

从津津有味的白菜到妙趣横生的乘法学习

原创2017-08-22王德生三视角智慧



从吃白菜到快乐乘法

九九八十一	八八六十四	七七四十九	六六三十六	五五二十五	四四一十六	三三得九	二二得四	一一得一
八九七十二	七八五十六	六七四十二	五六三十	四五二十	三四十二	二三得六	一二得二	
七九六十三	六八四十八	五七三十五	四六二十四	三五十五	二四得八	一三得三		
六九五十四	五八四十	四七二十八	三六十八	二五十一	一四得四			
	五九四十五	四八三十二	三七二十一	二六十二	一五得五			
		四九三十六	三八二十四	二七十四	一六得六			
			三九二十七	二八十六	一七得七			
				二九十八	一八得八			
					一九得九			

快乐乘法

1X1=1	2X2=4	3X3=9	4X4=16	5X5=25	6X6=36	7X7=49	8X8=64	9X9=81
1X2=2	2X3=6	3X4=12	4X5=20	5X6=30	6X7=42	7X8=56	8X9=72	
1X3=3	2X4=8	3X5=15	4X6=24	5X7=35	6X8=48	7X9=63		
1X4=4	2X5=10	3X6=18	4X7=28	5X8=40	6X9=54			
1X5=5	2X6=12	3X7=21	4X8=32	5X9=45				
1X6=6	2X7=14	3X8=24	4X9=36					
1X7=7	2X8=16	3X9=27						
1X8=8	2X9=18							
1X9=9								

今晚的主题:从吃白菜到乘法学习。

如果晚餐的白菜不好吃,可能是什么原因呢?请大家自由回答,尽量发挥你的想象力! 尽量发现各种引起白菜无味的原因。

张美丽: 没有胃口, 或者烹饪方式不对, 或者是心情不好。

Serene:没放盐, 无味道。

Qun:白菜太老。

杨恩立:有可能是：1.缺少配料；2.厨艺不精；3.跟配偶吵架了。

向江丽:现在的白菜不甜，冬天打霜后的好吃。

标杆人生:心情不好，不想吃。

上面的原因都可能引起白菜无味，还有其他原因吗？

张美丽:吃了其他更好吃的，就不想吃白菜，感觉不好吃了。

海娜百菖:不合口味。

A Gracious:煮得太油了。

杨恩立:也有可能白菜不是以前的白菜了。

娟儿:天天吃白菜，吃够了。

你们的原因都可能正确，有一定的道理。但是，如果要求一个人去思考到所有这些原因，如何才能做到呢？就是怎样才能使一人具有你们众人集体的智慧呢？有没有一种思维方法，有方向地指导我们思考，使我们能够系统地发现所有这些可能的原因呢？

张美丽: 三视角方法。

标杆人生: 三视角智慧。

Luke: 归纳总结。

Amanda: 前人总结，我们汲取，用‘百度’。

Serene: 从主观本身、外在因素分析。

杨恩立: 用三视角扩展 9 宫图，27 宫图。

如果我们能把刚才的所有原因归于三个不同的视角，那么只要学习三视角方法，是不是就能具有系统方向去寻找？这是我们的理想！

现在我们看另外一个例子。你的孩子告诉你：妈妈，学习乘法没有意思，不想学？这个不想学可能是什么原因呢？

张美丽: 他不会做；他还没有理解乘法的方法，感觉好难做。如果一个人对一个事物没得到他想要的结果，就产生不了兴趣。

Amanda: 不懂乘法的来龙去脉。

恬恬: 不知道学了乘法有什么用。

娟儿: 觉得是小菜一碟，没有挑战性；不了解乘法的含义和价值。

Qun: 父母逼着学，孩子又背不出来，很有压力不想学。

迎风: 很难记住，背了就忘记了。

所以乘法学习无味也是有各种各样的原因。总结大概有下面几种原因：

- 1.不知道乘法是什么意思。
- 2.不知道如何应用。
- 3.单独地学习一个一个乘法，非常枯燥。

白菜无味的原因也可以总结分类为：

- 1.白菜自己出问题了。
- 2.白菜的种类不同了。
- 3.白菜没有煮好，或者吃的人出问题。

大家发现了什么规律吗？两种无味有何共性呢？

标杆人生: 三个视角出问题了

是什么---》 对比视角

为什么---》 分布视角

怎么样----》 变化视角

恬恬: 对比、变化或者分布视角出了问题。

现在我们开始学习三视角和它的应用。

第一步需要选定研究对象。今晚有两个研究对象：一个是白菜，一个是乘法。首先从白菜出发，我们先看一些图。



上面这幅图里有什么呢？

张美丽: 小狗，房子，西瓜，白菜，肉，海螺，玉器。

娟儿: 面包，西瓜，白菜。

Mei: 超市食品柜。

Qun: 蔬菜，西瓜，肉，狗。

恬恬: 白菜、西瓜、山竹、肉

有白菜吗？

Qun: 有大白菜。

标杆人生: 大白菜，卷心菜。

总结有：白菜，西瓜，肉，面包，等等。你是怎么知道有白菜呢？

张美丽: 因为看见了很多的食物和事物，进行对比，发现有白菜。

迎风: 从图片上对比看到的。

Luke: 与其他青菜不同。

娟儿: 找颜色的不同。

Mei: 根据已有的生活经验进行对比。

在你们的答案里有一个公共的词：**对比!** 所以刚才你们的认识过程就是对比。这个就是对比视角，即对比白菜和其他的东西，发现他们的不同。发现白菜自己的特征，这也叫做白菜的对比特征或者对比视角。那么，白菜的对比视角包含了什么知识？

Mei: 颜色，形状，体积。

向江丽: 它的固有的特征，跟别不同。

娟儿: 颜色，大小。

标杆人生: 本来的属性，比如什么颜色， 形状， 味道等固有的本质属性 。

张美丽: 就是将白菜和其他事物区分出来，进行对比区分的特征。

迎风: 大小，颜色，味道。

所以白菜的对比视角包含白菜和其他事物进行对比区分的本质属性。比如固有的形状，颜色，味道等等。 把对比视角的内容，就是所有的本质属性合起来就是白菜的定义。白菜的对比视角就是白菜的定义。那么 7×8 的对比视角也是 7×8 的定义，就是数学概念。

再看下面的图，图里有**几种**白菜？

Grace: 不能同时思考对比和变化。

向江丽: 如果看白菜了，其他的注意的很少。

总结：当我们对比区分时，就会忽视白菜自身的种类；当我们思考白菜自身的变化，就不能思考对比。所以这里就有两个视角，一个是对比，另外一个是什么呢？变化！事物的变化视角包含哪些知识吗？

Mei: 属性的改变？

不是！

刚才有几种白菜，是不是都是白菜？

Mei: 是的！

这三种白菜是不是都有白菜的对比本质属性，而三种白菜又有一些细微差别呢？这个就是白菜的变化视角。所以事物的变化视角就是事物的本质属性或者对比特征的具体的不同的表现形式。虽然有变化，但是仍然是白菜，仍然保持对比本质不变。



各种各样的白菜

其实因为事物的本质属性都具有一个变化范围，在这个变化范围里，仍然可以和其他事物进行对比区分。事物在这个范围里进行变化，比如苹果是甜的，甜味是苹果的对比视角内容之一，但是有不同的甜味，这个就是变化视角的内容。

1.为何会有变化范围呢？即事物自身为何有变化视角呢？

2.仅仅从对比和变化视角我们能否回答上面的问题呢？能否全面认识白菜？

张美丽: 不够。

Grace: 不能够。

显然目前的问题: 为何有各种变化, 无法从对比和变化视角得到答案! 所以我们还需要一个视角。这个视角是什么呢?

大家看下面的图, 这个图在研究什么呢?



Mei: 白菜的生长过程。

标杆人生: 白菜生长的环境不一样。

张美丽: 各种不同的白菜和不同的土壤的关系。

Serene: 白菜呈现的各种形状。

Sarah 蕾嘉: 白菜不同的生长环境。

不同白菜的生存环境不一样, 即不同白菜和不同的土壤有不同的关系。比如, 土壤的肥沃度会影响白菜的特性, 这就是白菜的分布视角之一。

认识白菜的对比和变化特性, 不能离开白菜的分布处境。比如, 白菜好不好吃跟土壤环境有关。离开了白菜的分布处境, 你就无法明白为何白菜有那么多种。

一样地，每一个事物都有自己的分布视角，事物的分布视角包括该事物和其他任何事物的各种关系，即互相影响和互相关联。白菜的分布视角还包括白菜与人的关系。还有，白菜与其他菜在被烹调时的种种关系也是属于白菜的分布视角。

向江丽: 白菜的变化视角跟分布视角有关系？

Mei: 三个视角都有关联，也有重叠部分吧？

三个视角互相需要，互相关联，互为条件，有相对独立性，但是不能完全分开。我们不能同时关注任何两个，你只能一次思考一个，其他两个就在思考的后台支持第一个。任何思考中，不能缺少任何一个视角，就是一个在前台，其他两个在后台隐藏。

那么 7×8 的三个视角是什么呢？如何应用三视角，帮到孩子数学学习呢？下面我们进入乘法的三视角学习。

2

学习 $7 \times 8 = 56$ 的本质和目的是什么呢？学习 $7 \times 8 = 56$ 的具体任务是什么呢？学习和了解一个事物的任务和本质是什么呢？

学习 $7 \times 8 = 56$ 就是要学习它的三个视角，缺少任何一个视角，知识就不完整。如果缺少某一个会出现什么问题呢？就会犯错误：**自由主义，机械主义，孤立主义。**

学习乘法需要哪些知识基础？

需要**加法**的三视角知识结构和**数字**的三视角知识结构。

数字的三视角结构和加法的三视角钩在一起，而加法的三视角和乘法的三视角钩在一起。我们假设孩子完全明白加法，现在在加法的基础之上学习乘法。孩子首先需要明白 7×8 的三视角。

7×8 的对比视角是什么呢？

小小: 7 个 8 相加。

土家人: 7 个 8 或 8 个 7 相加。

lydia 娟: 7 个 8 相加。

天佑中华: 7 个 8 相加的简记法，或 8 个 7 相加的简记法。

一般以为 7×8 是 $7+7+\dots+7$ ，加 8 次；或者 7 个 8 相加。我们需要进一步理解 $7+7+7+7+7+7+7+7$ 的本质。它的本质是 7 个相同的集合，每个集合有 8 个相同的元素，总共有 7×8 个元素。8 个相同的集合，每个集合有 7 个相同的元素也可以是 7×8 。可以用装实物的口袋来具体化集合与元素的概念。可用集合的变化视角，比如几袋，几包，几箱，都可以。

那么 7×8 的变化视角是什么呢？

就是一些具体例子。

土家人：白菜 7 元每斤，8 斤多少钱？

Grace：7 筐苹果，每筐 8 个，总共有 7×8 个。

胡：7 个袋子，每个袋子有 8 个苹果，总共有 7×8 个。

标杆人生：7 包花生每包 8 颗，总共有 7×8 颗。

那么 7×8 的分布视角是什么呢？

天佑中华：就是 7×8 与 7×9 、 6×8 等的关系，还有与 7×7 、 8×8 等的关系。

Grace： 7×8 和 7×80 的关系。

标杆人生： 7×8 与 7×9 与 7×6 的关系。

天佑中华： $7 \times 8 = 7 \times 4 + 7 \times 4$ ， $7 \times 8 = 7 \times 2 + 7 \times 6$ ， $7 \times 8 = 7 \times 9 - 7$ ，

$7 \times 8 = 7 \times 10 - 7 \times 2$ ，等等。

明白 7×8 的分布视角，需要明白对比视角吗？需要明白变化视角吗？都是彼此需要的！三个视角都需要。比如 7×8 和 6×8 是什么关系呢？ $7 \times 8 = 6 \times 8 + 8$ ，需要明白 7×8 的本质！ $7 \times 8 - 8 = 6 \times 8$ ，也要明白其本质。

接下来，我们解决乘法表学习的枯燥无味的问题。

如果，白菜的本质没有问题，白菜的种类也没有问题，那么，白菜的味道不好，可能是什么原因？

张美丽：人的问题吧。

标杆人生：做菜的问题或者是吃菜人的问题。

天佑中华：厨艺不佳，或者厨师当时心情不好，等等，也可能是买到劣质调味品了。

文颖姐妹：做的难吃。

苏奕农：吃菜的人心情不好。

是白菜的哪个视角出问题？

文颖姐妹: 分布视角。

辉辉: 分布。

天佑中华: 分布。

土家人: 白菜与外部的关系。

标杆人生: 分布。

薛俊丽: 分布。

就是分布视角出问题！所以找原因要从三个视角找！这个是不是解决问题的逻辑？是的！我们应用这个方法解决乘法学习枯燥无味的问题。大家说说如何应用，如何解决乘法无味的问题呢？你们要用类比的方法！

首先需要确定孩子是否明白对比，是否明白乘法的本质。和乘法的变化视角。那么再思考分布视角。如何学习乘法的本质概念，三视角公众号里有专文介绍。

孩子如何才能记住 7×8 呢？如何学习 7×8 ？是不是一个一个加？比如 6×5 就是加 6 次 5？ 5×4 就是加 4 次 5？不是！因为那样就是孤立和机械主义。一定要使用分布视角，就是乘法之间的关系。把白菜做得很有味道，必须利用好彼此的关系。

同样学习乘法也是如此。整个乘法表的学习不应该采用孤立背诵的方法。那么如何开始呢？首先是学习乘几呢？

土家人: 乘 2。

天佑中华: 乘 2 或 3。

Abbie: 1×1 ？

对！乘 1！可以进入几百乘 1，几千乘 1。比如 123×1 。要突破常规。然后是乘 10，不能告诉孩子答案，要引导孩子得到规律，由孩子得到 $\times 10$ 其实就是加个 0。 $\times 100$ 就是加 00。注意一切的结果都要由孩子自己得到。

然后是乘几？

土家人: 乘 2。

对！

乘 2 就是自己加自己！也要引导孩子得到认识，一切的运算和结果应该由孩子自己得到。家长不应该直接告诉，孩子需要有创造的感觉和成就，才能有内在激发。

然后是乘几呢？乘 4！如何乘 4？自己加自己再加自己。乘法表有内在规律，需要孩子自己发现规律！你们家长很急的，不然就是背，希望孩子马上学会！

你喜欢别人直接告诉答案还是自己发现？自己发现比较好，自己发现更有成就感。

那么现在学乘几？8？ $\times 1, \times 10, \times 2, \times 4$ ，都学了，学习 $\times 8$ 就会产生机械感觉。知道为何吗？ $\times 2, \times 4, \times 8$ ，一起就是机械主义！所以任何一种方法不要重复三次。两次就可以，三次连续吃肉就要吐肉。

现在应该学习乘 9。如何学习 $\times 9$ ？

标杆人生： $9=10-1$ ？

土家人： $\times 9=\times 10$ -自己。

$3\times 9=3\times 10-3$ 。那么就用 $\times 10$ 够吗？

不够。还需要引导孩子得到 $\times 9$ 的更好的规律。

$4\times 9=36$ ； $6\times 9=54$ ； $8\times 9=72$ ； $5\times 9=45$ 。

它们有何规律？这个规律应由孩子自己发现。

用 $\times 10$ 得到答案，再由孩子得到规律。

有何规律呢：

1. 十位加个位是 9。

2. 十位是乘数减 1。

比如 $5\times 9=(5-1)4$ ，这个规律应该由孩子发现，不应该直接告诉他。

然后是乘几？乘 8！不是 5，为何乘 8？

可以利用 $\times 9$ 计算，乘 9 减自己一次，再由 $\times 4$ 检验。比如， $5\times 8=5\times 9-5$ ，再有乘 4 检验，即 $5\times 8=5\times 4+5\times 4$ 。这个就是应用两个分布视角的关系，非常的美！

现在学完哪些了？1，2，4，8，9，10。再学什么呢？乘 3。

乘 3 简单，就是乘 2 加自己一次。乘 3 需要用乘 4 检测，两个分布视角的连接。

再学乘几？乘 6！然后就是乘 5 了。

乘 5 有三种方法。非常有意思： $\times 4 + \text{自己}$ ， $\times 6 - \text{自己}$ ，两种方法得到结果。再用乘 1, 3, 5, 7, 9 奇数和乘 2, 4, 6, 8 偶数，分别乘，得到规律：先学偶数 $\times 5$ ： $2 \times 5 = 10$ ； $4 \times 5 = 20$ ； $6 \times 5 = 30$ ； $8 \times 5 = 40$ 。这里的规律是：2,4,6,8 和 1,2,3,4 的双倍关系。这样 $\times 5$ 达到乘法学习的高峰。

还有谁没有学？只有 7×7 ！鼓励孩子用至少 5 种方法计算 $7 \times 7 = 49$ ！

第二步是如何熟练乘法表呢？需要熟练整个乘法表。第二轮是进行粗线条的分布视角丰富。比如 $\times 2$ ， $\times 5$ 和 $\times 10$ 的关系， $\times 3$ 和 $\times 6$ 的关系， $\times 3$ ， $\times 5$ 和 $\times 8$ 的关系。你可以设计很多，比如 $\times 9$ 和 $\times 5$ ， $\times 4$ 的关系。

不需要遵循一定的先后次序，要尽量随机进行。最好，由孩子自己发明一些题目，进一步深化对本质的认识，一直到把乘法表学得非常熟练。

最后进入第三轮，即巩固。此轮可用多种方式自己推算出乘法表。家长随机问孩子：比如，用 4 种方法计算 5×6 等等，需要孩子从记忆里发现分布视角。方法由孩子自己定，要在游戏中问，要从记忆中寻找。

要把乘数表打乱，不能按序 1, 2, 3, 4, 5.....而是打乱次序，比如，5, 3, 9, 2, 6,由孩子自己推算完，每周一次就行了。如此进行后，孩子对乘法的对比视角会有深刻理解，对分布视角的美也会很有感受。三视角学习乘法是真善美的创造性学习过程！