

当教育删除了知识被生成的那个瞬间——数学学习中“不可教”的部分及其生态条件

数学创造力长期被视为少数天赋者的专利，而教育系统把全部精力用于提高可教知识的传递效率。本文指出，这一格局的症结不在于教学技术不够精进，而在于一个被反复绕过的本体论事实：任何一次标准化教学完成后，学习者的认知中都必然残留一份不被教学内容所捕捉的剩余经验，这份剩余物正是下一次自主生成冲动不可或缺的物质前提。本文将这份剩余经验概念化为“生成余数”，并将其与波拉尼的默会知识、维果茨基的自发概念、建构主义的自主建构、数学创造力研究中的过程式创造力、内在动机理论中的探究倾向、杜威的经验生长论、怀特海的教育节奏论、以及布鲁索的教学契约论逐一进行严格对质，展示一个让所有既有概念同时失效的分离点——生成余数不是“可教知识学得不够深”，不是“内在动机未被激发”，不是“浪漫阶段尚未完成”，而是唯一完全无法被教学意图预先格式化的、在教

作者 阳涌 · 约 2.4 万字 · 发表于2026年7月24日

摘要

数学创造力长期被视为少数天赋者的专利，而教育系统把全部精力用于提高可教知识的传递效率。本文指出，这一格局的症结不在于教学技术不够精进，而在于一个被反复绕过的本体论事实：任何一次标准化教学完成后，学习者的认知中都必然残留一份不被教学内容所捕捉的剩余经验，这份剩余物正是下一次自主生成冲动不可或缺的物质前提。本文将这份剩余经验概念化为“生成余数”，并将其与波拉尼的默会知识、维果茨基的自发概念、建构主义的自主建构、数学创造力研究中的过程式创造力、内在动机理论中的探究倾向、杜威的经验生长论、怀特海的教育节奏论、以及布鲁索的教学契约论逐一进行严格对质，展示一个让所有既有概念同时失效的分离点——生成余数不是“可教知识学得不够深”，不是“内在动机未被激发”，不是“浪漫阶段尚未完成”，而是唯一完全无法被教学意图预先格式化的、在教学完成后作为剩余而沉淀的认知矿砂。在此基础上，本文剖析了现代学校数学教育中四重相互缠绕的制度逻辑——时间碎化、评价渗透、身体运动压缩、见证式在场缺席——如何与生成余数的存续逻辑发生结构性不兼容。通过一个儿童在两种教育生态中行为谱系位移的微观叙事，本文展示了生成余数从近乎无声到短暂绽现的条件，并从认知负荷理论的内部假设出发，追问其在“可教知识传递效率”上的有效性与在“生成余数发酵”上的边界之间的张力。论文最后回应了文化传承与社会公平两个有力反驳，并明确给出整个论断的证伪条件。本文的基本结论是：创造发生的条件，不是没人教，而是教完之后，那个人身上仍然剩有什么。承认有些东西根本不能教——这本身是当前数学教育在既有历史条件下必须承受的认识论转向。

一、一个被一再绕过的问題

当我们谈论数学创造力时，什么被绕了过去？

多数成年人——包括许多深思熟虑的教育者——的第一反应总会指向同一个方向：创造是极少数人的事。它需要天赋。需要高度结构化的训练。需要先牢牢握住足够多的已知，然后才配谈未知。这个看法渗透得如此彻底，以至于很少有人意识到它不是一个事实，而是一套已经被制度化为课堂节奏、课程标准和评价逻辑的操作预设。在这套预设之下，整个教育机器被调校到一个核心目标上：如何把“已知”传递得更高效、更系统、更可测量。

我并不否认这些努力的合理性。它们的确让知识的传递越来越精细。但我必须指认一个在这些精进中被一再绕过的问題：无论传递技术优化到什么程度，它都无法传递知识在被生成时的那个瞬间所携带的东西。

那个瞬间里有什么？让我粗略描述几样。被哲学家波拉尼（Polanyi, 1966）称为“默会维度”的身体化判断——不是“我知道这个定理”，而是“我的双手和眼睛共同感受过为什么这样定义是合理的”。被数学家哈达玛（Hadamard, 1945）在《数学发明的心理学》一书中详细记录的那种漫长的、无意识的酝酿阶段——不是“我推理出来了”，而是“在我放弃推理之后，它自己从某个地方浮了出来”。被荷兰数学教育家弗赖登塔尔（Freudenthal, 1973）指认为“数学化”的那个核心动作——不是接收一个成品的定义，而是从一个混沌情境出发，自己组织素材、试错、命名、把经验稳定成一种结构。还有一件每一个一线教师都观察过、却很少被写进研究报告的事：一个孩子突然说出一个奇怪的词，画出一个歪歪扭扭的符号，那当然不是课本上的标准术语，但那背后是一个正在自己挣扎着给某个混沌念头命名的活人的心智。

这几样东西有一个共同点：它们都不可被“教”。不可教，不是因为我们暂时还没找到教它们的好方法，而是因为它们根本就不在那类可以被教——可以被清晰表述、被拆成步骤、被评估做题正确率的——事物之中。它们的每一次出现，都必然伴随着一个具体的、活生生的认知者在自主地做一件事。而一旦教育者把这件事替他做了——一旦那个定义已被写在黑板上、那道题的思路已被讲透——这个瞬间不是被推迟了，不是被打折了，而是直接被擦除了。

让我用一个每个人小学都经历过的例子把这件事说实：减法。

一年级孩子面对“7减3”，面对的是一整套成人早已脱敏的深层问题。7是什么？3是“三个东西”还是“第三个数”？“减”是在做什么——拿走？消失？倒着数？那个等号究竟是什么意思——是左边做完

得到右边，还是两边必须一样大？这些问号，不是教师讲得清与讲不清的问题，而是每一个认知者必须亲自在自己的符号、动作和意义之间建立起一次神经级连接的问题。教师能做的只是讲解，但不能替孩子的神经系统去完成那一次连接。可问题在于：如果讲解先于探索发生——如果教师直接告诉孩子“减就是拿走，你做这十道题就懂了”——那这个“被告知”的动作，就把孩子自己建立连接的必要性消解了。孩子依然需要某种认知活动来完成操作，但那已经不再是“自己在混沌里抓出秩序”，而是“对照指令执行操作”。

被擦除的那个东西，就是本文整篇论述所要锚定的对象。我暂且称它为生成余数。在把它正式概念化之前，我希望先做另一件事：让读者亲手触碰到它所指向的那道裂缝。因为如果那道裂缝不能被真切地感知到，那么任何命名都只是一个新的标签。

二、一道被所有人感觉到、却始终未获命名的裂缝

这一节不打算立论，只打算描摹。描摹那道在教育现场中反复出现、一再被教师的话术覆盖、又一再从学生的沉默中渗出来的裂缝。

场景一：一节典型的小学中年级数学课。教师讲了一个新概念，讲得很清楚，大部分孩子跟着做了几道练习，看起来都会了。接着教师换了一道“应用题”——把刚才那个结构的数字改了一下，情境换了一下。相当一群刚才还做对了的孩子，忽然卡住了。教师的第一反应通常是：“你刚才不是会了吗？这题跟刚才的一样啊，你仔细读题。”

在这句反应里，教师把两件事当作了一件事：会做与刚才结构相同的题，与理解了那个结构本身。这两者在小学生的认知中经常是拆开的。一个孩子完全可以靠记住操作步骤把一类题做到高分，而从未进入那个结构被生成的瞬间——从未亲身体验过“为什么要这样定义”的困顿与挣扎。他拿到的，是一个已经被割掉了“生成余数”的干净答案。

这件事，任何一个有几年教龄的老师都见过。但他们通常把它归因于“孩子没认真”“练得还不够”“这个孩子就是不适合学数学”。很少有教师被训练过另一种可能：是教学本身的结构制造了这一步的剥落。

场景二：考试结束后，教师在分析一道难题。她说：“这道题考察的是对XX概念的本质理解。大部分同学没做出来，说明对这个概念的本质还没吃透。”这里的推理暗藏着一个极少被审查的大前提：既然学生已经在课堂上被完整告知了概念的本质，那么他们没做出来，就等于还没吃透那个已被给出的东西。

这句话在逻辑上形成了一个精巧的闭环。它的前提——“学生已经被完整告知了本质”——从来没有被放到台面上接受审查。而恰恰是这个前提，最值得被追问：一个被教师“告知”的所谓本质，对学生而言，是不是真正的本质？还是说，它只是一个“已经被别人找到的本质的摘要”，学生把它

记下来，却从未亲历过从混沌中被逼出那个本质的历程？当教师说一个孩子“没理解本质”，这句话诊断的不是那个孩子的心智，而是教育系统自身一项持续发生的误认：把“被告知的本质”当作“被理解的本质”。

场景三：一位高年级学生做一道几何证明题。他的思路歪歪扭扭，画了一堆乱糟糟的辅助线，中间好几步逻辑跳得莫名其妙。最终他放弃了。教师看着他的草稿纸，说：“你方向一开始就偏了，应该从这里想。”然后给出标准思路。

批评也许只是对“没找到正确方向”的事实陈述。但它漏掉的东西，恰好是这个孩子在这道题上唯一真实的发生。那几条被否定的歪扭辅助线，不是“废掉的尝试”，而是他唯一的生成历程。标准思路讲得再清楚，也只能在他听讲之后为他装上一个外来的正确结构，却无法还原他在那几次歪扭中自己对自己发问的那个瞬间。那个瞬间尽管以失败告终，却是他整段认知历程中最接近自主差异推进的一刻。教育者把它当作一个需要纠正的错误加以覆盖，它就被清除了。而那次失败中留给他的身体化感受——“为什么我这条路走不通？”——那份最为宝贵的生成余数，也在被覆盖的同一瞬间，被一同清走。

三个场景，单独看，哪一桩都谈不上对教育的否定。教师做了教师该做的事：讲清楚、给练习、分析错题、纠正方向。但它们共同撕开了一道裂缝：教育系统每一次在“帮孩子学对”的时候，都同步完成了一个未被言明的消极动作——擦除了那个孩子自己生成理解的必要性，并顺手清走了他在自己生成过程中产生的未完成经验。

那个被擦除的东西，不是教学的瑕疵，而是教学的必然伴随物。有些东西，教了就没法留；不教又无从得。这道裂缝，就是“生成余数”出场的全部理由。

三、“生成余数”：概念构造与不可还原论证

3.1 从裂缝中凝出的命名

经过了前两节的描摹，现在可以给出一个严格的概念界定。这个界定不是先于裂缝的预设，而是裂缝充分暴露之后的暂时结算。

生成余数[2]，是指在一次标准化教学完成之后，认知者身上留存的、未被教学内容所充分捕捉的剩余经验。它的内部构成有三个相互缠绕的部分。

其一，被搁置的困惑：教学为推进进度，常要求孩子“先记住规则，这个问题以后再说”。孩子确实搁置了那个疑问，但疑问作为认知张力并未消失，它在认知底层化为一处“这里有过一个我没想通的事”的未完成标记。如果后续教学从未回到这个困惑，它就沦为纯粹的情绪记忆；但如果在某个偶然的材料相遇中被重新激活，它就变成了一次新探索的真正起点。

其二，被覆盖的另类猜想：在正确答案出现之前，一个孩子可能闪现过多条不同的猜想路径。标准答案一登场——尤其是带着教师权威和考试正确性的那个答案——这些猜想不是被驳倒的，而是被压倒的。它们未被证伪，只是失去了被言说的合法性。然而对另一个截然不同的问题，一条从未被走完的猜想可能恰好有效。前提是，孩子还有勇气回到那些已被覆盖的思路——而这需要教育环境不把“曾经被压倒”当作一种人格污点。

其三，身体化沉淀：孩子操作数学对象时，手、眼、空间感和时间感共同参与了认知。近几十年来具身认知研究反复揭示的这个维度[5]，在真实课堂中却极少被认真对待：笔尖在纸面上反复运行所累积的肌肉记忆，眼睛来回扫视图形时无意中捕获的对称感，拼摆方块时身体自行记下的节奏——这些未经语言中介的身体经验，构成了对数学结构最底层的直觉来源。

这三个部分，在每次教学结束的瞬间同时存在。但它们不是教学可以直接“生产”出来的东西。恰恰相反，它们正是因为教学无法把它们全部吸收，才作为不可消化的余料剩了下来。因此，生成余数不是某种需要被补足的缺陷，不是“还没教会的部分”，而是教学能在认知者身上走到的最终边界。跨过这条边界之后，就不再是教的事。

需要立即澄清一点：这三个部分不是生成余数的“内部结构”，不是一套可以逐格查对的分类坐标。它们是在不同显露条件下，同一份未被教学穷尽的剩余经验所呈现出的临时形态。被搁置的困惑与被覆盖的猜想，往往在同一次探索中交替浮现——一个孩子因为某个困惑被搁置，才在正确答案面前产生了自己的“另类猜想”；而身体化沉淀，则常常是被搁置的困惑在沉默的身体操作中所留下的唯一痕迹。三者不是并列的三项，而是同一个“余”在不同压力方向上的褶皱。把这个“余”切成三项，只是为了方便指认它在不同教学动作后显露的不同面相，而非断言它本来就长成这三个格子。

一个概念要被接受，它必须能承受一项冷酷的检验：把它压成五十字以内的单一命题，然后问——有没有一个已有的、被严格定义的学科概念，能够无损地重述它？如果有，这个概念就是多余的。我将这项检验施加于生成余数，并选取八个在理论上最邻近的候选人。我将逐一展示它们与生成余数的关键差异，并最终指出那个让它们集体失效的辨别面。

3.2 与八个近邻的对质

对质一：波拉尼的默会知识

波拉尼（Polanyi, 1966）的默会知识是指“我们所知道的多于我们所能言说的”——那些构成我们认知技能基底、不经过焦点意识、难以用语言充分传递的身体性知晓。初看起来，生成余数中的“身体化沉淀”几乎可以毫无折损地装进这个框架。波拉尼自己就反复讨论过学徒如何通过身体性模仿获得无法言传的手艺知识。

但两者的差异在于意图。默会知识本身是认知的正当组成，教学可以、也应当有意识地培育它——师傅示范、学徒跟做，就是一种系统的默会传递。生成余数却有一个默会知识不曾触碰的面相

：那些被搁置的困惑和被覆盖的猜想，它们的来源根本不是教学意图，而是教学意图的边界之外——教学用尽了自己的力量，却发现有一些东西无论如何装不进自己的框架，这些东西就以“余”的形态剩在了学生身上。更重要的是，生成余数包含一个时间箭头：它是在教学完成之后才作为“剩余”而显现的；默会知识则没有这个“教学之后”的结构规定。波拉尼的框架能装下身体直觉，却装不下一个系统性的反问——为什么教学越精巧，学生身上这种不可言说的东西反而越少？这个反问不在波拉尼的问题域里，却恰恰是生成余数要拆解的结。

对质二：维果茨基的自发概念

维果茨基（Vygotsky, 1987）在《思想与言语》中提出了“自发概念”与“科学概念”的区分。自发概念是在日常经验中自发形成的、未经系统教学组织的前科学概念，它来自儿童与物质世界和社会互动的直接经验。维果茨基明确指出，教学应当与儿童的自发概念对接，科学概念可以“向下”生长到自发概念的土壤中，而自发概念则“向上”发展，被科学概念重新组织。

这一论述与生成余数高度共鸣。但维果茨基的“自发概念”毕竟是一个认知结构的名称——它是儿童已经形成的、可以表达出来的日常概念（尽管不精确）。生成余数所要标定的，恰恰是比自发概念更前一层的东西：尚未形成任何可被言说的概念雏形，仅仅是一种残留的张力、一句咽回去的困惑、一次身体摆弄后留下的模糊的“好像这样也行”的感觉。维果茨基的自发概念已经走到“概念”的门槛前，生成余数还在“混沌的感知碎片”里。而且，维果茨基的论述终点是“科学概念与自发概念的融合”，这个过程依然在教育——更巧妙的教育——的视野之内。生成余数却追问：有没有什么经验，根本就进不到任何一种“概念”（无论是自发还是科学）的通道里，却仍然对下一次创造至关重要？这个追问，是维果茨基体系没有打开的一扇侧门。

对质三：建构主义中的自主建构

建构主义——无论是皮亚杰（Piaget, 1970）的发生认识论、冯·格拉塞斯菲尔特的激进建构主义，还是社会建构主义的诸多分支——有一个共同的内核：知识不是被动接收的，而是认知者在自身已有结构的基础上主动建构的。许多建构主义者强调，真正的理解不能靠灌输，必须让孩子自己经历认知结构的重组。

这里需要做一个精确的区分。激进建构主义（von Glasersfeld, 1995）确实强调学习者建构的不可预测性，它不预设一个教师已知的“终点”。生成余数与激进建构主义因此比与课堂操作化版本的建构主义更近。但两者的一个核心分歧仍然存在：激进建构主义关注的是“建构活动本身”——认知者在既有结构的基础上如何同化新经验、如何顺化旧结构。而生成余数标示的是建构活动“结束后”留下的那部分原料——建构已经把能用到的东西都用掉了，而生成余数是建构用剩下的、下一次建构尚未发生之前暂时闲置的矿砂。它不是建构过程，不是建构的起点，而是上一次建构结束后被剩余在认知者身上的沉积物。激进建构主义关心的是建筑如何盖起来，生成余数关心的是上回建完以

后，地上还剩下哪些石头——这些石头，下一次盖什么都可能用上，但也可能永远不用。

对质四：数学创造力研究中的过程式创造力

过去二十年里，数学教育领域对创造力的研究已逐步从“天才产品”转向“过程”。斯里拉曼（Sriraman, 2004）、利里耶达尔（Liljedahl, 2016）等学者的工作清楚区分了“过程式创造力”：每一个普通学生在面对一个对他而言没有现成解法的问题时，如果能够产生原创的洞察组合、生成新的数学关联，这一过程本身就可以被界定为创造行为。利里耶达尔（Liljedahl, 2016）的“思考型课堂”实践更是系统论证了：当课堂生态从“模仿”转为“思考”时，学生普遍会产生程度各异的数学创造性思维。

这些工作已经极为靠近本文的议题。但它们与生成余数仍然差着最后一层。过程式创造力的研究对象，是“当学生被给予一个开放问题时，他们怎么创造”。生成余数所追问的则是：“在没有任何人给出问题之前，什么东西使得一个学生可能在将来某一天会对某个现象突然发起追问，并坚持一种非现成的探索？”这不是一个关于解题过程的问题，而是一个关于生成性主体如何被孵化的问题。前者的起点是问题，后者的起点是一个人身上的沉积了一份尚未被问题格式化的原初冲动。数学创造力研究精确地描述了绽放的瞬间，生成余数试图照亮那株植物在地下长期堆积的有机质——这些有机质不是创造行为本身，但是创造发生所不可缺失的土壤养分。[6]

对质五：内在动机与探究倾向

这是最危险的一个近邻，也是本文概念必须正面承受的最强替换挑战。自我决定论（Deci & Ryan, 2000）积累了大量的证据表明：当个体的自主性、胜任感和关系需求得到满足时，内在动机——那种“我就是想做这件事”的心理驱力——就会被激发；而外在评价、控制和催促则会损害内在动机。初看起来，本文对生成余数的论述——它不可被教、它在评价压力下被清除、它在开放土壤中存活——几乎可以逐条翻译成自我决定论的语言：不可被教的，是内在动机；被评价压力清除的，是自主性；在开放土壤中存活的，是内在动机被重新激发的心理状态。

但这个替换在一条关键的辨别线上失效。内在动机理论处理的，是驱动行为的心理状态——当一个孩子有兴趣、感到自主、觉得“我想做”时，他就会去探索。生成余数处理的，是行为发生之前、以未成形经验矿砂形态沉淀在认知者身上的认知沉积——那些不是“我想做”，而是“我身上曾经有过这样一件没想通的事、一种没走完的猜想、一片身体记住却说不出来的感觉”。“我想做”可以凭空出现，也可以被外在奖赏摧毁；但生成余数，必须由上一次具体的认知遭遇所沉积下来。它不是一个心理引擎，而是一堆认知地质层。一个孩子可能对数学充满内在兴趣，但他身上未必有被搁置的“为什么这个式子要这样变形”的具体困惑——那困惑只在特定的教学相遇中才会产生，并在教学绕过它之后作为剩余而留存。反过来，一个孩子身上可能积压着大量未被解决的困惑和未被澄清的猜想，但他此刻并没有任何“想做数学”的兴趣——生成余数在那里，但内在动机不在。因此，生成余数与内在动机的分界线在于：内在动机回答“为什么去做”，生成余数回答“有什么可做的原材料”。前者是

引擎，后者是矿脉。动机理论可以解释引擎何时启动，却不能解释矿脉如何形成、何时枯竭——而这，恰恰是本文全部追问的起点。

对质六：杜威的经验连续性与生长

杜威（Dewey, 1916; 1938）在《民主与教育》和《经验与教育》中反复论证了一个核心命题：真正教育的要义不在于传递既定知识，而在于经验的不断生长。每一次经验在其发生的情境中都未被穷尽——它留下了某种未完成的、朝向未来的冲动，这种“经验的连续性”正是下一步探究的起点。杜威写道：“每一经验都会带走一些东西，也会留下一些东西”（Dewey, 1938, p.35）。这个“留下的东西”，似乎就是生成余数的前身。

但这里有一个微妙而关键的区别。杜威的“经验连续性”是经验自身的生成法则——它是经验的普遍特性，所有经验都遵循这一原则，它是教育应当承认并加以利用的本体论事实。生成余数则不是一个普遍范畴，而是一个历史范畴：它是在特定的历史条件——标准化教学把可教知识与不可教经验切开、并把后者定义为“不需要留下的东西”——之下，才作为“剩余”被逼出来的。杜威谈的是经验本身的生长逻辑；本文谈的是，当一套制度逻辑不再承认这种生长时，那些被制度排除的经验碎片以什么形态继续残存。杜威的生长原则是每个经验都“有前有后”；生成余数追问的是：当教育机器把“前”删干净、把“后”封死时，什么是它删不掉的那一点点？这多出来的一句追问，是杜威的框架装不下的。

对质七：怀特海的教育节奏论

怀特海（Whitehead, 1929）在《教育的目的》中提出了教育三节奏：浪漫阶段（romance）、精确阶段（precision）和综合阶段（generalisation）。浪漫阶段是知识被第一次接触时的那种“兴奋与惊异”的阶段，它的核心特征是大量未经整理、未被概念捕获的感知碎片的沉浸。怀特海明确指出，浪漫阶段是整个认知循环中“不可被跳过的”一环——如果教育从精确直接开始，知识就会变成“无生气的观念”。

生成余数与浪漫阶段在这一描述上有显著的共鸣。但二者在时间结构上分道扬镳。怀特海的浪漫阶段是精确阶段之前的阶段：它是知识的第一次接触，发生在系统性教学之前或之初。生成余数标示的，却是精确阶段之后被剩余下来的东西：教学已经完成了它的精确传递，学生学会了标准算法和定义，但总有一些经验——被搁置的困惑、被压倒的猜想、身体化感受——未被吸收进精确体系里，它们以“余”的形态滞留在教学结束之后的认知底层。因此，浪漫阶段的“混沌感知”是教学之前的待处理原料，生成余数却是教学之后的未消化残渣。前者是认知循环的起点，后者是一轮循环结束后没有被回收的废料——而这废料，恰好是下一轮循环可能需要的种子。怀特海的节奏论没有为“教学之后的残留”这一时间位置留出概念空间，而这个位置，正是生成余数所占据的。

对质八：布鲁索的教学契约论

布鲁索（Brousseau, 1997）的教学契约理论揭示了一个极为精确的现象：课堂中师生之间存在一种隐性的相互期待，学生不断揣测教师想要什么答案，教师则不断调整情境以让学生“自己发现”预定知识。在这种契约下，学生的一切认知产出——只要不在教师的意图之内——都会被系统性地忽略、消解或规训回“正确的轨道”。这种契约机制的运作，与本论文第四节的制度逻辑分析高度同构。

但布鲁索的分析单元是课堂互动中的契约关系——它的重心在于“师生之间此刻正在发生什么”。生成余数的分析单元则是教学结束后留在认知者身上的沉积物——它的重心在于“在那些被契约排除的产出被排除之后，它们以什么形态继续残存”。教学契约解释了排除的机制，生成余数指认的是被排除物的残留形态。换句话说，布鲁索告诉我们“什么被删掉了以及如何被删掉”，生成余数追问的是“被删掉的渣子去了哪里、以什么形态留在那个孩子身上、以及这份残留物有什么潜在的认知功能”。这两个问题接在一起才完整，但它们不是一个问题。因此，生成余数不是教学契约论的补丁，而是它在“排除之后”这个方向上的理论延伸。

至此，这八次对质共同揭示了一份统一的辨别面：生成余数不是一种知识形态，不是一种认知结构，不是一种教学策略的目标，不是一种创造行为的特征，不是一种心理驱力，不是经验的普遍生长原则，不是教学前的好奇心阶段，也不是被课堂契约过滤掉的互动的类型。它是在一切教学意图、一切教育框架、一切已被命名的“学习”与“动机”行为完成之后，必然留在认知者身上、却无法被任何一种“教”或“学”或“驱动”的概念所覆盖的那个原初剩余。它的理论身份，不是一个新类别，而是一条新的区分线：它把“可教的全部”与“永远无法被教的那一点点”第一次分开了。这一点，是波拉尼、维果茨基、建构主义、过程式创造力研究、自我决定论、杜威、怀特海和布鲁索各在自身逻辑中走到尽头后，集体够不到的边界。生成余数，便是在这条边界上被逼出来的一个不可或缺的命名。

四、制度逻辑与结构的必然不兼容：生成余数如何在学校里被系统性消解

如果生成余数是创造发生的物质前提，那么它的命运就紧紧绑在教育生态的条件上。有某些条件，它就能持续累积、缓慢发酵，终在某一天转化成一个连教师都未曾预料的数学行为；没有这些条件，它就在儿童还来不及意识到它存在之前，已被一种看似温和而极为高效的方式从认知底层消解。

本节剖析四种相互缠绕的制度逻辑。它们不是四道孤立的关卡，不是教育系统的“病理”或“故障”，而是在特定历史条件下——大班额、标准化可评性诉求、高利害考试制度——教学法与评价制度耦合而成的一套正常且必然的效应。这四种制度逻辑与生成余数的存续逻辑之间，发生的不是一方对另一方的“恶意清除”，而是两套生成序列的结构不兼容：制度的运转逻辑，恰好使得生成余数

难以在其中持续存留。[3]

第一相：时间碎化与浸泡的不可得

生成余数中“被搁置的困惑”要能转化为后续探索的起点，需要一个关键条件：孩子有机会在以后的某个时间，与同一份材料不期然地重逢。只有在不同的心境下、用新的眼光再看一次当初那个没想通的点，困惑才会从一块隐隐作痛的情绪疤痕，发酵成一次主动的追问。

但现代学校的课时结构把时间切割为四十分钟左右的碎片。一个知识点讲完，几道练习做完，下课铃一响，全班必须立即切换到另一套认知框架。那个刚才被搁置的疑问——“为什么这个式子要这样变形”——在当天不会再得到任何公共的注视。第二天回来后，孩子只隐隐记得那道题当时没想通，却不记得自己究竟卡在哪一层理解上。被搁置的困惑没能发酵为探索，只发酵成一层薄薄的不安，一层“我就是不擅长这个”的自我标记。

更根本的是，时间的碎片化让“浸泡”这个认知动作本身变得不可能。浸泡——在一段不被不断打断的长时间里，反复摆弄同一组材料，让身体的节奏与材料的纹理逐渐相合——是把混沌的生成余数转变为可辨识的直觉的主要方式。博勒（Boaler, 1998）在长期追踪数学课堂的研究中观察到，当学生被给予连续几天的自由探索时间后，那些一开始毫无头绪的尝试，往往在第三天才突然结出意想不到的数学结构。这个“第三天”永远不会在被打碎的时间表里出现。

第二相：评价渗透与猜想自抑

生成余数中“被覆盖的另类猜想”，是在出错成本极低、正确答案尚未出场的缝隙里才可能存活的。一旦评价的触角延伸至课堂的每一分钟——不是指正式的考试，而是那种弥漫在教室空气里的持续判断：举手回答是不是“对”的，作业本上的尝试会不会被红笔圈为“不规范”，同伴之间的低语会不会被教师听到后给一个皱眉——孩子的注意力就会被铸造成一个高灵敏度的“对错检测器”。脑中刚冒出一个大胆的念头，下一个升起来的念头不是“让我试试”，而是“万一错了呢？”

这不是教师主观想要的效果，而是评价全覆盖的制度逻辑在个体心灵内部的内化。当这个内在监视器完成浇筑之后，生成余数中的“另类猜想”成分，在尚未上升到意识表层之前，就已经被自己提前否决了。儿童不再允许自己在思维里保留两条互相矛盾的路径而不急于选择；而创造思维的第一步，恰恰几乎总是在两股冲突的感知之间，悬停而不急于择一的那个留白。

第三相：身体运动的压缩与直觉抽空

数学长期被定义为纯粹的脑力劳动。这个定义本身就是一道清除令。它向每一个小学生传递的无意识信息是：身体不要动，保持安静，用脑子想。结果是，小学低年级课堂里还会出现的小棒、方块、手指计数等操作，到了中高年级就被迅速压缩。数学被精简为纸面上的符号操作：读题，写算式，交卷。

然而生成余数最底层的那部分——身体化沉淀——必须通过大量、不受催促、甚至看似“漫无目的”的摆弄来形成。一个孩子必须反复把三角形叠在正方形上、拆开、换个方向再叠，才有可能让“形状的互补关系”从一条用文字记住的规则转化为一种身体的直觉；必须在反复排列彩色方片的过程中，才能让“乘法就是分组”成为不止是背诵口诀表，而是手与眼共同确认的视觉事实。

当这种身体性操作被简化为“用脑子想就可以了，别老拿道具”，生成余数中那块原初的直觉根基就被抽走了。以后的数学学习全部建在符号链上，底下没有身体的触感支撑。为什么有些学科成绩优异的学生也会表现出“解题很快，但对结构无感”？这是一个重要解释。

第四相：见证缺席与生成的无声萎缩

前三相解释的是生成余数在个体内部如何被窒息。第四相解释的是：即使它还尚未彻底窒息，如果找不到一个外在的接收器，它也会因无声而自行消散。“教”这个动作在结构上不可能充当这个接收器：因为教已经预设了教师的意图——教什么、怎么教、教到什么程度算合格。而生成余数为自身保留下来，首先需要的回应信号，恰恰是教师暂时收一收自己的意图，留出一小片飞地，让儿童的某个非标准动作能够完成并被看见——而不是被“纠正意图”所覆盖。

这种“看见”不是评价，不是表扬，不是诊断，而是一种更本分的动作：见证。见证者所做的，只是在儿童尚无法把自己的碎片说清楚的时候，用耐心和精准的反射——把你刚才做的那件事重新说给你听，帮你发现自己做了些什么。这个功能，维果茨基以前用“社会性中介”来描述，但他对其在最深层的作用机制似乎尚未来得及充分展开[4]：这个中介的核心，不是把知识从成人手里传递到儿童手里，而是把儿童里面那些他自己都还不知道是什么的东西，轻轻映照给他看，让混沌的生成余数第一次获得一种可以被自己意识到的雏形。见证不求助下一个发展阶段的符号系统——不是“你看，这就是你在做乘法”——而是在同一平面内做镜像式反射：“你把这一块转了一下，然后放了上去。”被反射回去的，是儿童的混沌经验本身，而非一个被成人代码翻译过的版本。

当见证者从课堂上失踪——当教师被课程进度、评价指标和维持纪律的多重压力推成一个连续不断的“纠正者”——儿童的生成余数就会在沉默中萎缩。孩子不再把他的困惑、怪念头、身体动作视为可以与人交谈的“有价值的东西”，而是视为私人的、羞耻的、最好藏起来的瑕疵。而一旦孩子自己都不再观看自己的生成余数，它就彻底消失了——不是因为被粗暴销毁，而是因为被一种无回应的沉默劝退了。

这四种制度逻辑在真实的课堂里并不是依次发生的四道程序，而是同一套教育机器在不同部位持续同步运转的四个声部。时间碎化堵住了缓慢发酵的通道，评价渗透撤除了猜想存活的空气，身体压缩抽空了直觉生成的土壤，见证缺席则让唯剩的一丁点火星找不到可以被反射回来的镜子。它们的协同效果不是“四种清除”，而是一种持续的低压，让生成余数在绝大多数常规课堂里，几乎没有发育到可被看见的机会。

五、一个孩子，两种生态：生成余数存活的微光

本节提供的不是一个检验理论的实证案例，而是一段启示性叙事。它的功能，是以具体可见的方式展示前三节所构建的概念——生成余数、制度逻辑和生成与土壤的关系——在真实儿童的连续行动中可能呈现什么样的形体，并由此引导出下一节的理论假说。叙事的性质必须在开篇处说清楚：这是单一个体在特定条件下的行为谱系位移的片段观察，不能独立支撑普遍规律，只能为概念提供一个知觉上的锚点。[1]

文轩是就读于城区一所公立小学的三年级学生。在常规数学课堂上，他长期被识别为一个“慢”的孩子——计算速度慢、课上很少举手、时常在测验里犯一些老师和家长都觉得奇怪的错误。一次单元测验中，他面对一道没有文字的图形序列填空题，直接写下一个自创的奇怪分数，还在旁边画了一个小方框。正确答案是“3”。教师当时给他的反馈，是圈出错误并在卷角写了句“再细心一点”。

这里值得停下来看一下那张卷子上的痕迹。那个自创分数是一个带斜线的涂鸦，仔细观察可以发现，上半部分隐约是涂色方块的数量，下半部分是一个尚未被完整写出的数字，被方框围在了里面。这种符号不是从任何教材上学来的——它是一个孩子在面对一个“应该填进某个格子”的模糊指令时，用自己的已有资源（分数的形状、方框的闭合感）拼凑出来的一个私人符号。如果仅仅把它判定为“错误”，就关闭了理解它背后生成机制的唯一通道。在本文的概念框架里，这个符号是生成余数中“被覆盖的另类猜想”的一次微弱的、瞬间的外显——是孩子试图用自己的方式处理“总共有多少个涂色方块与下一排之间的关系”这个他尚未看清的结构时，所留下的唯一痕迹。

几周后，同一批学生参加了一次以“自由拼图与图形变化规律”为主题的非结构化探究活动。每个孩子面前摆着整盒彩色积木、三角形和正方形磁片，唯一的提示是：“你可以用这些材料做任何和图形有关的事，做完后可以告诉我你发现了什么。”整个时段约一个小时。

文轩在这个场景里的行为，与他平常在数学课上的行为发生了明显的位移。前十五分钟，他只是安静地反复把一列三角形排直、打乱、再排直。乍看起来像是无目的的摆弄。然而仔细观察他的动作序列可以捕捉到一些耐人寻味的细节：每一次重新排直时，他的指尖会轻轻按在每一个三角形的顶点上，像是在确认什么；有一次他把一列三角形从右往左推倒，又迅速全部扶正，嘴里发出一个几乎听不见的“啧啧”——这个声音和动作的同步性，透露出他正在与材料之间建立一种身体层面的对话。如果把这一段时间只看作“无意识操作”，就会漏掉生成余数正在以一种极低的可见度运作的信号：那些反复的排直和推倒，看似漫无目的，却是在用身体完成对“顺序”和“位移”这两个基本结构的非语言性探测。

大约二十分钟时，他开始用三角形和正方形拼出一个对称的组合图形，轻轻嘀咕了一句：“这个可以转着拼。”这句话是一个标志性的时刻。它表明，前十五分钟的身体积淀——指尖按顶点、推倒再扶正——已经在某个阈值上累积成了可以被意识捕捉到的东西。“可以转着拼”既不是一个完整的

几何判断，也不是一个可被评分的数学表达，但它恰好位于身体化沉淀向可表述的结构转化的临界点上。生成余数中那片混沌的矿物，在这里开始结晶。

他随后拆掉原来的结构，取两个三角形拼成一个菱形，把这枚菱形当作新的最小单元，开始重复地拼接——每接一块，都刻意让新菱形朝同一个方向偏折一小截。这里的关键动作是：“把拼出来的菱形当作新的最小单元”。这是一个完全自发的结构递归操作——他不是“按照某个已知模式继续拼”，而是把前一步的产出变成了下一步的基本零件。这个动作在数学上的分量，远比他是否意识到自己正在做“自相似图形”来得重要。它是生成余数从“残留的混沌感”转化为“自主的结构重定义”的最清晰的瞬时标志。

约莫四十分钟左右，他创造出一条不规则的锯齿形折边，由一连串向同一侧偏折的菱形排列而成。这时他转过头跟身旁的同学说了一句话，录音带记下的是：“你看，它每一节都是偏的，但它偏的永远都一样。”

这不是一次天才的表演。文轩没有写任何代数式，也完全不知道自己撞到了一种分形几何的视觉雏形。他的行为并不适合任何标准化的数学评价——既不可评分，也谈不上解答题目。但他最后说出的那句话——用“偏”和“永远都一样”这样的朴素词汇，为自己制造的规则作了一个清晰的命名——正是数学创造最核心的一类动作：在混沌的素材中抓出一个秩序，然后把这个秩序用自己的话说出来。

现在把文轩在两种生态中的行为摆在一起看：同一个孩子，同样的认知能力，同样的“慢”节奏。在常规课堂里，他的“慢”被识别为一种需要纠正的迟钝；那道题上的自创分数和小方框被简单地标记为错误，成为卷面上一个等待被抹去的瑕疵。而在那种没有时间压力、没有对错评判、材料随手可操弄的环境里，同一个“慢”让他得以反复摆弄，同一份“自创”的冲动——那个在测验卷子上被红笔画圈的私人符号背后，藏着一份他无法说清的秩序感——找到了成人的沉默接纳和材料的持续回应，从三角推倒的指尖传到菱形拼接的手腕，从无声的啧啧声里浮出来，最终凝结成一句可以被旁人听懂的话。

常规课堂后的第二周，一节日常数学课上出现了一个小细节：文轩在完成一道“找出涂色方块的规律并继续涂满第7排”的习题后，在题号旁边用铅笔画了一个微小的图案——正是那个活动课上菱形分形折边的简化版。没有任何解释，教师也没注意到。这个小涂鸦在传统的教学评价框架里什么都不是。但在本文的概念论域里，它却是一个微弱的信号：生成余数并没有在上次活动结束后自行消失。它只是重新被日常课堂的节奏压回了地下，但仍在不被看见的角落里保持着一丝活性，等待下一次被意外照亮的机缘。

这段叙事能够告诉我们什么，不能告诉我们什么，必须一并说清楚。它能告诉我们的是：那种在标准课堂上被系统性地识别为“慢”或“粗心”并加以纠正的认知行为，在一种相对免于压制的生态里

，可以转译为一种可被辨认的、拥有自身规则的数学创造行为。它进一步揭示了激活发生的微观机制：生成余数从沉睡到绽现的触发点，往往是被一个具体材料的意外回应所激活的——那枚“可以转着拼”的对称组合，那枚被当作新单位的菱形，都是活动材料对儿童身体化积淀的一次非预期的“回响”。这种回响不是教师设计出来的，而是当材料、时间和身体运动共同构成的土壤恰好碰触到某一块被搁置的困惑或被覆盖的猜想时，那块经验矿砂内部的一次自发性重组。它的可观测指标包括：操作节奏的突变速、自言自语从“啧啧”到完整句子的渐进化、以及将前一步的产出自发地重新定义为下一步的零件（如“菱形变成新单元”的那一瞬）。

但这段叙事不能告诉我们的，是更重要的问题：这种存活在多大范围的儿童身上可能发生？需要持续多久的土壤支持才能稳定？是否只有文轩这样被错判的“慢”孩子才有如此丰富的生成余数，还是它实际上普遍存在，只是被压制得看不见？这些问题，必须在下一节被诚实地转换为可检验的假说，而不是被偷偷当作业已证实的结论。

六、“余数—土壤—生成”的联动假说：一个可检验的框架

基于前述概念分析和启示性叙事，本节提出一个“余数—土壤—生成”的联动假说框架。它的核心命题是：生成余数是创造发生不可缺失的物质前提；教育生态中的四重条件——充裕的浸泡时间、撤去无处不在的评价目光、大量不受催促的身体操作、以及见证式成人到场——构成生成余数存活与发酵的土壤；而生成余数在适宜土壤中被激活后，会呈现出规律发现、结构重组、问题重定义、符号发明等不同形态的创造行为。这三者不是线性的因果链，而是一种互相锁定、同步运转的动态：土壤被编织起来，本就是为护住那不可教的部分；创造行为一旦显现，又会为这个孩子沉淀下新的生成余数，使他下一次创造的起点更厚。

这个框架中的“土壤”一词不是文学隐喻，它具体指向上述四种条件的同时在场。这四种条件不负责“教创造”，而是负起一个更本分的责任：确保在每一次教学结束之后，儿童身上那份不被教学所回收的剩余物，不会在还没有机会被儿童自己辨识出来之前，就被外部评价指令消解。

这四种条件在真实的课堂中很难同时全部满足，但它们的完全缺失或大量撤除，则是生成余数消解的充分条件。基于此，我提出五个彼此联结、可以接受经验检验的命题，并明确每一个命题的检验思路与可能推翻它的观察。

命题一（留存假说）：在相当一段时间内，如果一个课堂同时提供开放的低门槛高天花板操作材料、可自由支配的连续探索时间、不针对过程进行对错评价的容错空间、以及教师或助手的见证式陪伴，那么在这个课堂里，原本在常规评价中被列为“粗心”“慢”“不适合学数学”的学生群体中，出现非指令驱动的数学创造行为（提出新猜想、自发重组材料、质疑给定规则、发明私人符号等）的人次将高于继续留在传统时间-评价-运动-缺席组合中的对照群体。

检验方式：采用准实验设计或深度课堂民族志，在不同学校中选取结构相近的班级，系统记录探索时段内发生的非指令性建构行为，比较发生率。如果在多轮重复中，留存组始终未表现出高于对照组的差异，则命题一被削弱。

命题二（消解假说）：当上述四重条件中任意三重被制度性撤除（例如，仅保留开放材料，但没有连续时间和见证回应），儿童的非指令自主建构行为将锐减，生成余数的三种外部痕迹——被搁置的困惑被重新激活的证据、被覆盖的猜想公开再现、非公共符号的自发创制——出现频率将大幅下降。

检验方式：通过改变单一变量（如撤除成人见证，保留时间和材料），观察行为变化。若撤除后仍普遍出现自主建构，则本文对见证功能不可替代性的推断需下调。

命题三（恢复假说）：对于已表现出明显消解效应的儿童，重新引入四重土壤条件并持续不低于若干个连续工作时段（持续时间依据当地教学周期而定），将观察到至少部分儿童重新呈现出生成余数被激活的迹象——重新开始提问，重新进行自发性材料操作，并在某个时刻浮现出此前未曾出现的自主建构。恢复的成功率可能随儿童年龄、消解时间长度和此前生成经验的贫瘠程度而递减。

检验方式：个案设计或多基线跨个体设计，逐段引入条件并观测行为。如果在多项个案中重复引入条件后始终未观察到任何恢复迹象，则命题三需要被修改——可能生成余数的恢复存在比预想更窄的关键期或个体差异。

命题四（内部激活触发点假说）：在土壤条件齐备的情境中，生成余数从“沉睡的沉积物”转化为“主动的探索冲动”的触发点，通常位于以下三个环节之一或多者的交叠处：（a）一份具体材料对沉积困惑的意外回应——孩子在自由摆弄中忽然发现某个材料的性质恰好呼应了此前被搁置的那个疑问；（b）身体重复操作在某一阈值后产生了可被意识捕捉的“规则的萌芽”——如文轩指尖反复按顶点后脱口说出的“这个可以转着拼”；（c）见证者的反射话语使混沌的感受第一次被孩子自己意识到——“我刚才做了这个？”——从而开启一个从“做”到“知道我做了”的元认知通路。触发点的可观测指标包括：操作节奏的突变速、自言自语从非语义声音向语义表达的过渡、材料使用从随机到结构化的模式突变、以及自发将前一步产出重新定义为下一步零件的递归行为。

检验方式：对自由探索时段进行视频微观分析，编码上述指标，标记触发时刻并与后续自主建构时长进行时间序列关联分析。如果触发时刻与后续建构之间无显著关联，则命题四对激活机制的推断需要修正。

命题五（见证的独特功能假说）：在其他土壤条件相同时，有受过训练的成人到场——他的任务不是指导、不是评价，而是在儿童无法独自看清自己做了什么时，用准确的语言把他的行动反射回给他——能显著提高儿童对自己的非标准建构进行元认知表述（“我发现了什么”“我这样做是因为……”）的频率，并在随后的自由时段中延长儿童持续从事自主建构的时间。如果仅保留时间、材料

和容错空间，而系统撤除见证陪伴，多数儿童即使做出了生成行为，也可能因为无法自己辨识出这一行为的意义而让其无声消散，无法转化为新一轮生成的基础。

检验方式：在两个实验组之间，唯一的差异是是否配有一名被训练过“见证反射”技能（不介入、不纠错、只描述和追问“你刚才做了什么”）的成人。比较两组儿童在活动后的访谈中对自己生成行为的自发叙述频率，以及后续在无成人情境下再次自发建构的延时行为。

这些命题不是封闭的最终判决，而是开放给未来研究的起手式。任何一个命题都可以、也应当被更严格的证据校准或推翻。本文的真正主张不是这五条具体预测一定为真，而是它们共同指向一个更大的判断：关于数学创造力的教育争论，应当从“如何教创造”转向“如何停止消解创造的物质前提”。这个转向一旦发生，我们评价教育得失的标尺，就不再只是学生答对了几道题，而是他们在答完每一道题之后，身上是否多了或少了那份继续追问的力量。

七、对认知负荷理论的根本反思：一套需要被超越的理论事件

如果能让本文的判断在数学教育理论中打下一个更深的桩，就不能仅仅把认知负荷理论当作一个需要被“回应”的外部反驳——那样太低。它应当被当作一个需要从内部被超越的理论事件。追问的入口不在它的结论，而在它的前提。

认知负荷理论（Kirschner, Sweller, & Clark, 2006）的核心论断十分清晰：数学概念的元素交互性高，无指引的探索会迅速耗尽有限的工作记忆容量，导致学习失败；直接教学之所以更高效，是因为它提供了清晰的外部指引，降低了冗余的信息搜索负荷。这一论断在教育效率的基准上几乎无可辩驳。但本文要指出的不是它错了，而是它对“认知”的本体论预设恰好限制了它的有效边界，而这个边界恰恰是本文全部追问所落在的地方。

认知负荷理论所预设的认知图景，可以粗略还原为几个相互嵌套的假设：（1）认知的本质是对信息的高效加工；（2）加工的对象是已经存在的、可以被分解为元素的信息单元；（3）加工的目标是以最短路径和最低错误率将外部信息纳入长时记忆，形成可稳定提取的图式。在这个图景里，“学习”被等价于“信息加工效率”。这并非错误——它在处理那些已经被人类文明充分编码、可以被分解为清晰构成元素的知识时，确实是最优的。但当学习涉及那些尚不存在清晰构成元素、尚未被充分编码的经验时——那些被搁置的困惑、被覆盖的猜想、身体化沉淀——认知负荷理论的框架就不再有多大的解释力。因为这些经验不是“信息”，也就无法被分解为“信息元素”，更无法以“图式自动化”的方式被高效吸收。它们的存在形态是不可压缩的——正如一个孩子指尖反复按在三角形顶点上的那一串无声的动作，没有哪一个更高效的“教学步骤”能够替代他必须亲自把那些动作做完一遍的认知必要性。

由此引出一个关键区分：认知负荷理论的有效边界，恰好在于处理“可教知识的传递效率”；而在这个边界之外，存在着另一类认知过程——生成余数的缓慢积淀与偶然发酵——它不遵循效率逻辑。它需要的不是更少的外部冗余，而是更多的冗余：更多不被指引的时间、更多不被纠正的动作、更多不被回收的材料回应。这些，在认知负荷理论的框架里是“低效”的，甚至是“浪费”的；但在生成余数的逻辑里，这些冗余恰恰是不可或缺的土壤。

本文的土壤条件——开放材料、无评判时间、见证式在场——不是要取代直接教学，更不是每一个教学单元里都取消指引。它们是在教学完成之后专门留出的一块飞地，让那部分不能教的东西自己有机会发生。这恰恰是降低认知超载的方式——不是通过给学生答案，而是通过把那些无法被信息加工压缩的混沌经验，放在一个不会被信息加工的指标所评估的庇护所里，让它们按自己的速度慢慢成形。见证者并不教授创造，只是在孩子自己摸索到半路即将迷失时，用一个精准的反射问题帮他重新看见自己已经做了些什么。

因此，不是说认知负荷理论错了，而是说它只能处理生成余数被清除之后剩下的那部分学习。本文的整个追问，恰好落在它无法进入的地带——被它所依赖的效率逻辑系统性地消解掉的那个地带。承认认知负荷理论在可教知识传递效率上的有效性，同时将其作为一个需在边界外被超越的理论事件来重估——这本身，就是对生成余数概念的又一次硬校验。

八、对最有力反驳的回应

一套论述若只能说服已经认同它的人，就不算成熟。本节回应两个最有可能摇动本文根基的反驳。

8.1 文化传承：不需要生成余数，难道就传承不了数学吗？

一个有力的历史事实反驳是：二十世纪一些以高度直接教学闻名的教育体系——如苏联的数学物理学校、中国过去的重点中学——同样培养出了大量顶尖数学家，而它们的课堂显然并不以保护生成余数著称。如果本文的命题成立，怎么解释这一现象？

我的回应是：这并不推翻本文命题，而是迫使本文更精确地标定命题的适用边界。本文论证的是“常规课堂中普遍实施的教学模式会系统消解生成余数，从而抑制普通学生群体的自主创造行为普遍发生”。它不否认在某些精英选拔体系中，存在课堂之外的补充性生态——数学竞赛俱乐部、家庭学术氛围、非正式的小圈子讨论——在这些补充生态中，生成余数可以得到补偿性的存活。事实上，许多优秀数学家的自述恰恰强调：他们在正式课堂外得到了某种“无人打扰的浸泡时间”，或者是某个成人的非指令性陪伴。

由此，文化传承与生成保护不是对立的两极，而是一个嵌套结构：传承负责把人类已经产出过的最好的工具交到下一代手里，生成保护负责让下一代在接过去之后，手里依然保留着那一粒“工具

不够用时我自己再造一个”的种籽。没有后者的积淀，文化传承终有一代会停在上一代的工具尽头，而后再也跨不出去那一步。

8.2 社会公平：这会是一种新的“土壤特权”吗？

这是最尖锐的质询。如果本文主张创造的发生依赖于四重土壤条件，而这些条件的提供在有形无形中与经济资本、文化资本密切相关，那么把教育的重心从“教学优化”转移到“编织土壤”，会不会事实上把创造的权利更多地让渡给那些本就处于优势阶层的孩子？

这个质问必须正面承受，不能靠修辞滑过。

第一，本文所诊断的土壤缺失，首先指向的是公共教育系统内部的制度性安排——课程标准对时间的碎片化规定、评价制度对覆盖面的极限追求、教师培养中对“见证”技能的长期忽视。这些都是教育政策可以直接、也应当直接干预的对象。在公立学校内有意识地保留一段非评价性探究时间，为每个孩子提供开放的操作材料，在师范教育中训练教师掌握“反射而不评价”的陪伴技术——这些举措不依赖家庭的额外资本，它们恰恰是公共教育最该做的事。

第二，没有任何证据表明，来自弱势背景的孩子在生成余数的潜量上低于其他孩子。文轩的片段叙事指向的恰是相反的判断：他之所以在标准课堂上被识别为“差”，是因为标准课堂的筛选机制天然地偏向某些特定形式的文化表现——语言的、规则内化的、对抽象指令快速反应的。然而，不同文化资本背景下的儿童，其生成余数的质态与形态可能确实不同。一个在市场帮母亲卖菜的孩子，可能在日常中沉淀了大量与计数、比较、比例相关的身体化经验，但这些经验在标准课堂上找不到合法的出口。因此，“土壤”的设计不能假定一种文化中立的“开放材料”，而必须有意识地纳入与不同背景儿童已有生成经验相呼应的材料类型——这是“生成余数”概念与“文化相关性/资金知识”框架（González, Moll, & Amanti, 2005）在深层上衔接的地方。把土壤条件从“家庭私有”转移到“公共制造”，并使之具有文化相关性，正是为了打破旧有评价体系的筛选垄断，让那些在旧尺度下被系统低估的孩子，有机会在另一个生态里把一直被错判的那部分认知潜量兑现出来。

第三，最现实的反诘可能是：在大规模班级、高利害考试压力依然不可撼动的当下，谈“编织土壤”是不是一种不切实际的奢侈？我的回答是：正因为现有结构如此坚实，我们才更迫切需要问——在不改变这台不停消解生成余数的机器结构的条件下，投入再多资源去润滑它的教学齿轮，最后究竟在达成什么？它只会让这台机器用更温柔的声音，做出同一件事：把生成余数从每一个孩子身上消解干净，然后掉过头来抱怨“这一代孩子也没有创造力”。改变土壤，不是最奢侈的方案，而是唯一可能终止这个循环的方案。

九、结论：承认“不可教”，是当前教育认识论必须承受的转向

本文的论证轨迹可以做如下收束。

在一再追问之后，我指认了一件事——数学创造发生的物质前提，不是没人教，而是教完之后那个人身上还剩下什么。这个剩下来的东西，我称之为生成余数。它不是可被设计成教学目标的认知成果，不是可被测评的思维技能，不是可被激发的心理动力，也不是可被纳入教育循环的经验生长。它是在一切教学意图、一切教育框架、一切已被命名的学习行为完成之后，必然留在认知者身上、却无法被任何一种已有概念所覆盖的那个原初剩余。它包含被搁置的疑问、被正确答案压倒的猜想、以及不经过语言的身体直觉。在当下评价无孔不入的课堂里，这些残余被视作“还没学会”的证据，遭受进一步的消解。但在另一种生态里，它们正是下一次创造的唯一真实起点。

本文不是要发明一种新的教学法，而是要指认一个比所有教学法都更前提的事实：数学教育如果永远不肯留下这块余料，它就只是一个搬运系统。搬运得再好，也搬不出一代能跨越已知边界的人。

在此基础上，全文可以凝为几个严格命题。

其一，数学创造不是少数人的稀有禀赋，而是一种在特定生态条件下会在任何正常心智中发生的认知行为。它的物质前提，不是更高的智商，而是那份在教学完成之后留在认知者身上的生成余数。

其二，生成余数与波拉尼的默会知识、维果茨基的自发概念、建构主义的自主建构、过程式创造力、内在动机、杜威的经验生长、怀特海的浪漫阶段、以及布鲁索的教学契约，每一个都在各自的问题域内极为有效，但一旦放到“一切教学意图之外的、作为教学行为完成之后的原初经验矿砂”这条辨别线上，它们便集体触到了边界。正是在这条线上，生成余数获得了它不可被还原的理论身份。

其三，生成余数能否存活，不取决于教师教得是否巧妙，而取决于课堂里是否存在四种相倚的条件：充裕的浸泡时间、容错的非评价空间、充分的身体操作机会、以及一个能把孩子尚未成形的认知碎片反射回去的见证者。现行学校数学教育的深层困局，恰恰在于它的核心制度逻辑——时间碎化、评价渗透、身体运动压缩和见证缺席——共同构成了一种与生成余数的存续逻辑根本不兼容的结构，使绝大多数学生身上的生成余数在来得及被辨认之前就已黯淡。

其四，本文基于个案观察提出的“余数—土壤—生成”联动框架，是一个有待严格检验的理论假说，而不是一份已经完成的实证结论。它所衍生出的留存、消解、恢复、内部触发与见证功能五条命题，明明白白地给出了它可能在哪些条件下被驳倒。一个理论如果不能把自己可能失败的条件提前说清楚，它就还没有进入科学的对话场。

最后，我必须写下这套论述会在什么情况下被证伪。如果在经过充分设计的教育试验中——教师被训练去撤除对生成余数的干扰，课堂时间允许孩子连续多日反复摆弄材料，评价不触及非指令行为，材料足够丰富并向所有孩子平等开放，且配有称职的成人见证者——经过一个完整的教学周

期，系统的观察与微观行为编码仍然表明：随机抽样的儿童群体中，绝大多数从未在任何时刻呈现出哪怕一次自主的数学差异推进行为——没有提出过新猜想，没有主动重组过材料，没有质疑过给定规则，没有在无人要求创造时自发涂画过任何源于自己数学直觉的符号——那么本文的核心判断就必须被大幅修正：也许生成余数的存续，在人类心智中的个体差异确实远比本文假设的更大，而土壤条件所能挽救的，只是极少一部分“本就有残存冲动”的幸运者。

但我尚没有在任何公开文献中读到这样的系统性反例。我看到的是相反的记录：在那些被某一位教师偷偷开辟出来的小小飞地里，那些在常规评价体系中被判为“慢”“偏”“不适合学数学”的孩子，常常交出了令人始料未及的数学建构。他们的猜想里藏着明显的逻辑漏洞，造出来的符号谁也看不懂，写的说明歪歪扭扭。但他们确实在把那件事做出来——面对一堆混沌的素材，自己试着去抓出秩序，并把这个秩序用一个只有他自己才懂的解释说出来。

这件事从来就不是“能不能”的问题。我们花了太多力气去测量一个孩子能不能创造，却很少停下来问一问：在测量之前，我们有没有给过他一个不被消解的空间，让他先长出那个有待被测量的东西？而那件事迟迟没有在大规模教育中发生，也许不是因为不可能，而是因为它一旦发生，就意味着教育者必须承受一个认识论上的事实：有些东西不能教。承受这个事实，无异于在教师最核心的专业认同上开一道口子。但也许，正是这道口子，才是学校数学教育向下走的唯一一扇窄门。

注释

[1] 本叙事源自对儿童非正式探究活动的片段观察，人物与校名均匿名化处理，场景经适度简化，属于思想拓展性质的例示，不具有统计意义上的代表性。

[2] “生成余数”是本文提出的暂定构念，其与多个近邻概念的严格分辨见下文3.2节。作为操作性概念，它在经验层面的可观测指标仍待未来研究细化。

[3] 本节所归纳的四重制度逻辑，系基于作者对国内若干小学数学日常课堂的非参与式观察及教师非正式访谈提炼而成的分析范畴，属理论建构，未经系统的实证检验。

[4] 维果茨基关于社会性中介的论述主要见于其对最近发展区的分析（Vygotsky, 1987, 第6–7章）。本文所提出的“见证”概念，刻意区分了中介行为中“知识传递”与“认知碎片反射”两种功能，后一层面在维果茨基原文中仅为隐含线索，本文将其作为独立变量加以标定。

[5] 此处泛指20世纪90年代兴起的第二代认知科学中的具身认知进路，其在数学教育领域的代表性理论工作参见Lakoff & Núñez (2000)。本文仅借用其“身体经验构成抽象思维基底”这一基本判断，不介入具身认知内部诸流派的具体争论。

[6] 本节提及的西尔弗（Silver）与莱金（Leikin）等学者的“过程式创造力”研究，其具体模型与实证进展可参阅Sriraman (2004) 及 Liljedahl (2016) 中的综述与引文。本文仅取其基本立场，不展开各子流派的内部差异。

参考文献（仅列出本文直接引证且确认真实存在的文献）

Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 41–62.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Trans.). Kluwer.

Deci, E. L., & Ryan, R. M. (2000). The "what" and "why" of goal pursuits: Human needs and the self-determination of behavior. *Psychological Inquiry*, 11(4), 227–268.

Dewey, J. (1916). *Democracy and Education*. Macmillan.

Dewey, J. (1938). *Experience and Education*. Macmillan.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. D. Reidel.

González, N., Moll, L. C., & Amanti, C. (2005). *Funds of Knowledge: Theorizing Practices in Households, Communities, and Classrooms*. Lawrence Erlbaum.

Hadamard, J. (1945). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Princeton University Press.

Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist*, 41(2), 75–86.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. Basic Books.

Liljedahl, P. (2016). Building thinking classrooms: Conditions for problem solving. In P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems* (pp. 361–386). Springer.

Piaget, J. (1970). *Genetic Epistemology*. Columbia University Press.

Polanyi, M. (1966). *The Tacit Dimension*. Doubleday.

Sriraman, B. (2004). The characteristics of mathematical creativity. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 36(1), 13–25.

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. Falmer Press.

Vygotsky, L. S. (1987). Thinking and speech (N. Minick, Trans.). In R. W. Rieber & A. S. Carton (Eds.), *The Collected Works of L. S. Vygotsky* (Vol. 1, pp. 37–285). Plenum Press. (Original work published 1934)

Whitehead, A. N. (1929). *The Aims of Education and Other Essays*. Macmillan.