。给不出签名的归属是叙述，不是命题。（出处：第三编第十五至二十章）

规范五（标明体积型还是跳变型） . 承重的量必须标明它是体积型还是跳变型，并给出跳变型的齐次度 p 与维数 d 。 $p > d$ 时逐块方法恒等失明，此时再精细的估计也没有意义。（出处：第四编第二十七章失明判据）

规范六（证据分级） . 每一条承重命题标出层级：第一层——证明不依赖任何计算；第二层——机制清楚但常数未给，或定义待精确化；第三层——数值证据。**层级必须逐条标，不能整篇标。**

规范七（配失败标准）. 每一条承重命题配一句“出现什么就算它错了”。没有这一句的命题，不进入承重清单。

七条里最容易被跳过的是规范六与规范七。**一份不肯分级、也不肯写失败标准的工作，读者无法判断它的哪一部分可以放心引用。**

第四十四章 十个可检验的问题

以下十问按四编分组，每一问附失败或成功的判定标准。它们是本书留给自己与读者的账。

来自第二编（决定定理）

问题一（归属分解定理）. 对特征 P ，定义其 D -份额与 E -份额为 P 在“固定 E 变 D ”与“固定 D 变 E ”两族扰动下的敏感度。这两个份额是否构成 P 的一个分解？**判定**：若能证明分解存在且唯一，则第二编第十一章那张手工归属表升级为一台机器。**失败标准**：找到一条同构不变特征，其两种敏感度都为零而它仍随 (D, E) 变化。

问题二（归属的自动化）. 对 holonomic 函数与给定环境，能否由极小零化算子机器判定每一条特征的归属？**判定**：在 $\sin$ 、 $\exp$ 、Bessel 三族上与手工表一致即为成功。

来自第三编（三通道）

问题三（穷尽性）. 三条通道是否足以分解每一次新结构的发生？**失败标准**：举出一次发生，签名 A 、 B 、 C 全为假。**第一个待查的靶子是范畴论的诞生**（1945，为定义“自然同构”而造语言），本书判它要么是纯通道二，要么是第四条通道。

问题四（命题 17.1 的精确化）. 把“局部”形式化为一类编码，给出“代价降阶必致某运算非局部”的信息论下界。**判定**：给出定义与证明即成功；本书目前只到第二层。

问题五（通道二的年代）. 第三编第十八章的四个年代（Voronoi 1908 / Gersho 1979、伽罗瓦、康托尔、希尔伯特第十问题）是否经得起史料复核？**失败标准**：查出该目标在所指年代之前已作为明确的数学问题被提出，或查出相关领域当时确实处于亏损或失紧状态。

来自第四编（伞模型）

问题六（盲缺口比的良定化）. $\delta(E)$ 依赖表示的选取。取遍所有容许表示的下确界，是否使 δ 成为问题本身的不变量？若是， $\delta = 0$ 是否恰好刻画“逐块方法充分”这一类问题？

问题七（临界档的极限）. 在 $p = d$ 的临界档，跳变量 I_r 的极限是一个什么样的泛函？它的常数由核 J 的哪个矩决定？

问题八（最小充分结算面）. 给定一个问题，是否存在唯一的最小重叠半径 r^* ，使半径 $\geq r^*$ 的伞场能抓住全部承重信息而 $r < r^*$ 不能？*这是本书最重要的未决问题。* 它把“结算面选在哪里”从一条经验规则变成一个可求的量。

问题九（失明判据的实证）. 在一族具体问题上，“ $p > d$ 则逐块方法失明”这条预言是否与逐块方法的实际失败一一对应？**失败标准：** 找到 $p > d$ 而某个逐块方法仍然抓住了承重信息的实例。

来自第一编（教育侧）

问题十（两种教法的可测差异）. 把分数按扩张通道教（从“除法在整数上不封闭”入手）与按压缩通道教（从“分东西太麻烦”入手），学生对“为什么需要分数”的理解指标是否有可测差异？*判定：* 需要一个对照实验与一份事先登记的指标。**这是本书唯一一条能在教室里被证伪的预言。**

第四十五章 本书的自我限定：逐编总账

一、逐编账

编	声称什么	最高层级	是否本书增量	最脆弱的一环
一 · 缺口	(D, E) 在起作用，四种变法，两种形状	第一层（都是标准数学的重排）	否，重排是本书的	四格表是分类，不是命题
二 · 定理	给定 (D,E) 则 S 在唯一同构下唯一；每条同构不变特征是 (D,E) 的函数	第一层	定理不是 （泛性质唯一性是范畴论常识）； 归属表是	归属的一般化只做完一半，见问题一
三 · 三通道	新结构的发生分解为压缩、目标发生、扩张三条通道	第二层	通道一与通道二是； 通道三本质是范畴论的	穷尽性未证，见问题三
四 · 伞模型	经典微积分是伞模型 $r \rightarrow 0$ 的极限；跳变信息按齐次度三分	第一层（定理）／第二层（三分）	退化定理不是新数学；相容性公理由第 53 号命名；失明判据与分道三	盲缺口比 δ 未良定，见问题六

编	声称什么	最高层级	是否本书增量	最脆弱的一环
			分是本书的	
五 · 史证	九十年的数学创新可按三通道分类	第三层（史料判断）	分类是本书的	依赖史料，见问题五
六 · 边界	起点选错有数学后果；七条规范；十个问题	—	起点代价的量化是本书的	—

二、三句必须写在明处的话

其一，本书最重要的两条定理都不是新数学。 第二编的决定定理是泛性质的唯一性论证，第四编的退化定理是非局部算子向局部算子的收敛。前者是范畴论一百年的标准工作方式，后者在非局部向量微积分、peridynamics、图 Laplacian 收敛三支文献里都是标准结果。本书重新给出它们的完整证明，是为了让常数与边界对读者透明，不是为了宣称首创。

其二，本书的增量集中在三处：把特征逐条归属给 D 或 E，并预言换 E 后哪一条翻面（第二编）；把新结构的发生分成三条各带可判错签名的通道（第三编）；把退化定理反过来当诊断，由此得到分道三分与失明判据（第四编）。

相容性公理不在这三处之内——它由专著第 53 号命名并写成六重约束，本书只是沿用。本书早期稿曾把它记作第四编的增量，那是一处事实错误，已改正。

其三，这三处增量的层级都不是最高。 归属只做完一半，三通道的穷尽性未证，盲缺口比未良定。三处都写进了第四十四章的问题清单。

三、本书不做什么

不做元数学。 本书没有证明任何关于形式系统的新结果；第一编第五章是对哥德尔定理的引述与厘清，不是贡献。

不做数学哲学的立场之争。 本书不主张柏拉图主义，也不主张形式主义或建构主义；它只主张一条可检验的分界——发生的是提问装置，不发生的是真值（第一编第六章）。

不宣称覆盖数学。 第一编第七章已说明：本书用的是 S 的稳定端、D 的三层、E 的理念界一格；被略去的部分不影响本书的四条主线，但也意味着本书对“数学何以对现实有效”没有给出回答。

不作为任何具体猜想的证明。 本书的姊妹卷讨论一个具体的几何优化问题，本书从中提取方法，不从中借用结论。凡本书引用姊妹卷之处，均已标明其独立性——第四编的失明判据即使姊妹卷的全部结论被推翻，仍然成立。

第四十六章 未尽的战场

一、三件已经看得见形状的事

其一，伞场微积分。 第四编只完成了地基（定义、一条退化定理、一条诊断），没有完成那件武器本身。要成为一门可用的微积分，至少还需要：共振算子的谱理论、伞场上的散度与旋度、边界条件的处理、以及一套在具体问题上优于既有离散方法的实证。这是一部独立专著的体量，目标战场是应用分析。

其二，结算面的层级理论。 第四十四章的问题八问的是“最小充分结算面是否存在唯一”。若答案是肯定的，那么应当有一整套层级：单元 → 接口 → 胞簇 → 局部模式测度，并且每个问题在这条层级上有一个确定的位置。**这一条一旦做成，第四编的失明判据就从一条诊断升级为一台机器。**

其三，归属的机器化。 第四十四章的问题一与问题二。第二编那张十一行的表是手工判的；若敏感度分解成立，它可以被自动化。

二、一件看不见形状的事

三通道的穷尽性。

本书判范畴论的诞生可能是第四条通道——“现有的语言说不出一句已经在被使用的话”。若这条成立，它与前三条的关系是什么？它是与前三条并列，还是它其实包含前三条（毕竟压缩、目标、扩张最终都要落到语言上）？

本书没有答案，也不打算硬给一个。**把一个自己答不出的问题明写出来，比给一个撑不住的答案有用。**

三、最后一句

本书从圆的周长开始，到一条诊断规则结束。中间四编交出的东西可以概括成一句：

数学对象的特征不是它自带的，是它的差异路径与纠缠系统一起给的；而这两样东西本身也在发生，发生走三条通道；每一次发生都要付利息，而利息决定了下一次发生。

这句话若是对的，它应当能在别人手里被用错、被查出、被修正。本书为此留下了十个问题、二十余条失败标准与两组任何人可复算的证书。

一本书能给出的最诚实的东西，是让人有办法证明它错了。

参考文献

著录说明与三级分级

本书对文献著录执行三级分级，逐条标出，不作整篇笼统声明。读者由此可以知道：哪些条目可以直接引用，哪些条目引用前应自行复核。

【一】本次逐条核实到卷、期、起讫页码或 DOI。可直接引用。【二】标准著录，经典文献，多来源一致；卷期无异议，未逐条核到页码。【三】页码或版本细节待核。引用前请自行复核。

另有两条纪律，随本表一并执行：

其一，不为凑数著录。 本书正文未实际使用的文献不列入。全书六编的核心命题各自依赖哪几条，在下表分组中直接可见。

其二，第四编的三支必须完整列出。 第二十八章已写明：本书的退化定理不是新数学，它在非局部向量微积分、peridynamics、图 Laplacian 收敛这三支文献里都是标准结果；任何以本书第四编为基础的工作若不完整引用这三支，会被正确地判为重复工作。故第七组（第 37–53 条）是本表中唯一被要求“完整”而非“够用”的一组。

一、范畴论与泛性质（第二编第九、十四章）

1. 【二】 Mac Lane, S. *Categories for the Working Mathematician*, 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics 5. New York: Springer, 1998.
2. 【二】 Eilenberg, S. & Mac Lane, S. “General Theory of Natural Equivalences.” *Transactions of the American Mathematical Society* 58 (1945): 231–294.
3. 【二】 Awodey, S. *Category Theory*, 2nd ed. Oxford Logic Guides 52. Oxford: Oxford University Press, 2010.
4. 【二】 Riehl, E. *Category Theory in Context*. Aurora: Dover Modern Math Originals. Mineola: Dover, 2016.

第九章的决定定理即（余）极限在唯一同构下唯一，其论证见第 1 条第 III 章；米田引理见同书第 III 章第 2 节。第十四章交代本书在范畴论之外做了什么，读者可据第 1、4 条自行核对本书未越界。

二、常微分方程与解的唯一性（第二编第九章第三节）

5. 【二】 Coddington, E. A. & Levinson, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: McGraw-Hill, 1955.
6. 【二】 Hartman, P. *Ordinary Differential Equations*, 2nd ed. Classics in Applied Mathematics 38. Philadelphia: SIAM, 2002.

三、 $\sin(x)$ 的四条路径与特征归属（第二编第十至十二章）

7. 【二】 Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1976.
8. 【二】 Ahlfors, L. V. *Complex Analysis*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1979.
9. 【二】 Koblitz, N. *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions*, 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics 58. New York: Springer, 1984.
10. 【二】 Gouvêa, F. Q. *p-adic Numbers: An Introduction*, 3rd ed. Universitext. Cham: Springer, 2020.
11. 【二】 Higham, N. J. *Functions of Matrices: Theory and Computation*. Philadelphia: SIAM, 2008.
12. 【三】 Stanley, R. P. “Differentiably Finite Power Series.” *European Journal of Combinatorics* 1 (1980): 175–188.（页码待核）
13. 【三】 Zeilberger, D. “A Holonomic Systems Approach to Special Functions Identities.” *Journal of Computational and Applied Mathematics* 32 (1990): 321–368.（页码待核）
14. 【二】 Kauers, M. & Paule, P. *The Concrete Tetrahedron: Symbolic Sums, Recurrence Equations, Generating Functions, Asymptotic Estimates*. Vienna: Springer, 2011.
15. 【二】 Baker, A. *Transcendental Number Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1975.

第十一章反例二（ $\mathbb{Q}_p$ 上收敛半径 $p^{-1/(p-1)}$ ）见第 9 条第 IV 章；反例四（矩阵代数上加法定理失效，除非两矩阵可交换）见第 11 条第 12 章；第十二章第五节「极小零化算子唯一」的 D-有限函数背景见第 12–14 条； $\sin(1)$ 的超越性（Lindemann–Weierstrass）见第 15 条。

四、形式系统的边界（第一编第五章、第二编第十三章）

16. 【二】 Gödel, K. “Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I.” *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38 (1931): 173–198.
17. 【三】 Rosser, J. B. “Extensions of Some Theorems of Gödel and Church.” *Journal of Symbolic Logic* 1, no. 3 (1936): 87–91.（页码待核）

18. 【三】 Presburger, M. “Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt.” In *Comptes Rendus du I Congrès de Mathématiciens des Pays Slaves*, Warsaw, 1929, 92–101. (页码与卷次待核)
19. 【二】 Tarski, A. *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*, 2nd ed. Berkeley: University of California Press, 1951.
20. 【二】 Chang, C. C. & Keisler, H. J. *Model Theory*, 3rd ed. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 73. Amsterdam: North-Holland, 1990.
21. 【三】 Cohen, P. J. “The Independence of the Continuum Hypothesis.” *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* 50 (1963): 1143–1148; 同题 II, *PNAS* 51 (1964): 105–110. (页码待核)
22. 【二】 Jech, T. *The Axiom of Choice*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 75. Amsterdam: North-Holland, 1973.
23. 【二】 Smith, P. *An Introduction to Gödel's Theorems*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
24. 【二】 Franzén, T. *Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to Its Use and Abuse*. Wellesley: A K Peters, 2005.

第五章第六节「Rosser 改进」见第 17 条；第九节误解三「完备且可判定的理论确实存在」见第 18 条（Presburger 算术）与第 19 条（实闭域）；第十一节哥德尔与 Cohen 的分工见第 21 条；第二编硬边界之三（E 必须给结构不给理论）依据第 20 条的 Löwenheim–Skolem 与非范畴性；硬边界之四（无 D 区=AC 区）见第 22 条。

五、代数结构的扩张（第三编第十九章统一表）

25. 【二】 Atiyah, M. F. & Macdonald, I. G. *Introduction to Commutative Algebra*. Reading: Addison-Wesley, 1969.
26. 【二】 Lang, S. *Algebra*, 3rd rev. ed. Graduate Texts in Mathematics 211. New York: Springer, 2002.
27. 【二】 Weibel, C. A. *The K-book: An Introduction to Algebraic K-theory*. Graduate Studies in Mathematics 145. Providence: American Mathematical Society, 2013.
28. 【三】 Grothendieck, A. & Dieudonné, J. *Éléments de géométrie algébrique* I. Publications Mathématiques de l'IHÉS 4 (1960). (卷次与年份待核)
29. 【二】 Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 52. New York: Springer, 1977.

第十九章第三节那张统一表的前四行—— $\mathbb{N}$ 的群化、 $\mathbb{Z}$ 的分式域、 $\mathbb{Q}$ 的完备化、 $\mathbb{R}$ 的代数闭包——分别见第 25 条第 3 章（局部化）、第 26 条第 II 部

(域论)； $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ 与代数 K-理论 K_0 服从同一条泛性质 (Grothendieck 群构造)，见第 27 条第 II 章。

六、分析中的扩张：分布、Young 测度、正则结构（第三编第十九、二十章）

30. 【二】 Schwartz, L. *Théorie des distributions*, tomes I–II. Paris: Hermann, 1950–1951.
31. 【二】 Hörmander, L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, 2nd ed. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 256. Berlin: Springer, 1990.
32. 【三】 Young, L. C. “Generalized Curves and the Existence of an Attained Absolute Minimum in the Calculus of Variations.” *Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Classe III, 30 (1937): 212–234. (页码与卷次待核)
33. 【三】 Tartar, L. “Compensated Compactness and Applications to Partial Differential Equations.” In *Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot-Watt Symposium*, vol. IV, edited by R. J. Knops, 136–212. Research Notes in Mathematics 39. London: Pitman, 1979. (页码待核)
34. 【二】 Pedregal, P. *Parametrized Measures and Variational Principles*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications 30. Basel: Birkhäuser, 1997.
35. 【二】 Hairer, M. “A Theory of Regularity Structures.” *Inventiones Mathematicae* 198, no. 2 (2014): 269–504.
36. 【三】 Lions, P.-L. “The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations: The Locally Compact Case, Part 1.” *Annales de l’Institut Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire* 1, no. 2 (1984): 109–145. (部次与年份待核)

第十九章 “Schwartz (1950)：求导在函数类上不封闭 $\rightarrow$ 扩张到分布”与 “Hairer (2014)：乘法在分布类上不封闭 $\rightarrow$ 扩张到正则结构”两行，分别见第 30、35 条。Young 测度作为切向振荡的极限对象，见第 32、34 条；第一编第二章第八节的两点测度即此类对象的最初等标本。

七、非局部算子及其局部极限（第四编 • 本组要求完整）

非局部向量微积分

37. 【一】 Du, Q., Gunzburger, M., Lehoucq, R. B. & Zhou, K. “Analysis and Approximation of Nonlocal Diffusion Problems with Volume Constraints.” *SIAM Review* 54, no. 4 (2012): 667–696. DOI: 10.1137/110833294.  网络上

流传有“56 (2012): 676–696”的错版著录；作者主页与 DOI 均为卷 54、页 667–696，以此为准。

38. 【一】 Du, Q., Gunzburger, M., Lehoucq, R. B. & Zhou, K. “A Nonlocal Vector Calculus, Nonlocal Volume-Constrained Problems, and Nonlocal Balance Laws.” *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 23, no. 3 (2013): 493–540. DOI: 10.1142/S0218202512500546.
39. 【一】 Gunzburger, M. & Lehoucq, R. B. “A Nonlocal Vector Calculus with Application to Nonlocal Boundary Value Problems.” *Multiscale Modeling & Simulation* 8, no. 5 (2010): 1581–1620. DOI: 10.1137/090766607.
40. 【一】 Du, Q. *Nonlocal Modeling, Analysis, and Computation*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 94. Philadelphia: SIAM, 2019. DOI: 10.1137/1.9781611975628.

Peridynamics 与其经典极限

41. 【一】 Silling, S. A. “Reformulation of Elasticity Theory for Discontinuities and Long-Range Forces.” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48, no. 1 (2000): 175–209. DOI: 10.1016/S0022-5096(99)00029-0.
42. 【三】 Silling, S. A. & Lehoucq, R. B. “Convergence of Peridynamics to Classical Elasticity Theory.” *Journal of Elasticity* 93, no. 1 (2008): 13–37. (页码待核)
43. 【三】 Du, Q. & Zhou, K. “Mathematical Analysis for the Peridynamic Nonlocal Continuum Theory.” *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 45, no. 2 (2011): 217–234. (页码待核)
44. 【二】 Andreu-Vaillo, F., Mazón, J. M., Rossi, J. D. & Toledo-Melero, J. J. *Nonlocal Diffusion Problems*. Mathematical Surveys and Monographs 165. Providence: American Mathematical Society, 2010.

图 Laplacian 向 Laplace–Beltrami 算子的收敛

45. 【一】 Belkin, M. & Niyogi, P. “Towards a Theoretical Foundation for Laplacian-Based Manifold Methods.” *Journal of Computer and System Sciences* 74, no. 8 (2008): 1289–1308. 会议版见 *Proceedings of the 18th Annual Conference on Learning Theory (COLT 2005)*, 486–500.
46. 【一】 Burago, D., Ivanov, S. & Kurylev, Y. “A Graph Discretization of the Laplace–Beltrami Operator.” *Journal of Spectral Theory* 4, no. 4 (2014): 675–714.
47. 【三】 Belkin, M. & Niyogi, P. “Laplacian Eigenmaps for Dimensionality Reduction and Data Representation.” *Neural Computation* 15, no. 6 (2003): 1373–1396. (页码待核)

非局部泛函向局部泛函的收敛（第二十七章临界档 $p = d$ ）

- 48. 【一】 Bourgain, J., Brezis, H. & Mironescu, P. “Another Look at Sobolev Spaces.” In *Optimal Control and Partial Differential Equations: A Volume in Honour of A. Bensoussan's 60th Birthday*, 439–455. Amsterdam: IOS Press, 2001.
- 49. 【三】 Ponce, A. C. “A New Approach to Sobolev Spaces and Connections to Γ -Convergence.” *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 19, no. 3 (2004): 229–255. (页码待核)

重叠支撑的既有传统：无网格法与 SPH（第二十三章失效现场一）

- 50. 【三】 Du, Q., Lehoucq, R. B. & Tartakovsky, A. M. “Integral Approximations to Classical Diffusion and Smoothed Particle Hydrodynamics.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 286 (2015): 216–229. (页码待核)
- 51. 【三】 Gingold, R. A. & Monaghan, J. J. “Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-Spherical Stars.” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 181, no. 3 (1977): 375–389. (页码待核)
- 52. 【三】 Lucy, L. B. “A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis.” *The Astronomical Journal* 82 (1977): 1013–1024. (页码待核)
- 53. 【三】 Belytschko, T., Lu, Y. Y. & Gu, L. “Element-Free Galerkin Methods.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37, no. 2 (1994): 229–256. (页码待核)

Voronoi 剖分与质心 Voronoi 剖分（第二十二、二十三章）

- 54. 【三】 Du, Q., Faber, V. & Gunzburger, M. “Centroidal Voronoi Tessellations: Applications and Algorithms.” *SIAM Review* 41, no. 4 (1999): 637–676. (页码待核)
- 55. 【二】 Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K. & Chiu, S. N. *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*, 2nd ed. Chichester: Wiley, 2000.

八、长度、周长与半连续性（第一编第一、二章）

- 56. 【三】 Gołąb, S. “Sur quelques points de la théorie de la longueur.” *Annales de la Société Polonaise de Mathématique* 7 (1929): 227–241. (页码待核；定理的现代陈述见第 57 条)

57. 【二】 Ambrosio, L. & Tilli, P. *Topics on Analysis in Metric Spaces*. Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications 25. Oxford: Oxford University Press, 2004.
58. 【二】 Ambrosio, L., Fusco, N. & Pallara, D. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford: Oxford University Press, 2000.
59. 【二】 Falconer, K. J. *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge Tracts in Mathematics 85. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
60. 【二】 Simon, L. *Lectures on Geometric Measure Theory*. Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis 3. Canberra: Australian National University, 1983.
61. 【三】 Allard, W. K. “On the First Variation of a Varifold.” *Annals of Mathematics* 95, no. 3 (1972): 417–491. (页码待核)
62. 【三】 Almgren, F. J., Jr. *The Theory of Varifolds*. Mimeographed notes, Princeton University, 1965. (版本与页数待核)

第二章第七节 Golab 半连续定理的陈述与证明见第 57 条（度量空间上一维 Hausdorff 测度对 Hausdorff 收敛的下半连续性）；周长在 L^1 收敛下的下半连续性见第 58 条。第十二节的 varifold（点集 + 每点切向的概率测度）见第 60–62 条；本书不使用该理论的任何定理，仅指出该对象存在并且早有名字。

姊妹卷（第五、七、八组多处引用）

75. 【一】 王德生。《SDE 数学导论（修订版）——结构·差异·纠缠：数学的重新定义》。新加坡：德麦国际出版社，2026。德麦国际专著第 53 号。328 页，五编四十三章，六附录，约 15.8 万字，59 条参考文献。本书第四编的相容性公理（六重约束：conforming 网格·合法中间态·质量单调性·确定性·可审计性·固定点收敛）、伞模型的三参数 (r, ω, v) 、无量纲 SDE 数 $N = r \cdot \omega / (v \cdot T_c)$ 与三态判别，均出自该书；本书只取其 $r \rightarrow 0$ 那一重并补上定量版本。

九、第五编所涉史料与原始论文

63. 【三】 International Mathematical Union. *Fields Medals: Official Citations*. 各届获奖理由与得主名单以 IMU 官方网页为准（访问日期：2026 年 8 月）。（此类文档的存在形态难以离线核实，故标为第三级）
64. 【二】 Hales, T. C. “A Proof of the Kepler Conjecture.” *Annals of Mathematics* 162, no. 3 (2005): 1065–1185.
65. 【二】 Hales, T. C., Adams, M., Bauer, G., et al. “A Formal Proof of the Kepler Conjecture.” *Forum of Mathematics, Pi* 5 (2017): e2.

66. 【三】 Gersho, A. “Asymptotically Optimal Block Quantization.” *IEEE Transactions on Information Theory* 25, no. 4 (1979): 373–380. (页码待核)
67. 【三】 Viazovska, M. S. “The Sphere Packing Problem in Dimension 8.” *Annals of Mathematics* 185, no. 3 (2017): 991–1015. (页码待核)
68. 【三】 Cohn, H. & Elkies, N. “New Upper Bounds on Sphere Packings I.” *Annals of Mathematics* 157, no. 2 (2003): 689–714. (页码待核)
69. 【三】 Ngô, B. C. “Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie.” *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 111 (2010): 1–169. (页码待核)
70. 【三】 Perelman, G. “The Entropy Formula for the Ricci Flow and Its Geometric Applications.” arXiv:math/0211159 (2002); “Ricci Flow with Surgery on Three-Manifolds.” arXiv:math/0303109 (2003)。
71. 【三】 Berger, R. “The Undecidability of the Domino Problem.” *Memoirs of the American Mathematical Society* 66 (1966). (页数待核)
72. 【三】 Robinson, R. M. “Undecidability and Nonperiodicity for Tilings of the Plane.” *Inventiones Mathematicae* 12, no. 3 (1971): 177–209. (页码待核)
73. 【二】 Milnor, J. “On Manifolds Homeomorphic to the 7-Sphere.” *Annals of Mathematics* 64, no. 2 (1956): 399–405.
74. 【二】 Atiyah, M. F. & Singer, I. M. “The Index of Elliptic Operators I.” *Annals of Mathematics* 87, no. 3 (1968): 484–530; III, 同刊 87 (1968): 546–604; IV、V, 同刊 93 (1971)。△ 1963 年那篇 (*Bulletin of the AMS* 69: 422–433) 是结果预告，不是定理的正式发表处；这一处在本书的姊妹卷中曾经著录错误，已订正。

分级统计

级别	条数	说明
【一】	9	本次逐条核到卷期页码或 DOI，可直接引用
【二】	37	标准著录，经典文献，多来源一致
【三】	29	页码或版本细节待核，引用前请自行复核
合计	75	

第四编承重三支的完整性核对：非局部向量微积分（第 37–40 条，四条全为【一】级）· peridynamics（第 41–44 条，主文献第 41 条为【一】级）· 图 Laplacian 收敛（第 45–47 条，两条为【一】级）。三支各自的主文献均已核到 DOI 或卷期页码。

下一版的著录纪律：一律著录到卷、期、起讫页码并附 DOI 或 arXiv 编号；确实无法确认页码的，宁可标“页码待核”，绝不填一个看上去合理的数字。本表中标为【三】的 29 条，是下一轮文献核实的工作清单。