

如何创造性地学习乘法呢？



背乘法表

很多家长以为 $7 \times 8 = 56$ 就是把结果背熟，就是全部，大错特错！有人说学习乘法就是学习乘法表，太肤浅的认识！在北美的很多学校，小学生都不主张背乘法表，我儿子的学校，也没有背乘法的这个说法。

都是要求他们自己去计算，去加减，自己去明白乘法的意义。

那么 $7 \times 8 = 56$ 是不是就是明白 7 个 8 加起来和 8 个 7 加起来，这样就是完全的认识呢？不是！那只是其中的一个视角的内容而已。所以不要认为你的孩子考试成绩好，乘法题都会了，就以为他学会了全部。我的孩子很早就和我一起学了乘法，而且所有的乘法都不是背的，全是他自己推算出来的，也不是一个一个加出来的，而是从乘法之间的关系推算出来的。记得当时好像不熟练，但是不重要，多推几次，用不同的关系推算，很快就熟练了。这是我要在分布处境的视角才会细讲的。没有分布视角， $7 \times 8 = 56$ 是没有价值和意义的。

就是说仅仅背了 $7 \times 8 = 56$ 是毫无意义的。任何一个事物的重要性或意义不在他本身，而在他和其他事物的关系中。

虽然他对乘法的认识可谓很深了，可是昨晚我发现在他的知识结构里，对乘法的认识还有很多漏洞。比如他在口算 $7+7+7+7+6+7$ 的时候，他的结果是对的： $=41$ 。但当我问他如何计算时，他说 $35+6$ ，此时我知道他对乘法的认识有漏洞。就是他的乘法的三视角知识结构有漏洞。**难道不对吗？**他应用了乘法啊。后来我问他有更好的方法吗，他才领会到 $42-1$ 。如果您的孩子没有明白这点，还不能说他明白乘法的真正涵义。

A. $7 \times 8 = 56$ 的对比本质、变化和分布处境三视角内容分解

1. 对比本质视角

7×8 表示 $7+7+7+7+7+7+7+7$ 或 $8+8+8+8+8+8+8+8$ 。这个是它的本质属性。就是 7 个相同的数字 8 或者 8 个相同的数字 7 相加。我们说过，对于一个事物的任何一个本质属性的明白要用对比的方法才能真正明白。不是记住就可以的。就是要把他和其他事物比较，才能明白本质。因为本质是说他特有的，隐含着别的没有。当然要比较才会明白有和没有。仅仅背诵记住一个东西的本质属性是无用的。这里两个最基本的比较很重要。

a. 7 个相同的数字之和和 7 个不同的数字之和之比。在几乎所有的数学教科书上，没有这种对比的例子。这种对比在日常生活里很多很

多。这也是学习乘法的动力源泉。也是数学里为何要发明乘法的意义!!!

如果孩子不明白这个对比，实际上他是不明白为何我们要用乘法。没有对比是不能明白本质的。乘法的入门应该是设计或带他们去体验不同数量的加法和相同数量的加法的对比。学习乘法就要从这个对比出发。

比如给他们一些 7 个数的加法题，有些数字全部相同，有些不一样，让孩子去发现这个所有数字都相同的特点，进而激发他们的好奇心。学习的动力不是考试成绩，不是纪律，也不是结果本身，而是数学内在的美的吸引。当然这个应该在乘法的起步阶段就要学习对比，但是要不断地深化认识。

b.7 个 8 之和和 7 个其他的数字之和形成对比，当然也和 5 个 6 等等形成对比。你会发现我们的教科书上对这个对比是很重视的。每个乘法都是一个一个认认真真地学习。但是没有第一个对比，第二个对比其实已经架空了。孩子只是记忆乘法。他们不明白乘法的实际意义。

显然还有其他的很多对比，比如和 $7+8$ ， $8-7$ ， $7\div 8$ 等等对比。有的是后面慢慢学习不断地加上。对比本质的视角是不断地螺旋式增加的。但有的是最先的，缺少就会引起知识的记忆而不是理解，实际上不是知识只是信息。理解是必须和已有的知识结构建立关联。当我们直接告诉孩子 7×8 是 7 个 8 相加的时候，这个知识和孩子的加法知识结构没有紧密相连，因为在孩子的加法认知体系里，加数相

同的情况是一个特例。我们需要从不同的加数，过渡到相同的，让他们思考，对于相同的加数的和，有何特点和共性。然后引导他们可以用 7×8 来表示这些特殊的加法。这是 7×8 的概念和定义的由来。

这个要孩子自己总结出来。

这个总结和发现过程就是孩子们的自己的创新研究!为何我们的孩子小学初中高中甚至大学成绩都比北美的学生好，可是到了研究生，博士和教授阶段，我们就远远落后了呢？

2.那么什么是 $7 \times 8 = 56$ 的变化视角？

上面我们已经详细地说了 7×8 就是 7 个 8 或者 8 个 7 相加。它的变化视角说的是这个本质认识的具体体现，比如学生看到 7 行图标，每行有八个相同的图标，这样总共有 $7 \times 8 = 56$ 个图标。

还有生活里的例子，7 袋苹果，每个里面有 8 个苹果。进一步有，八斤肉，每斤 7 元。七天，每天读八页书。这样的不同的例子数不胜数。还有长方形的长是 8 米，宽是 7 米，面积是 7×8 。整个变化的视角也是随着孩子的学习不断地完善的。

3. $7 \times 8 = 56$ 的分布和处境视角

分布的视角包含 $7 \times 8 = 56$ 和其他乘法的关系。比如 7×8 和 7×9 的关系。 $7 \times 9 = 7 \times 8 + 7$ 。这个关系告诉我们为何需要记住 56 这个结果。分布视角反映了知识之间的普遍联系性。就是要把 $7 \times 8 = 56$ 应用到具体处境里，建立它与其他数学对象的关系。

还有 7×8 和 7×80 ， 8×70 ， 0.7×0.8 ， $1/7$ 乘 $1/8$ 也有奇妙的关系，即他们的本质性具有共性。

完成了三视角分解，我们可以进入具体如何学习 $7 \times 8 = 56$ 。

B.如何具体教育与学习乘法 $7 \times 8 = 56$?

1. 传统数学概念灌输法

传统的教育是将基本概念先灌输给孩子，就是先让孩子记住对比本质视角，然后再应用它到具体的例子，就是各种各样的多样化的例子，即从对比视角到变化视角。变化视角的知识的建立是通过应用本质概念来实现的。不断地应用，就不断地建立对多样性的认识。

如果我们把对比本质视角看成是一，那么变化性就是多。或者说本质概念是统一性，变化视角是多样性。传统的教育方式是老师直接介绍概念，然后举例子应用，学生就是照着老师的例子去应用。也就是从一到多的教育。这种教学方法的错误在哪儿呢?大家先思考。

要知道这是我们几千年的传统啊!我怎能随便说它错了呢?我需要一个评判标准。

这个教育法不就是我们说的从理论到实践吗?难道有问题吗?我们的孩子不就是这样学成，考上大学吗?下面我们仔细分析这个灌输法和其优缺点。

=====

传统数学概念灌输法:快速升降机(听老师讲课)和垂下万丝条(作业练

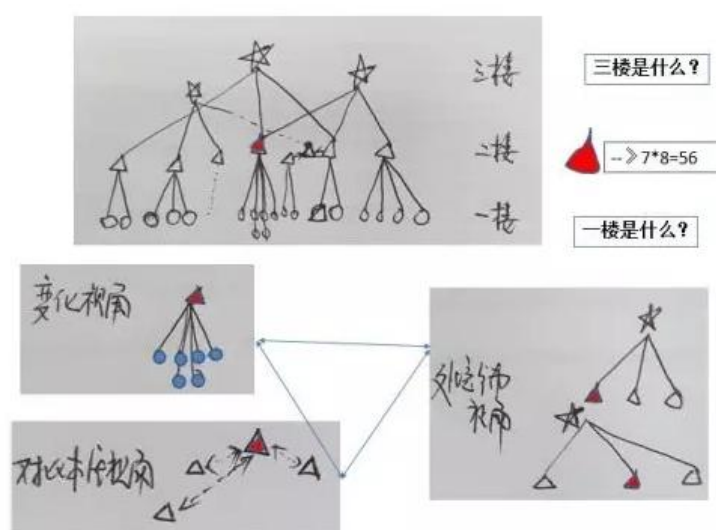
习)

传统的数学课堂教学方式一般分为下面 5 步曲(包括我自己十年的大学数学教学方式):

1.首先是回顾已学的,在新的知识或概念里需要的知识对象。这个是为了和孩子的现有的知识结构建立联系。2.然后是用一到两个例子引导出概念,详细解释数学概念和推导出其性质。3.接着就是举例,详细讲解解题过程,就是如何应用概念到例题里面。4.学生模范老师,进行课堂练习,应用概念和其性质。5.老师总结,布置家庭作业。

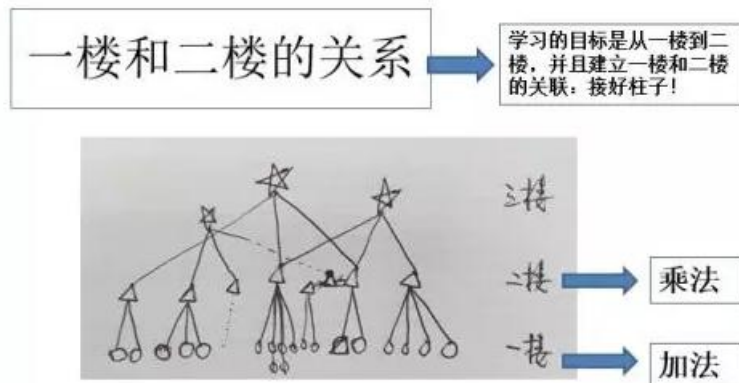
以上是一个完整的教学模式,从概念或对比视角到变化视角。**它的缺点在哪儿呢?它一定有毛病的!因为大部分孩子上课的效果是记住了数学概念,不是理解了数学概念。这是国际公认的问题,不只是中国的问题。**

如果我们把一楼看成加法的知识结构,那么二楼就是乘法的知识结构。这样学习 $7*8=56$ 就是要建立如下图所表示的三视角结构:



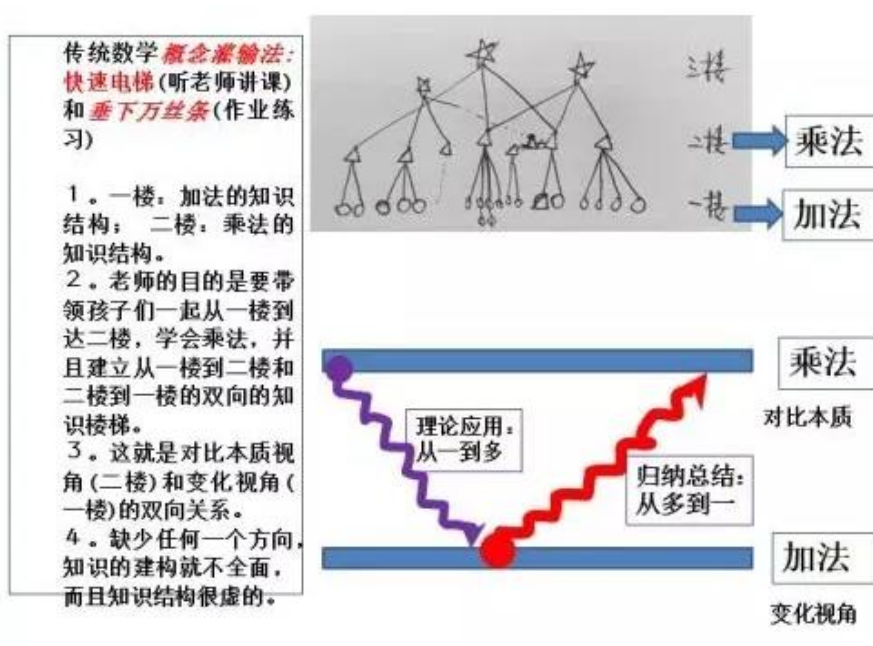
$7*8=56$ 的三视角结构

学生现在在一楼，老师的第一个目的是要带领孩子们一起到达二楼，学会乘法，并且建立从一楼到二楼和二楼到一楼的双向的知识楼梯。这就是对比本质视角(二楼)和变化视角(一楼)的双向关系。缺少任何一个方向，知识的建构就不全面，而且知识结构很虚的。



1. 老师是如何从一楼到二楼的？
 2. 学生是如何从一楼到二楼的？
- 哪条线路？

第一个学习目的：从变化视角到对比视角



建立双向知识楼梯

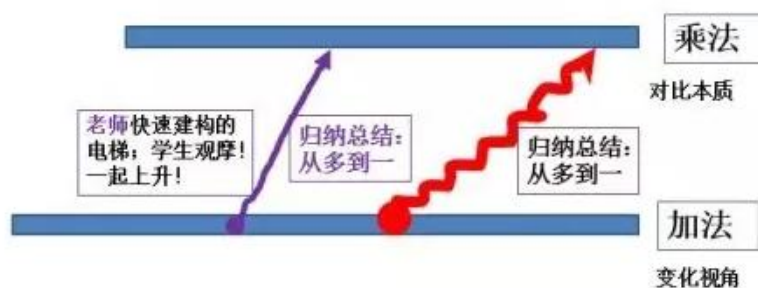
那么上面的传统的灌入式教育的方法就是我要说的快速升降机法：

首先，老师和学生一起回忆已有的知识，这个过程里，因为学生是被动的，就有一些孩子不会与老师一起思考和回忆。

然后老师使用几个问题，引出概念，这个过程是老师在代替学生进行快速反思抽象，总结引入新的概念，就是大家一起到达二楼乘法楼。这里除了极少数学生能和老师一起思考进行反思抽象，大部分孩子都是在坐飞车，因为和已有的加法楼，就是一楼，**脱离速度太快**。只是老师自己在建构升降机，而学生基本上就是坐在里面，没有思考，**只是观摩老师的表演**。很多老师埋怨学生不愿意和老师一起思考。我真替学生打抱不平。**你们老师自己去当学生去听一个教授讲课，也是一样地观摩老师的表演。**

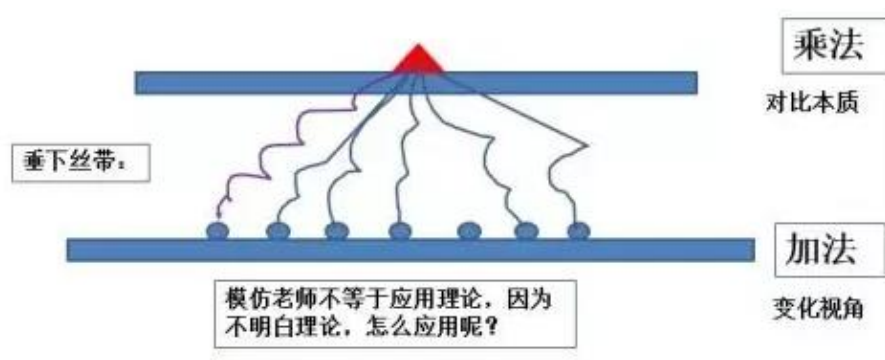
快速电梯法：

1. 回忆已有知识：学生是被动的。
2. 引导乘法概念：**老师代替学生进行快速反思抽象，总结引入新的概念：而学生基本上是观摩老师的表演。**



观摩老师的表演

这样上到二楼后，很多孩子记住了乘法的定义。但是只是停留在记忆里。因为在他们的脑袋里，二楼是悬在空中的。加法和乘法二者没有实际联系的，更不能说稳固的双向建构关系。对于这个问题，老师会用举例，应用概念来试图帮助学生。就是从二楼漂下几根丝带，单向的，垂到一楼。有的孩子会理解成一楼和二楼的关系，但大部分孩子，因为没有明白概念，只是认为是套用模式。比如 $7 \times 8 = 56$ ，尽管老师会解释无数次:7 个 8 相加，但是在孩子的理解里却是 7 和 8 两个符号之间的一个特别关系。因为学生是坐升降机上来的。

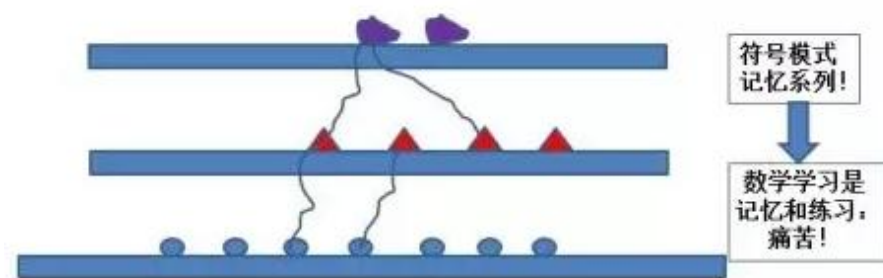


机械套用老师的模式

如果孩子还不理解概念，老师就会布置很多家庭作业，不断地练习。练习多就会好吗?结果是越来越坏，越来越多的丝带垂下来，但孩子们都不会把这些丝带理解成二楼到一楼的力的关系，而是模式的套用。就是模范学习老师如何垂下丝带。这样，知识的楼梯，就是从变化的视角，就是学生通过自己进行不同的加法练习，且在脑袋中

进行反思和抽象。总结出乘法的概念，这个过程从来就没有出现，这是必须的知识的楼梯。这是从具体到抽象的知识楼梯。这个过程被老师快速升降机代替了。那么从抽象到具体的应用也没有建立，因为大部分孩子只是模仿老师去应用一个符号模式。只有极少数孩子会去反思总结，从而明白。这些孩子的数学就会学得比较轻松。但是其创造性学习能力没有得到培养。

最后的学习结果，无论训练多少题，而且练得越多，坏处越大。因为只是强化了模式的记忆，没有知识的理解和彼此的关联。自然要稳固二楼的地位就需要使用大量的时间去强化记忆，而且因为二楼是独立存在于孩子的大脑，没有和一楼建立关系。所以基于记忆的学习是很痛苦的事情:就是很难记住!这就是传统教学的坏处。对于 $7 \times 8 = 56$ ，如果孩子是背乘法表，那么其坏处是无穷的。因为很多孩子只知道结果是56。对于 7×8 是什么意思却不知道。



数学学习等同于符号记忆和模式套用

我几个月前的数学课上，有个孩子乘法表很熟，就像背唐诗一样，可是一问她 7×8 和 10×8 的关系，一脸茫然，不知道。这是一个四年级学生。因为没有知识的真正的建构，自然对第三个视角的认识：分布和处境的视角就会更加一踏糊涂了。

=====

2. 三视角学习 $7 \times 8 = 56$

对 7×8 的学习的本质是在孩子的知识系统里建立一个三视角知识子结构或叫图式。这个子结构包括对比本质、变化和分布三个视角的理解和认识。显然这个子结构和加法，还有自然数两个三视角子结构形成紧密关联。加法本身的知识结构也是三视角的，自然数，比如 5，或者 6，自身的知识也是一个三视角结构。

当孩子学习乘法的时候，数字和加法两个知识子结构或图式必须已经在孩子的知识系统里已经存在，否则即使学会了乘法，也是对一系列符号之间的关系的记忆。最好加上减法，这样在三个三视角知识结构或叫图式的基础之上进行乘法的学习。

所以我们的一楼已经有数字、加法和减法，三个知识图式。显然这几个是互相联系的。二楼是我们的乘法楼。我们需要建立从一楼到二楼和二楼到一楼的双向知识楼梯。从一楼到二楼的楼梯是从变化

视角到本质对比视角的学习，就是从各种加法练习里，学生在老师的引导下归纳总结出一类特殊的加法的共性，就是各个加数都一样，然后把这个共性抽象总结成为乘法的概念，就是比如 $7 \times 8 = 7$ 个 8 之和或 8 个 7 之和的本质意义。

从二楼到一楼就是应用这个概念到具体的题目里。这是从本质视角到变化视角。我们已经分析了只有从一楼到二楼才能很好地和已有的知识结构相关联，就是建立知识结构的延伸。而直接把孩子提到二楼在进行练习的后果是直接和已有的知识割裂了，造成学生是上课观看老师表演和记忆符号之间的关系，就是背数学模式。只有先从一楼爬到二楼，然后从二楼到一楼就是轻易的，也是自然的。

还有一个视角叫分布视角:是在二楼，建立乘法 7×8 和其他的数学对象的关系。比如 7×8 和 10×8 的关系。更多的比如， 7×8 ， 3×8 一起和 10×8 的关系。这个叫乘法分配律。对于这个视角，大部分教学都把它放在二楼单独学习，或者说是当我们学完对比和变化视角再学分布视角。其实这是一个错误。因为三个视角是互相一体的，你中有我我中有你。

现在我们具体说说如何完成学习的第一步:从变化视角到本质视角的概念归纳。这个叫做概念的形成过程，也是学生学会如何发现规律和共性的很好的训练。这是创造力训练的很好的方法和最基本的过

程。比如 $7 \times 8 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$, $3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3$ 。要使孩子明白和理解这些概念，需要进行两项数学活动。第一个是孩子要明白为何需要这个概念，第二个是乘法的结果有何意义。我们要先看右边的数字相加的特征，就是所有的数字都相同。为何相同就要用两个数相乘来表示呢。显然这些道理不是由老师直接告诉孩子就会明白的。一切知识，特别是最基本的数字运算，更需要他们自己亲身体验的。

1) 加法数学活动设计和体验

我们要用不同的方法设计一系列的加法运算，不需要用大的数字。也可以用实物，可以在商场，也可以在教室里设计加法游戏，也可以用网上的软件，游戏。

比如要孩子计算： $3+2+2$, $4+4+4$, $3+4+5$, $5+5+5$, $6+2+1$, $2+2+2$, $7+2+5$ ，然后问孩子们，上面的几个加法里，哪些有共同特点？要引导他们发现，有三个的加数一样。再进一步增加数字到 4 个，5 个，此时不要他们计算，只要发现共性：加数相同。最后设计两个长的，比如 $1+2+3+7+5+8+9+3+2+1+8+6$ ，和 $2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2$ 。引导孩子，问他们后面的数字都是 2，总共有 13 个。可不可以设计一个新的符号表示，比如 $2(\#\#\#\$)13$ ，然后我们规定这个就是 13 个 2 相加。这样就书写简单多了。老师要鼓励孩子自己去发明自己的乘法符号。当每个孩子发明了自己的符号后，那么就可以给孩子一个题，比如 $4+4+4$, $5+6+7$ ，问他们哪个可以用自己的符号表示。同时要他们自己表示出来。最后，老师要告

诉孩子们在数学历史上，我们使用一个大家都同意的符号就是 $\times$ 。

2) 第二步就是要进行一些训练来巩固学生自己发现和形成的乘法概念。老师可以使用图形或实物或具体数字都可以的。一般不需要很多就可以。

3) 注意此时概念还不能算完成了建构，因为孩子还需要明白为何要有一个固定的值，就是为何要算出 $7 \times 8 = 56$ ，并且要记住。就是这个结果有何用。这样孩子要继续进行加法活动。可用比较视角： $4+4+4+4+4$ ，和 $4+4+4+4+4+5$ 。问孩子们两者的关系。现在要使用乘法概念，第一个是 4×5 ，那么第二个是比 4×5 多一个 5。这时，老师要引导孩子，如果我们知道 4×5 等于一个数，那么第二个就很容易了。就可以利用 4×5 来计算了。这样的例子要至少设计五个。让孩子自己发现其关系，就是如果我们将这些乘法的结果记住就可以帮助我们进行其他计算。这是很重要的理解。但是老师不要直接告诉孩子。

4) 然后我们进入第三个视角：分布和处境视角。

上面我们通过两个视角的学习，孩子自己建构和明白了乘法概念，并且可以自己通过加法算出一些乘法结果。但是不应该去背诵和记忆这个乘法表。下面我们通过处境的视角来建立整个乘法表的关系。就是比如 6×7 和 6×8 的关系， 5×9 和 5×10 的关系。此时可以通过观察整个乘法表的规律来建立彼此的关系。从乘 1 开始，到乘 10，然后是乘 2，乘 4，乘 9，乘 8，等等彼此之间是紧密相关的。就是我们可以从容易的推算出难一点的。比如 $6 \times 6 = 6 \times 5 + 6 = 36$ ，这样在推

算中，孩子不断地巩固对前面两个视角的知识和丰富。

比如：乘 10 是加一个 0，乘 100 是加两个 0，但是孩子要明白为何。

不能直接要他们记住，要引导孩子自己总结。然后，乘 2 是自己加

自己，乘 4 是先乘 2 在自己加自己。乘 4 和乘 2 的关系也不能直接

告诉孩子。乘 9 是和乘 10 减掉一个自己，所以得到一个规律：自己

减掉 1 做为十位数，个位数就是 9 减掉这个十位数。比如 $7*9=6(7-1)$

3 ($6+3=9$) 。但是这个规律应由孩子自己总结，因为

$7*9=7*10-7=70-7=63$ 。接下来，就是乘 8 等于乘 4 在自己相加或者

乘 9 减自己，这两个方法可以一起学，并且比较。然后是乘 5，这个

很容易学，孩子很容易明白 5，10，15，25，这个序列。但最好是

先学偶数乘 5，在是奇数乘 5。偶数乘 5，就是偶数的一半加个 0 做

为个位数。比如 $6*5=30$ ， $3+3=6$ 。这个也需要孩子自己发现。这里

需要孩子明白 6 的一半是 3，4 的一半 2，8 的一半是 4。当然你也

可以教孩子除法。不过我不建议。接着就是奇数乘 5， 比如

$7*5=6*5+5=35$ 。然后我们可以学乘 3 和乘 6，乘 7。这里，我建议

先学乘 3。乘 3 等于乘 2 再加自己。这时，我建议学习自己乘自己。

比如 $2*2$ ， $3*3$ ， $4*4$ ， $5*5$ ， $8*8$ ， $9*9$ ，这些都是复习。这是学乘 6

最好是： $7*6=7*5+7=35+7=42$ ， $6*6=5*6+6=36$ ，the last one is

$7*7=6*7+7=49$ 。

最后就是乘法表的巩固，绝对不能死背。可以要求孩子自己利用上

面的分布视角不断地反复练习，自己推导出乘法表。此时，要求孩

子推广自己的分布视角，利用本质视角，对同一个乘法，比如 $7*6$ ，

要求给出几种计算方法，比如 $7*6=6*6+6$, $8*6-6$, $7*7-6$, $7*3*2$, 等等，越多越好。经过这样地训练之后，在孩子的脑中，整个乘法表就是一个有机的活的整体，而且其乘法的知识结构的建立也是很全面的。以上三个视角的完成是互相需要的。显然上面的知识图式可以更加丰富，必须不断地完善。其实我们一生都在不断地完善这三个视角的乘法学习。