

从此让孩子爱上数学

原创2017-06-01 吕文杰 [三视角智慧](#)

从湖南湘潭刚回到四川成都的第三天，我应邀在一个名为“魔法书柜”的中英文图书馆与几位小朋友和他们的家长分享了一堂**三视角趣味数学启蒙课**，并且获得了学生、家长和老师们的一致好评。

有位家长对我说：“你的课跟我家孩子之前去过的奥数班很不一样。那些奥数班是‘题海奥数’，就是通过让孩子做大量的奥数题来应付考试。而你的课却是在**启发孩子的数学思维，让孩子真正理解数学，喜欢上数学！**”

说实话，在成都的奥数辅导班有很多，趣味数学班或许也不少。然而**三视角趣味数学课**，这在四川成都或许尚数首次。虽然，在目前看来只不过是一颗微不足道的“芥菜种”，但是谁晓得它将来会不会长成一棵“大树”，吸引“天上的飞鸟”来住在其上呢？

若问**三视角趣味数学课**与“题海奥数”或其他的趣味数学有什么不同，那就是**三视角数学**是按照**三视角的原理和方法**设计出来，并且具有较强**趣味性的数学课**。学生和家长与老师一同在课堂上探讨**数学的真、善、美**，每个人的**知、情、意**，与**信、望、爱**都能得到益处。

为此，我事先做了精心的设计和准备，并且满心期待家长和学生能够有很不一样的体验，对此我很有信心。因为参加了**5月2~3日**在湖南湘潭的**三视角**的培训之后，我对积极参与推动的**三视角教育事业**，以及对我们的**智慧团队**，和对未来要服务的家长和学生都更有信心了。

5月7日，就是我从湘潭乘火车返回成都后的第三天。下午将近四点钟，我与妻子带着我们刚满**11个月**的儿子，一起来到金沙遗址博物馆附近的**魔法书柜中英文图书馆**，开始和图书馆的工作人员一起准备好讲课用的桌凳和投影仪。

为了方便讨论和互动，我特意请工作人员和我一起把桌子摆了一个 U 形。因为这种摆放形状像英文字母 U，所以我们称 U 形是这样摆放桌子或这一类摆放形式的**对比视角**。

至于大家摆放 U 形时底边摆几张桌子？两个侧边分别摆几张？U 形的拐角是否是直角？等等，总会呈现出各种差异，因此我们可以称这些摆放 U 形桌子的不同具体表现形式为它的**变化视角**。

而每一个变化视角的具体处境，例如这些 U 形的桌子与桌子、桌子与放在桌子上的物品、桌子与凳子和沙发、桌子与坐在旁边的人、桌子与摆放的人、桌子与所在房间等，均是这些 U 形桌子的**分布（处境或关系）视角**。

所以说，三视角原理在生活中随处可见，随时可用，就是这么简单明了！当然，如果我们不去学习和使用三视角来观察、解释和应用时，我们就只会视而不见、听而不闻、触而不得了！

我们刚到图书馆的时候，已经有两对学生和家长提前到了那里。其中一位女生很认真地坐在桌旁看绘本。通过主动的沟通，我得知她正是那位图书馆馆长的女儿！

那天趣味数学课前她看的儿童绘本竟然是史记故事，半个月后我听说她更获得了央视某英语大赛四川省赛区的小低组冠军！这个孩子的独特性给我留下深刻的印象，为什么呢？

用三视角来分析的话，可以说她的**对比视角很独特、变化视角很丰富、分布视角很广阔**。比如说，她的世界观、人生观、价值观等，与其他小朋友，甚至与许多成年人相比，都很与众不同，这是她的对比视角。

她能够在许多领域表现如此丰富的心智、兴趣与能力等，是她的变化视角。而她与所博览的群书、广泛的社交群体和个人、所经历之事、所游历之地等构成的各种关系网络，则是她的分布视角。

由此可见，三视角还可以帮助我们更深刻、更全面、更细致地了解一个人是多么的与众不同！特别是作为老师和家长，**如果运用三视角来看小孩子，他们将不再是一个个“小屁孩”，而是一个个与众不同的“小天使”！**

等小朋友们在家长的陪伴下陆续来到图书馆，我才正式开始分享第一堂三视角趣味数学课。时间观念很强的现代都市人，对于等待，常常显得不耐烦，甚至把迟到的人视为品格有问题。

但是三视角告诉我们，一个人的迟到行为只是一个表象（**变化视角**），品格如何则是他的**对比视角**。单从变化视角就推论人的对比视角，而忽略人的**分布视角**（例如这个人与其他人事物的关系、当时的具体处境、他的时间观念、他对正在参与的聚会的了解和重视态度等）就轻易对人的品格作出评论，是受**二元思维**的束缚，违反三视角原理的，不够通达的。

透过三视角原理，我还把原来的“趣味奥数课”重新设计，并跟其他的奥数和趣味数学课进行了对比，现命名为“三视角趣味数学课”。

一开课，我就直接进入主题（因为在等候期间跟学生和家长彼此认识、互相介绍过了），并展示了第一页 **PPT**。我向大家抛出了一个问题，并不是“怎么学数学？”而是问大家，谁的心里有同样的问题？

因为我并不能假设所有学生和家长都有此问题。结果也显示，多数人表示确实一直都有这个问题，少数人表示从来没有这个问题。开放式提问的好处是，我可以更容易了解到学生和家长心中的想法和感受，难处

是我要常存谦卑的心，不懂就问，而不要去扮演无所不知的专家或权威。而三视角恰能帮助我看到自己对万事万物的认识非常有限，因此就比较容易谦卑下来！

小朋友和大朋友们开始各抒己见——

“数学就是代数和几何。”

“数学就是数数。”

“数学就是方程。”

“数学就是算术。”

“数学很复杂。”

“数学就是一堆杂乱无章的垃圾！”

前面的几个回答，都引来更多对数学是什么的回答，从三视角看，这些基本属于知的范畴。最后一个回答，实在令人感到惊讶，也感到好笑。感到惊讶，是因为我们很少听到学生说：“数学就是一堆杂乱无章的垃圾！”，更不用说是当着老师的面说了。

感到好笑，是因为她的童言无忌。这个回答既表达了学生对数学的看法，还表达出小朋友对数学的不满情绪，而且对周围的人产生了较大的影响。所以，可以说是三个视角表达力度最强的一个回答，虽然我不太认同她的观点。

于是，我接着这个小朋友的回答分享：

“从你的回答中，我听到了你对数学的困惑、抱怨和无奈，对吗？你回答：‘数学就是一堆杂乱无章的垃圾’让我不由得想起几位同学。2014 年的暑期，我曾辅导过几名刚刚小学毕业的学生。

第一天见到他们，我问他们喜欢数学吗？一位同学说：‘我讨厌数学。’另一位说：‘我恨死数学了。’第三位垂下头说：‘我想死！’可见，讨厌数学，感觉被数学折磨得生不如死的人不只一个两个。所以，你并不孤单！”于是，我像当年对那几位学生做的一样，对刚才那位同学 90 度鞠躬道歉说：“同学，对不起！真的不是数学惹的祸，而是我没有把数学教好，请你原谅！”

然后我又补充说道：“我刚才才是替你所遇到的每一位令你讨厌数学的老师向你道歉！”这个动作和这番话我也曾向其他一些家长和学生做过、说过。用三视角来解释的话，虽然我在知的层面上不能认同她的观点，但是在情的层面上我可以对她所受到的困扰和伤害表达出我的同情和理解，甚至在意意层面上，替她的老师向她道歉，并请求她的原谅。

这样的沟通往往要比单单顾及知的层面（即对与错、是与非），却忽视彼此在情和意方面的需要，效果更好。这也是学生、老师和家长之间常遇到的沟通难题。学习和运用三视角进行沟通，确实可以避免许多不必要的情感伤害与关系决裂，从而使大家能够更加敞开地分享、理解和联结！

那么究竟什么是数学？为了便于理解，我们可以从如何认识一个日常的事物开始。例如，苹果是什么？

于是我引用了新加坡南洋理工大学王德生博导用来介绍三视角的 PPT 图片，以此来说明，我们若想认识一个事物就需要将它跟其他事物进行对比和区别。例如，把苹果和图片中的这些事物进行对比，我们会发现什么呢？孩子们开始七嘴八舌地回答起来。

“苹果不是喝的。”

“苹果不是蔬菜。”

“苹果不是动物。”

“苹果不是人。”

“苹果不吃人，人可以吃苹果。”

“苹果没有石头硬。”

“苹果不是透明的。”

.....

很好，大家通过对比，发现了苹果不是什么和苹果的部分属性，那么苹果究竟是什么呢？别看我们都吃过苹果，但是如果让大家准确地说出苹

果是什么，恐怕就没那么简单了！同样，如果大家准确地说出数学是什么，也不是那么容易的！

把一个事物跟其他事物进行对比，有助于加深我们对事物的认识，但是如果不能充分地认识这个事物的各个方面，找到它们的共同属性，那么我们还是难以认识到这个事物的本质。

还是以苹果为例，苹果有哪些种类呢？“红富士”、“红星”，也有绿色的、黄色的苹果等等，它们是苹果的不同品种，但都是“苹果”，只不过是“苹果”的不同表现形式罢了。

同样的，代数、几何，等等都是数学，只不过是数学的一些表现形式罢了。所以，当我们把数学和其他如文学、美学、哲学、神学、其他科学（如物理、化学、生物）等进行比较后，可以大概知道数学不是什么，或有哪些特征。

但是除非我们全面地了解数学的各种分支，如代数、几何、函数、微积分等，否则我们难以了解数学各个分支的共同属性，也就是在数学的各个分支都能体现出来的普遍属性。

换句话说，我们现在对数学的认识其实还很模糊，非常有限，难以真正地给数学下一个比较准确的定义或总结出清晰的概念，因为我们对数学的各个分支所知非常有限，甚至尚未学习，又怎能夸口说，我很了解数学究竟是什么，数学不就是……。而这样的见解，难免偏颇和错谬。

“老师，什么是概念？”图书馆馆长的女儿突然问道。

好问题！所谓“概念”，就是对事物特有、本质属性的简单归纳和概括。例如，“苹果”是什么，就是关于苹果的概念，也可以称之为定义。所以，从对比视角来认识事物，其实就是在了解某个事物的基本概念。

而要想了解某个事物的概念，就要充分地研究这个事物的不同表现形式，也就是要从它的变化视角加以归纳和总结。

这样就够了吗？事实上我们还需要在各种不同的处境中，去了解这个事物与其他事物具有哪些关系和影响，否则还是难以真正地认识这个事物。

再以苹果为例，如果在苹果上用刀子削出一个心形，然后送给朋友作为一件生日礼物。那么它在表达什么呢？

“心。”

“有趣。”

“爱。”

对！这个苹果已经不只是一个可以吃的水果了！它同时还是个可以用来表达创意、趣味和爱的苹果，是不是呢？而这个苹果所伴随的人对苹果的喜爱、人对人的爱、以及心形符号与爱的对应关系等等，就是这个带有心形苹果的分布视角。

因此，我们实在不应该忽视事物的分布视角去认识事物，以免造成我们对事物认识的机械化和孤立化而这也是我和许多人在初学习、初用三视角时，容易忽视的一个视角。



同样的，让我们回头来看看之前的那页 PPT，请大家再一次观察，然后试着总结一下你对数学的认识吧——

先说说看图片上有什么？

“有许多公式。”——正确！

“有许多图形。”——很好！

“有许多工具。”——嗯，不错！

“整体是一颗心。”——哇，非常棒的发现！

请大家掌声鼓励！我们刚说过要从分布视角来认识事物，这位小朋友就从整体的关系上来分享他看到了什么！这既是我们很容易忽略的视角，也是非常重要的视角！这样来看，说明数学还与什么有关？

“心！”

“爱！”

“爱心！”

你们的回答都很棒！学习数学除了要用眼看、用耳听、用手写，还要用心去思考、去感受、去选择！同时，学习也需要专心和耐心，因为越往后学，题目的难度和复杂程度就越来越大，如果不能专心和持之以恒，那么是难以学好数学的。

学习其他科目也是一样的。而当一个学生在学习数学时遇到困难，或者做错題，他非但没有得到老师和家长的体谅、关爱，反倒动不动就被老师罚、家长骂，久而久之他不仅会讨厌数学，甚至会厌学，严重时他真的连想死的心都会有的！因为他感受不到爱！

因为大家对彼此、对数学和教育的认识有偏差！因为当大人看到孩子做错了題，或者发现他不理解某个概念的时候，往往会急于纠正孩子的错误，并且还常常重复地把正确答案讲给他听。

这其实是关于知的层面，也就是在满足理智的需要，在乎的是对与错，是与非。然而，人的心可不是只有理智，还有情感和意志。也就是说，心是理智、情感和意志作为一个整体的存在！

所以，如果孩子一犯错，或者一犯难，老师和家长就罚，或骂，甚至打孩子，那么孩子就很容易感到挫败、伤害、恐惧、羞耻、委屈和愤怒，进而想要逃避、拒绝或者很消极地回应老师和家长。

尤其是当孩子非常恐惧的时候，他的理智几乎是停滞的。例如，当一辆汽车或者火车突然向小孩子开过来，小孩子往往是不知所措，呆若木鸡地站在那里，如果没有人及时地救他，后果往往不堪设想。

因为那时候，心里的恐惧已经使他的理智几乎停滞了，他不能像平常一样，专注地思考现在我究竟该怎么办，而是非常慌张，不知道该怎么办！同样，当老师和家长严厉地训斥或打骂孩子的时候，孩子很容易会感到恐惧，此时他越发难以专注地思考，反倒更是不知道该如何是好了！因此，当我曾经告诉我的学生和家長，如果孩子遇到暂时不懂的题目，或者做错的题目，先不要急着告诉他正确答案，或者急于让他把所有的问题都解决掉，因为这很不现实。想想看，我们大人每天有多少事情处理不来？有多少问题甚至到离开这个世界的时候都没有能力去解决？那为什么一二年级的小学生就必须把每天学到的东西全弄懂，不可以留有任何疑问或有暂时不能解决的问题呢？事实上，他们天天都有！然而，为了避免被老师批评，甚至罚写或者叫家長，常常到最后，许多家長干脆把正确答案直接不耐烦地告诉孩子，催促孩子赶紧把家長口述的答案写下来（有些家長甚至直接替孩子写），这样就可以交上去一份看上去还算体面的作业——原本是真善美的教育，在过分求真，却忽视或缺乏善和美的教育中，培养出弄虚作假、应付差事的学生，实在令人痛心！



所以，我告诉所有的家长和学生，如果是孩子已经尽力，还是有暂时不会做的题，就可以给孩子选择的自由，或者继续深究下去；或者可以先放一放，过一段时间，说不定第二天、下一周、下个月或者下个学期、下学年，他就能弄明白了！

此言一出，有的家长和孩子立刻表示赞同。也有的家长表示出质疑，因为担心孩子太小，不懂得何为自由，而误用自由，他们更担心这样会影响到孩子的考试成绩和将来的升学！

对此我可以理解，因为大家都要面对应试教育这个现实，这就是我们共同的处境，属于分布视角。不过事实显明，那些积极采纳了此番建议的家长和学生，从中所得的益处是最大的。

其中一位学生在期末数学考了满分，他母亲在办公室当着其他老师的面对我说：“自从看了吕老师写给家长们的公开信后，我恍然大悟，发现以前给孩子辅导功课的方式完全是错的。所以那天就立马改变了辅导方式，让孩子自己去做作业，自己去专研，实在做不来，就让他先放一放。结果这样一来，家长轻松了，孩子也开心了，学习更积极、主动了，后面就越学越顺了！”

有些学生的家长，在我离任后偶遇时，还在感谢老师当年对他们孩子的启蒙，而且对于孩子如今越来越受应试教育的影响而呈现出的种种状况和所受到的负面评价感到忧愁和痛心。

再举一个例子，就是 5 月 2~3 日我在湖南湘潭参加三视角培训时，新加坡南洋理工大学数学系的王德生教授分享说，他的孩子在新加坡刚上一年级时的作业，曾经有 70%是错的。

他曾感到过担忧和挂虑。可是孩子的老师却主动跟他联系说，请家长千万不要急于纠正孩子的错误，而要让孩子自己去发现错误，自己纠正自己的错误。结果你们猜王教授等了多久？四年！

是的，从一年级一直等到四年级！第一年错 70%。第二年错 50%。第三年错 20%。第四年几乎不再出错！我当时听到实在是太震撼了！

想想看，这在我们的教育环境下，能行得通吗？如果一个一年级的小学生，每天的作业错 70%，他的老师会怎么办？要么叫孩子重写，再错就罚 3 遍，再错就干脆叫家长。

家长就迫于无奈逼着孩子赶紧改，不然家长自己骂，自己罚，省得第二天又被老师骂、被老师罚，而且也免得家长自己被老师叫到学校在办公室里接受一番教育（许多家长其实在心里至今还有对老师的某种惧怕）。

难怪有那么多孩子讨厌学数学，尤其是讨厌所谓的“奥数”！因为数学需要很多的时间和精力去探索和专研，可是有那么多作业和难题要做，再加上长期以来一直没有解决的问题，久而久之就会使他们对学好数学越来越缺乏信心，越来越没有兴趣，越来越想逃避！

其实孩子犯错和遇到不明白的时候，更需要老师和家长们给他们时间去多角度地探索和研究，直到慢慢地弄明白、搞清楚！然而，每个老师都有自己的教学进度，每个班级都有其他的学生，每个家长也有自己的工作和家务，大家怎么可能提供每个学生有足够多的时间去探索和研究每一个题目呢？

于是，灌输式的应试教育，就得以大行其道了。而孩子们真正反感的正是这种急功近利、强制的教学方式，未必是数学本身，况且老师和家长

所呈现给孩子的也未必是真正的数学。所以，请继续看看这幅图，想想是否还忽略了什么重要的信息？



“下面还有一行英语。”

非常棒！请能够理解这句话的人，把它翻译成中文！

“我爱数学。”

是的！请大家一起大声读这句英语：“I love maths.”

所以，要想真正学好数学，就要爱上数学！想想看，如果有个人是你所喜爱的，你是想常常见到他，还是不想见到他？“想见到他。”如果有个你所讨厌的人，你希望天天看见他吗？“眼不见心不烦！”

可是，如果有人天天逼着你非要去跟那个你很讨厌的人在一起好几个小时，赶都赶不走，而且天天如此、周周如此、月月如此、年年如此，你会怎样？

“啪，啪！”（有学生边说边做了一个扇对方耳光的小动作。）

“我想逃。”

“我想死！”

现在大家理解为什么有的孩子心里有那么痛苦和绝望了吧！这也可以帮助我们理解为什么有时候亲子之间难以沟通，因为当我们只是专注在知，也就是理智的层面，而忽视了情和意，也就是情感和意志，那么孩子的心门就会关闭，沟通就会很困难了！

如果知对应的是真，那么情和意对应的就是善和美了！它的核心就是爱！所以，教数学、学数学，不能单思考是不是、对不对，也要留心善不善和在意美不美！

老师、学生和家长之间是否一同透过追求数学的真，用善意和美好的方式接纳彼此在教与学的过程都是可能会犯错的，互相鼓励和称赞对方的努力和取得的成就，不断地感受数学的善，发现数学之美，以及教与学数学的善和美。

例如，学习概念和求解题目的时候可以用善和美的实物、语言、文字、图像、音视频和活动等呈现出某方面的真理，并且把所学到的真善美的知识和技能，以及在教与学的过程中所建立起来的真善美的关系，继续不断地延伸和拓展，使老师、学生 and 家长的知情意都能够终身得到真善美的滋养。这样我们才能更好地认识数学究竟是什么，而且爱上数学，教和学好数学，以及用好数学！

那么，现在请大家再试着说一说你对数学的认识吧！

“数学是一种符号语言。”

哇！真是太意外了！你们还记得她刚才怎么描述数学吗？她说，数学是一堆杂乱无章的垃圾！现在她用更接近真相、更有善意，而且更加优美的词句来描述数学了，请大家掌声鼓励！如果这样学习数学，如果学习这样的数学，大家还讨厌数学吗？

.....

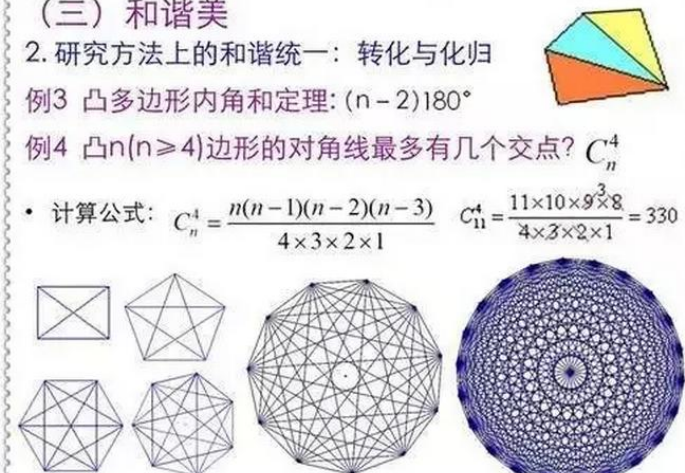
(三) 和谐美

2. 研究方法上的和谐统一：转化与化归

例3 凸多边形内角和定理: $(n-2)180^\circ$

例4 凸 $n(n \geq 4)$ 边形的对角线最多有几个交点? C_n^4

• 计算公式: $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ $C_{11}^4 = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 330$



这就是我首次运用三视角进行的趣味数学课的大部分教学实录。之后于5月24日我又在千聊直播间向更多家长分享了约翰·霍特的《孩子是如何学习的》这本书的阅读心得。

这继而又引起更多的家长关注对孩子的创新教育，意识到应试教育的弊端。随后，就有好几位家长陆续来跟我分享他们对于孩子教育的关心和希望我能辅导他们孩子的想法。我对此感到非常荣幸！

学习和运用三视角在创新领域，帮助千千万万在灌输和应试教育体系中困苦挣扎的学生、家长和老师重获自由，助力从小培养孩子学习真善美的知识和技能，并建立彼此相爱关系的千千万万个家庭，这算是我近四十而不惑之年，对自己人生使命的一番有所突破的领悟与承接。

三视角可以助你“得人如鱼”的亲身体验，也再次印证了我对自己人生使命的初步探索！

后记：在阅读和分享了《孩子是如何学习》之后的第二天清晨，我突然意识到，为何要给孩子更多的时间去探索？因为他们具有一种把许多表明上似乎没什么联系的事物关联起来的能力，从而使他们能很容易地从一种事物找到通向另一种事物的认知路径。

这种能力就是联想！联想是类比的基础，没有联想就不可能由一个事物想到另一个事物，就更谈不上由一个事物的性质类比推理出另一个事物的性质。而王德生教授曾经多次指出，类比推理在三视角原理中的重要性！

我也曾经多次留意到，越小的孩子联想能力表现的就越强；受到应试教育束缚越久的孩子，联想能力表现就越弱。因长期偏向于对比视角的机

械学习和死记硬背，以至于越来越难以积极主动地探索事物和事物的性质及与其他事物和性质的关系，反倒更容易对比出事物的不同，因此也就很容易在第一时间排除掉许多貌似不相关事物的可能联系，就更不会进一步做出类比推理了。

所谓“举一反三”、“触类旁通”其实说的就是联想和类比能力。当家长和老师抱怨孩子们缺乏这种联想和类比思考的能力时，真的要反思自己是否给了孩子足够的时间去探索，并且是否充分尊重他们看上去“跳跃式”“非线性”的思维特点，相信他们天生就很擅长用大多数成年人已经遗忘或轻视的思维方式去探索和思考整个互联、相通的世界！

请趁着他们还未接受过分强调对比视角的训练，以致忽略或轻视分布视角，尽可能多地给孩子们时间去探索，并展示尽可能多的资源供他们探索、研究和分享，若是家长和老师也能参与其间，放下成人的架子，回转成小孩子的样式，就既可以和大家成为很亲密的朋友，又可以常以一颗童真的心来发现未知世界的真善美，而不至于被扑朔迷离的表面现象轻易蒙蔽，还可避免被灌输而来的各种教条所束缚，更重要的是不必为了应付差事而成为一个弄虚作假、厌恶学习、迷失自我的人！