

三视角论如何学习数字比如‘7’ (1)

=就是如何学会数数呢？

作者：王德生

我们一直在用三视角方法来分析和认识事物。三视角方法是一个认识方法论或认识工具，它的内涵是：

认识任何一个事情或物体，无论可见还是不可见，只要是我们能叙说或定义的一个‘存在’体，不管是三维物体还是一个抽象数学理论或对象，数学过程和数学概念，我们都需要使用对比/本质视角，变化的视角，和分布/处境的视角来认识它。而且如果我们缺少任何一个视角的认识，我们的整个认识或理解就是空的；或者说，我们只是将一些符号记录在大脑储存区域内，并没有进入我们的知识结构体系里。任何信息必须经过学习者的解释才能成为知识，而解释就是用已有的知识结构里的特定的图式来与新的信息建立结构关联。

进一步解释是：当我们从对比/本质的视角研究和学习或认识一个事物时，我们必须以变化和分布的视角为条件；当我们使用变化视角时，我们必须使用本质和分布视角；照样，分布的视角的认识也必须以本质和变化的视角为预设。总而言之，认识任何事物，必须使用三个视角，三个视角彼此互相需要，没有重要和次要之分，地位平等，而且三个视角必须同时出现在任何一个认知活动里，但是有所侧重。

那么，对一个事物的完整的认识和在它在人的知识结构体系里存在的知识图式就是一个三视角的知识结构体，这个结构体是整体协调，各个视角互不矛盾，互相依靠，互相补充。自然地，学习的本质就是如何形成这样的三视角知识结构体并不断地丰富这个结构体。

前面我们细说了如何使用三视角来分析个位数的‘乘法’的教学和学习。今天我们来讨论如何学习数字比如‘7’。数字‘7’是一个符号，但是这个符号到底代表什么意思呢？这是我们今天要详细讨论的。学习一个数字，其实就是我们教育小孩‘数数’的过程。这么简单的事情，还值得讨论吗？其实，如果要真正地明白一个‘数字’所代表的含义，我们还必须走向信仰，要用三位一体的知识论才能明白，当然今天我们只是分析如何学习。

毕达哥拿斯认为数字是很‘美’的，你能体验到‘7’的美吗？数学家 Sfard 说一个数字既是一个过程也是一个独立的对象。到底如何认识‘7’呢？我们从对比/本质视角开始。

1. 对比本质视角告诉我们‘7’的本质是什么？就是‘7’成为他自身的‘身份证’。

数学上说‘7’代表着一些‘相同’的存在体的集合，可以是看见的和看不见的；可以是物质的，也可以是观念性的。比如7个西红柿，7个中国人，7个中文字，7个圆的特性，7个数学定义，等等。

这里的相等是角度性的，或说从某个性质来看他们相同；不是说两个东西完全相等，因为任何两个事物都具有不同性的。即使是两个电子，或两个光子，事

实上他们都不是完全相同的。所以当我们说 7 个西红柿时，我们是从‘西红柿的固有属性，就是西红柿的本质视角’来说他们是相同的。

人们研究这些包含有‘相同的事物’的集合，比如集合 A 里 X 个苹果，B 里有 X 个梨。人们发现这些集合有一个共性，就是这些集合之间可以建立‘彼此一一对应’的关系。

然后我们把这种‘对应关系’或‘共性’，定义为‘同一个数目’，比如这个数叫‘7’。或者说，在很多的‘这样的集合’里，有些‘集合’有共性，就是能‘一一对应’；而且每一个‘集合都可以找到和它’一一对应‘的其他的’集合’。这样，这些‘彼此对应的集合’就有一个共性。把这个‘共性’定义为一个概念，就叫做一个数字，比如‘7’。这里我们使用十进制。它描述的就是集合的元素的多少。

如果，我们使用二进制(0,1 两个符号)，那么这个‘共性’就是‘7’，就会被记写成‘111’；如果我们使用三进制(0, 1, 2 三个符号)，它就是‘21’；如果我们使用‘A,B,C,D,E’来代表五进制，那么这个‘共性’就可以定义为‘BC’。所以‘7’这个符号不是本质的，本质是这些‘集合’们，他们有一个共性，这个共性就是集合里的元素之间可以彼此一一对应。比如，袋子 A 里有‘一些’苹果，袋子 B 里有‘一些’书。如果我们能把书和苹果一一对应起来，那么我们说两个袋子里具有相同多的物体。这两个‘一些’他们具有共性，就是‘可以一一对应’。这个就是我们衡量两个集合里的元素的个数是否相同的定义。对于无穷大，比如自然数的个数和有理数的个数是否一样多呢？我们也是用这个‘一一对应’来研究的。这就是‘7’的对比/本质视角。这个共性，就是‘集合’的元素的‘一一对应性’。我们应该引导孩子自己去探索发现这个‘一一对应性’。这个‘一一对应’告诉孩子什么叫做‘数目相等’和‘不相等’。

要认识本质视角，我们还要采用对比的方法。就是我们要比较‘7’和‘6’，‘7’和‘5’，‘7’和‘1’等等。要让孩子去发现：我们不能把‘7’个苹果和‘5’个梨去‘一一对应’。只有在对比中，孩子才能真正明白‘7’的内在含义和‘7’与其他数字的不同是什么意思。当然这个认识过程是漫长的，很多孩子要好几年的时间。很多人可能一生都不明白上面的意思。这个‘一一对应’过程也就是孩子数数的过程。但是大部分孩子学习数数的过程都是有问题的。

2. 变化的视角说的是，这样的‘7’个‘具有相同性质’的元素的集合体有很多，就是‘7’的本质的具体表现有很多，且有不同性。基本上，在大自然和历史中，我们能叙说和定义的任何事物都可以用‘7’来描述。但是，我们不能说‘7’个‘东西’，因为我们无法来定义‘东西’。同样，对于人本哲学上的‘存在’，我们也无法定义。我们不可能定义一个普遍概念，它能包括任何事物；我们也不能定义一个无所不包的范畴。

变化的视角指‘7’的本质概念的具体应用。孩子们需要不断地去发现事物之间的共性，才能更好地明白数字的含义。发现共性和差异性几乎等同于认知世

界的全部任务。所以中文的‘智力’是指知道和看见的能力，什么叫做‘看见’一个事物呢，就是将它从其他事物中分别出来，但是也要发现它和其他事物的共性。中文是从认知的结果视角来说的。那么英文呢？‘Intellect=choose between’，就是在两者中进行选择，就是区分，其中包括发现起共性和差异性。所有科学，包括人文和自然科学都是干一个‘区分’的事情。显然，英文是从过程的角度来定义的。

3. 分布和处境的视角言说‘7’和其他数字和其他数学对象的关系，或者说‘7’代表的这些‘集合’，和不能与‘7’的‘集合’进行一一对应‘的’集合‘的关系。比如，’7‘比’6‘多一个，就是 $7=6+1$ ；从’对应关系‘来说，就是一一对应之后，‘7’的‘集合’里面会比‘6’的集合多一个。分布的视角说的是‘7’和其他数字的普遍联系，或者说‘7’的重要性的体现。’7‘本身是无价值的，如果他和其他数字发生关系。所以，我们有7和8的关系：大小关系，加法关系，乘法关系，很多很多。

分布的视角其实是把‘7’已经看成一个独立的个体，把他的’过程性‘，就是‘一一对应性’封装起来了。然后，研究这个个体和其他个体的关系，就是普遍联系性。这个‘封装’的过程是需要很长时间的。比如很多孩子，你要他做 $7+3$ ，他会这样在心里数：1，2，3，4，5，6，7，然后是8，9，10。结果是10。你会发现，他此时把‘7’还是理解成前面的对比本质视角里的‘一一对应’，就是‘从1数到7’的过程。他还没有将这个‘过程’对象化。如何从‘过程’尽快过渡到‘对象’阶段呢。这是一个很有意思的难题。从三视角理论来说，就是要在‘分布’的视角上进行多次训练和反思。

完成了以上的三个视角的分析了，明天我们可以简单地介绍如何学习数字比如‘7’了。