

很多孩子只知道它是一个数而已，或者仅仅是一串没有休止的符号。

任何一个数，既是一个数学对象或概念，也是一个数学过程，还是一种数学关系。这就是我们经常说的三视角：对比、变化和分布三视角。圆周率也是如此！

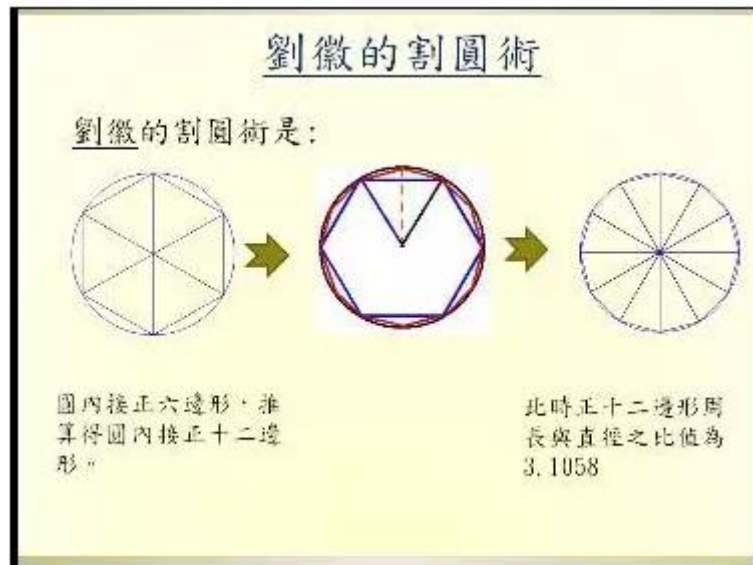
π 这个数的本质是什么呢？它的定义是什么呢？它的对比视角的内容是什么呢？首先，它是一个无理数，它不同于 1, 2, 3, 4 这些整数的对比本质视角。

π 的本质是一种共性，它说的是将任何半径不同的圆的周长除以直径长度，我们得到一个数，这个数的大小竟然和半径无关。所以这个数，叫做 π ，它表达的是一种共性，是一个数学概念。

它的变化视角就是这种共性在不同半径的圆里体现出来。说它是一个数学过程，意思就是你需要用周长去除以直径的长度，从而得到 π 。

而分布视角说的 π 和其他数或数学概念的关系，这是 π 的重要性的意义。比如，我们知道圆的面积的计算公式是 π 和半径的平方的乘积，还有 π 在三角函数里的重要价值。

中国古人对圆周率的计算有刘徽的：



割圆术

那么如何学习圆周率呢？孩子们为何不明白圆周率的真正含义呢？

因为我们的教育方法是被动的接受和灌入式的：老师开门见山，告诉学生圆周率就是周长除以直径，好一点的是老师演示几个图片。

然后，老师和学生应用 $\pi=3.1415926\dots$ 去计算不同半径的周长和面积。

然而，这种灌输式的教育方法，让孩子们根本就没有具体体验变化视角的内容，而无变化视角内容的体验的概念学习是背诵和记忆而已。

真正的学习应该是让孩子们去测量不同半径的圆的周长，然后计算周长和直径长度的比值，最后引导孩子们发现这些比值有共性，就是它们都与 3.14159126..... 很靠近。

通过这种对变化视角内容的亲自体验，孩子们自己总结和抽象出一个共性，然后把这个共性叫做一个数，就是圆周率。这就是发现式学习。

然后才是应用圆周率去计算不同的圆的周长和面积。这是从变化视角到对比视角，再到分布视角。

2. APOS 数学教育理论

在 APOS 数学教育理论里，这个变化视角叫做 Action(数学活动)；对比本质视角就是 Process(过程)，它是一个经过反思抽象之后的数学过程，其内容就是将任何一个圆的周长和半径进行比较其结果都是一样的；而分布视角就是 Object(新的数学对象)。它指的是我们可以对圆周率进行整体操作，比如利用它计算面积或应用在三角函数里。其实它就是我们说的分布视角的内容，就是圆周率和其他数学对象的关系。

APOS 理论告诉我们数学学习应该是建构式的。其基本教育模式就是从 Action--> Process---> Object。然后这三个形成一个知识结构叫做 Schema。这是美国数学教育界从 1990 年开始的数学教学改革。美国学者杜宾斯基(E.Dubinsky)提出的 APOS 理论（至今至少有超过 1000 篇中英文文献），是以建构主义为基础的数学学习理论，它的核心是引导学生在具体数学活动中学习数学知识，分析数学问题

情景，从而建构他们自己的数学概念和数学思想。根据 APOS，杜宾斯基成功地帮助大学生们学习了一系列与微积分、离散数学、抽象代数等学科分支有关的概念，如群、子群、陪集、商群，等等。

杜宾斯基认为：一个人是不可能直接学习到数学概念的，更确切地说，人们透过心智结构（**mentalstructure**）使所学的数学概念产生意义。

如果一个人对于给予的数学概念拥有适当的心智结构，那么他几乎自然就学到了这个概念。反之，如果他无法建立起适当的心智结构，那么他学习数学概念几乎是不可能的。教学的目的：如何帮助学生建立适当的心智结构。

APOS 理论的出发点：任何一个数学教育理论应该致力于“学生是如何学习的”以及“什么样的教学计划可以帮助这种学习的理解”，而不仅仅是陈述一些事实。

APOS 理论的基本假设：数学知识是个体在解决所感知到的数学问题的过程中获得的。在此过程中，个体依序建构了心理活动（**actions**）、过程（**processes**）和对象（**object**），最终组织成用以理解问题情境的图式结构（**schemas**）。

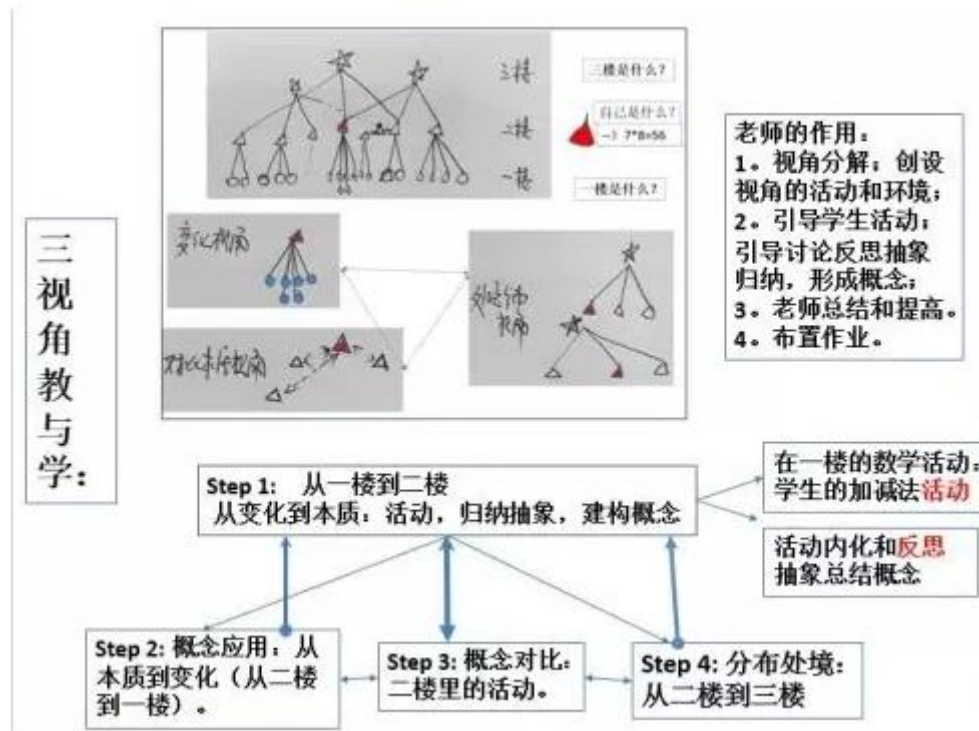
从我们的三视角理论看，这个图式结构其实是一个三视角结构图式。

我们下面的图来显示 APOS 的教学过程：

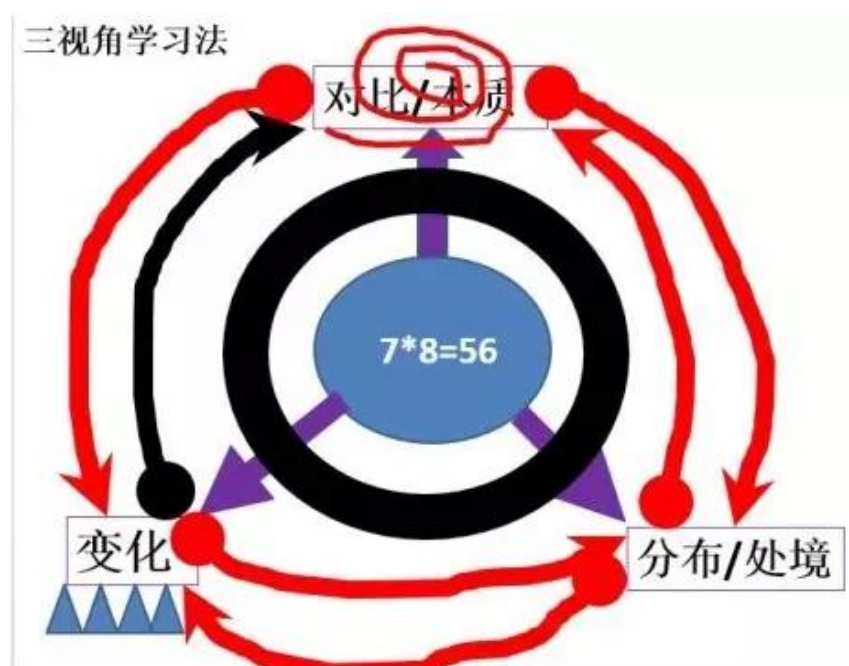


显然上面的教学模式缺少很多部分，比如对比的视角：和其他数学概念的比较。比如比较圆周率和一个普通的数字的不同，和平方根的不同等等。

还有，APOS 的教学是一个线性的过程，而实际上，对于知识的学习是一个三视角结构的螺旋式的不断地丰富的过程。下面是我们提出的三视角教学的一个示意图（以如何学习 $7*8=56$ 为例）：



和一个螺旋式学习图：



无论是三视角教学还是 APOS 教学法，我们都主张：知识不是直接接收的，而是学习者通过主动地应用自己现有的知识结构，即三视角知识

图式来同化和异化新接收的信息，并对其进行解释，这是解释形成新的知识对象和新的三视角知识图式。

所以学习应该是主动构建知识的过程，不是接受知识的过程，接受的只是信息；学习者是在自己已有的知识（结构）和经验的基础上加工信息和构建新知识和知识结构。

学习者在人际互动和协商中进行知识的社会建构。建构是以社会和文化的方式为中介的，学习者在认识、解释、理解世界的构成中建构自己的知识。学习是以学生的自主学习为主，是以学生为中心。学习具有主动性、实践性、创造性和社会性。

而老师的教学呢？

教学的目的是：引导和促进学生意义和知识的建构；

教学视角 1：创设学习环境以支撑个体对知识的建构；

教学视角 2：组建学习共同体，促进知识的社会建构；

教学视角 3：鼓励社会实践，进行意义和身份双重建构；

老师是导师和朋友，是组织者、帮助者、鼓励者；老师也是学习者，共同参与知识和意义的建构。

建构什么呢？怎样建构呢？

答案是：三视角。