

# 如何正确启蒙孩子的数学(核心部分)

原创 王德生 丹德 2020-08-26 18:51

◆ 本文是王德生博士2017年12月7日课堂实录 ◆

整理：行者 思丹



从变化视角到本质视角的数学活动设计：发现数字的对比本质和创造性学习数字。

=====



孩子要理解数字概念的过程是漫长的，往往要用好几年的时间。一般来说，我们可以在三到四岁左右开始和孩子学习数字。学太早了，因为预备知识没有，孩子对数字基本上只是记忆而已。

学数字的知识预备要求孩子会进行简单的事物的，**1 分类；2 排序；3 一一对应**。这个可以从一生下来就进行，而具体的游戏活动需要变化多样。

### 方法论:

我们要设计各种各样的集合之间的“一一对应”的活动，并引导孩子反思和抽象总结这些活动有什么共性。我们的目的是要从“一一对应”活动中慢慢地抽象出‘数字’的定义。

我们的原则是：一切活动都要基于孩子已有的知识图式和能力，绝对不从一楼直接坐飞机到二楼。所有的数学活动都必须是孩子可以在自己的知识背景里在老师的引导下可以完成的。

### 具体学习数字的教学活动:

## 01 含有同类元素的集合之间的“一一对应”活动

我们的目的是要将孩子们的直观的“大小，长短，多少，相等”的认识用“一一对应”的语言来解释。

比如，如果我们给孩子两个体积相差很大的西瓜，孩子会直观地发现一个大，一个小。这是直观地，将两个物体放在一起比较的结果。但我们要用“一一对应”的语言来解释这些量和量之间的比较关系，让孩子慢慢地明白一一对应和数目多少的关系。

### 活动设计：

爸爸和孩子各有一个袋子，里面装有很多形状相同的长方形巧克力。两个袋子里巧克力的数目是一样多。当然孩子不明白数目的意思。爸爸问孩子，我们两人的巧克力一样多吗？孩子因为没有学过数数，当然只能猜猜，或者直观地看看，也许会说，一样多。爸爸就会问：我们怎样才能知道呢？一个办法就是将各自的巧克力排成一个直条，然后把两个人的直条比较，谁的长，谁的就多。这个比较孩子能直观明白的，也是孩子的知识结构里有的。就是将两个物体放在一起比较长短。从长短比较，孩子能直观地明白谁多谁少，或者一样多。接着，对这个活动的设计进行一点变化：此时两个袋子里的巧克力数目不一样。

这样，就会出现一个人排的直条就会长些，当然也是多些。这也是孩子直观的认识：长一些就是多一些。但是这里有没有“一一对应”的活动呢？因为爸爸和孩子彼此的排列活动好像没有关联。但是内在的对应关系是有的。此时，爸爸要引导，问孩子一个问题：我们在排列巧克力时，如果是完全地“一一对应”地排列，就是总是爸爸一个，孩子一个，……，那么，到最后如果彼此都没有了，也都不缺少，那么大家是不是一样多呢？孩子说，可能是吧。那就做几次试验看看。于是，发现只要是完全地“一一对应”地排列，得到的都是一样长的直条，就是排的巧克力数目是一样的多。

有了这个基础了，爸爸就把游戏推广到，只要和孩子完全地一一对应地列出巧克力，不需要再进行排列成直条，应该也是一样的多。这个也要进行多次试验证明。这样，一直试验到孩子完全明白，只要是“一一对应”，且彼此都没有剩余，也都不缺少，就是完全“一一对应”，那么彼此的巧克力数目就是一样的多。而且，孩子还要明白，如果“一一对应”后，爸爸的还有剩，那么爸爸的就比孩子的多；如果孩子的有剩，那么爸爸比孩子的少。

这样的试验的结果使孩子总结并明白：要判断两个袋子里的物体的多少，只需要进行“一一对应”试验就行了。但是这个结论是基于对于同样形状的个体，就是巧克力的形状都相同的条件下进行试验得到的。孩子的认知还需要推广到不同的形状的个体的情形，这样就要和分类结合起来。

## 02 在分类和排列中进行“一一对应”的活动

爸爸可以根据孩子的喜好，选他自己爱好的东西，进行分类和排列活动。

比如：给孩子3个梨，4个苹果，4本书，3个铅笔，3个杯子，4个桃子，混合在一起。然后要孩子将这些物体进行分类，就是把相同的类型的排列在一起成为一组。每一组可按从左到右的次序进行排列。这样孩子就把相同的东西排列成组，共有六组。

此时，爸爸可以和孩子做一个“一一对应”的游戏：爸爸和孩子各选取一组东西，比如孩子选桃子组，爸爸选苹果组。下面该玩一个什么样的游戏呢？注意我们一定要在孩子的已有的知识结构里进行，否则他不会明白的。明白外界事物，就是用自己的知识结构去解释外在的事物。孩子没有‘多和少’的具体概念，但是有“有”和“无”的概念，有“序列”的概念。我们的目的是要进一步深化“一一对应”的概念，在具体的游戏中要让孩子进一步体验“一一对应”的意思，从而明白桃子组和苹果组能够完全地一一对应。

游戏可以这样设计：

爸爸说：儿子，我们给你的桃子找苹果朋友，好不好啊？

孩子说：好啊！这个好玩。一个桃子，一个苹果朋友，一个桃子，一个苹果朋友，一个桃子，一个苹果朋友，一个桃子，一个苹果朋友。没有了。你的没有了，我的也没有了。

爸爸说：儿子，你还有桃子吗？

儿子说：爸爸没有了。

爸爸说：我也没有了。那么我们是一样的多吗？

孩子看到苹果和桃子一个一个地对应起来了，没有多余，也没有少。就会说应该是一样的多。因为孩子的脑袋里，苹果和桃子都已经抽象成了朋友。这样实际上就是和前面的巧克力试验是一样的了，就是在孩子的大脑里都是同一类事物了。然后可以换成书和杯子的‘找朋友’游戏。这样，“一一对应”完后，发现书还剩一本。这时要引导孩子总结：书比杯子多。然后再是进行其他的组合的‘找朋友’游戏。

如此，孩子通过各种各样的“一一对应”活动发现，有些组和有些组的元素是可以完全地一一对应的，有些组和有些组的一一对应不是完全的，就是会有剩余或缺少。此时，在爸爸的引导下，孩子总结和明白，如果我们对两个组建立完全的“一一对应”，就是两个组对应之后都不会剩或少，那么这两个组的元素就是一样的多。随着“一一对应”的游戏越来越多，在孩子的脑袋里就建立起“一一对应和数目多少”的知识图式。比如我们可以将数量增加到10以外。要孩子去体会完全的“一一对应”就是数目相等的意思。明白“一一对应”就是你一个，我一个，一个一个来，看看最后谁还剩，谁缺少。有剩的就多些，缺少的就少些。

也可以将游戏活动扩展到图形的配对。慢慢地孩子会明白，通过“一一对应”，可以判断谁比谁多，谁比谁少。因为“多还是少”的本质意义就是“一一配对”停止时，谁还有剩，就是谁多；谁缺少，就是谁少。同时没有了，就是一样的多。这样，孩子可以通过“一一对应”来分辨数量的多，少和相等的关系了。而且，孩子还可以明白，如果剩余的是一个，那么剩的就多一个。

### 03 再进一步就是进行排序

和上面一样，给孩子一些不同类别的物体的集合，要孩子去分类，并将同类的放在一组。而且要通过"一一对应"去判断哪些组的数目大些，哪些组的数目小些。且要将小的放在前面，大的放在后面。相同的并列在一起。这里可以从两组开始，过渡到三组，四组等等。

假设孩子的分组和排序是：

1. 书（并列组：梨）（数目：1）；
2. 苹果，苹果（并列组：桃子，桃子）（数目：2）；
3. 杯子，杯子，杯子（并列组：铅笔，铅笔，铅笔）（数目：3）。

此时，孩子已经知道了，如何判断哪些组元素多，那些组元素少，也知道将它们按多少排列起来。但是，就是不知道如何描述这些不同的"一一对应"，不知道如何区别不同的"一一对应"关系，就是不知道如何区分上面的1，2，3组的数目的多少。就是不知如何给上面的组1，组2，组3的'共性'进行定义。

孩子只知道书和梨一样多，苹果和桃子一样多，杯子和铅笔一样多。还有苹果比书多，杯子比苹果的多，当然杯子也比书多。但孩子不知道如何去具体表示各个组的数目，就是如何去定义组 1，组 2，组 3 的"一一对应性"。其实就是要给他们一个标记。

此时，爸爸可以要孩子做一件事：爸爸数好 9 个苹果，然后要孩子去拿和苹果一样多的桃来。那么，孩子就会用桃来与这些苹果"一一对应"完成任务。显然，爸爸不能说 9 个苹果，因为孩子不懂何谓 9。此时孩子已经会使用"一一对应"来拿取一定的数量的物体。但是这个参照体还是实物的一个集合。就是九个苹果的集合体被用来作为"一一对应"的参照物。此时我们的任务就是要将这个"实物集合"变成"抽象的集合"，最后变成孩子心中的一个 '符号序列'。

然后爸爸可制作一些苹果的图片来代表苹果，把不同数目的苹果图片订在一起成为一个苹果集合的代表物，我们把它叫做苹果书。先让孩子用一一对应的方法比较每两本苹果书的页数的多少，并将苹果书按页数的多少排列成一个从小到大的序列。然后要求孩子按苹果书作为参照物，用一一对应的方法去拿和苹果书的页数一样多的苹果。这样，我们已经从实物集合的一一对应过渡到了实物集合和图片集合的一一对应。

这样的试验要多次反复，使得孩子可以进行图片集合和实物集合的一一对应。接下来就是制作有1, 2, 3, 4, 5页的5个不同的苹果书，每个苹果书有不同的页数。要孩子判断5个不同的苹果书的页数的多少关系。

此时孩子需要将每两本苹果书一一对应，比较页数的多和少，然后少的放在前面，多的放在后面，一直到把全部五本书排好。而且要让孩子总结和明白，一个比一个多，而且每相邻的两本书都是后面的比前面的多一个。此时，爸爸可以引导：如果我们给5个苹果书取不同的名字以区别彼此，你喜欢什么样的名字呢？

可以叫孩子设计5个名字来表示这些页数不同的苹果书。比如如果孩子把有4页的苹果书叫做‘狗狗’。那么，你接下来，可以叫孩子去拿‘狗狗’个苹果来，就是拿和‘狗狗’那本书的页数一样多的苹果。那么孩子就会拿着这个‘狗狗’书去一一对应地拿出苹果来。你可以要求进行更多的练习：比如：要‘狗狗’本图画书，或‘狗狗’个茶碗。此时，‘狗狗’已经很靠近我们的‘4’了，但是还有一段距离。因为，我们的‘狗狗’还是孤立的，没有和其他的苹果书建立关系。所以，下面的数学活动就要致力于建立‘苹果书’之间的关系。

孩子如果把有1, 2, 3, 4, 5页的5本苹果书, 分别叫做, ‘哈哈’, ‘依依’, ‘亮亮’, ‘狗狗’, ‘娃娃’。那么, 爸爸可以引导孩子:

1. 如果, 我要‘哈哈’个桃, 怎么拿? 还要拿那本书去——对应数吗? 孩子说, 不用的, 就是1个吧。
2. ‘依依’比‘哈哈’多吗? 孩子说: 是的, 多1个。那么, 如果爸爸要‘依依’个桃, 要用‘依依’这本书去数吗? 可不可以, 先数一个, 就是‘哈哈’个, 然后再拿1个呢? 孩子说: 是的。
3. 这样, 一直到‘亮亮’, ‘狗狗’, ‘娃娃’个桃都可以从‘哈哈’开始, ——增加获得。
4. 慢慢地, 爸爸可以把这五个名称‘哈哈, 依依, 。’, 改为‘1, 2, 3, 4, 5’, 中文就是‘一, 二, 三, 四, 五’, 英文就是‘one, two, three, four, five’。
5. 然后, 爸爸必须和孩子一些慢慢地熟悉这些新的名称, 就是‘1, 2, 3, 4, 5’。并且要和孩子回忆和反思总结, 2个苹果, 就是在1个苹果上再加一个, 3, 就是2多一个, 一直到5。
6. 照样, 我们可以同样学习或直接推广到6, 7, 8, 9。因为孩子已经明白了数字的意思, 推广就是很自然的。此时, 孩子已经完成了整个9个数字的对比本质和概念建构。而且, 也明白数字之间的关系。最后, 爸爸可以和孩子回顾, 0就是没有的意思, 因为是空的。

7. 此时，孩子已经明白9个数字各自的本质意思了，而且孩子也明白他们都是从1开始，一个比一个多一个地递增上来的。这个其实就是孩子的有序排列活动的一个数字递加表述。孩子已经明白数字之间的彼此关系。就是9比8多一个，8比9少一个，6和7，3和4等等都是这样的关系。

总结： 用上面的过程学习的0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 是有着丰富意义的数字，不是一个空洞的符号学习，整个学习过程是爸爸引领孩子的一个创造性学习过程。  
孩子明白了每一个数字的具体内容和涵义。



**从对比本质的视角到变化视角: 应用数字!**

=====

比如： 具体数数有多少个苹果，多少本书，就是通常的教科书上的一些题目。变化的视角就是训练孩子应用自己建立的数学概念，比如9，其实是一个“一一对应”的关系。那么现在的应用就是一个与心里的一个逐步递加的过程的‘一一对应’，因为孩子要从1开始数，一直到9。

此时，孩子对9的认识还是一个心里的‘一一对应’的过程，就是和内心里的‘一个序列，或9个数字的序列’的一一对应。但是，这九个数字都已经具有丰富的内涵。我们需要使用第三个视角，就是要明白和熟悉这九个数字之间的关系，使得这些数字在孩子的知识结构里成为一个完整的对象，就是从过程到对象的完成。



**分布视角的学习：数字之间的关系**

=====

在上面的两个学习过程里，孩子自己建立了数的概念，其中还有数与数的一些简单关系。比如9比8多1个，6比7少一个，等等。此时我们要进行更多的数与数之间的一些关系活动，使得孩子尽快将这个‘过程’对象化，就是独立化和整体化。

比如：如果我有8个苹果，那么再加一个，就是9个；2比1多一个，3比2多一个，那么3比1多几个？这样，将数字和数字之间的关系从相差一个扩充到相差两个，甚至三个，等等。孩子要明白往上面数一个，两个，三个。但不要更多。同时也要可以往下面数一个，两个，三个。不仅要能从1数到9，也要能从9数到1。

## 大总结

完成了以上的三个视角的知识图式的建立后，孩子们可以开始学习加法和减法了。加法和减法是数字的分布视角（即数字和数字的关系）的进一步丰富。

当然，我们建议孩子将数数扩充到20以内。因为，爸爸可以引导孩子思考:如何用数字表示比9多一个呢？就是使用1和0 两个数来表示，叫做‘10’来表示比‘9’多一个。然后就是11，12，13，.....19，20，21，.....100。这是一个很自然的一个过程。

然后我们可以开始学习如何进行加法和减法的三视角分析和学习。

原文评论：

恩奇 2018-04-14 20:53:36

我试着用这个方法教彭成湘，现在有一个月了，从来不愿意数数的，昨天竟然在陪同之下数到30，而且在数10，20，30时，大声喊出来！这不是奇迹吗！

**感谢您的阅读，对三视角智慧感兴趣想参加学习的朋友请添加我的微信**

