

如何创造性地学习加法呢？

您可能会以为数字的加法很简单，但是很多孩子就是很难明白‘几加几’是什么意思。最后，大部分孩子们都是在记忆和背诵加法表，其实是记忆符号串，根本没有数学的理解，也无法欣赏数学自身的真善美。

下面我们应用三视角方法论来解决这个难题。

$5+6=11$ 到底是什么意思呢？有的孩子说是 5 个苹果加上 6 个苹果，总数是 11 个苹果。难道有错吗？绝对没有。还有孩子说，是 5 头牛加上 6 匹马，等于 11 只动物。有错误吗？估计此时你会拿不定主意了。

我们先要讨论， $5+6$ 是什么意思？大部分人会说，就是 5 后面再数 6 个。这个好像也对。加法既是一个概念，也是一个过程，还是一个关系。如何理解这三个断语呢？

如果 $5+6$ 是一个概念，那么它就是某种共性，而这个共性的表现形式就是我们说的变化的视角。概念或共性本身则是对比本质视角。

此外还有分布/处境视角，就是 $5+6$ 和其他的数学对象或概念的关系。

比如， $5+6$ 和 $6+6$ 的关系， $5+6$ 和 $5+6+1$ 的关系。

对比本质视角是讲 $5+6$ 和其他数学对象或概念的对比，即 $5+6$ 成为他自己的‘身份特色’。变化的视角说的是， $5+6$ 的本质的具体表现形式是多种多样的。下面我们进行具体的三视角分析。

壹： 三视角分析加法

1. 对比/本质的视角

$5+6$ 描述的是把一个含有 5 个具有相同性质 Q 的物体的集合 A 和另外一个含有 6 个也有性质 Q 的物体的集合 B 合在一起，成为新的集合 C 。这个集合 C 的元素的数目我们叫做 SUM ，即和数。

人们发现，在一定的时间内，在一定的处境内，这个 SUM 和物体的选择无关，和物体的性质的选择无关，和集合里面的元素的排列顺序无关，和进行活动的人无关，和先拿 5 个还是先拿 6 个的次序也无关，还有和活动地点也无关。

这个共性或规律就叫做 $5+6$ ，其结果 SUM 就是 11。所以 $5+6$ 或 $5+6=11$ 代表的是一种共性。这种共性用符号表示就是一个概念，叫做 $5+6$ 和 $5+6=11$ 。为何有这种共性或稳定性呢？这个需要进入信仰范畴，一般数学研究都是假设这个稳定性是存在的。

对 $5+6=11$ 的本质的认识需要进行对比才能进一步明白。首先，家长可以引导孩子思考可不可以将 5 个水滴和 6 个水滴相加；其次可以对比：把 5 头牛和 6 只兔子放在一起，我们的新的集合的元素的数目可

以用 $5+6$ 来表示吗？此时，我们需要修改成 5 只动物和 6 只动物一起，才能得到总数为 11 只动物。总之我们不能说 11 只牛或兔子。

其次的对比就是， $5+6$ 和 $2+3$ 形成对比， $5+6$ 和 $4+7$ 形成对比，虽然他们的结果相同。 $5+6$ 和 $5-6$ ， 5×6 ， $5\div 6$ 形成对比。

2. 变化的视角

$5+6=11$ 的本质的具体表现是多样性的。我们可以用一切可以叙说或定义的可见物体或不可见的抽象对象来作为 $5+6=11$ 的例子和具体实现。

对于初学的孩子，变化的视角最好是具体的实物体验，或者电脑上的图片。体验越丰富，对 $5+6=11$ 就越明白其本质含义。

3. 分布和处境的视角

这个视角叙说的是 $5+6=11$ 和其他的加法个体，比如和 $4+3$ ， $5+4$ ， $6+8$ 的关系。这对于整个个位数加法表的学习很重要。同时，这个视角的学习就把 $5+6$ 这个过程封装和独立起来，使之成为一个对象。他可以和其他的对象比如 $5+5$ 发生关系。 $5+6$ 比 $5+5$ 多一个，因为第一个 5 和 5 是一样的，第二个是 6 和 5；那么， $5+6$ 就等于 $5+5$ 加一个，就是 $10+1=11$ 。

其次， $5+6$ 和 $50+60$ ， $0.5+0.6$ ， $0.05+0.06$ ， $x^5\times x^6$ 有奇妙的关系，即他们的本质都是一样的。

分布和处境的视角告诉我们一个数学知识对象或概念和其他的知识对象和概念的关系。缺少分布和视角的认识，孩子们对加法就只能采用过程的方法，就是回到数的一一对应或数数的过程，无法将过程对象化。无法将各个加法对象进行彼此之间的普遍联系。学习是孤立的，也是记忆型的，很痛苦的。孩子无法领略加法之间的美和善。这样，很多孩子竟然要背诵加法表。加法要熟练，但是不能用背诵的方式。

下面我们具体讨论如何进行三视角学习加法。加法学习的预备知识图式就是对一个数的三视角的认识的知识图式，就是数数的知识要求。请仔细阅读我们以前的三视角认识一个数的分析和学习。比如，我们要求孩子对任何一个数，能知道比他少一个或两个的数，比他大一个或两个的数。然后要能从小数到大，也能从大数到小。还要能随便说出某一个数的前面和后面的至少两个数。

贰：三视角学习加法

1. 从变化的视角到本质的视角（从具体到抽象）

在这里，我们首先设计对比视角的内容，比如要孩子将 5 本书和另外 6 本书放在一堆，同时将 5 本书和 6 个苹果放在一堆，也将 5 本书和 6 个碗放在一堆，另外将 5 个杯子和 6 本书放在一堆。

引导孩子对比这四个集合活动的不同性和共同性，引导孩子明白加法的本质什么。这是要孩子自己明白 $5+6$ 的本质是把 5 个具有性质 Q 的物

体和另外 6 个具有同样性质 Q 的物体集合在一起而得到的新的集合的元素个数。这里其实是要孩子明白何谓加法。

孩子一定要明白 7 个梨子和 8 本书放在一起，和 7 个梨子和 8 个梨子放在一起，虽然使用数学加法是 $7+8$ ，但是其实际理解是不一样的。前面的共同性质既不是梨，也不是书，而是比如三维物体等等，而后者则是梨。

然后，我们可以设计孩子如何学习 $5+6=11$ 的本质。 $5+6$ 和 $5+6=11$ 的本质是有一些差异的。一个侧重于过程，一个侧重于结果。

一切都要从孩子的已有的知识结构出发进行数学活动的设计和执

行：尽量采用实物。最好是游戏，且是生活里面的例子。比如要孩子数 5 个苹果到一个袋子里，另一个袋子里放 6 个，然后将两个袋子的苹果合在一起，放在一个袋子里。要孩子数一数，结果是 11 个；然后，进行同样的比如梨子的试验，孩子会得到一个结果，也是 11 个；接着就是比如 5 只笔和 6 只笔，然后数数也是 11。这样要引导孩子总结，不管是什么样的东西，只要是相同种类的 5 个和 6 个合在一起，总是得到 11 个。这个就叫做 $5+6=11$ 。

同样的试验还要扩展到生活的很多层面，比如休息 5 天，接着又休息 6 天，总数是 11 天。自然，这样的试验要扩充到其他的加数，比如 $5+3$ ， $6+7$ ，.....

终级的目的是要孩子自己总结明白加法的本质意义。

然后，就可以应用 $5+6=11$ 了。在这里也要注意使用分布的视角，

就是可以设计比如 $5+5=10$ 和 $5+6=11$ 的并列试验。

2. 从本质的视角到变化的视角（从抽象到具体）

这是如何应用 $5+6=11$ 的问题。一般的教材上的例子很多。因为孩子已经有前面的从变化到本质的视角的经验，所以对本质的应用也是很自然的。家长只需要引导孩子进行一定量的实际应用就行了。比如在超市里，在车站里，在电影里，在饭桌上等等。注意，这里是直接应用 $5+6=11$ 这个结果。显然，在应用中，家长也要引导孩子思考二楼（加法）和一楼（数字对应于实物集合）的双向互通的关系。这是多样和统一、统一和多样的关系。

当然这里也需要有分布的视角的参与。比如，进行对比性的游戏：一个是 $5+5=10$ ，一个是 $5+6=11$ 。这样，孩子对 $5+6=11$ 的应用的效果会更好。

下面，我们可以进入分布的视角了。分布视角告诉我们，孩子应该明白 $5+6=11$ 和 $5+5=10$ 有关系的。他们不是独立的。否则，孩子需要独立地记住 $5+5=10$ ， $5+6=11$ ， $5+7=12$ 等等。这会变成加法表的背诵。这不是学数学，只是背诵符号之间的关系，也不是正确地学习数学的方式。

3.分布和处境的视角（知识的关联）

有了上面的两个部分的学习，孩子基本上已经明白了加法的意义，也会使用数数，就是一一对应的过程来得到加法的结果。但是这显然还是一个过程的认识，就是 $5+6$ 是一个‘加’的过程，还没有到达‘对象’的阶段。此时我们要对 $5+6=11$ 进行运算操作，就是要发现 $5+6$ 和 $5+7$ ， $6+6$ ， $4+5$ 等等的关系。这样，我们就可以将整个 10 以内的加法，形成一个普遍联系的整体，明白彼此之间的关系，从而将 $5+6$ 看成是一个独立的整体对象，里面的具体运算过程就被封装起来了。

具体的数学活动设计是：

1.加 1，任何数加 1 就是往前面数 1 个。比如 $7+1=8$ ， $6+1=7$ 。这个需要孩子自己总结出来；加 2。就是往前面数两个；此时千万不要来 3 个，因为大脑里数三个是有点累的。然后要学会，减 1 就是往后面数一个。比如 $10-1=9$ ；还有，减 2 就是往后数两个，比如 $8-2=6$ 。对于加 1 和 2，和减 1 和 2，要将数目扩大到 10 以外，比如 $32+1$ ， $32+2$ ， $50-1$ ， $43-2$ 。反正在孩子心里只是往上或往下数一个或两个。

2.然后，我们进行加 10，比如 $2+10$ ， $3+10$ ， $4+10$ ，让孩子自己总结，几加 10，就是十几。我们还可以推广到几加 20，30，.....这是一个数数的应用和总结。

3.现在可以加 9 个了。首先来一个 $4+9$ 。可以让孩子数一数，他得到 13。显然孩子并不喜欢这种数的方法。但是家长不要急于告诉孩子，4 加 9 就是 $4-1=3$ ，然后 $3+10=13$ 。一切都要尽量让孩子自己摸索总结出来。此时，可以要孩子，先做 $4+10=14$ ，再做 $4+9$ 。可以问孩子： $4+9$ 和 $4+10$ 相差几个？

最好能做一些实物的试验来启发孩子。孩子会慢慢明白， $4+9$ 比 $4+10$ 少一个，因为 9 比 10 少一个。因为 $4+10=14$ ，所以 $4+9$ 就是 14 减掉 1，得到 13，就是 $4-1+10$ 。然后，要引导孩子自己应用这个规律，来

计算 $5+9$, $2+9$, $6+9$, $8+9$, $7+9$ 全部的 $+9$ 的运算。最后要孩子自己总结规律, 然后在心里能完全计算个位数 $+9$ 的运算。

4.完成了加 9 ,我们可以来算 $+8$ 。家长需要引导孩子明白 $+8$ 是 $8-2=6$ 再加 10 。一定要用上面加 9 的练习一样,引导孩子自己总结出来。然后,要引导孩子比较 $+8$ 和 $+9$ 的相同和不同。相同点是都利用加 10 ,不同的点是一个减一,一个减二。这本身是加法的分布视角的高级应用。

5.此时我们已经完成了加 1 ,加 2 ,减 1 ,减 2 ,加 9 和加 8 。而且我们很好地将这些运算都互相关联起来了。孩子不需要使用手指来数数计算。他们最多使用的是在心中前后数 1 和 2 个。

6.此时,我们可以要孩子自己完成 $5+5=10$, $10+10=20$ 。这个太容易了。两双手, $5+5$ 就是 10 个。然后,我们要和孩子一起回忆: $1+1=2$, $2+2=4$, $5+5=10$, $8+8=16$, $9+9=18$ 。

剩下的就是完成 $3+3$, $4+4$, $6+6$ 和 $7+7$,这四个‘相同数’的加法。先引导孩子比较 $2+2$ 和 $3+3$,最好是用铅笔或苹果进行实物比较,让孩子明白 $3+3$ 比 $2+2$ 多两个,就是 $4+2=6$ 。然后要孩子自己比较 $5+5$ 和 $6+6$,得到 $6+6=10+2=12$,就是 $6+6$ 比 $5+5$ 多两个;还有 $4+4$ 比 $5+5$ 少两个,所以是 $10-2=8$;最后是 $7+7$ 比 $8+8$ 少两个就是 16 往下数两个,是 14 。这样我们完成了整个 $1+1$, $2+2$, $3+3$, $4+4$, $5+5$, $6+6$, $7+7$, $8+8$, $9+9$ 的结果的推导,而且都是孩子自己摸索出来的。这是创造性学习。要不断地鼓励!

7.我们已经完成了 $+1$, $+2$, $+8$, $+9$,和双数相同的加法。此时我们可以进行一些更多的分布视角的认识。如果你仔细查看加法表,你会发现我们完成了四条线和一条对角线的学习。那么下面我们应该将他们更加紧密地关联起来。一切新知识的学习都要和老知识建立关联,即要建立知识的分布视角,否则只是独立的信息,只是背诵和死记忆而已。

现在,我们可以要孩子计算: $2+3$, $3+4$, $4+5$, $5+6$, $6+7$, $7+8$, $8+9$ 。引导孩子自己总结出来: $2+3$ 比 $2+2$ 多一个,比 $3+3$ 少一个,等于 $6-1=5$, $6+7$ 比 $6+6$ 多一个,比 $7+7$ 少一个,所以是 13 。同样的道理,孩子可以得到其他的结果。当然,孩子能明白 $6+7$ 和 $7+6$ 是一样的。这样,我们又增厚了我们的对角线。

8.此时我们可以考虑另一条对角线了,就是和数为 10 的线。

首先和孩子一起回忆 $1+9=10$, $2+8=10$, $5+5=10$ 。然后要孩子比较 $4+6$ 和 $5+5$ 的相同性,得到 $4+6=10$,也可以从 $4+5$ 等于 9 得到 $4+6=10$,因为 $4+6$ 比 $4+5$ 多一个;也可以是 $4+6$ 比 $4+4$ 多两个,所以是 8 加 2 是 10 。这些都需要。那么如何学习 $7+3=10$ 呢?孩子可以从 $7+2$ 开始, 9 加 1 等于 10 ;也可以从 7 数三个,如果孩子愿

意。

这样所谓的 10-bond 我们学完了。这个很重要的。然后可以和孩子一起总结规律： $1+9$ ， $2+8$ ， $3+7$ ， $4+6$ ， $5+5$ ，都等于十和他们之间彼此的关系。比如 $3+7$ 和 $4+6$ 就是一个加一，一个减一，然后总数不变，还是 10。

9.这样我们可以利用这一条对角线来进一步扩充我们的分布视角。

引导孩子计算和完成：利用 $1+9$ 计算 $2+9$ ；利用 $2+8$ 计算 $3+8$ ，和 $2+7$ ；利用 $4+6$ 计算 $4+7$ 和 $3+6$ ，利用 $5+5$ 计算 $5+6$ 。同时和以前的方法进行比较。比如 $2+9$ 可以直接算； $3+8$ 可以使用加 8 的方法； $5+6$ 可以使用 $6+6$ 减一。

10.这样我们的整个个位数的加法只有： $5+7$ （ $7+5$ ）和 $5+3$ （ $3+5$ ）没有学了。

$5+7$ 可以从 $5+5$ 出发，也可以从 $5+6$ ，或 $7+7$ 出发都可以。但是一定要孩子自己去推导。 $5+3$ 可以从 $3+3$ ， $5+5$ ， $3+6$ ，或 $5+4$ 等等出发都可以。

使用上面的分布视角的方法来学习加法，孩子对全部个位数的加法之间的联系是非常的清楚，而且这些关系都是孩子自己在父母的引导下完成的建构。这就是创造性学习，而且是非常有成就感的，并且是一个很美的享受。对数与数之间的关系也会更加清楚，加深了对数的分布视角的认识和丰富了孩子的数字的三视角知识图式结构。