

如何正确启蒙孩子的数学(第一部分)

原创 王德生 丹德 2020-08-26 18:51

本文为王德生博士2017年12月6日课堂实录

整理 行者 思丹

很多家长不知道如何正确启蒙孩子的数学学习和数学思考, 这是一个很头疼的问题。

没有一个人会否认数学的重要性, 但是对如何正确启蒙数学学习的重要性认识不足。

我们今天使用三视角方法论来探讨数学启蒙的问题, 主要聚焦于如何和孩子一起学习数字, 0, 1, 2, 3, 4,这是个看起来容易, 实则非常困难的问题。然而, 如果我们按照三视角理论去思考, 问题就显得不是那么困难了。

作者 简介:

王德生博士



现任新加坡德麦国际有限公司董事长, 广州德麦教育咨询有限公司董事长兼总裁, 首席科学家。中国科学院数学和系统科学研究所博士; 前南洋理工大学博士生导师; 福建省“百人计划”人选; “闽江学者”特聘教授人选。

三视角智慧、三视角创新管理教育创始人。发明三视角英文词根、义根和主题学习法, 三视角无痛多重读书法。倡导寻宝式学习, 充分发挥学生的学习力、心智力和创造力。

丹德

01 三视角方法概论

首先我们介绍三视角方法论。

三视角方法不仅是一个认识方法论或认识工具,也是世界万物万事万理的本体论,即事物自身的结构由三个视角:对比,变化,分布组成!这是视角结构,不同于我们通常讨论的三维物体结构!

对比视角包括事物的对比特征,这些特征把该事物和其他事物进行对比区分;变化视角包括事物的对比特征的种种不同的具体表现;分布视角包括事物和其他事物的关系。认识任何一个事物,无论可见还是不可见,只要是我们能叙说或定义的一个存在体。

不管是三维物体还是一个抽象的数学理论、数学过程或数学概念,我们都需要从事物的对比视角、变化视角,和分布视角来认识它。而且如果我们缺少任何一个视角的认识,我们的整个认识或理解就是空的;或者说,我们只是将一些符号记录在大脑储存区域内,它们并没有进入我们的知识结构体系里。

任何信息都必须经过学习者的解释才能成为知识,而解释就是用已有的知识结构里的特定的图式来与新的信息建立结构关联。

当我们从对比视角研究和学习或认识一个事物时,我们必须以变化和分布视角为条件;当我们使用变化视角时,我们必须使用对比和分布视角;照样,对分布视角的认识也必须以对比和变化视角为预设。总而言之,认识任何事物,必须使用三个视角。三个视角彼此互相需要,没有重要和次要之分,地位平等,而且三个视角必须同时出现在任何一个认知活动里,但是有所侧重。

那么，对一个事物的完整的认识和它在人的知识结构体系里存在的知识图式就是一个三视角的知识结构体。这个结构体是整体协调，各个视角互不矛盾，互相依靠，互相补充。自然地，学习的本质是如何形成这样的三视角知识结构体并不断地丰富这个结构体。

下面我们来讨论如何学习一个数字，比如7。

数字7是一个符号，但是这个符号到底代表什么意思呢？这是我们今天要详细讨论的。学习一个数字，其实就是我们教育小孩数数的过程。这么简单的事情，还值得讨论吗？

毕达哥拉斯认为数字是很美的，你能体验到7的美吗？数学家Sfard 说一个数字既是一个过程也是一个独立的对象，还是一种关系！您明白吗？

到底如何认识7呢？我们先分析它的三视角结构。

02 三视角分析数字7

1.对比视角告诉我们7的本质是什么：就是7成为他自身的“身份证”。

数学上说7代表着一些相同的存在体的集合，可以是看见的和看不见的；可以是物质的，也可以是观念性的。比如7个西红柿，7个中国人，7个中文字，7个圆的特性，7个数学定义，等等。这里的相等是角度性的，或说从某个性质来看他们相同；不是说两个东西完全相等，因为任何两个事物都具有不同性的。即使是两个电子，或两个光子，事实上他们都不是完全相同的。所以当我们说7个西红柿时，我们是从西红柿的固有属性，就是西红柿的本质视角来说他们是相同的。

人们在研究这些包含有“相同的事物”的集合，比如集合A里X个苹果，B里有Y个梨。人们发现这些集合有一个共性，就是这些集合之间可以建立彼此——对应的关系。然后我们把这种对应关系或共性，定义为同一个数目，比如，这个数叫7。或者说，在很多的这样的集合里，有些集合有共性，就是能——对应；而且每一个集合都可以找到和它——对应的其他的集合。这样，这些彼此对应的集合就有一个共性。把这个共性定义为一个概念，就叫做一个数字，比如7。这里我们使用十进制。它描述的就是集合的元素的多少。

如果，我们使用二进制(0,1两个符号)，那么这个共性，比如是7，就会被记写成111；如果我们使用三进制(0, 1, 2三个符号)，它就是21；如果我们使用A,B,C,D,E来代表五进制，那么这个共性就可以定义为BC。所以7这个符号不是本质的，本质是这些集合们，他们有一个共性，这个共性就是集合里的元素之间可以彼此一一对应。比如，袋子A里有一些苹果，袋子B里有一些书。如果我们能把书和苹果一一对应起来，那么我们就说两个袋子里具有相同多的物体。这两个一些它们具有共性，就是可以一一对应。这个就是我们衡量两个集合里的元素的个数是否相同的定义。对于无穷大，比如自然数的个数和有理数的个数是否一样多呢？我们也是用这个一一对应来研究的。这就是7的对比/本质视角。这个共性，就是集合的元素的一一对应性。我们应该引导孩子自己去探索发现这个一一对应性。这个一一对应告诉孩子什么叫做数目相等和不相等。

要认识本质视角，我们还要采用对比的方法。就是我们要比较7和6，7和5，7和1等等。要让孩子去发现：我们不能把7个苹果和5个梨去一一对应。只有在对比中，孩子才能真正明白7的内在含义和7与其他数字的不同是什么意思。当然这个认识过程是漫长的，很多孩子要好几年的时间。很多人可能一生都不明白上面的意思。这个一一对应过程也就是孩子数数的过程。但是大部分孩子学习数数的过程都是有认识不完整的问题。这会造成很多孩子的数学学习困难。对数的正确认识是整个数学的最核心的根基。

2.变化的视角说的是：这样的具有7个相同性质的元素的集合体有很多，就是7的本质的具体表现有很多，且有不同性。

基本上，在大自然和历史中，我们能叙说和定义的任何事物都可以用7来描述。但是，我们不能说7个东西，因为我们无法来定义东西。同样，对于人本哲学上的存在，我们也无法定义。我们不可能定义一个普遍概念，它能包括任何事物；我们也不能定义一个无所不包的范畴。

变化的视角指7的本质概念的具体应用。孩子们需要不断地去发现事物之间的共性，才能更好地明白数字的含义。发现共性和差异性几乎等同于认知世界的全部任务。所以中文的智力是指知道和看见的能力，什么叫做看见一个事物呢，就是将它从其他事物中分别出来，但是也要发现它和其他事物的共性。中文是从认知的结果视角来说的。那么英文呢？Intellect=choose between，就是在两者中进行选择，就是区分，其中包括发现起共性和差异性。所有科学，包括人文和自然科学都是干一个区分的事情。显然，英文是从过程的角度来定义的。

3.分布的视角言说7和其他数字和其他数学对象的关系，或者说7代表的这些集合，和不能与7代表的集合进行——对应的集合的关系。

比如，7比6多一个，就是 $7=6+1$ ；从对应关系来说，就是一一对应之后，7的集合里面会比6的集合多一个。分布的视角说的是7和其他数字的普遍联系，或者说7的重要性的体现。7本身是无价值的，如果他不和其他数字发生关系。所以，我们有7和8的关系：大小关系，加法关系，乘法关系，很多很多。

分布的视角其实是把7已经看成一个独立的个体，把它的过程性，就是一一对应性封装起来了。然后，研究这个个体和其他个体的关系，就是普遍联系性。这个封装的过程是需要很长时间的。比如很多孩子，你要他做 $7+3$ ，他会这样在心里数：1，2，3，4，5，6，7，然后是8，9，10。结果是10。你会发现，他此时把7还是理解成前面的对比本质视角里的一一对应，就是从1数到7的过程。他还没有将这个过程对象化。如何从过程

尽快过渡到对象阶段呢。这是一个很有意思的难题。从三视角理论来说，就是要在分布的视角上进行多次训练和反思。

完成了以上的三个视角的分析了，我们就可以简单地介绍如何学习数字比如7了。

03 三视角学习数字的基本目标

学习数字，其实就是通常我们说的如何学习数数。很多家长一定认为：孩子只要会从0，1，.....一直数到10就是学会了10以内的数数了。从我们的三视角分析来看，这是一个错误的认识。因为很多孩子基本上不明白数字的意义。在他们的大脑里，0到10只是一连串的符号，彼此相连。比如，2这个符号在3之前，8在7之后而已。这样

造成对 $7+8=15$ 的认识也是符号7,根着符号+, 再是符号8, 然后是= 和符号15。这样的学习, 实质是单独的记忆, 小学一二年级还可以, 到了初中就很受苦了, 高中就基本上要放弃了。

没有理解的学习, 储藏在大脑中的信息是孤立的, 没有和现有的知识系统结构相连, 记忆是痛苦的, 需要不断地重复。所以大部分孩子对数学是没有兴趣的, 更无法发现数学的美和善。这种痛苦, 是从学数字的时候就埋下了种子。一个数字, 比如7, 它是很美的。不是说这个符号很美, 而是它的内容和本质是很美的, 它刻画了世界的组织结构的美。

最基本的数数学习要求有下列几点最基本的认识目标:

1. 当你问到孩子一个数字,比如7, 是什么意思的时候, 孩子要能告诉你, 它是表示7个苹果, 7本书, 7天, 等等。当他看到7个相同的东西的时候, 他要能告诉你, 那儿有7个什么。还有, 他要明白当袋子里有3个梨和4个桃的时候, 他应该知道那不是7个梨也不是7个桃。当然你不能要求他说7个水果, 因为他可能还不明白水果和

梨的关系。还有他要有应用‘7’的能力：孩子要能使用数字，比如你要孩子拿7个椅子过来，要他拿7张纸和7瓶水，他都能很好完成。

2. 此时你要问孩子，这个7个到底是多少呢？他要知道，7个，是在1个的上面再加一个，再加一个，.....就是他要明白分布的视角。或者说，孩子要能明白7是从1，不断递增上来的。他更要明白，7和其他数的关系：大小，相差多少，比如，7比6多1，7比8少1，就是数与数之间的关系要清楚。当然他们不必明白7和4的多少比较关系，但是要知道7比4大。这是我们以后学减法和加法要知道的。反过来也是，6比7少1。孩子要明白，每一个数字的前面是谁，后面是谁。最好能明白7的前面的两个数和后面的两个数是谁？就是要知道，7的前面有6和5，后面有6和5。

其实上面的最基本的要求就是三视角的知识图式的最基本部分。大家一定要切记：仅仅告诉孩子7表示7个苹果，或说7个相同的东西，孩子是不能明白的。他只是记住你的话，应用的时候，就是重复你的话而已。

我们来分析一般家长教育孩子学习数字的方法和毛病，再来介绍三视角学习数字方法。（请看丹德公众号分享的文章：如何正确启蒙孩子的数学(核心部分)以及如何正确启蒙孩子的数学（第二部分））

04 传统的家长如何教孩子学数数及其毛病和患处分析

一般的孩子学习数字分三步：

a. 先是孩子学习0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 几个数字，形成一个序列。有的用儿歌，这样孩子就会不那么痛苦。有的是和孩子在生活里慢慢地学会，比如一起上楼梯，一边爬，一边数，不知不觉，孩子会唱1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10这个歌了。可以说这是一个有顺序的序列在孩子的心中。这就是一个10个符号的序列。孩子使用记忆将这些对他们看起来毫无意义的符号记在心中。有的孩子喜欢，有的就痛苦。总之，这是完全的记忆。比较好一点的还会注意将背诵和具体的有序活动对应起来。大部分家长是和孩子在家里不断地机械地重复。

b. 然后，就是将这个序列和实物的集合的元素——对应活动。一般的方法是：和孩子一起数比如苹果的个数，爸爸拿一个苹果，就说1，再拿一个说2，继续是3, 4, 5,孩子就学着爸爸的‘——对应’活动，也慢慢地学会‘——对应’，比如数家里的人：爸爸1，妈妈2，哥哥3，姐姐4，爷爷5，我自己6。然后也是照着爸爸说，总共6个人。大部分孩子的学数字的过程几乎全部是记忆和模仿。这种形式要重复3到4年才能很熟练。然后到了学10, 11，以上就又不会了。因为毫无数字的本质理解，当然不会自然地19过渡到20，也不会从99过渡到100。记得我儿子学习数数的时候，我是告诉他要自己找到规律，然后他会从19到20，然后29到30，一直到99。一样地，他也只是记忆而已。这种学习方法造成很多孩子很难理解为何最后那个数字就是表示物体的总数。往往很多孩子以为最后那个物体就是最后那个数字。他们会把数字和一个一个物体——对应起来的。

c. 孩子们会使用一一对应的方法将某一集合里的元素比如盒子里的珍珠和心里的1, 2, 3, 4, 5,的数的集合进行有序的一一对应。然后把最后一个叫定义为总数。在这个一一对应过程里, 几乎没有理解。完全就是一天一天的反复记忆和训练。很多孩子就是在这种训练里失去了对数学的兴趣。很多孩子, 从小是因为被迫去不断地重复练习。因为没有理解, 实际上孩子对数字和数字之间的关系也是不懂的。当然这些数字是如何来的也是不懂的。

感谢您的阅读, 对三视角智慧感兴趣想参加学习的朋友请添加我的微信